■ 1) Es sei V=V^3 mit dem üblichen euklidischen Skalarprodukt. Setze $V(\vec{x}) = \left((\vec{a}+\vec{x})^2 - \vec{x}^2\right)^2$.

a) Bestimmen Sie das totale Differential dV koordinatenfrei mit Hilfe der ersten Denkfigur. (Hinweis: Hat V($\vec{x}$) schon eine günstige Endform?) Geben Sie dann die totale Ableitung und den Gradienten an.

b) In einem kartesischen Koordinatensystem sei

$$\vec{a}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_0^K = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Delta\vec{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für diese Werte dV und d$V_{exakt} = V(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) - V(\vec{x}_0)$.

c) Wir führen Polarkoordinaten ein. Die Polachse sei wie üblich $\vec{e}_3$. Weiter sei $\vec{a} = \vec{e}_1 a$ (1, nicht 3!) Stellen Sie V in Polarkoordinaten dar. (Hinweis: Das ist leicht! Sie benötigen nur ein Skalarprodukt. Denken Sie an $\vec{x} = \vec{x}^P(r,\theta,\varphi)$)

$$V^P(r,\theta,\varphi) = ...$$

▼ Für V($\vec{x}$) bieten sich folgende (für den Rest der Aufgabe zu merkende) Endformen an:

$$V(\vec{x}) = \boxed{(\vec{a}^2{+}2(\vec{a}\cdot\vec{x}))^2} = \boxed{\vec{a}^2{+}4\vec{a}^2(\vec{a}\cdot\vec{x}){+}4(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}$$

a) Man hat

$$(\vec{a}\cdot(\vec{x}+\Delta\vec{x}))^2 = (\vec{a}\cdot\vec{x}+\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})^2 = (\vec{a}\cdot\vec{x})^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{x})\,(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x}) + (\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})^2$$

$$V(\vec{x}+\Delta\vec{x}) = V(\vec{x}) + \left[4\vec{a}^2(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x}) + 8(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})\right] + 4(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})^2$$

Damit liest man das **totale Differential** sofort aus V($\vec{x}+\Delta\vec{x}$) ab zu

$$dV = 4\vec{a}^2(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x}) + 8(\vec{a}\cdot\vec{x})\,(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x}) = 4\left[\vec{a}^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{x})\right](\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})$$

Daraus folgt für die **totale Ableitung** und den **Gradienten**

$$\begin{aligned} DV(\vec{x}) &= \left(V^3, \Delta\vec{x} \mapsto 4\left[\vec{a}^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{x})\right](\vec{a}\cdot\Delta\vec{x}), \mathbb{R}\right) \qquad \text{aus } \mathrm{V}^{3*} \\ gradV(\vec{x}) &= 4\left[\vec{a}^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{x})\right]\,\vec{a} \end{aligned}$$

Der **Restterm** ist $\frac{1}{\|\Delta x\|}(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})^2 = (\vec{a}\cdot\frac{\Delta\vec{x}}{\|\Delta x\|})(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})$. Der erste Faktor ist beschränkt, der zweite geht nach Null. Also ist die Restermbedingung erfüllt.

Fehler infolge fortgelassener Klammern beim Skalarprodukt bis hin zu dem grausigen $(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})^2 = \vec{a}^2\Delta\vec{x}^2$.

b) Teilweise wurde gesehen, dass $dV_{exakt} = dV + 4(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})^2$. Das gab die einfachste Berechnungsmethode, sonst über V($\vec{x}$) = $(\vec{a}^2 + 2(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x}))^2$ gehen! Ergebnis

$$dV = 4 \quad \text{und } \mathrm{d}V_{exakt} = 4 + \frac{4}{25}.$$

Kleiner Kopfrechentrick:

$$\begin{aligned} V(\vec{x}_0+\Delta\vec{x}) - V(\vec{x}_0) &= \left(1 + 2\cdot\frac{11}{5}\right)^2 - 5^2 = \frac{27^2 - 25^2}{5^2} \\ &= \frac{(27-25)(27+25)}{25} = \frac{104}{25} = 4 + \frac{4}{25} \end{aligned}$$

Das gibt für die Tangentenapproximation den relativen Fehler (Fehlertypen s. Vorkurs!)

