2. Klausur HMII 10. 10. 2003

Bitte die gestellten Fragen beantworten. / Start und erste Versuche, elementare Zwischenrechnungen u.U. erst als Konzept, dann konzentriert kondensierte Reinschrift. Legen Sie Wert darauf, eine korrekte Argumentation und Antwort zu geben. D.h. weder "besonders lang" noch "triviale Zwischenschritte erläutern". Sinnvolle Kontrollen und Zusatzüberlegungen ergeben zusätzliche Punkte.

■ 1) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Determinante

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Mit der üblichen (möglichst effizient durchzuführenden) Rechnung
b) Über die äußere Algebra.

■ 2) Es sei V=V_0^4 der Konfigurationsraum der Relativitätstheorie mit dem Minkowskiskalarprodukt g. Darin sei $e_0, ..e_3$ ein Sylvesterbasis mit $e_0^2 = 1$ und $e_i^2 = -1$. Weiter sei L die beschreibende Matrix einer speziellen Lorentztransformation in 1-Richtung.

a) Geben Sie L an.

b) Sei jetzt F=$\Sigma e_\alpha \otimes e_\beta F^{\alpha\beta} \in V \otimes V$. Wie transformieren sich die Komponenten von F unter der Lorentztransformation L? Geben Sie das im Indexkalkül an und formulieren Sie so um, dass ein Matrixprodukt entsteht.

c) Setzen Sie F jetzt wie folgt an:

$$(F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im alten System sei $\vec{B} = \vec{0}$, also

$$(F_A^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -E_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Was ergibt sich als Resultat der Lorentztrasformation? D.h. wie sieht ($F_N^{\gamma\delta}$) aus? Was haben Sie hiermit physikalisch gezeigt?

■ 3) *Kürzungsregel:* Es sei S ein glattes Skalarfeld V→ $\mathbb{R}$, wobei V endlichdimensionaler euklidischer Raum sein soll. Wir bilden die zugehörige Tangentenzerlegung

$$s(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) = s(\vec{x}_0) + Ds(\vec{x}_0).\Delta\vec{x} + ||\Delta\vec{x}||R_s(\vec{x}_0, \Delta\vec{x}).$$

Ein erster wichtiger Schritt der Ableitungstheorie ist der Nachweis der Eindeutigkeit dieser Zerlegung. Man kann nicht mehr wie im eindimensionalen Fall durch $\Delta\vec{x}$ dividieren, statt dessen benötigt man die Kürzungsregel. Führen Sie den Beweis. ("Angenommen man hat 2 Zerlegungen...").

■ 4) Sei V n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Weiter sei e eine Basis von V. (e_i die Basis, e^i zugehörige Dualbasis). Mit Hilfe der Fundamentalidentität kann man eine beliebige Bilinearform jetzt mit einer n×n-Matrix identifizieren. In Tensorschreibweise

$$B = \Sigma e^i \otimes e^k B_{ik} \quad \text{wobei} \quad B_{ik} = B(e_i, e_k)$$

Angenommen Sie kennen die Matrix $B^e = (B_{ik})$.

a) Wie erkennt man leicht mit Hilfe von B^e, ob die Bilinearform B symmetrisch ist? Ob B ausgeartet ist?

b) Kann man auch direkt erkennen, ob B positiv definit ist? Formulieren Sie eine naheliegende notwendige Bedingung und begründen Sie, dass diese nicht hinreichend sein kann.

c)Welche Antwort gibt die Eigenwerttheorie auf die in b) gestellte Frage?

■ 5) Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grade höchstens 3. D.h. p$\in \mathcal{P}_3$ hat die folgende Form p(x)=$\Sigma_{k=0}^{3} a_k x^k$. Wir setzen

$$S(p,q) = p(0)q(0) + p'(1)q'(1).$$

Das erklärt eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{P}_3$.

a) Wie sieht die beschreibende Matrix S^h von S bezüglich der Basis (h_0, h_1, h_2, h_3) aus?

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte dieser Matrix S^h.

c) Die Geometrie ist ausgeartet. Bestimmen Sie das Radikal von $\mathcal{P}_3$.

