Fragen zur Klausurvorbereitung (17.4.)
1. Teil: Fragen zu Kap. 6.1 mit späteren zugehörigen Resultaten aus 6.3
Fragen zu Kap. 6.2 (Ab Frage 8)
Weitere Teile folgen

1) Je ein Beispiel einer einfachen, aber nicht trivialen Abbildung des folgenden Typs:
Bahnkurve / Skalarfeld / Vektorfeld / Projektion / Injektion
Dazu jeweils das totale Differential, die totale Ableitung und die herkömmliche Darstellung der Ableitung angeben. Jede Abbildung einmal in Koordinatenform und einmal in absoluter Form angeben!

Antwortbeispiel *Skalarfeld.* $\boxed{\mathrm{s}(\vec{x}) = (\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}^2}$. (Absolute Form.) Kart. Koordinatensystem K mit $\vec{a}^K = a\vec{e}_3^K$ gibt die Koordinatenform $\mathrm{s}^K(x,y,z) = az(x^2+y^2+z^2)$. Das totale Differential ist ds$=(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})\vec{x}^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{x}\cdot\Delta\vec{x})$. Die totale Ableitung folgt zu

$$Ds(\vec{x}) : \Delta\vec{x} \mapsto (\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})\vec{x}^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{x}\cdot\Delta\vec{x}).$$

Die herkömmliche Darstellung ist die durch den Gradienten (ds$=grads(\vec{x})\cdot\Delta\vec{x}$) mit

$$grads(\vec{x}) = \vec{x}^2\vec{a} + 2(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}$$

2) (Kurze) anschauliche Verhaltensbeschreibung der Abbildung

$$\left(\mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x-y)^2 \\ (x+y)^2 \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2\right)$$

3) Sei V der Konfigurationsraum (Kap.1.1) und F$\subset V$ eine darin enthaltene glatte Figur. Was versteht man unter einer "Parametrisierung dieser Figur"?

4) Was versteht man unter einem "Basisfeld auf F über der Parametrisierung"? Beispiel etwa mit Hilfe räumlicher Polarkoordinaten angeben. Wie erhält man aus einer gegebenen Parametrisierungsabbildung ein derartiges Basisfeld. (**Die** geometrisch wichtige Konstruktion! Stichwort *partielle Ableitungen*). Welche Bedingung muss die Parametrisierungsabbildung erfüllen, damit man (in einem Punkt) tatsächlich eine Basis erhält?

5) Was versteht man unter "dem begleitende Zweibein einer ebenen Kurve"? Wie erhält man dieses Gebilde? Beispiel!. Welche Beziehung besteht zur Physik? (Zerlegung der Beschleunigung)

6) Es sei $\vec{\alpha} \mapsto \vec{x}(\vec{\alpha})$ eine Parametrisierung von V^3 und $\vec{\alpha} \mapsto e(\vec{\alpha}) = (\vec{e}_1(\alpha), \vec{e}_2(\vec{\alpha}), \vec{e}_3(\vec{\alpha}))$ ein kartesisches Basisfeld über der Parametrisierung. Auf V habe man ein Feld (V^3,$\vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x}), V^3$).$Weiter$ sei V euklidisch, d.h. man verfüge über das übliche Skalarprodukt. Dann kann man die Basisdarstellung von $\vec{F}(\vec{x})$ bezüglich e sofort angeben: $\vec{F}(\vec{x}) = ...$

a) Sie arbeiten mit räumlichen Polarkoordinaten. Wie sieht die Basisdarstellung von $\vec{F}$ dann für ein radiales Feld aus? Welche Symmetrieeigenschaft hat das folgende Feld:

$$\vec{F}^P(r,\theta,\varphi) = \vec{e}_\theta(r,\theta,\varphi)F_\theta(r,\theta)$$