$$\frac{dV - dV_{exakt}}{dV_{exakt}} = -\frac{1}{25} = -\frac{4}{100}$$

c)

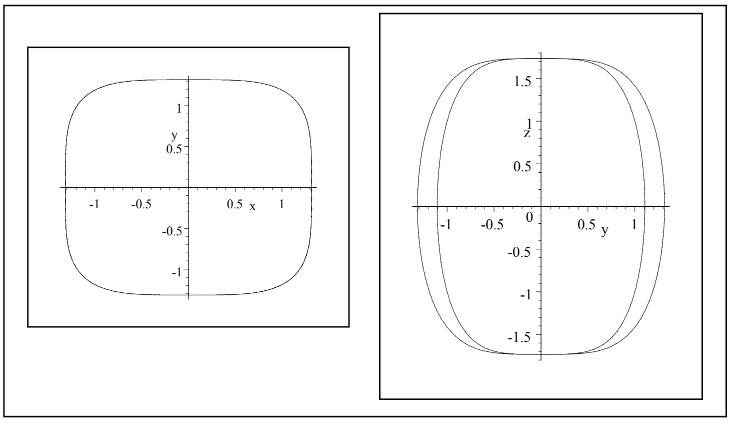
$$\begin{aligned} V^P(r,\theta,\varphi) &= V(\vec{x}^P(r,\theta,\varphi)) = (a^2 + 2a(\vec{e}_1 \cdot \vec{x}^P(r,\theta,\varphi))^2 \\ &= (a^2 + 2ar\cos\varphi \cdot \sin\theta)^2 \end{aligned}$$

■ 2) Gegeben das Skalarfeld s(x,y,z)=x^4 $+ y^4 + z^2$. Bestimmen Sie die Niveaumenge zum Punkte $\vec{x}_0 = (1,1,1)$ rechnerisch. Bestimmen Sie dann den Tangentialraum an diese Niveaumenge in $\vec{x}_0$.

▼

$$\begin{aligned} N_3 &= \{(x,y,z)|x,y,z \in \mathbb{R}, x^4 + y^4 + z^2 = 3\} \\ &= \{(x,y,z)|x,y \in \mathbb{R}, z = \pm\sqrt{3 - x^4 - y^4}\} \end{aligned}$$

Die Figur zeigt links den Schnitt der Niveausfläche mit der Ebene z=0 und rechts einmal den mit der Ebene x=0 und einmal mit der Diagonalebene x=y.



Insbesondere (1,1,1)$\in N_3$. Weiter ist (Inspektion!) ds=4x$^3\Delta x + 4y^3\Delta y + 2z\Delta z$. Insbesondere in (1,1,1) ist ds=$4\Delta x + 4\Delta y + 2\Delta z$. Dann folgt ds=0 für $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (1,0,-2)$ und $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (0,1,-2)$. Der Rang von Ds(1,1,1) ist 1, also erhalten wir als Parametrisierung des Tangentialraumes (hier Tangentialebene):

$$\vec{x}_T(\Delta x, \Delta y) = (1,1,1) + \Delta x(1,0,-2) + \Delta y((0,1,-2).$$

Nochmals: Tangentialraum $\neq$ Parametrisierung desselben.

■ 3) **Kettenregel:** In räumlichen Polarkoordinaten (P) und mit dem zughörigen Basisfeld $\partial = (\vec{\partial}_r, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\varphi)$ ist ein Vektorfeld wie folgt vorgegeben

$$\vec{F}^P(r,\theta,\varphi) = r^2 \sin\theta \cdot \vec{\partial}_\varphi(r,\theta,\varphi).$$

a) Beschreiben Sie kurz das Feldverhalten (Restriktion auf eine Kugeloberfläche, was geschieht bei Radiusänderung? Auf der Kugeloberfläche kann man wieder auf einen Kreis restringieren. Denken Sie an die Länge von $\vec{\partial}_\varphi$!)

