Klausur Vor- und Brückenkurs Mathematik 2003
10.10.2003

■ 1) Sei $\vec{a} = (1, -2, 3)$ und $\vec{b} = (-2, 3, 1)$.

a) Berechnen Sie $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ und $(7\vec{a} - \frac{7}{3}\vec{b}) \times (\frac{3}{7}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b})$.

b) Bestimmen Sie α und β, so dass $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (-1, 0, 11)$ gilt. Wieso geht das?

c) Wir haben $\vec{a} = 1\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. Sei nun $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ und $\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$. Drücken Sie zunächst die $\vec{e}_i$ durch die $\vec{f}_i$ aus und dann auch $\vec{a}$ durch die $\vec{f}_i$.

■ 2) Gegeben die Parabel y=x^2. Wo schneidet die Tangente zum Punkte (a, a^2) auf dieser Parabel die x-Achse?

■ 3) Von einer Flugparabel wisse man $\vec{r}^K(3) = (2, 0, 1)$ und $\vec{v}^K(3) = (0, 1, 3)$. Weiter sei $\vec{g}^K = (0, 0, -10)$.

a) Bestimmen Sie die Flugparabel b) In Welcher Ebene verläuft die Flugbahn? c) Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=0? d) Wo und wann hat die momentane Geschwindigkeit dieselbe Richtung wie der Vektor (0,1,1)?

■ 4) Ein 1×3-Gleichungssystem sei in der Form $\vec{a} \cdot \vec{x} = b$ gegeben mit $\vec{a} \neq \vec{0}$. Wir wissen: Bringt man es in die Form $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$ mit $|\vec{n}| = 1$, dann ist d der kürzeste Abstand vom Ursprung zur Ebene! Der Vektor $\vec{A}$ des kürzesten Abstandes vom Ursprung zur Ebene ist daher $\vec{A} = d\vec{n}$.

a) Drücken Sie $\vec{A}$ durch $\vec{a}$ und b aus.

b) Bestimmen Sie $\vec{A}$ für den speziellen Fall 2x+y+7z=10.

■ 5) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem $\boxed{\begin{array}{l} 1x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+2y+z=2 \end{array}}$

■ 6)Bringen Sie den folgenden komplexwertigen Rechenausdruck in kartesische Endform: $\boxed{\frac{1+i}{\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}}}$

■ 7) Sei z=-1+2i aus $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie $\sqrt{z}$ und $\frac{1}{z}$ näherungsweise zeichnerisch.

■ 8) Wie lautet die Ableitung von f(x)=sin(cos(sin(x))) ?

■ 9) Sei f(x)=x$^{\frac{3}{2}} \sin x$.

a) Bestimmen Sie f$'(x)$? Wie lautet die Tangentenzerlegung von f um x$_0 = 1$?

b) Wählen Sie jetzt $\Delta x = 0.1$ und danach $\Delta x = 0.5$ und bestimmen Sie dazu 1.) den exakten Wert von f(x$_0 + \Delta x$) mit dem Taschenrechner (5 Nachkommastellen) 2.) denselben Wert in Tangentenapproximation 3.) den absoluten Fehler (der natürlich unmittelbar aus a) und b) folgt) und 4.) den lokalen Fehler.

■ 10) Diskutieren Sie $\boxed{f(x)=\frac{xe^x}{1-x^2}}$ (in der besprochenen Form)

a) Die Lage des Extremwertes mit Newton näherungsweise bestimmen. (1 oder höchstens 2 Iterationsschritte)

b) Schätzen Sie die Größe des Integralwertes $\int_{\frac{3}{2}}^{2} dx f(x)$ mit Hilfe Ihrer Skizze grob ab.

c) Wo schneiden sich die Tangenten von f zu den Punkten x=2 und x=-2?

■ 11) Integrale

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} dx \sin(2x) \qquad I_2 = \int du \sin(u) \cos(\cos u) \qquad I_3 = \int_1^2 \frac{dx x^2}{x(x^2-4)}$$

■ 12*) Für eine Ellipse sei in kartesischen Koordinaten die folgende Parameterdarstellung gegeben

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_1 a \cos(t) + \vec{e}_2 b \sin(t).$$

Daraus folgt r$^2 = (\vec{r}(t))^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t$.