7) Sei e ein kartesische Basis des V_0^3. Darin definieren wir die Parametrisierungsabbildung

$$(r,\alpha,h) \mapsto \vec{x}^K(r,\alpha,h) = \vec{e}_3 h + rh(\vec{e}_1\cos\alpha + \vec{e}_2\sin\alpha).$$

a) Geometrische Beschreibung? Was für Figuren erhält man durch Konstantsetzen von einem oder von 2 Parametern? Welcher Bereich des Raumes wird durch die Parametrisierung nicht oder nur über eine Grenzwertbildung erfaßt?

b) Bestimmen Sie das Feld $\partial(\vec{\alpha}) = (\vec{\partial}_r, \vec{\partial}_\alpha, \vec{\partial}_h)$. Für welchen Bereich ergibt das ein Basisfeld? Stehen die Basisvektoren aufeinander senkrecht? (Skalarprodukte berechnen!). Was für einen Tangentialraum erhält man beispielsweise mit $\vec{\partial}_\alpha, \vec{\partial}_h$?

8) Was ist ein "normierter Vektorraum"? Ein "Banachraum"? Wann konvergiert eine Folge von Vektoren absolut? Beispiele rekursiver Definition von Vektorfolgen mit Hilfe einer linearen Abbildung.

a) Sei V normiert und endlichdimensional. M:V$\to V$ sei linear mit Operatornorm $||\mathrm{M}||_{Op} = m$. Weiter sei $\vec{a}_0 \in V$ und $\vec{a}_n$ rekursiv definiert durch $\vec{a}_{n+1} = M.\vec{a}_n$. Zeigen Sie: Ist m<1, dann konvergiert $\vec{a}_n$ gegen den Nullvektor. Was gilt, wenn m>1 ist?

9) Gibt es bedingt konvergente Vektor**reihen**? (Beispiel). Was ist im Falle der absoluten Konvergens zusätzlich zu fordern?

10) S=$\Sigma_{n=2}^{\infty}\vec{a}_n$ mit $\vec{a}_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{2}{(n+1)^2}, \frac{3}{(n-1)^2})$. Konvergenz über die Supremumsnorm und über die $L^2 - Norm$ nachweisen. Können Sie den Grenzwert angeben?

11) $||\vec{x}||_{1/2} = \left(\Sigma_i \sqrt{|x_i|}\right)^2$ definiert keine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wie beweisen Sie das? Was genügt?

12) Wie verhält sich die Folge ($\mathbb{N}$,n$\mapsto e^{-n}(n!, n^2, e^n), \mathbb{R}^3$) für n$\rightarrow \infty$? Zwei Tendenzen "bekämpfen" sich. Wer gewinnt? Wie sieht das Resultat aus? (**Wissen**, kein neuer Beweis in Form von großen Abschätzungen)

13) Zeigen Sie: Sei V normierter Raum. Für jedes i$\in I$ sei A_i offene Teilmenge von V. Dann ist $\cup_{i\in I}A_i$ erneut offen.

(Zunächst müssen Sie sich an die Definition erinnern: A$\subset V$ offen heißt: Zu jedem x$\in A$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x) \subset A$ gilt.)

> Beweis: Definitionsgemäß ist zu zeigen: Für jeden Punkt x$\in \cup_{i\in I}A_i$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\boxed{U_\varepsilon(x) \subset \cup_{i\in I}A_i}$. Nun bedeutet x$\in \cup_{i\in I}A_i$ aber, dass es ein $i_0 \varepsilon I$ gibt, mit x$\in A_{i_0}$. (Explikation!). **Da $\mathbf{A}_{i_0}$ offen** ist, gibt es aber eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$, die ganz in A_{i_0} liegt. Diese Umgebung liegt dann aber auch in der Vereinigung der A_i, da ja $A_{i_0} \subset \cup_{i\in I}A_i$ gilt. Damit hat man die gewünschte Umgebung von x in $\cup_{i\in I}A_i$.

a) Ersetzt man "Vereinigung" durch "Durchschnitt", dann scheitert der annaloge Beweis an einer ganz bestimmten Stelle. Identifizieren Sie diese! Erst wenn man verlangt, dass I eine endliche Menge sein soll, kann man den Beweis erneut führen. Begründen Sie das! Formulieren Sie das Resultat schließlich ohne Einführung der Indexmenge I.