b) Wie sieht die kartesische Darstellung des Feldes aus? Also $\vec{F}^K(\vec{x}^K) = \vec{F}^K(x_1,x_2,x_3)$ mit $\vec{F}(\vec{x}^P(r,\theta,\varphi)) = \vec{F}^P(r,\theta,\varphi)$? (Hinweis: r^2 $= \left(\vec{x}^K\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\boxed{\text{r}}$·cosθ $= (\vec{e}_3 \cdot \vec{x}) = z$, r·sinθ $= \sqrt{\boxed{\vec{x}^2} - (\vec{e}_3 \cdot \vec{x})^2} = \sqrt{\boxed{\text{x}^2\text{+y}^2\text{+z}^2} - z^2} = \sqrt{x^2+y^2}$, cosφ = ..?.. , sinφ = ..?.. , $\vec{\partial}_\varphi = r\sin\theta(\vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_2\sin\varphi)$)

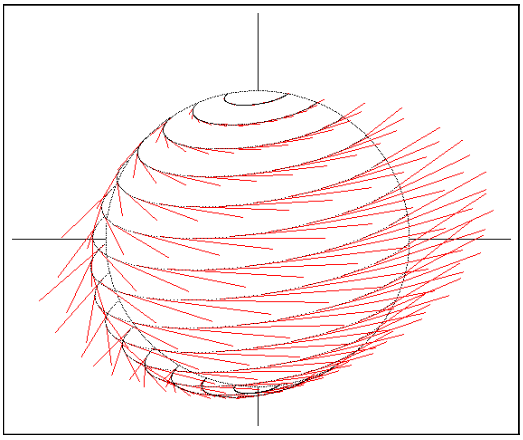
*Hier waren **fehlerhafte** Formeln wie* $\boxed{cos\theta = z}$ *gegeben. Als Physiker sollten Sie das bemerken: Alle waren in Hinblick auf die Einheiten Unfug und leicht zu korrigieren!!!! **Einheitenkontrolle!***

c) Berechnen Sie jetzt $\frac{\partial \vec{F}^P}{\partial r}(r,\theta,\varphi)$ einmal direkt und einmal über die Kettenregel. (Erst die zugehörige allgemeine Formel, dann die einzelnen benötigten Größen.)

▼ a) Der Feldvektor ist immer tangential "nach Osten" gerichtet. Seine Länge ist auf jedem Breitenkreis ($\theta = const.$) konstant. Die Breitenabhängigkeit der Feldvektorlänge geht mit einem Faktor sin$^2\theta$, ist also Null an den Polen und maximal am Äquator. Die Formel

$$\vec{F} = r^3 \sin^2\theta \cdot (\vec{e}_1(-\sin\varphi) + \vec{e}_2\cos\varphi)$$

zeigt die **Zerlegung in Betrag und Richtung** genauer. Verändert man r, dann wächst die Feldlänge mit r^3 bei gleicher Richtung. Betrachtet man den Kreis $\varphi = 0$ und r=R durch die beiden Pole, so ist der Feldvektor stets senkrecht zum Kreis, aber tangential zur Kugel gerichtet. Rotation dieser Konfiguration gibt das gesamte Feld auf der Kugeloberfläche. Auf den "Breitenkreisen" $\theta, R = const$ zeigt der Feldvektor stets tangential nach "Osten" und variiert mit dem Faktor $\sin^2\theta$ mit der Breite. Das Feld hat an den Polen den Wert 0 und ist dort stetig. (Und sogar differenzierbar, wie die Rechnung zeigt!)



b) Wir haben folgende (korrigierten) **Umrechnungsformeln**

$$\begin{array}{ll} \mathrm{r}^2 = x^2+y^2+z^2 & \rho^2 = x^2+y^2 \\ \cos\theta = \frac{z}{r} & \sin\theta = \frac{\rho}{r} \\ \cos\varphi = \frac{x}{\rho} & \sin\varphi = \frac{y}{\rho} \\ \cos\varphi\sin\theta = \frac{x}{r} & \sin\varphi\sin\theta = \frac{y}{r} \end{array}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= r(r^2\sin^2\theta)\,(\vec{e}_1(-\sin\varphi)+\vec{e}_2\cos\varphi) = r\rho^2\left(\vec{e}_1\frac{-y}{\rho}+\vec{e}_2\frac{x}{\rho}\right) \\ F^K(x,y,z) &= r\rho E \qquad\qquad \text{mit den Hilfsgrößen:} \\ r^2 &= x^2+y^2+z^2 = \rho^2+z^2 \qquad \rho^2 = x^2+y^2 \quad \vec{E} = \vec{e}_1(-y)+\vec{e}_2 x \\ \text{Oder}\quad F^K(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) **Direkt** haben wir ($\vec{F}^P = r^2\sin\theta\vec{\partial}_\varphi$, aber $\vec{\partial}_\varphi$ hängt von r ab!)