Machen Sie eine Skizze, die zeigt, dass für den Polarwinkel φ des Ellipsenpunktes tan$\varphi = \frac{b}{a} \tan t$ gilt

Nun gilt $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ und $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$. Drücken Sie mit Hilfe dieser Gleichungen $\cos^2 t$ und $\sin^2 t$ durch φ aus. Das Ergebnis sollte für $\cos^2 t$ wie folgt aussehen:

$$\cos^2 t = \frac{b^2 \cos^2 \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Drücken Sie jetzt r^2 durch φ aus und leiten Sie daraus die folgende Polargleichung für die Ellipsenpunkte her:

$$r(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}$$

■ 1) Sei $\vec{a} = (1, -2, 3)$ und $\vec{b} = (-2, 3, 1)$.
a) Berechnen Sie $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ und $(7\vec{a} - \frac{7}{3}\vec{b}) \times (\frac{3}{7}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b})$.
▼

♦$2\vec{a} + 3\vec{b} = \boxed{(-4, 5, 9)}$ ♦ $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} = \boxed{(-5)(1, -2, 3)}$ ♦ $\vec{a} \times \vec{b} = \boxed{(-11, -7, -1)}$

♦ $(7\vec{a} - \frac{7}{3}\vec{b}) \times (\frac{3}{7}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}) = \boxed{(\frac{21}{5} + 1)\vec{a} \times \vec{b}} = \frac{1}{5}\,(-286, 182, -26)$ mit **bilinearem** Rechnen.

Wozu sind Rechenregeln da? Um ignoriert zu werden! 6 Versuche mit bilinear, davon 4 richtige. 13 immer sehr aufwendige Versuche durch direktes Einsetzen. Und ***kein einziges richtiges Ergebnis darunter.*** *. .*

▲

b) Bestimmen Sie α und β, so dass $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (-1, 0, 11)$ gilt. Wieso geht das?

▼ Fast alle erhielten rechnereisch das korrekte Resultat $\boxed{\alpha = 3 \quad \beta = 2}$.

Aber wie steht es um das Verständnis des behandelten Problems? Wann liegt ein räumlicher Vektor $\vec{x}$ in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene? Wenn das zugehörige Spatprodukt $\vec{x} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ Null ist!. Oben war $\vec{a} \times \vec{b} = (-11, 7, -1)$ berechnet. Das steht offensichtlich auf (-1,0,11) senkrecht. Also musste sich der Vektor $\vec{x}$ darstellen lassen.

Sie verwechseln: "*Das Gleichungssystem ist lösbar und daher liegt der Vektor in der Ebene*" mit "*Wir sehen (über das Spatprodukt), dass der Vektor in der Ebene liegt und das System daher lösbar sein muss!*"

▲
c) Wir haben $\vec{a} = 1\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. Sei nun $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ und $\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ und $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$ Drücken Sie zunächst die $\vec{e}_i$ durch die $\vec{f}_i$ aus und dann auch $\vec{a}$ durch die $\vec{f}_i$.

▼ Natürlich ist i hier ein freier Parameter mit Werten i=1,2,3. Man findet $\vec{e}_1 = \frac{1}{5}(\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2)$ und $\vec{e}_2 = \frac{1}{5}\left(2\vec{f}_1 - \vec{f}_2\right)$. Es folgt $\vec{a} = \frac{1}{5}\left(-3\vec{f}_1 + 4\vec{f}_2\right) + 3\vec{f}_3$ ▲

■ 2) Gegeben die Parabel y=x^2. Wo schneidet die Tangente zum Punkte (a, a^2) auf dieser Parabel die x-Achse?

▼ Man verwendet die Punkt-Richtungs-Formel. Nur einige wenige kennen die imer noch nicht. Damit erhält man als Gleichung der Tangente:

$$y = a^2 + (2a)(x - a) = 2ax - a^2$$

y=0 gibt x=$\frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$. Die Tangente schneidet die x-Achse bei x=$\frac{a}{2}$ im Punkte $(\frac{a}{2}, 0)$. ▲

■ 3) Von einer Flugparabel wisse man $\vec{r}^K(3) = (2, 0, 1)$ und $\vec{v}^K(3) = (0, 1, 3)$. Weiter sei $\vec{g}^K = (0, 0, -10)$.
a) Bestimmen Sie die Flugparabel
b) In Welcher Ebene verläuft die Flugbahn?
c) Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=0?
d) Wo und wann hat die momentane Geschwindigkeit dieselbe Richtung wie der Vektor (0,1,1)?

a) Auch hier hielten sich einige immer noch nicht an die Regel und versagten dann prompt beim Rest.

