****

Höhere Mathematik für Physiker
Teil II

F. Krause

Kapitel 12
Eigenwerte

****

Kapitel 12: **Strukturanalyse individueller Endomorphismen V->V / Eigenwerttheorie**

12.1: **Allgemeine Theorie**

12.2: **Praktische Kriterien für die Diagonalsierbarkeit von Endomorphismen**

12.3 **Der allgemeine Fall: Die Jordanzerlegung eines Endomorphismus**

Kapitel 12: **Strukturanalyse individueller Endomorphismen V->V Eigenwerttheorie**

12.1 **Allgemeine Theorie**

12.1.0 **Vorbemerkung**

(1.0.1) Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum zunächst ohne Skalarprodukt und beliebigem kommutativem Körper. Die übliche Matrixquantifizierung eines Endomorphismus u:V→V sah so aus: Man gab eine Basis e von V vor und bildete u(e_i) als Linearkombination der e_i, also u(e_i) = $\Sigma e_k M_{ki}$. Aus den Koeffizienten berechnete man die beschreibende Matrix. Oder auch : **Man bildete die Restriktion von u auf die von den e_i erzeugten Geraden und das reichte gemäß Fundamentalidentität**. Vgl. Kap. 4.4.3.

(1.0.2) Welche Basis man wählte, war völlig gleichgültig. Man erhielt immer eine Quantifizierung. Ob diese kompliziert oder weniger kompliziert, geometrisch instruktiv oder geometrisch undurchsichtig war, danach haben wir nicht gefragt. Wichtig war vielmehr vom bisherigen Standpunkt, dass das Verfahren für **alle** Endomorphismen V→V ausführbar war.

(1.0.3) Jetzt fragen wir umgekehrt: **Kann man die Basis für einen fest vorgegebenen Endomorphismus so wählen, dass die quantitative Darstellung möglichst einfach wird und die Restriktion auf die Basisvektoren möglichst instruktiv?**

Und bei Erfolg als Anschlußproblem: Für welche weiteren Endomorphismen außer dem gegebenen ist dieselbe gefundene Basis auch noch optimal?

(1.0.4) Hat man sich das erste Problem bewußt gestellt, so legen die bisherigen Erfahrungen mit der linearen Algebra einen Antwortversuch der folgenden Art nahe:

- ▼ Versuche den gesamten Raum V in eine direkte Summe von Teilräumen zu zerlegen, derart dass die Restriktion von u auf jeden dieser Teilräume ein Vielfaches der Identität ist. Jeder Vektor eines solchen Teilraumes ist dann ein **Eigenvektor**. Beim Übergang vom Urbild zum Wert bleibt die Richtung des Vektors erhalten, höchstens die Länge darf sich verändern.

- ▼ Wählt man eine Basis aus Vektoren dieser Teilräume, wird die beschreibende Matrix eine **Diagonalmatrix**. Die geometrische Struktur der Restriktionen auf die von den Basisvektoren erzeugten Geraden ist optimal durchschaubar.

(1.0.5) ??? Damit ist klar, was zu fragen ist: **Kann man zu einem gegebenen u:V→V eine Basis aus Eigenvektoren finden**?

Die Nützlichkeit der Eigenwerttheorie sollte bereits in Kap. 7 klar geworden sein: Über einen Eigenvektoransatz erhielt man die Lösungen linearer autonomer Diferentialgleichungen. Und auch die Separationsmethode für partielle Differentialgleichungen benutzte Eigenvektoren.

12.1.1 **Das Begriffssystem**

(1.1.1) Wir beginnen mit den grundlegenden Definitionen und ersten zugehörigen Resultaten. Im Hinblick auf später auftretende Komplikationen verallgemeinern wir einige Stellen bereits stärker. Einen Teil der Definitionen kennen wir bereits, stellen sie aber nochmals systematisch zusammen. (Vgl Kap.7.1.8b)