14) Was ist eine abgeschlossene Menge (eines normierten Raumes)?

15) Wann ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ kompakt? Welche beiden Eigenschaften müssen erfüllt sei? Welche Konsequenz hat Kompaktheit für Folgen?

16) Welcher Unterschied besteht zwischen *Berührungspunkt* und *Häufungspunkt ?*

a) V normierter Raum, $\vec{a} \in V$, und $\vec{r}$ ein Punkt mit $||\vec{r} - \vec{a}||$ =R>0. Geben Sie eine Folge von Vektoren aus der offenen Kugel $U_R(\vec{a})$ an, die gegen $\vec{r}$ konvergiert.

17) Die allgemeine Stetigkeitsdefinition und der Nachweis durch Angabe einer Strategiefunktion.Unterscheide: Stetig in x, stetig in D$\subset V$ und gleichmäßig stetig in D. Beispiele angeben können

18) Die **Grenzwertsätze für Stetigkeit** und ihre Anwendung. Etwa:

$$\vec{x} \mapsto \vec{a}e^{\vec{x}^2} + \frac{\vec{x}}{\vec{a}^2 + \vec{x}^2}$$

ist stetig, weil,..... (Überall? Gleichmäßig?)

18) Für welche Werte von α und β ist das folgende Skalarfeld im Ursprung des $\mathbb{R}^2$ stetig ergänzbar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2}$$

Hinweis: Zur Polardarstellung übergehen!

19) Welcher Unterschied besteht zwischen "Grenzwert der Quotienten" und "Quotient der Grenzwerte"?

Kap. 1.3 Tangentenzerlegung

(U.U. nochmals einschlägige Teile des Vorkursskriptes)

1) Das Begriffssystem an einem Beispiel konkretisieren. Etwa $\vec{F}(\vec{x}) = (\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{x}^2$.

- Hierfür vollständig angeben: Tangentenzerlegung, totale Ableitung, totales Differential, absoluter Fehler, Restterm, Tangentenapproximation, partielle Ableitung in Richtung der von $\vec{a}$ erzeugten Geraden, partielle Ableitung in Richtung der zu $\vec{a}$ senkrechten Ebene. Wie hängt $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x_1}(\vec{x})$ mit $D\vec{F}(\vec{x})$ zusammen?

- Nachweis der Restermeigenschaft für das Beispiel. (1. Denkfigur)
- Für welche $\Delta\vec{x}$ ist im Beispiel die Norm des absoluten Fehlers kleiner als $\alpha \times der$ Norm des Feldwertes ($0<\alpha < 1$)? Hierzu zumindest eine Formel herleiten, die sich per Computer graphisch auswerten läßt. Genügt es dazu, das Verhalten in einer Ebene zu betrachten?
-

2) Die Quantifizierung der totalen Ableitung. Die Jakobimatrix. Welche Zutaten werden benötigt, wenn man von der geometrischen Form der totalen Ableitung zur Hakobimatrix übergehen will?

- Es sei M=$\begin{pmatrix} x^2y & y^2-x \\ xy & y+x^2 \end{pmatrix}$. Also M:$\mathbb{R}^2 \to RMat_{\mathbb{R}}(2,2)$. Bilden Sie zunächst das totale Differential dM. Wählen Sie jetzt in beiden Räumen naheliegende Basen (Koordinatensystem K), und bestimmen Sie die Matrix $(DM(x,y))^K$. Sorgfältig die allgemeinen Definitionen anwenden. Dann ist das ganz leicht!
- "Eine Matrix (mit konstanten Komponenten) ist ihre eigene Quantifizierung". In welchem Sinne ist das richtig?
- Ableitungsregeln: Es seien $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei (in $\vec{x}_0$) differenzierbare Vektorfelder $V_0^3 \to V_0^3$. Leiten Sie die Ableitungsregel für das Vektorfeld $\vec{v}\times\vec{w}$ (Vektorprodukt) und $\vec{v}\cdot\vec{w}$ (Skalarprodukt) her und beweisen Sie diese durch Hinweis auf geeignet Grenzwertsätze. Arbeiten Sie mit dem totalen Differential!
- Kettenregel: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \left(\mathbb{R}^{2*}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-\alpha x^2 \\ y+\frac{1}{2\alpha}\ln|x| \end{pmatrix}, G\right) \\ \mathbb{R}^{2*} &= \{(x,y)|x>0\} \quad \text{und} \quad \text{G=Bild}\vec{f}. \end{aligned}$$