$$\begin{aligned} \vec{r}^K(t) &= (2,0,1) + (0,1,3)T + \frac{1}{2}(0,0,-10)T^2 \\ &= (2, T, 1 + 3T - 5T^2) \end{aligned}$$

$$\vec{v}^K(T) = (0,1,3-10T) \quad \text{mit} \quad T = t-3$$

b) In der durch (2,0,0) gehenden Ebene, die **parallel** zur y-z-Ebene ist. Das ist **nicht** die y-z-Ebene selbst!

c) t=0 gehört zu T=-3, also

$$\vec{r}^K(0) = (2,-3,1-9-45) = (2,-3,-53)$$

d) Bedingung $\boxed{3\text{-}10T=1}$ $T=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ **(Kürzen!!)** D.h. $t=T+3=\frac{16}{5}$
$\vec{r}^K(\frac{11}{5}) = (2, \frac{1}{5}, 1+\frac{8}{5} - 5\frac{1}{25}) = \left(2, \frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$ ▲

■ 4) Ein 1×3-Gleichungssystem sei in der Form $\vec{a}\cdot\vec{x} = b$ gegeben mit $\vec{a} \neq \vec{0}$. Wir wissen: Bringt man es in die Form $\vec{n}\cdot\vec{x} = d$ mit $|\vec{n}| = 1$, dann ist d der kürzeste Abstand vom Ursprung zur Ebene! Der Vektor $\vec{A}$ des kürzesten Abstandes vom Ursprung zur Ebene ist daher $\vec{A} = d\vec{n}$.
a) Drücken Sie $\vec{A}$ durch $\vec{a}$ und b aus.
b) Bestimmen Sie $\vec{A}$ für den speziellen Fall 2x+y+7z=10.

▼ $\vec{a}\cdot\vec{x} = b$ / $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\vec{x} = \frac{b}{|\vec{a}|}$ also $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ und $d=\frac{b}{|\vec{a}|}$. D.h. $\boxed{\vec{A} = \frac{b}{\vec{a}^2}\vec{a}}$. Un damit für den speziellen Fall $\boxed{\vec{A} = \frac{10}{54}(2,1,7) = \frac{5}{27}(2,1,7)}$ ▲

■ 5) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem $\boxed{\begin{array}{l} 1x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+2y+z=2 \end{array}}$

▼Nur wenige Rechenfehler. Aber häufig fehlte eine ordentliche Endform
$\boxed{x=-\frac{7}{2} \quad y=\frac{15}{2} \quad z=-\frac{5}{2}}$. ▲

■ 6) Bringen Sie den folgenden komplexwertigen Rechenausdruck in kartesische Endform: $\boxed{\frac{1+i}{\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}}}$

▼ Rechnen wie mit reellen Zahlen und $i^{-1} = -i$ reichte!

$$\boxed{\frac{1+i}{\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}} = \frac{2(1+i)}{(1+i)-(1-i)} = \frac{2(1+i)}{2i} = 1-i}$$

7) Sei z=-1+2i aus $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie $\sqrt{z}$ und $\frac{1}{z}$ näherungsweise zeichnerisch.

▼ Hier gab es bedauerlicherweise immer noch einige Schwierigkeiten und Fehler. Und natürlich in einigen Fällen wurde der Aufgabentext nicht beachtet und doch gerechnet! ▲

■ 8) Wie lautet die Ableitung von f(x)=sin(cos(sin(x))) ?

▲ $f'(x) = -\cos x \cdot \sin(\sin x) \cdot \cos(\cos(\sin(x))$ ▼

■ 9) Sei f(x)=$x^{\frac{3}{2}} \sin x$.

a) Bestimmen Sie $f'(x)$? Wie lautet die Tangentenzerlegung von f um $x_0 = 1$?

b) Wählen Sie jetzt $\Delta x = 0.1$ und danach $\Delta x = 0.5$ und bestimmen Sie dazu 1.) den exakten Wert von $f(x_0 + \Delta x)$ mit dem Taschenrechner (5 Nachkommastellen) 2.) denselben Wert in Tangentenapproximation 3.) den absoluten Fehler (der natürlich unmittelbar aus a) und b) folgt) und 4.) den lokalen Fehler.