Definition:	V Vektorraum über dem kommutativen Körper K und u:V→V ein Endomorphismus.
Dann	heißt ein Vektor x∈V ein *Eigenvektor von u*, wenn es eine Zahl λ ∈K gibt, für die u(x)=λx gilt und x≠0 ist. Diese Zahl λ heißt *der Eigenwert von u zum Eigenvektor x.* Die Menge aller Eigenwerte von u wird *das* Spektrum *von u* genannt. Sp(u)$\subset K$.Das Spektrum ist eine **Teilmenge** von K. Für jedes λ ∈Sp(u) heißt $\mathcal{E}(\lambda)$={x|x∈V, u(x)=λx} *der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda \in Sp(u)$.*

(1.1.3) Für jedes λ ist $\mathcal{E}(\lambda)$ offenbar ein Teilraum von V. Für $\lambda \in$Sp(u) ist dieser nicht trivial, also ungleich dem Nullraum, denn dann gibt es mindestens einen Eigenvektor $\neq$0. Für $\lambda \notin Sp(u)$ ist der Raum $\mathcal{E}(\lambda)$ auch bildbar und gleich dem Nullraum.

(1.1.4) Auf dem Teilraum $\mathcal{E}(\lambda)$ ist u eine besonders einfache Abbildung, nämlich gleich $\lambda \cdot id$. Wir setzen u=λid+Rest. Dann ist der Restoperator genau auf $\mathcal{E}(\lambda)$ die Nullabildung. Oder auch

$$\boxed{\mathcal{E}(\lambda)=\text{Kern}(\text{u-}\lambda\text{id})}.$$

(1.1.5) Zusammenfassend haben wir folgende Charakterisierungen für Eigenwerte mit Hilfe des Raumes $\mathcal{E}(\lambda) = Kern(u - \lambda id)$:

$$\begin{aligned}\lambda \ \in \ & Sp(u) \Longleftrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \neq \{0\} \Longleftrightarrow Kern(u - \lambda id) \neq \{0\} \\ & (\Longleftrightarrow \det(u - \lambda id) = 0 \Longleftrightarrow (u - \lambda id) \text{ ist nicht invertierbar.})\end{aligned}$$

Beachten Sie: **Damit sind wir in der Lage, konkrete Beispiele routinemäßig durchzurechnen.** Wir müssen nur unsere bisherigen Resultate zusammenstellen und nutzen:

- ▼ Die Matrix M sei gegeben. Bilde M-λid und damit det(M-λid).
- ▼ Berechne det(M-λid) - Kap.9 . Das Ergebnis ist ein Polynom vom Grade n=dimV in λ.
- ▼ Bestimme die Nullstellen. (Ev. durch Raten und Polynomdivision).
- ▼ Setze die Nullstellen nacheinander in das lineare homogeneGleichungssystem $\boxed{\text{M-}\lambda id = 0}$ ein und löse es. (Vorkurs, Kap.5). Man sucht jeweils nur eine Basis des Lösungsraumes. Beachte: Der Rang ist nicht maximal, so dass (beim Lösen) eine Bedingung unberücksichtigt bleiben kann.

In (1.3.29) wird dies Schema etwas erweitert erneut gegeben samt einem konkreten Beispiel.

(1.1.6) Die letzten beiden eingeklammerten Bedingungen in (1.1.5) setzen zusätzlich voraus, dass V endlichdimensional ist. Der unendlichdimensionale Fall, den wir hier nicht verfolgen, verlangt eine weitere Entfaltung des Begriffsapparates, den man speziell für Banachräume vornimmt.

(1.1.7) Wir benötigen für Kap.12.3 folgende Verallgemeinerung:

Definition:	Für $\lambda \in Sp(u)$ und k=1,2,3,.. sei der k-te verallgemeinerte Eigenraum definiert durch $\boxed{\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)=\text{Kern}((\text{u-}\lambda id)^k)}$.
	Zusätzlich sei $\mathcal{E}^{(0)}(\lambda)=\{0\}$.

(1.1.8) Man bildet also nicht nur Kern(u-λid) sondern auch Kern(u-λid)$^2 = Kern\left((u - \lambda id) \circ (u - \lambda id)\right)$ usw. Das sind erneut Teilräume und es gilt offensichtlich $\boxed{\mathcal{E}^{(r)}(\lambda) \subset \mathcal{E}^{(s)}(\lambda) \text{ für r<s.}}$ Die Folge der verallgemeinerten Eigenräume kann höchstens wachsen. Ist V endlichdimensional, muss die Folge k$\mapsto \mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$ aus Dimensionsgründen stationär werden! D.h. es gibt s mit $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)=\mathcal{E}^{(s)}(\lambda)$ für alle k$\geq$s.