  Diese Abbildung ist invertierbar, aber die inverse Abbildung $\vec{g} = \vec{f}^{-1}$ läßt sich nicht explizit in Form eines analytischen Ausdrucks angeben. Wir interpretieren den x-y-Raum als unseren Konfigurationsraum. Dann ist $\vec{g}$ eine Parametrisierung des Raumes. Bestimmen Sie $\frac{\partial\vec{g}}{\partial u}$ und $\frac{\partial\vec{g}}{\partial v}$ als Konfigurationsraumfeld. (Hinweis: Kettenregel für $\vec{g}\circ\vec{f}$ nutzen.)

3) Die Bedeutung von Kern und Bild der totalen Ableitung! Wann ist der Schluss von der Rechnung auf die Geometrie zulässig? (Skriptumsbedingung!) / Was leistet der Dimensionssatz für Homomorphismen für die totale Ableitung?

a) Tangentialraum an die Niveaufläche von (x,y,z)$\mapsto x^4+y^4+z^4$ im Punkte $\vec{x}_0 = (1,2,3)$ bestimmen! (Dafür gibt es zwei Möglichkeiten!)

b) $\vec{w} = \left(\mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s\cos t \\ s\sin t \\ \cos s \end{pmatrix}, \mathbb{R}^3_K\right)$. Was für eine Figur stellt Bild$\vec{w}$ dar? Welche Symmetrie hat diese Figur? Bestimmen Sie das Tangentialraumbasisfeld ∂ für diese Abbildung und berechnen Sie damit einen Tangentialraum an Bild$\vec{w}$.

(4) Ein Computerprogramm konziperen, das für ein gegebenes Feld $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Basisfeld ∂ darstellt. Und ein anderes, das für ein Skalarfeld die Niveaukurven zeichnet und den Gradienten am Mausort darstellt

Kap. 1.4 Kurven

1) Bestimmen Sie die n-te Ableitung der Kurve $\vec{r} = \left(\mathbb{R}, t\mapsto\vec{r}(t), V_0^3\right)$ mit

$$\vec{r}(t) = \vec{a}te^{\alpha t} + \vec{b}\sin(\omega t) + \vec{c}\cos(\omega t)$$

. Wie sieht die Taylorentwicklung N-ter Ordnung von $\vec{r}$ um t=0 aus? Schreiben Sie die Integraldarstellung für den zugehörige Resterm auf? Konvergiert die Taylorreihe gegen $\vec{r}$? Wie steht es mit dem Konvergenzradius? (Eine typische Aufgabe, die den Beginn des Kapitels mit den späteren Resultaten verbindet.)

2) Jetzt sei $\vec{F}(\vec{x},t) = \vec{a}t + \vec{b}\vec{x}$ ein zeitabhängiges Kraftfeld. Wie groß ist die Arbeit, die man an einem Massenpunkt leisten muss, der auf der Bahn $\vec{r}$ in diesem Feld für $0 \leq t \leq T$ geführt wird? (Mindestens bis auf ein gewöhnliches Integral zurückführen!). Schreiben Sie dies Integral auch als den Wert approximierende Summe. (U.U. auch hier nochmals Integrationstechnik aus Vorkursskript!)

a) Unterschiedliche Typen von Kräften: Physikalische Feldkräfte, Zwangskräfte und Scheinkräfte. Wie entstehen Sie, Eigenschaften?