■ 6) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = (\vec{a}\cdot\vec{x})^2(\vec{a}\times\vec{x})$ ein Vektorfeld auf dem V_0^3 mit $\vec{a}\in V_0^3$. Es soll rot$\vec{v}(\vec{x}) = \left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)(\vec{x})$ bestimmt werden.

Gehen Sie dazu wir folgt vor:

a) Formulieren und beweisen Sie eine Ableitungsregel für rot(s$\vec{w}$) $= \vec{\nabla}\times(s\vec{w})$, wobei s glattes Skalarfeld und $\vec{w}$ glattes Vektorfeld ist. Der Beweis soll mit Hilfe des Indexkalküls erfolgen.

b) Wenden Sie a) an um damit rot$\vec{v}$ zu bestimmen.

c) Führen Sie dann ein günstiges (!) Koordinatensystem K ein, um die Rotation erneut über eine Koordinatenrechnung zu bestimmen: $(\text{rot}\vec{v}(\vec{x}))^K = ...$

■ 7) Es sei Q=($\mathbb{R}^2, (x_1,x_2)\mapsto x_1^2+x_2^2+4x_1x_2, \mathbb{R}$) eine quadratische Form.

a) Geben Sie die zugehörige symmetrische Bilinearform S_Q an. Sei M die beschreibende Matrix von S_Q bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^2$.

b) Was kann man vorab über das zu S gehörige Eigenwertproblem sagen?

c) Bestimmen Sie das Spektrum von S sowei zwei Eigenwertbasen. Die erste soll eine Orthonormalbasis sein, die zweite orthogonal, aber nicht orthonormal.

d) Bilden Sie die zu den beiden (neuen) Basen aus c) gehörigen Transformationsmatrizen U und V und berechnen Sie USU^{-1} sowie VSV^{-1}. Erklären Sie den Unterschied der Resultate.

■ 8) Im dreidimensionalen euklidischen V_0^3 ist der Begriff der Isometrie anschaulich eng an die Bewegung (Drehung) eines **starren** Körpers gekoppelt. D.h. insbesondere: Die Bewegung eines Punktes außerhalb der Drehachse legt "starr" die Bewegung **aller** übrigen Punkte fest. Wie ist das im euklidischen V_0^4? Gehen Sie das Problem wie folgt an: Sie kennen die ebenen Drehmatrizen genau. Basteln Sie sich daraus Isometrien des V_0^4, die die Frage unmittelbar beantworten. (Zu zeigen ist: Es liegen Isometrien vor. Es ist nicht zu untersuchen, ob das alle Isometrien des V_0^4 sind.)

Bitte die gestellten Fragen beantworten. / Start und erste Versuche, elementare Zwischenrechnungen u.U. erst als Konzept, dann konzentriert kondensierte Reinschrift. Legen Sie Wert darauf, eine korrekte Argumentation und Antwort zu geben. D.h. weder "besonders lang" noch "triviale Zwischenschritte erläutern". Sinnvolle Kontrollen und Zusatzüberlegungen ergeben zusätzliche Punkte.

Aufgaben und Lösungen

■ 1) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Determinante

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Mit der üblichen (möglichst effizient durchzuführenden) Rechnung
b) Über die äußere Algebra.

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -7 & -12 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -7 & -12 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(-1)\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -8 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} S_1 \wedge S_2 &= (-e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4) \wedge (e_1 + e_2 + 2e_3 + 2e_4) \\ &= e_{12}(-1-2) + e_{13}(-6) + e_{14}(-8) + e_{23}1 + e_{24}0 + e_{34}(-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 \wedge S_4 &= (2e_1 + 3e_2 - 1e_3 - 2e_4) \wedge (4e_1 + 5e_2 - 2e_3 - 4e_4) \\ & e_{12}(-2) + e_{13}(0) + e_{14}(0) + e_{23}(-1) + e_{24}(-2) + e_{34}(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S_1 \wedge S_2) \wedge S_3 \wedge S_4 &= e_{1234}(+(-2)(-2) + (-8)(-1) - (-6)(-2)) \\ &= 0e_{1234} \end{aligned}$$

Häufig viel zu lange Rechnungen !