Setzt man wieder u=λid+Rest, so ist der Rest auf $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$ nicht notwendig Null, aber nilpotent! **Er ergibt nach ausreichender Iteration Null.** (Kap. 4.4.5b und 6.4.5)

(1.1.9) **Hilfssatz 1**:

Für $\lambda \in Sp(u)$ und k$\in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$ invariant unter u. D.h. es gilt $\boxed{\text{u}(\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)) \subset \mathcal{E}^{(k)}(\lambda).}$

Beweis: (u-λid)$\circ$u=u$\circ$(u-λid).

(1.1.10) **Hilfssatz 2:**

Es **seien**	$\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_r$ **verschiedene** Eigenwerte zu u. k$_i \in \mathbb{N}$ und x$_i \in \mathcal{E}^{(k_i)}(\lambda_i)$ und x$_i \neq 0$ für 1=1,2,..,r.
Dann	Dann sind die x$_i$ linear unabhängig. D.h. die Teilräume $\mathcal{E}^{(k_i)}(\lambda_i)$ bilden eine direkte Summe.

Insbesondere sind Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten (k$_i = 1$) immer linear unabhängig.

(1.1.11) **Beweis**: Sei $z = x_1\alpha_1 + ...x_r\alpha_r = 0$ mit etwa $\alpha_1 \neq 0$. Zu zeigen: x_1=0. Bilde

$$\varphi = (u - \lambda_2 id)^{k_2} \circ ... \circ (u - \lambda_r id)^{k_r}$$

und wende φ auf z an. Alle Summanden verschwinden bis auf den ersten. Also $\varphi(x_1)$ =0. Man möchte folgern, dass x_1 =0 ist. Sei φ_1 die Einschränkung von φ auf $\mathcal{E}^{(k_1)}(\lambda_1)$. Es genügt, zu zeigen, dass φ_1 invertierbar ist. Und hierfür genügt es, zu zeigen, dass jeder der Faktoren (u-$\lambda_k$id) auf $\mathcal{E}^{(k_1)}(\lambda_1)$ invertierbar ist. Dazu schreibt man:

$$(u - \lambda_k id) = (\lambda_1 - \lambda_k)\left(id + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_k}(u - \lambda_1 id)\right)$$

Der zweite Summand $(u - \lambda_1 id)$ ist aber auf $\mathcal{E}^{(k_1)}(\lambda_1)$ nilpotent! Und jeder Endomorphismus der Form "id + nilpotent" ist invertierbar über die geometrische Reihe: $(\text{id+n})^{-1}$=id-n +$(\text{-n})^2$ +....., die ja im nilpotenten Fall nach endlich vielen Termen abbricht.

Die folgenden beiden Fragen lassen sich mit den Methoden aus Kapitel 4 behandeln.

☐ Studieren Sie das Wachsen der verallgemeinerten Eigenräume am Beispiel u-λid=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die zugehörigen Kerne.

☐ Sei $\alpha \neq \beta$ und M=$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das Spektrum und die zugehörigen Eigenräume.

12.1.2 Der Idealfall: Diagonalisierbarkeit

(1.2.1) Kehren wir zu unserer Ausgangsfrage zurück: **Kann man den Raum V in Teilräume aus Eigenvektoren zerlegen**. Oder auch: **Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren**?

(1.2.2) Von jetzt ab sei V stets endlichdimensional.

(1.2.3) Zwei Fälle sind - abhängig von u - denkbar und kommen auch vor:

Definition:	V endlichdimensional über K und u:V→ V linear.
Dann	heißt u *diagonaliserbar,* wenn es eine Basis aus Eigenvektoren von u gibt.

Den alternativen Fall, dass es keine Basis aus Eigenvektoren gibt, werde wir später analysieren. Wenn Sie die letzte Frage nach (1.1.11) gerechnet haben, verfügen Sie bereits über ein Beispiel eines nicht diagonalisierbaren Endomorphismus.