$$\frac{\partial\vec{F}^P}{\partial r}(r,\theta,\varphi) = 2r\sin^2\theta\vec{\partial}_\varphi + r^2\sin^2\theta\frac{\partial\vec{\partial}_\varphi}{\partial r} = \underline{3r\sin^2\theta\cdot\vec{\partial}_\varphi}$$

Wegen $\frac{\partial\vec{\partial}_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}r\sin\theta(\vec{e}_1(-\sin\varphi)+\vec{e}_2\cos\varphi) = \frac{1}{r}\vec{\partial}_\varphi$.

Der zweite Teil ist deutlich aufwendiger! Jedenfalls hat man $\vec{F}^P = F^K\circ\vec{x}^P$. Also ist nach der Kettenregel (nachfolgend meist **ohne** Argumente)

$$\boxed{\frac{\partial F^P}{\partial r}(\mathrm{r},\theta,\varphi)=\frac{\partial F^K}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial F^K}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial F^K}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}}$$

sowie

$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi\sin\theta = \frac{x}{r}$	$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi\sin\theta = \frac{y}{r}$	$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta.$

Beachten Sie, dass folgende **Ableitungsregeln** gelten:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{x}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}.$$

Damit und den weiteren aufgelisteten Ergebnissen folgt aus $\vec{F}^K = \rho r\vec{E}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^K}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} &= \left[\left(\frac{x}{\rho}r + \rho\frac{x}{r}\right)\vec{E} + \rho r\vec{e}_2\right]\frac{x}{r} = x^2\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{r^2}\right)\vec{E} + \rho x\vec{e}_2 \\
\frac{\partial F^K}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} &= \left[\left(\frac{y}{\rho}r + \rho\frac{y}{r}\right)\vec{E} + \rho r(-\vec{e}_1)\right]\frac{y}{r} = y^2\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{r^2}\right)\vec{E} + \rho(-y)\vec{e}_2 \\
\frac{\partial F^K}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F^K}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} &= \rho^2\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{r^2}\right)\vec{E} + \rho\vec{E} = \rho\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)\vec{E} + \rho\vec{E} \\
\frac{\partial F^K}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} &= \rho\frac{z}{r}\vec{E}\cdot\frac{z}{r} = \rho\frac{z^2}{r^2}\vec{E}
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt das alte Resultat:

$$\boxed{\frac{\partial F^K}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F^K}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial F^K}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = \rho\left(\frac{z^2}{r^2} + \frac{x^2+y^2}{r^2}\right)\vec{E} + 2\rho\vec{E} = 3\rho\vec{E}}$$

■ 4) Auf $\mathbb{R}^2$ seien die drei üblichen Normen (L^1, L^2 und Supremumsnorm) gegeben. Dazu die Nichtnormabbildung (x,y)$\mapsto ||(x,y)||_{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$ Weiter sei $\vec{a} = (1,0)$ und $\vec{b} = (0,1)$

a) Berechnen Sie für alle 4 Fälle die drei in der Dreiecksungleichung für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auftretenden Werte. Geben Sie die Resultate in Form einer sinnvollen Tabelle an und kommentieren Sie das Ergebnis.

b) Es sei $K_r \subset \mathbb{R}^3$ die Ursprungskugel vom Radius r>0 und $||\vec{x}||_1 = |x| + |y| + |z|$ die L^1-Norm in $\mathbb{R}^3$. Für welche $\varepsilon > 0$ liegt die offene ε-Umgebung $U^1_\varepsilon(0)$ für diese Norm in K_r.

c) Ist es für die Bantwortung von b) von Relevanz, ob K_r offen oder abgeschlossen ist?