■ 2) Es sei V=V_0^4 der Konfigurationsraum der Relativitätstheorie mit dem Minkowskiskalarprodukt g. Darin sei $e_0, ..e_3$ ein Sylvesterbasis mit $e_0^2 = 1$ und $e_i^2 = -1$. Weiter sei L die beschreibende Matrix einer speziellen Lorentztransformation in 1-Richtung.

a) Geben Sie L an. ▼

$$L = \gamma\begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\alpha & -sh\alpha & 0 & 0 \\ -sh\alpha & ch\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Vorzeichen wurde in Kap. 10 begründet und war nur abzuschreiben!

b) Sei jetzt F=$\Sigma e_\alpha \otimes e_\beta F^{\alpha\beta} \in V \otimes V$. Wie transformieren sich die Komponenten von F unter der Lorentztransformation L? Geben Sie das im Indexkalkül an und formulieren Sie so um, dass ein Matrixprodukt entsteht.

▼ Tensoriell: $F_N^{\alpha\beta} = L^{\alpha.}_{.\mu.} T^{\beta.}_{.\nu} L^{\mu\nu}_A$ D.h als Matrixprodukt $\boxed{F_N = LF_A\,{}^tL = LF_AL}$ da L symmetrisch ist. (Das sollte einfach hingeschrieben werden!)

c) Setzen Sie F jetzt wie folgt an:

$$(F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im alten System sei $\vec{B} = \vec{0}$, also

$$(F_A^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -E_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Was ergibt sich als Resultat der Lorentztransformation? D.h. wie sieht $(F_N^{\gamma\delta})$ aus? Was haben Sie hiermit physikalisch gezeigt? ▼

$$\begin{aligned} F_N &= LF_AL = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -E_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\beta^2\gamma^2E_1 + \gamma^2E_1 & \gamma E_2 & \gamma E_3 \\ -\gamma^2E_1 + \beta^2\gamma^2E_1 & 0 & -\beta\gamma E_2 & -\beta\gamma E_3 \\ -\gamma E_2 & \beta\gamma E_2 & 0 & 0 \\ -\gamma E_3 & \beta\gamma E_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & E_1 & \gamma E_2 & \gamma E_3 \\ E_1 & 0 & -\beta\gamma E_2 & -\beta\gamma E_3 \\ -\gamma E_2 & \beta\gamma E_2 & 0 & 0 \\ -\gamma E_3 & \beta\gamma E_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$ ist Beachte: $\vec{B}^N = \begin{pmatrix} B_1^N \\ B_2^N \\ B_N^3 \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1^A \\ E_2^A \\ E_3^A \end{pmatrix} = -\frac{\gamma}{c}\vec{v} \times \vec{E}^A.$

Liegt in A ein reines $\vec{E}$-Feld vor, dann beobachtet man trotzdem in N ein $\vec{B}$-Feld der berechneten Art. Es steht senkrecht zur Richtung der relativen Bewegung. Man verifiziert ubrigens leicht die folgende Invarianz $\left(\vec{E}^A\right)^2 - (\vec{B}^A)^2 = (\vec{E}^N)^2 - (\vec{B}^N)^2$ mit $\vec{B}^A = \vec{0}$

■ 3) *Kürzungsregel:* Es sei S ein glattes Skalarfeld V→ $\mathbb{R}$, wobei V endlichdimensionaler euklidischer Raum sein soll. Wir bilden die zugehörige Tangentenzerlegung

$$s(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) = s(\vec{x}_0) + Ds(\vec{x}_0).\Delta\vec{x} + ||\Delta\vec{x}||\vec{R}_s(\vec{x}_0, \Delta\vec{x}).$$

Ein erster wichtiger Schritt der Ableitungstheorie ist der Nachweis der Eindeutigkeit dieser Zerlegung. Man kann nicht mehr wie im eindimensionalen Fall durch $\Delta\vec{x}$ dividieren, statt dessen benötigt man die Kürzungsregel. Führen Sie den Beweis. ("Angenommen man hat 2 Zerlegungen...").

▼ Hier wurde eine **kurze eigenständige Argumentation** verlangt! (Vorkurs und Kap.6)

Zur Erinnnerung: Im euklidischen Raum gilt für die totale Ableitung Ds($\vec{x}_0$).$\Delta\vec{x} = (grads(\vec{x}_0)) \cdot \Delta\vec{x}$.