(1.2.4) Anders formuliert können wir auch sagen:

$$V \text{ diagonalsierbar} \Longleftrightarrow \text{V ist direkte Summe der } \mathcal{E}(\lambda): \ V = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \mathcal{E}(\lambda)$$

Im nicht diagonalisierbaren Fall ist zu vermuten, dass V dann gleich der direkten Summe der (1.1.7) eingeführten verallgemeinerten Eigenräume $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$ für ausreichend großes k ist. In Kap. 12.3 wird das bewiesen werden.

(1.2.5) Überdies werden wir sehen, dass wir unter gewissen Umständen den alternativen Fall doch noch auf den diagonalisierbaren zurückführen können. ("Halbeinfache Endomorphismen", Kap. 11.1.3a).

(1.2.6)

Definition:	Für $\lambda \in Sp(u)$ wird $\mu = \dim \mathcal{E}(\lambda)$ die *geometrische Multiplizität des Eigenwertes* λ genannt. Es gilt 1≤ $\mu \leq n$.

(1.2.7) Hieraus folgt ein elementares, aber immer wieder nützliches Resultat. Nach Hilfssatz 2 ist die Summe der Eigenräume ja eine direkte, so dass sich die Multiplizitäten zur Dimension des jeweils erzeugten

Raumes addieren. Und jeder Eigenwert trägt mindestens eine 1 zu dieser Summe bei, die insgesamt den Wert n=dimV nicht überschreiten darf.

Folgerung: !!!!	u ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Summe der geometrischen Multiplizitäten gleich n ist. Das ist insbesondere der Fall, wenn es n verschiedene Eigenwerte gibt.

(1.2.8) **Sei u diagonalisierbar** und E_i eine Basis aus Eigenvektoren (mit zugehörigen Eigenwerten λ_i). Beachten Sie: diese λ_i müssen keineswegs alle verschieden sein. Hat λ_i die geometrische Multiplizität μ_i, dann sind ebensoviele der λ einander gleich.

(1.2.9) Was folgt aus der Diagonalisierbarkeit? Wegen $u(E_i)=E_i\lambda_i$ ist die u bezüglich E beschreibende Matrix eine **Diagonalmatrix** und die Diagonalelemente sind gerade die Eigenwerte! Mit Hilfe der Tensordarstellung linearer Abbildungen erhalten wir die Formel (E_i^* die zu E_i duale Basis! $\lambda_i = \lambda_k$ für i$\neq k$ ist hier zulässig):

$$\boxed{u=\lambda_1 E_1\otimes E_1^*+....+\lambda_n E_n\otimes E_n^*} \qquad \boxed{u(x)=\lambda_1 x_1 E_1+.....+\lambda_n x_n E_n}$$

(1.2.10) Wendet man erneut u an, so folgt:

$$u^2 = u\circ u = \lambda_1^2 E_1\otimes E_1^* + ... + \lambda_n^2 E_n \otimes E_n^*$$

usw. D.h.. jedes Anwenden von u wirkt immer nur auf den E-Faktor im Tensorprodukt und produziert einen zugehörigen gewöhnlichen Faktor λ im jeweiligen Summanden. Aus der Zusammensetzung $u\circ u$ wird die Multiplikation $\lambda\lambda$.

(1.2.11) Noch besser ist es, mit der zu der Basis gehörenden Darstellung für die identische Abbildung zu beginnen (vgl. Kap.9.4.3b):

Satz:	Es sei u:V$\to V$ diagonaliserbar und E Basis aus Eigenvektoren.
Dann	Dann erhält man die folgende **Zerlegungung der Eins**:
	$\mathrm{id}_V = E_1\otimes E_1^* + E_2\otimes E_2^* + ... + E_n\otimes E_n^*$. Damit folgt:
	$u^p = \lambda_1^p E_1\otimes E_1^* + \lambda_2^p E_2 \otimes E_2^* + ... + \lambda_n^p E_n\otimes E_n^*$.

$E_j\otimes E_j^*$ ist in V die Projektion auf die durch E_j erzeugte Gerade! $E_j\otimes E_j^*(x)=x_j E_j$. Und auf dieser Geraden ist u einfach die Multiplikation mit λ_j. **Die Zerlegung der Eins stellt u genau in der gewünschten Weise als Summe einfachster Abbildungen dar!**

(1.2.12) Aber in (1.2.11) ist ja nicht nur der Endomorphismus u auf diese Weise dargestellt. Wir erinnern an die zweite Frage aus (1.0.3): Per Linearkombination kann man zunächst zu Polynomen in u übergehen und durch Reihenbildung zu durch Potenzreihen darstellbare Funktionen von u. Das Ergebnis ist eine "Funktion des Endomorphismus u".