▼ a)

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \sin x + x^{\frac{3}{2}} \cos x$$

$$\boxed{(1 + \Delta x)^{\frac{3}{2}} \sin(1+\Delta x) = \sin 1 + \left(\tfrac{3}{2} \sin 1 + \cos 1\right) \Delta x + \Delta x R_f(1,\Delta x)}$$

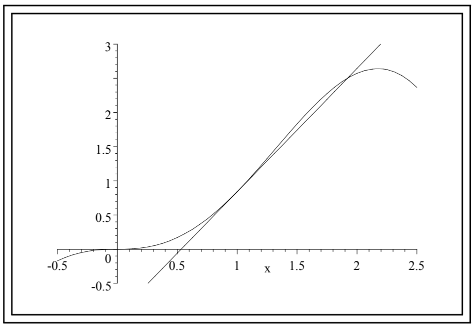
$$\boxed{(1 + \Delta x)^{\frac{3}{2}} \sin(1+\Delta x) = 0.841 + (1.802\,509)\, \Delta x + \Delta x R_f(1,\Delta x)}$$

Einige haben das Konkretisierungsproblem immer noch nicht verstanden! D.h. schreiben nur die allgemeine Formel $f(x_0 + \Delta x) = ...$ auf.

b)

	exakt	TApprox	Abs. Fehler	Lok.Fehler
$\Delta x = 0.1$	1.028 18	1.021 72	0.006 46	0.0646
$\Delta x = 0.5$	1.832 52	1.742 72	0.089 8	0.179 6

Die Figur zeigt die Besonderheiten dieser Konfiguration.



▲

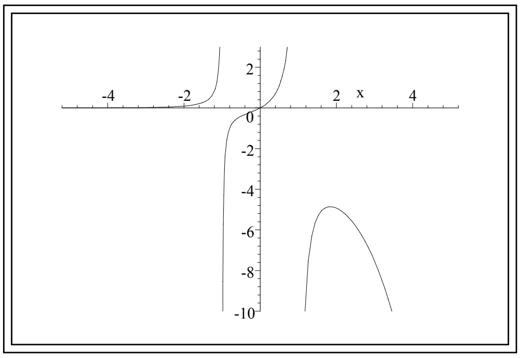
■ 10) Diskutieren Sie $\boxed{f(x)=\frac{xe^x}{1-x^2}}$ (in der besprochenen Form)

a) Die Lage des Extremwertes mit Newton näherungsweise bestimmen. (1 oder höchstens 2 Iterationsschritte)

b) Schätzen Sie die Größe des Integralwertes $\int_{\frac{3}{2}}^{2} dx f(x)$ mit Hilfe Ihrer Skizze grob ab.

c) Wo schneiden sich die Tangenten von f zu den Punkten x=2 und x=-2?

▼ Wir geben den Graphen, der fast immer korrekt skizziert wurde. (Sehr erfreulich)



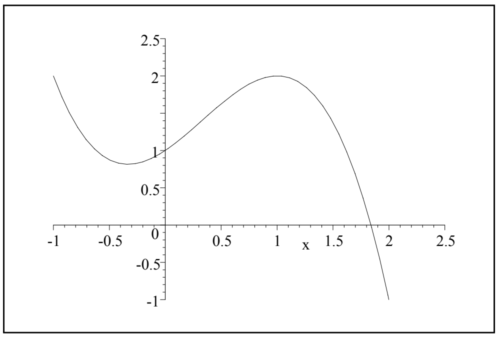
Ableitung folgt zu

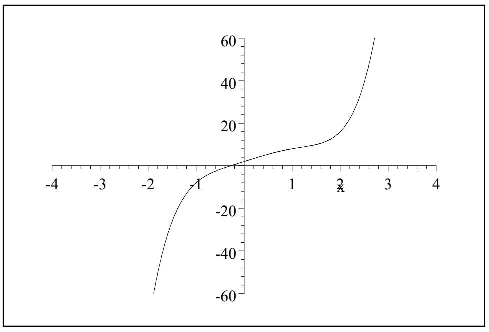
$f'(x) = \frac{e^x}{(1-x^2)^2}\left(1 + x + x^2 - x^3\right)$

$f''(x) = -e^x \frac{2-2x^4+7x+x^5}{(-1+x^2)^3}$

Zur Bestimmung der Extremwerte und Wendepunkte sollte man die beiden Polynome Null setzen! Hier deren Graphen

a) Man sieht, dass man beim Newtonverfahren hier nicht mit $x_0 = 1$ starten sollte, wie es einige versuchten. Und der Wendepunkt liegt nicht bei x=0, sondern etwas links davon.