Angenommen man hat zwei Zerlegungen der gesuchten Art. Dann gibt Subtraktion und die Linearität der totalen Ableitung

$$0 = (\vec{m}_1 - \vec{m}_2) \cdot \Delta\vec{x} + ||\Delta\vec{x}||(\vec{R}_1(\vec{x}_0, \Delta\vec{x}) - \vec{R}_2(\vec{x}_0, \Delta\vec{x}))$$

Diese Gleichung dividieren wir durch $||\Delta\vec{x}||$

$$0 = (\vec{m}_1 - \vec{m}_2) \cdot \frac{\Delta\vec{x}}{||\Delta\vec{x}||} + (\vec{R}_1(\vec{x}_0, \Delta\vec{x}) - \vec{R}_2(\vec{x}_0, \Delta\vec{x}))$$

Nun lassen wir $||\Delta x||$ bei fester Richtung nach Null gehen. Restermeigenschaft und Grenzwertsätze ergeben

$$(\vec{m}_1 - \vec{m}_2) \cdot \vec{e} = 0 \quad \text{für alle Einheitsvektoren } \vec{e} \text{ von V.}$$

Die verschärfte Kürzungsregel besagte aber, dass es genügt, wenn alle Skalarprodukte mit den Vektoren einer Basis Null ergeben. Wähle etwa eine Orthonormalbasis. Also ist $\vec{m}_1 = \vec{m}_2$. Damit folgt die Eindeutigkeit der Tangentenzerlegung!

■ 4) Sei V n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Weiter sei e eine Basis von V. (e_i die Basis, e^i zugehörige Dualbasis). Mit Hilfe der Fundamentalidentität kann man eine beliebige Bilinearform jetzt mit einer n×n-Matrix identifizieren. In Tensorschreibweise

$$B = \Sigma e^i \otimes e^k B_{ik} \quad \text{wobei} \quad \mathrm{B}_{ik} = B(e_i, e_k)$$

Angenommen Sie kennen die Matrix $\mathrm{B}^e = (\mathrm{B}_{ik})$.

a) Wie erkennt man leicht mit Hilfe von B^e, ob die Bilinearform B symmetrisch ist? Ob B ausgeartet ist?

▼ Ist B^e symetrisch, so ist B symmetrisch. Folgt aus der Fundamentalidentität. $\det \mathrm{B}^e \neq 0$ ist äquivalent zu V nicht ausgeartet.▲

b) Kann man auch direkt erkennen, ob B positiv definit ist? Formulieren Sie eine naheliegende notwendige Bedingung und begründen Sie, dass diese nicht hinreichend sein kann. Vgl. etwa. Kap.4.3b speziell (4.3.17) sowie Kap.10 (1.1.4-5) und (3.3.36).

▼ Nein, leider findet man keine einfache zu positiv definit gleichwertige Bedingung. $\det \mathrm{B}^e > 0$ und "alle Diagonalelemente von $\mathrm{B}^e > 0$" sind mögliche notwendige Bedingungen. (Achtung ≥ 0 ist faslch!). Man findet leicht ein Gegenbeispiel eines B^e mit $\mathrm{B}^e_{ik} > 0$ für alle Komponenten, aber B nicht positiv definit! ▲

c)Welche Antwort gibt die Eigenwerttheorie auf die in b) gestellte Frage?

▼ Da B^e symmetrisch ist, müssen alle Eigenwerte λ_i positiv sei. Das reicht. Dann haben wir in einer Eigenwertbasis $\mathrm{B}(\vec{x},\vec{x}) = \Sigma\lambda_i x_i^2 > 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$. (Hauptachsenform von B. Kap. 12.2.3)

■ 5) Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grade höchstens 3. D.h. $p \in \mathcal{P}_3$ hat die folgende Form $p(x) = \Sigma_{k=0}^3 a_k x^k$. Wir setzen

$$S(p,q) = p(0)q(0) + p'(1)q'(1).$$

Das erklärt eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{P}_3$.

a) Wie sieht die beschreibende Matrix S^h von S bezüglich der Basis (h_0, h_1, h_2, h_3) aus?