Und das war es, was in Kapitel 7 als offenes Problem verblieb: Zu einer gegebenen linearen Abbildung M die Matrixfunktion e^{tM} möglichst einfach zu konstruieren.

Jetzt liefert unsere Konstruktion immer eine Formel der folgenden Art:

$$f(u) = f(\lambda_1)E_1\otimes E_1^* + f(\lambda_2)E_2\otimes E_2^* + ... + f(\lambda_n)E_n\otimes E_n^*.$$

(1.2.13) Das führt zu der folgenden wichtigen

Definition:	K=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei u ein diagonalisierbarer Endomorphismus und E_i eine Basis aus Eigenvektoren. Sei weiter f:D$\to\mathbb{R}$ mit D$\subset\mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit Sp(u)$\subset D$, die sich in D als punktweiser Grenzwert von Polynomen darstellen läßt.
Dann	wird der Endomorphismus f(u) wie folgt definiert: f(u)=$f(\lambda_1)E_1\otimes E_1^* + f(\lambda_2)E_2\otimes E_2^* + ... + f(\lambda_n)E_n\otimes E_n^*$.
	Es gilt Sp(f(u))=$\{y \mid y=f(\lambda),\ \lambda\in Sp(u)\}$.

(1.2.14) Ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Eigenvektorbasis? Ja,! Die Eigenräume selbst sind absolut. Innerhalb der Eigenräume kann man die Basen noch beliebig wählen. In Jedem Eigenraum ist u und damit f(u) aber proportional zu id und das ist in jeder Basis gleich der Summe der $E\otimes E^*$.

(1.2.15) Beachten Sie: Mit u ist dann auch f(u) diagonalisierbar und das Spektrum von f(u) ist wie angegeben Sp(f(u))=$\{y \mid y=f(\lambda),\ \lambda\in Sp(u)\}$. Allerdings kann durchaus $f(\lambda_i)=f(\lambda_k)$ gelten für $\lambda_i\neq\lambda_k$.

(1.2.16) Unterschiedliche reelle Funktionen können zu demselben Endomorphismus f(u) führen! Inspektion der Definitionsformel für f(u) zeigt:

Satz:	Es **seien** f und g zwei reelle Funktionen, deren Definitionsbereich Sp(u) enthält. **Dann** gilt f(u)=g(u) genau dann, wenn f und g auf dem Spektrum übereinstimmen.

(1.2.17) **Dieser Satz hat nützliche Konsequenzen**: Angenommen man möchte eine Endomorphismus- oder Matrixfunktion wie e^{tu} oder sin(ωu) oder $\frac{i}{1+u}$ berechnen, die über eine Reihendarsteilung oder eine Bedingungsgleichung für f(u) definiert, aber rechnerisch nur schwer zugänglich ist. x=f(u)=$\sqrt{1+u}$ etwa wird man als Lösung der Polynomgleichung $x^2 - id$=u interpretieren. Die Gleichung ist im Endomorphismenring ja problemlos formulierbar.

Wir beschränken uns auf den Fall K=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Und wir setzen voraus, dass f punktweiser Limes einer Polynomfolge ist.

☐ Beweisen Sie: Angenommen die Polynome p_n konvergieren punktweise in D gegen f, dann konvergiert $p_n(u)$ gegen f(u).

Wir nehmen an, dass wir die Menge Sp(u) kennen, die ja höchstens n Elemente haben kann. Nun bestimmen wir ein möglichst einfaches Polynom p mit p(x)=f(x) für alle Elemente aus dem Spektrum und bilden p(u). Das ist bei einem Polynom ja immer mit endlich vielen Rechenschritten möglich. (Angenommen es ist p(x)=2+x-3x^2. Daraus ist p(u)=2id+u-3u^2 zu bilden. Das sind wenige Matrixprodukte und Matrixadditionen. Dann gilt f(u)=p(u). **Mit dem leicht zugänglichen p(u) haben wir auch das möglicherweise schwer zugängliche f(u) bestimmt.**

(1.2.18) Diese Konstruktion nennen wir *die Polynommethode der Endomorphismuskonstruktion.*

(1.2.19) **Zur Durchführung benötigen man nur das Spektrum, nicht die Eigenvektoren**. Letztere gingen nur als Katalysatoren in die Begründung der Konstruktion ein.