▼

	$\|\|\vec{a}\|\|$	$\|\|\vec{b}\|\|$	$\|\|\vec{a}+\vec{b}\|\|$	$\|\|\vec{a}\|\| + \|\|\vec{b}\|\|$
L^1	1	1	2	2
L^2	1	1	$\sqrt{2}$	2
L^∞	1	1	1	2
$L^{\frac{1}{2}}$	1	1	4	2

Im ersten Fall gilt in der Dreiecksungleichung Gleichheit, obwohl die Vektoren unterschiedliche Richtung haben. Für $L^{\frac{1}{2}}$ ist die Dreiecksungleichung verletzt.

b) Wir haben $||$(x,y,z)$||_1 = |x| + |y| + |z|$. $U^1_\varepsilon(0)$ ist ein achsenparalleles Oktaeder. Die Spitzen sind am weitesten vom Ursprung entfernt (Supremum des eukl. Abstandes). Etwa der Randpunkt $(\varepsilon, 0, 0)$ Wann ist das $\leq \sqrt{\varepsilon^2 + 0^2 + 0^2}$? Für$|\varepsilon| \leq r$.

c) Nein, denn $U^1_\varepsilon(0)$ ist offen. Randpunkte werden nie angenommen.

■ 5) Ein Unterschied zwischen zwei Normen:

Für die L^2-Norm gilt: Gleichheit in der Dreiecksungleichung gilt genau dann, wenn $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ mit $\lambda \geq 0$. Bei der L^1-Norm ist das anders.

Sie wollen diese Bemerkung genauer ausführen. Dann ist einiges zu beweisen. **Formulieren** Sie die zu beweisenden Aussagen. Und beweisen Sie zwei davon.

Hier gab es große Verständnis- und Formulierungsprobleme!

Die Formulierung der Aufgabe ist nicht ganz korrekt. Der Fall $\vec{b} = 0$ und $\vec{a} \neq \vec{0}$ wird von ihr nicht erfasst. Korrekt wäre "$\vec{a} = \lambda\vec{b}$ oder $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ mit $\lambda \geq 0$", was imer etwas schwerfällig klingt.

▼ Das bedeutet: **1)** Ist $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ oder...mit $\lambda \geq 0$, dann hat man in der Dreiecksungleichung für L^2 die Gleichheit. **2)** Ist $||\vec{a} + \vec{b}||_E = ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$, dann ist $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ oder...." **3)** Im Falle der L^1-Norm gibt es zu 2) Gegenbeispiele.

Die 2. Aussage läßt sich gleichwertig auch wie folgt formulieren: 2a) Gibt es kein $\lambda \geq 0$, für das $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ oder $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ gilt, dann ist $||\vec{a} + \vec{b}||_E < ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$.

Der Beweis von 1) ist trivial und folgt über die Normaxiome. D.h. die Aussage gilt für **alle** Normen: $||\vec{a}+\vec{b}|| = ||\lambda\vec{b}+\vec{b}|| = |1+\lambda|||\vec{b}|| \overset{(1)}{=} (1+|\lambda|)||b|| = ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$. Bei (1) wird $\lambda \geq 0$ benötigt.

2) bzw 2a) kann nicht allein über die Normaxiome bewiesen werden. Man benötigt den Winkel. Der Cosinussatz verlangt für die geforderte Gleichheit $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = ||\vec{a}||||\vec{b}||$ und das ist gerade $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ mit $\lambda \geq 0$ oder $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Also Winkel =0 oder einer der Vektoren Null.

3) Hierfür haben wir bereits in Frage 4) ein Gegenbeispiel, das sich leicht verallgemeinern läßt: $\vec{a} = (a_1, a_2)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Falls $a_1$und b_1 sowie a_2 und b_2 dasselbe Vorzeichen haben (oder einer von beiden Null ist) gilt $|a_1 + b_1| + |a_2 + b_2| = |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2|$. D.h. in der Dreiecksungleichung gilt Gleichheit. Und dies Vektoren habeni.a. unterschiedliche Richtung.