▼ Man erhält ohne Probleme

$$\mathrm{S}^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{Etwa} \\ \mathrm{S}(h_1, h_2) = S(h_2, h_1) = 2 \\ \mathrm{S}(h_3, h_3) = 9 \end{array}$$

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte dieser Matrix S^h.

▼ Man findet folgende charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} \chi_S(X) &= X^4 - 15X^3 + 14X^2 = X^2(X^2 - 15X + 14) = X^2(X-1)(X-14) \\ Sp(S^h) &= \{0, 1, 14\} \qquad \text{Damit folgt } \dim \mathrm{Kern} \mathrm{S}^h = 2. \end{aligned}$$

c) Die Geometrie ist ausgeartet. Bestimmen Sie das Radikal von $\mathcal{P}_3$.

▼ Sei $r \in Rad(\mathcal{P}_3)$. D.h. S(p,r)=0 für alle $p \in \mathcal{P}_3$. Sei E eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$, die S mit diagonalisiert. E_1 und E_2 sollen zum Eigenwert 0 gehören. Sei $r^E \in Kern S^h = \mathcal{E}(0)$ und $r = \Sigma_{i=0}^3 E_i r_i \in \mathcal{P}_3$. Beachten Sie r ist abstrakter Vektor und r^E der zugehörige Koordinatenvektor. Wegen

$$S(p,r) = \Sigma\lambda_i p_i r_i = 1p_3r_3 + 14p_4r_4$$

Damit das für alle p Null ergibt, muss $r_3 = r_4 = 0$ sein. Wir sehen: RadV($\mathcal{P}_3$) wird durch KernS^h bestimmt. Inspektion der Matrix zeigt, dass man den Kern aus $1r_1 = 0$ und $0r_1+1r_2+2r_3+3r_4 = 0$ erhält. D.h. etwa

$$\begin{aligned} KernS^h &= \{\vec{r} \in \mathbb{R}^4 | \vec{r}^K = (0, -2r_3 - 3r_4, r_3, r_4)\} \\ Rad(\mathcal{P}_3) &= \{p \in \mathcal{P}_3 \mid p = r_4 h_3 + r_3 h_2 - (2r_3 + 3r_4)h_1, \quad r_3, r_4 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

In der Regel wurde von Ihnen **nicht** zwischen dem Vektor r$\in \mathcal{P}_3$ und dem Koordinatenvektor $r^E \in \mathbb{R}^4_E$ bzw. $r^K \in \mathbb{R}^4_K$ (K kanonische Basis) unterschieden. Das sollte man aber tun!

■ 6) Es sei $\vec{v}(\vec{x}) = (\vec{a} \cdot \vec{x})^2(\vec{a} \times \vec{x})$ ein Vektorfeld auf dem V_0^3 mit $\vec{a} \in V_0^3$. Es soll rot$\vec{v}(\vec{x}) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)(\vec{x})$ bestimmt werden.

Gehen Sie dazu wir folgt vor:

a) Formulieren und beweisen Sie eine Ableitungsregel für rot$(s\vec{w}) = \vec{\nabla} \times (s\vec{w})$, wobei s glattes Skalarfeld und $\vec{w}$ glattes Vektorfeld ist. Der Beweis soll mit Hilfe des Indexkalküls erfolgen.

$$rot(s\vec{w}) = \vec{\nabla} \times (s\vec{w}) = (grads) \times \vec{w} + srot\vec{w}$$

b) Wenden Sie a) an um damit rot$\vec{v}$ zu bestimmen.

Es gilt $\boxed{\mathrm{rot}(\vec{a} \times \vec{x}) = 2\vec{a}}$ und $\boxed{\mathrm{grad}(\vec{a} \cdot \vec{x})^2 = 2(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a}}$ Weiter ist $\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} rot\vec{v} &= (2(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{x})^2\,(2\vec{a}) \\ &= 2(\vec{a} \cdot \vec{x})\left[(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a} - \vec{a}^2\vec{x}\right] + 2(\vec{a} \cdot \vec{x})^2\vec{a} \\ &= 4(\vec{a} \cdot \vec{x})^2\vec{a} - 2\vec{a}^2(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{x} \end{aligned}$$

c) Führen Sie dann ein günstiges (!) Koordinatensystem K ein, um die Rotation erneut über eine Koordinatenrechnung zu bestimmen: $(\mathrm{rot}\vec{v}(\vec{x}))^K = ...$

$$\vec{a}^K = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{gibt} \quad (\mathrm{rot}\vec{v}(\vec{x}))^K = \begin{pmatrix} 4a^3x^2 - 2a^3x^2 \\ -2a^3y \\ -2a^3z \end{pmatrix} = 2a^3x \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