(1.2.20) Nochmals das erforderliche Vorgehen:

▼ Bestimme das Spektrum von u, also Sp(u)$\subset \mathbb{R}$.

▼ Gegeben ein reelles x$\mapsto$f(x). Gesucht: Der Endomorphismus f(u).

▼ Bestimme ein Polynom x$\mapsto$p(x) mit p(x)=f(x) für alle x$\in$Sp(u).
Das sind höchstens n=dimV Punkte!

▼ Setze für die Zahl x den Endomorphismus u ein.

▼ Das gibt p(u). Es ist f(u)=p(u).

☐ Angenommen das Spektrum hat nur zwei Elemente und dimV=2. Was für ein Polynom setzte man an? Bestimmen Sie die Koeffizienten und geben Sie so eine allgemeine Formel für f(u) an. Was für ein Polynom ist anzusetzen, wenn das Spektrum drei Elemente hat?

(1.2.21) Wir spekulieren noch kurz über die formale Struktur, die hinter dieser Konstruktion steckt. Sei $\mathcal{F}$ ein Ring reeller Funktionen, die sämtlich für die Punkte aus Sp(u) definiert sind. Dann sollte eine die Ringstruktur erhaltende Abbildung $(\mathcal{F}, f \mapsto f(u), End_K(V))$ vorliegen. D.h. wir parametrisieren gewisse von u erzeugbare Endomorphisnnen durch entsprechende reelle Funktionen, wobei mit Hilfe der Ringstruktur formulierbare Beziehungen aber auch Grenzwertbeziehungen erhalten bleiben. Wir lösen Aufgaben für End(V), indem wir im Parameterraum rechnen, d.h. indem wir mit reellen Funktionen rechnen. Die Rechnungen sind dann im Endomorphismenraum einfach für die Eigenwerte auszuführen und das sind Körperelemente! Und der Tensorformalismus macht daraus die gewünschten Endomorphismen. Kurz: Konstruktionen wie "e-hoch-Matrix" oder "log(1+Matrix)"sind für diesen Formalismus kein Problem. Aber verwechseln Sie das bitte nicht mit Konstruktionen, bei denen die Operation f einfach mit jeder Komponente ausgeführt wird. Etwa die Matrix, die aus den Wurzeln aller Komponenten von M gebildet wird. Derartiges ist mathematisch meist wenig nützlich, findet sich aber nicht selten in Computeralgebrasystemen implementiert. Kurz: Ist M=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ dann ist $\sqrt{M}$ mitnichten gleich der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, wie man leicht nachprüft.

☐ Berechnen Sie $\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}}$ mit Hilfe der Polynommethode! Das Spektrum ergibt sich mit den in Kap. 7 besprochenen Methoden zu Sp(M)= $\{5+2\sqrt{6}, 5-2\sqrt{6}\}$.

(1.2.21) Will man nicht beim Spektrum aufhören, sondern bis zur Zielgeraden - der Zerlegung der Eins - vordringen, dann ergeben sich im Rahmen der Matrixdarstellung noch einige Vereinfachungen. Wir wählen K=$\mathbb{R}$ und V=$\mathbb{R}^n$ mit kanonischem euklidischen Skalarprodukt. Dann ist der kanonische Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n*}$ einfach die Transposition. Zusätzlich gilt bzw. ist zu beachten:

▼ Die duale Basis ist in **Zeilenform** zu schreiben.

▼ Das Tensorprodukt E⊗E* ist ein Spezialfall des Matrixproduktes.

▼ Die Spaltendarstellung der Basis E bildet die Spalten von T^{-1}, wenn T die Transformationsmatrix ist (E="neu" durch "alt").