Zu Rechnung: $p(x)=x^3-x^2-x-1$. $x_0 = 2$ $\Delta x = -\frac{x^3-x^2-x-1}{3x^2-2x-1} = -\frac{1}{7}$ $\boxed{x_1 = \frac{13}{7} = 1.0 = 1.857}$

$f(\frac{13}{7}) = -4.857$

Der nächste Schritt: $\Delta x = -\frac{x^3-x^2-x-1}{3x^2-2x-1} = -\frac{17}{966} = -0.017$ $\boxed{x_2 = 1.840}$

Die exakte Lösung ist $x = 1.83928...$

b) $\bar{f} \cdot (b-a) \approx 4.5 \cdot 0.5$

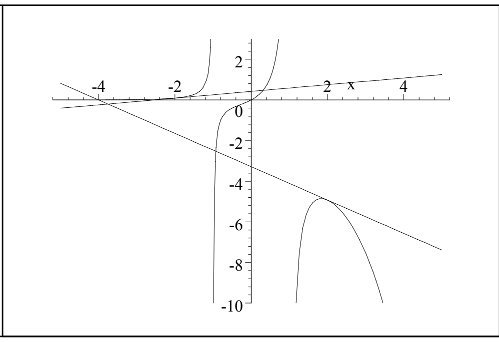
c) Die beiden Tangenten sind

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}e^2 + (x-2)\left(-\frac{1}{9}e^2\right)} \quad \text{und} \quad \boxed{y = \frac{2}{3}e^{-2} + \frac{11}{9}e^{-2}(x+2)}$$

$$\boxed{y = -4.926 + (x-2)(-0.821)} \quad \text{und} \quad \boxed{y = 9.022 \times 10^{-2} + 0.165\,(x+2)}$$

Das gibt

$$x_S = -4\frac{1+7e^{-4}}{1+11e^{-4}} = -3.756$$
$$y_S = -\frac{16}{9}\frac{e^2}{e^4+11} = -0.200$$



■ 11) Integrale

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} dx \sin(2x) \quad I_2 = \int du \sin(u)\cos(\cos u) \quad I_3 = \int_1^2 \frac{dx x^2}{x(x^2-4)}$$

▼ $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} dx \sin(2x) = \frac{1}{2}\left[-\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right] = 0.146$

$I_2 = \int du \sin(u)\cos(\cos u) = \sin(\cos(u))$

$I_3 = \int_1^2 \frac{dx x^2}{x(x^2-4)}$ Zunächst kann ein x gekürzt werdeen, was nicht immer gesehen wurde. Sodann existiert das Integral nicht, da die obere Grenze auf der einfachen Nullstelle des Nenners bei x=2 liegt. Aber man sollte unterscheiden zwischen : "Ein Integral existiert nicht" und "Das Integral ist nicht lösbar"!

■ 12*) Für eine Ellipse sei in kartesischen Koordinaten die folgende Parameterdarstellung gegeben

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_1 a \cos(t) + \vec{e}_2 b \sin(t).$$

Daraus folgt $r^2 = (\vec{r}(t))^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t$.

Machen Sie eine Skizze, die zeigt, dass für den Polarwinkel φ des Ellipsenpunktes $\tan\varphi = \frac{b}{a} \tan t$ gilt

Nun gilt $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ und $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$. Drücken Sie mit Hilfe dieser Gleichungen $\cos^2 t$ und $\sin^2 t$ durch φ aus. Das Ergebnis sollte für $\cos^2 t$ wie folgt aussehen:

$$\cos^2 t = \frac{b^2 \cos^2 \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Drücken Sie jetzt r^2 durch φ aus und leiten Sie daraus die folgende Polargleichung für die Ellipsenpunkte her:

$$r(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}$$

▼

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \vec{e}_1 a \cos t + \vec{e}_2 b \sin t \qquad r^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t \\
\tan\varphi &= \frac{b}{a} \tan t \qquad \tan t = \frac{a}{b} \tan\varphi \\
cos^2 t &= \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{b} \tan\varphi\right)^2} = \frac{b^2}{b^2 + a^2 \tan^2 \varphi} = \frac{b^2 \cos^2 \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} \\
sin^2 t &= \frac{\left(\frac{a}{b} \tan\varphi\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{b} \tan\varphi\right)^2} = \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} \\
r^2 &= \frac{a^2 b^2 \cos^2 \varphi + a^2 b^2 \sin^2 \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}
\end{aligned}$$

Diese Aufgabe ergab bemerkenswert gute Resultate

######

Man konnte etwa 60 Punkte erzielen. Die Verteilung (über Intervalle von jeweils 5 Punkte sieht wie folgt aus. 15 2twa steht für 10 bis 15 Punkte.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
								x				
								x	x			
							x	x	x			
							x	x	x		x	
	x		x		x		x	x	x	x	x	x