■ 7) Es sei Q=$(\mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2, \mathbb{R})$ eine quadratische Form.

a) Geben Sie die zugehörige symmetrische Bilinearform S_Q an. Sei M die beschreibende Matrix von S_Q bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^2$. ▼

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Was kann man vorab über das zu M gehörige Eigenwertproblem sagen? ▼

M ist symmetrisch, daher diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Man kann eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren finden, welche die quadratische Form mitdiagonalisiert. Wieder Kap. 12.2.3.

c) Bestimmen Sie das Spektrum von M sowie zwei Eigenwertbasen. Die erste soll eine Orthonormalbasis sein, die zweite orthogonal, aber nicht orthonormal. ▼

$$\begin{aligned} Sp(M) &= \{-1, 3\} \quad \vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \vec{F}_1 &= \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \quad \mathrm{V}^{-1} = \mathrm{V}^{-1}(\mathrm{a,b}) = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann ist E eine Orthonormalbasis. Wogegen F i.a. eine Orthogonalbasis ist, die für a=b=$\frac{1}{\sqrt{2}}$ in E übergeht.

d) Bilden Sie die zu den beiden (neuen) Basen aus c) gehörigen Transformationsmatrizen U und V und berechnen Sie UM ${}^tU$ sowie VM ${}^tV$. Erklären Sie den Unterschied der Resultate.

▼ Bildet man UMU^{-1} und VMV^{-1} , so kommt natürlich in beiden Fällen die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ heraus, wie einige korrekt berechneten. Wählt man dagegen das korrekte Transformationsverhalten eines Skalarproduktes, also ${}^tU^{-1}MU^{-1}$ und ${}^tV^{-1}MV^{-1}$. so ergeben sich Unterschiede. Zunächst folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{V} = \frac{1}{2ab}\begin{pmatrix} b & -b \\ a & a \end{pmatrix} \\ \mathrm{U}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{V}^{-1}\text{=}\mathrm{V}^{-1}(\mathrm{a,b})\text{=}\begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^tU^{-1}M\,U^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ {}^tV^{-1}M\,V^{-1} &= \begin{pmatrix} a & -a \\ b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a^2 & 0 \\ 0 & 6b^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

:

■ 8) Im dreidimensionalen euklidischen V_0^3 ist der Begriff der Isometrie anschaulich eng an die Bewegung (Drehung) eines **starren** Körpers gekoppelt. D.h. insbesondere: Die Bewegung eines Punktes außerhalb der Drehachse legt "starr" die Bewegung **aller** übrigen Punkte fest. Wie ist das im euklidischen V_0^4? Gehen Sie das Problem wie folgt an: Sie kennen die ebenen Drehmatrizen genau. Basteln Sie sich daraus Isometrien des V_0^4, die die Frage unmittelbar beantworten. (Zu zeigen ist: Es liegen Isometrien vor. Es ist nicht zu untersuchen, ob das alle Isometrien des V_0^4 sind.)

▼ Die folgende Matrix liefert offensichtlich eine Isometrie,da sie Orthonormalbasen in solche überführt

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ & & \cos\beta & -\sin\beta \\ & & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Da α und β voneinander unabhängig sind, bedeutet dass, dass man in den beiden Ebenen unabhängige Drehungen ausführen kann. LOder dreht man den einen Teil der Konfiguration, so wird dadurch die Bewegung des anderen nicht fixiert, Das ist völlig anders als man es vom starren Körper gewöhnt ist. Diese Art Starrheit ist somit nicht übertragbar. Es sei daran erinnert, dass dazu korrespondierend zum $\mathbb{R}^4$ unzerlegbare Zweivektoren bzw. Tensoren auftreten.