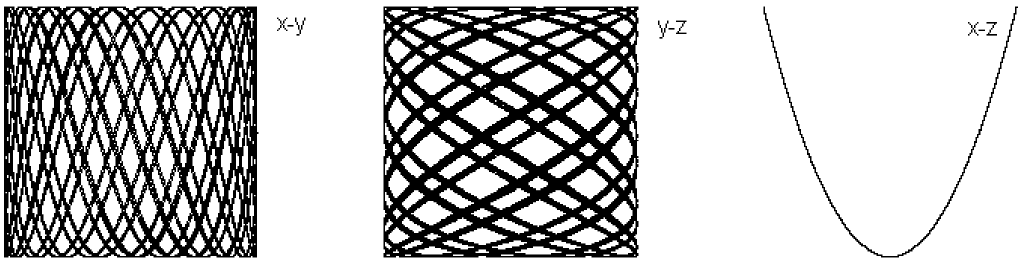
■ 6) Was läßt sich über das Verhalten der folgenden Bahnkurve sagen? (e kartesisches Koordinatensystem, R,$\omega > 0$ Konstanten)

$$\vec{r}(t) = R(\vec{e}_1\cos(\omega t) + \vec{e}_2\sin(\pi\omega t)) + 2R\vec{e}_3\cos(2\omega t)$$

(Überlegen Sie sich insbesondere, in welchen Bereichen die Projektionen von Bild $\vec{r}$ auf die Koordinatenebenen liegen.)

a) Stellen Sie $\vec{r}^K(t)$ als Taylorreihe um t=0 dar. (Ergebnis, nicht rechnen!) Begründen Sie kurz die absolute Konvergenz der Reihe.

▼ Gezeichnet sind die drei Projektionen füt $0 \leq t \leq 100$. Da 1 und π zueinander irrational sind, werden die beiden Quadrate im Laufe der Zeit dicht aufgefüllt. 2:1 ist rational und daher sieht die Projektion in der x-z-Ebene imer weiter so aus..(Es ist ja x=sin(ωt) und z=cos($2\omega t$) $= 1 - 2\sin^2(\omega t)$. Also z=1-2x^2. Wegen des zusätzlichen Faktors π gibt es keine entsprechende Beziehung für die beiden anderen Projektionen)



Die (bekannten) Reihen sind einzusetzen. *Es war nicht verlangt, dass diese Reihen über die allgemeine Taylorformel berechnen und dann gar nicht bis zur Endform vordringen!*

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= R(\vec{e}_1\cos(\omega t) + \vec{e}_2\sin(\pi\omega t)) + 2R\vec{e}_3\cos(2\omega t) \\
&= R\left(\vec{e}_1\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(\omega t)^{2k} + \vec{e}_2\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\pi\omega t)^{2k+1}\right) + 2R\vec{e}_3\Sigma_{k=01}^{\infty}\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(2\omega t)^{2k}
\end{aligned}$$

■ 7) Wir geben die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\text{Sei} \quad \vec{s}_N &= \Sigma_{k=1}^{N}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}, \frac{(-1)^k}{k+1}\right) \\
\text{Mit} \quad \mathrm{r}_N &= \Sigma_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k} \quad \text{folgt } \vec{s}_N = (\vec{e}_2^{\,K} - \vec{e}_1^{\,K})r_N + \vec{e}_2^{\,K}\left(\frac{(-1)^N}{N+1} + 1\right). \qquad \text{Also} \\
\lim_{N\to\infty}\vec{s}_N &= (\vec{e}_2^{\,K} - \vec{e}_1^{\,K})\lim_{N\to\infty} r_N + \vec{e}_2^{\,K} \quad \text{nach den Grenzwertsätzen.}
\end{aligned}$$

Welche Konvergenzeigenschaften folgt damit für die Folge N$\mapsto r_N$? Wofür hat man hier ein Beispiel? Was wurde durch diese Rechnung worauf zurückgeführt?

▼ Die Folge $N \mapsto r_N$ gehört zu einer **bedingt konvergenten** Zahlreihe. Die Rechnung zeigt, dass daher auch die Vektorreihe nur **bedingt** konvergent ist. Wir haben mit N$\mapsto \vec{s}_N$ ein Beispiel einer bedingt konvergenten Vektorrreihe. Allerdings bleibt offen, was "bedingt konvergent" dann genau leistet. Sind die beiden Grenzwerte (der Komponenten) aneinander gekoppelt oder unabhängig veränderlich bei Änderung der Reihenfolge?

