Höhere Mathematik I

Stichworte zur Klausurvorbereitung

(Vorlesung und **Skript** sollten so aufgearbeitet sein, dass Sie die nachfolgend aufgeführten Stichworte jeweils einordnen und kurz erläutern können sollten. Und die angeführten Fragen beantworten! Nicht alle Themen sind nachfolgend angeführt.)

Kap.1:

▼ **Mengenbildung**, Explikation und Nachweis. Produktmenge und Potenzmenge. Wie weist man die Inklusion A$\subset B$ nach?

▼ **Abbildungen,** Formalismus, Typisierung ("Was versteht man unter einer Folge, einem Skalarfeld, einer Bahnkurve....?") / Injektiv, surjektiv, bijektiv / Was versteht man unter einer "Bestimmungsgleichung" ? (Rückführung auf Abbildung) / Potenzmengenerweiterung einer Abbildung / Mengen von Abbildungen /

Unterschied von "eine Menge" und "eine Parametrisierung der Menge" (Beispiel: Linearkombinationsabbildung ist.....) Was ist eine "Familie von Vektoren"?

Verbindung mit späteren Kapiteln: Z.B. V$^* = Hom_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}^1)$ und $\lambda \in V^*$. D.h......

Was ist eine "unendliche Reihe"?

▼ **Partitionen und Äquivalenzrelationen:** Definition? Beziehung zwischen beiden Begriffen? Nachweis einer Äquivalenzrelation. Gleichmächtigkeit von Mengen.

Beispiel V$_0^3$ Vektorraum über $\mathbb{R}$ /

$$\vec{a} \sim \vec{b} \iff (\text{Es gibt } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \quad \text{so dass} \quad \vec{a} = \vec{b}\lambda)$$

Zeige: Das ist Äquivalenzrelation . Klassen? Ein Vertretersystem?

Kap.2: Typen reeller Zahlen (rational, irrational, algebraisch,...)

Vollständige Induktion und indirekter Beweis. (Z.B. f:V$\rightarrow W$ Vektorraumhomomorphismus. Beweise induktiv f$(\Sigma \vec{x}_i \alpha_i) = \Sigma f(\vec{x}_i)\alpha_i$. Wie sieht die zu beweisende Aussage A(n) hier aus?)

▼Die Axiome des Körpers $\mathbb{R}$.

▼ Eine Konstruktionsbeschreibung wie die folgende verstehen und sinnvoll ergänzen können: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Folgen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ / Bilde darin die Teilmenge $\mathcal{C}$ aller Cauchyfolgen (Sind die immer konvergent (in $\mathbb{Q}$)?) Bilde dann in $\mathcal{C}$ die folgende Äquivalenzrelation $\boxed{f \sim g \iff (f - g \quad \text{ist Nullfolge})}$. Was ist nachzuweisen? Wie sehen die Klassen aus? Wie kann man $\mathcal{C}$ zu einer additiven Gruppe machen?

▼ Unterschied "Konvergente Folge" - "Cauchyfolge" / Was verlangt das Cauchykriterium?

▼ Wogegen konvergiert die Folge n$\mapsto$ $a_n = \frac{1}{\ln(n^2+1)}$? Eine zugehörige Strategiefunktion angeben.

▼ Die Konvergenzkriterien für Reihen. Wieso konvergiert $\Sigma \frac{1}{(3k)!} x^{3k}$ für alle x$\in \mathbb{R}$? (Daran denken: Jeweils ein günstiges Kriterium wählen!)

▼Die **drei** grundlegend wichtigen Reihen und deren Konvergenzeigenschaften.

Entwickle (1-x^2)$^{-\frac{1}{3}}$ in eine Reihe um x=0. / Die Reihe für ln(1+x). /

▼ Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\Sigma \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent? Was bedeutet "absolut konvergente Reihe"? Warum ist dieser Begriff so wichtig.

▼Betrachte folgende Rechnung:

Sei $\alpha = u + iv$ mit u,v$\in \mathbb{R}$ / Dann ist für n$\in \mathbb{N}$ und n>0 folgendes gültig:

$$|n^\alpha| = |n^{u+iv}| = |n^u n^{iv}| = |n^u e^{iv\ln(n)}| = n^u.$$

Daraus kann man folgern für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{C}$ die Reihe $\Sigma \frac{1}{n^\alpha}$ absolut konvergent ist. Beschreiben Sie die zugehörige Menge in der komplexen Zahlenebene.