3) Wurzelkriterium und Quotientenkriterium für die Reihenkonvergenz tauchen in der Regel in zwei Formen auf: Für allgemeine Reihen und spezialisiert auf Potenzreihen. Vergleichen Sie beide Formen. Wie wendet man das Quotientenkriterium an, wenn eine Reihe der Form $\Sigma a_n x^{2n}$ vorliegt? Wie erhält man dann den Konvergenzradius?

4) V normierter Vektorraum. $\vec{a}_0 \in V$ gegeben. Setzen Sie rekursiv $\vec{a}_n(t) = \frac{t}{n}\vec{a}_{n-1}$ für n=1,2,....

Konvergiert $\Sigma\vec{a}_n(t)$? Wogegen? (Und denken Sie daran: Bereits Bewiesenes verwenden, nicht erneut ausführen!)

5) Geben Sie 10 weitere konvergente Reihenentwicklungen an, die man aus der geometrischen Reihe mit Hilfe der allgemeinen Resultate über Potenzreinen herleiten kann. (ln(1+x), atn(x), $1/(1+x^2)^2$ usw.....)

6) Die Regeln für die "Matrixexponentialfunktion".

7) Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum der reellen Polynome und D=$(\mathcal{P}, p \mapsto p', \mathcal{P})$ der lineare Ableitungsoperator. Also (Dp)(x)=p$'(x)$. Für t$\in \mathbb{R}$ bilden wir $T_t = e^{tD} = \Sigma \frac{t^n}{n!} D^n$. Das gibt

$$T_t p(x) = e^{tD} p(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n p(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} p(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} p^{(n)}(x) = p(x+t).$$

a) Die Argumentation enthält eine problematische, so nicht gerechtfertigte Stelle. Wo ist das, wo ist die Lücke in Form einer benötigten, aber fehlenden Voraussetzung?

b) Sieht man von dieser Lücke ab, sind die Rechnungen im Kasten begründbar. Analysieren Sie die einzelnen Schritte. Wieso kommt insbesondere p(x+t) heraus?

Kapitel 5 Lineare Gleichungssysteme

1) Eine reelle 3×3-Matrix M hat den Zeilenrang 2. Was läßt sich über den zugehörigen Lösungsraum (der homogenen Gleichung) aussagen? Welche anderen linearen Gleichungssysteme haben dieselbe Lösungsmenge? Darf man auch komplexe Matrizen zulassen oder Matrizen über einem noch anderen Körper?

a) Wie erhält man den zu M gehörigen "Bedingungsraum" in $\mathbb{R}^{3*}$?

b) Wie hängen Kern und Lösungsraum zusammen?

c) Wann ist M$\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar? Kommt das im betrachteten Fall vor?

2) Sei a Basis von V. Wie erhält man die zu a duale Basis? Wie transformiert sich die duale Basis unter Basiswechsel?

3) Sei V=$\mathbb{R}^3$. Wie läßt sich in diesem Fall V* darstellen? Wieso kann man in diesem Fall neben der eigentlichen Definition die dualen Basen auch noch "ausrechnen"? Wie kann man das mit Hilfe einer Matrixinversion?

4) Wie sieht allgemein die Definition der dualen Basis aus?

5) Was beinhaltet die Gleichung

$$x = \Sigma a_i \langle a_i^* | x \rangle \ \ ?$$

Warum wird die Skalarproduktschreibweise $\langle \lambda | x \rangle$ anstelle von $\lambda(x)$ eingeführt ($\lambda \in V^*, x \in V$)? Welche unterschiedlichen Rollen kann ein Element $\lambda \in$ V* je nach Situation einnehmen?

############

Die Fragen bilden natürlich keine vollständige Liste. Es sind eher **Beispiele** für verständige Anwendungen des Allgemeinen.

Verständnisprobleme nicht unter den Teppich kehren, lieber rechtzeitig nachfragen.
Für einige: Da ist noch längere **Arbeit** vonnnöten. Und die nicht auf die letzte Woche verschieben, mag der innere Schweinehund auch noch so locken!
Und für einige andere: Die Antworten sollen aus dem Kopf kommen, nicht aus einer riesigen Schönschriftsvorlesungsauszugssammlung!
Für viele: *Weiter so!*