■ 8) Bestimmen Sie für folgende Abbildung die Funktionalmatrix

$$\vec{F} = \left(\mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \end{pmatrix}\right)$$

a) In welchen Punkten kann man rechnerisch **nicht** auf die Tangentialebene von Bild$\vec{F}$ schliessen?

b) Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Punkt $\vec{y}_0 = \vec{F}(\vec{x}_0)$ mit $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

▼*Die* Funktionalmatrix ergibt sich zu

$$D\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Der maximale Rang ist 2. Er wird für alle Punkte außerhalb des Ursprunges angenommen. Der Ursprung (Urbildraum) wird auf auf den Ursprung (Werteraum) abgebildet. Damit ist der Ursprung (Werteraum) der einzige Punkt des Bildes, in dem man den Tangentialraum nicht rechnerisch bestimmen darf.

Für $\vec{x}_0 = {}^t(2,3)$ folgt $\vec{F}(2,3) = {}^t(4,9,6)$ und $\mathrm{D}\vec{F}(2,3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Das ergibt die folgende Parametrisierung der zugehörigen Tangentialebene:

$$\vec{T}_{(23)}(x,y) = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4x \\ 9+6y \\ 6+3x+2y \end{pmatrix}.$$

■ 8) Sei M=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie M^2 und M^3 und mit dem Ergebnis (ganz leicht) e^{tM}.

▼ M$^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und M$^3 = 0$. Also wird e$^{tM} = id + tM + \frac{1}{2}t^2M^2$. Aus der unendlichen Reihe wird eine endliche Summe:

$$e^{tM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■ 9) Es sei a=$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ Basis eines dreidimensionalen Vektorraumes. a* sei die dazu duale Basis. Sei $\vec{x} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 2$ und $\lambda = a_2^* 3 - 5a_3^* \in V^*$. Berechnen Sie $\lambda(\vec{x}) = \langle\lambda|\vec{x}\rangle$.

a) Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{y}$ aus V, die auf λ senkrecht stehen, für die also $\lambda(\vec{y}) = \langle\lambda|\vec{y}\rangle = 0$ gilt.

▼ $\lambda(\vec{x}) = \langle\lambda|\vec{x}\rangle = \langle a_2^*3 - 5a_3^*|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 2\rangle = 3 \cdot 2 = 6$.

a) $\vec{y} = \vec{a}_1\alpha + \vec{a}_2\beta + \vec{a}_3\gamma$ Basisdarstellung. $\lambda(\vec{y}) = \langle\lambda|\vec{y}\rangle = \langle a_2^*3 - 5a_3^*|\vec{a}_1\alpha + \vec{a}_2\beta + \vec{a}_3\gamma\rangle = 3\beta - 5\gamma$. Wir haben k=2 und die Parametrisierung der Lösungsebene

$$\vec{y}_L(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5\beta \\ 3\beta \end{pmatrix}$$

■10) Erläutern Sie stichwortartig die einzelnen Schritte der nachfolgenden Rechnung $(\alpha, R$ äußere Parameter mit $\alpha < R)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sqrt{R^2 - \alpha^2 \sin^2 x} &= R \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{R}\right)^2 \sin^2 x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{\alpha}{R}\right)^{2k} \sin^{2k} x \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{\alpha}{R}\right)^{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^{2k} x \\
&= \pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{\alpha}{R}\right)^{2k} \binom{-\frac{1}{2}}{k}
\end{aligned}$$

Welcher dieser Schritte ist kritisch und bedarf einer besonderen Begründung. Geben Sie diese. Die Berechnung des Integrales ist damit nicht gemeint und wird **nicht** verlangt.

▼ (1) Elementare Umformung des Integranden.

(2) Einsetzen der Binomialreihe. Der Integrationsbereich liegt ganz im Konvergenzbereich der Reihe da $\left(\frac{\alpha}{R}\right)^2 \sin^2 u \leq K < 1$. Daher ist dieser Schritt korrekt.

(3) Summe und Integral werden vertauscht. Das ist kritisch. Die Bedingung (4.4.9) aus Kap.6 verlangt gleichmäßige Konvergenz. Bei einer Potenzreihe isrt das im Innern des Konvergenzkreises der Fall (Kap.6 (4.2.20)). Also ist die Vertauschung zulässig!

(4) Die Einzelintegrale lasen sich berechnen, der Wert wird eingestzt, man erhält das Ausgangsintegral in Form einer numerischen Reihe!