Kap. 3:

▼ Halbgruppe und Gruppe. ▼ Sei K Körper, M Menge und $\mathcal{F}(M,K)$ die Menge aller Abbildungen M$\rightarrow$ K. Warum ist $\mathcal{F}(M,K)$ i.a. nur Ring, aber kein Körper? ▼ Was versteht man unter einem Übertragungsproblem (bei einer algebraischen Struktur? Wie überträgt man beispielsweise eine solche Struktur auf eine Produktmenge? (Stichwort!) / ▼ Gruppentafel der zyklischen Gruppe C$_4$ $= \{g^r | r = 0,1,2,3\}$./

▼ Was ist eine "Drehung im V$_0^{3}$"? Welche Eigenschaft folgt automatisch? ▼ Was ist ein Nullteiler (in einem Ring)? Sei M$\in$Mat$_\mathbb{R}(2,2)$ mit M=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Welchen Rang hat diese Matrix? Bestimmen Sie alle Nullteiler X$\in$Mat$_\mathbb{R}(2,2)$, die XM=0 erfüllen. Ist dann auch automatisch MX=0 erfüllt?

▼ Was für eine Termumformung wird durch folgende Rechnung mit dem Summenzeichen beschrieben: $\Sigma_{rs} a_{rs} b_s c_r = \Sigma_r \left(\Sigma_s a_{rs} b_s\right) c_r$? Ist diese Rechnung in einem Ring erlaubt?

▼ Wie sieht die Symmetriegruppe eines Tetraeders aus? Ordnung der Gruppe? Ordnung der einzelnen Elemente

▼ Bei einer Gruppenoperation erhält man eine Bahn mit 11 Elementen. Der Stabilisator eines Bahnelementes hat 3 Elemente. Wie groß ist die Gruppe?

▼ Welcher Unterschied besteht zwischen einer Rechts- und einer Linksoperation einer Gruppe? Was gilt, wenn die Gruppe kommutativ ist?

▼ Sei $(\mathcal{P}, +)$ der Vektorraum der reellen Polynome. Zeigen Sie (Stichwort), dass die Menge aller Polynome vom Grade höchstens 5 ein sechsdimensionaler Teilraum von $\mathcal{P}$ ist. Wieso darf man "höchstens" unter keinen Umständen fortlassen?

▼ Es sei a eine linear unabhängige Familie von Vektoren und b eine Teilfamilie von a. Beweisen Sie, dass b dann auch linear unabhängig ist.

▼ Sind die drei Vektoren (1,2,-1), (3,5,4) und (7,11,14) linear unabhängig?

▼ V Vektorraum über K und U_1, U_2 Teilräume. Welcher Unterschied besteht zwischen $\mathrm{U}_1 + U_2$ und $\mathrm{U}_1 \oplus U_2$?

▼Der Dimensionssatz für Homomorphismen (Was beinhaltet er für $(\mathrm{V}_0^3, \vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}, V_0^3)$?)

▼ Dimensionssatz für Teilräume

▼▼ **Zeigen Sie** (und das geht kurz): Sei V Vektorraum über K und a=$(\mathrm{a}_a, ..., a_n)$ Basis von V. Weiter seien $\mathrm{b}_1, ..., b_n$ beliebige Elemente aus einem Vektorraum W über K. Dann gibt es genau einen Vektorraumhomomorphismus $\varphi : V \to W$, der $\varphi(a_i) = b_i$ für i=1,2,..,n erfüllt. Welche Bedingung müssen die b_i erfüllen, damit φ Isomorphismus ist?

▼ Koeffizientenvergleich oder Schluss von der Summe auf die Summanden:

▼ Basisergänzung

▼ Matrixprodukt. Sei $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Berechnen Sie M^2 und M^3. Berechnen Sie dann induktiv M^n. Dabei dürfen Sie die Fibonaccizahlen F_n als bekannt voraussetzen und verwenden. Diese erfüllen die Anfangsbedingungen $\mathrm{F}_0 = 0$ und $\mathrm{F}_1 = 1$ sowie $\mathrm{F}_{n+1} = F_n + F_{n+1}$ Also (0,1,1,2,3,5,8,....) Wie geht das weiter?

▼ Beschreibende Matrix eines Vektorraumhomomorphismus? (Auseinanderhalten: Vektor $\vec{x} \in V$ und $\vec{x}^K \in \mathbb{R}_K^n$. Ist a die zu K gehörige Basis, dann gilt $\mathrm{L}_a(\vec{x}^K) =$ ..?.. Ebenso Homomorphismus λ und λ bezüglich K beschreibende Matrix M_λ)

▼ Verhalten unter Basiswechsel? (Eine Drehung in der Ebene in schiefen Koordinaten beschreiben. Z.B. für $\vec{f_1} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 2$ und $\vec{f_2} = \vec{e}_1 3 + \vec{e}_2$.

▼

Ich bin Freitag d. 27.12. und Freitag den 3.1. vormittags im Institut und stehe dann für Fragen und Erläuterungen zur Verfügung. Eventuelle E-Mail-Anfragen werden dann auch beantwortet .

F. Krause