▼ Die Zeilen von T ergeben die Zeilendarstellung der reziproken Basis. (Kap.5.2.4c)

(1.2.22) Es folgt ein Beispiel unter Auslassung der Zwischenrechnungen. Die einzelnen Größen werden natürlich auch von Computeralgebraprogrammen geliefert. Zunächst **die Matrix, das Spektrum und eine Basis aus Eigenvektoren**. Das ist die übliche Reihenfolge der Bestimmung. Die Ergebnisse zeigen, dass das Beipiel gut rechenbar ist: Keinerlei Brüche und Wurzeln!

$M=\begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 \\ 1 & -10 & 7 \\ 1 & -17 & 12 \end{pmatrix}$	Sp(M)={1,2,3}	$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $E_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Über $E=eT^{-1}$ folgt T^{-1} und daraus T. Hier ist e die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Aus T liest man E* ab. Alternativ kann man T über die Formeln für die reziproke Basis erhalten, wenn man diese in Zeilenform schreibt. Man findet:

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$T=\begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$E_1^* = (-1, 7, -4)$ $E_2^* = (1, -5, 3)$ $E_3^* = (-1, 2, -1)$

Damit verfügen wir über alle Bestandteile, um die zugehörige **Zerlegung der Eins** anzugeben:

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 7, -4) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} (1, -5, 3) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (-1, 2, -1) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ -2 & 14 & -8 \\ -3 & 21 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & -15 & 9 \\ 5 & -25 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rechts stehen die Projektionsmatrizen auf die drei Eigenräume.

☐ Verifizieren Sie, dass die letzte Summe wirklich gleich der Einheitsmatrix ist. Dann die gesamte Rechnung.

☐ Wie testet man, dass wirklich Projektionsmatrizen vorliegen? Probieren Sie das an einer der drei Matrizen aus. Welchen Rang muss eine derartige Matrix haben?

(1.2.24) Und jetzt die Bestimmung einiger Funktionen von M. Sagen wir $\sqrt{M}$ und M^{-1}. Die zugehörigen reellen Funktionen sind x↦ $\sqrt{x}$ und x↦ $\frac{1}{x}$. Ihre Werte erfüllen $(\sqrt{x})^2 = x$ und $x \cdot \frac{1}{x} = 1$. Beide Beziehungen bleiben nach Einsetzen von M für x erhalten, wobei 1 durch id zu ersetzen ist und die Multiplikation in die Zusammensetzung übergeht. Das rechtfertigt unsere Schreibweise $\sqrt{M}$ und M^{-1}. Beide Endomorphismen lassen sich sowohl über die Polynommethode als auch über die Zerlegung der Eins bestimmen.

(1.2.25) Bestimmung von $\sqrt{M}$ über die Polynommethode: Wir benötigen ein Polynom $p(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$, das für die Elemente x=1,2,3 mit $\sqrt{x}$ übereinstimmt.

Die Rechnung gibt: $\alpha = 3 - 3\sqrt{2}$, $\beta = \frac{1}{2}(-5 + 8\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$ und $\gamma = \frac{1}{2}(1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Für diese Werte gilt $p(M)=\sqrt{M}$. Über Einsetzen und Umsortieren folgt:

$$\begin{aligned} \sqrt{M} &= 1(3id - \frac{5}{2}M + \frac{1}{2}M^2) + \sqrt{2}(-3id + 4M - M^2) + \sqrt{3}\left(id - \frac{3}{2}M + M^2\right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ -2 & 14 & -8 \\ -3 & 21 & -12 \end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & -15 & 9 \\ 5 & -25 & 15 \end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt erfordert einige Zwischenrechnung un liefert das Resultat, das sich unmittelbar aus der Zerlegung der Einheit ergibt, wie ein Blick auf (1.2.22) zeigt.

(1.2.26) Die inverse Matrix M^{-1} existiert genau dann, wenn 0 nicht im Spektrum liegt, was hier der Fall ist. Man muß ja für alle Elemente des Spektrums $\frac{1}{x}$bilden können. Über die Zerlegung der Eins finden wir ohne jede Rechnung:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ -2 & 14 & -8 \\ -3 & 21 & -12 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & -15 & 9 \\ 5 & -25 & 15 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

(1.2.27) Man sieht: Ist die Zerlegung der Eins erst einmal verfügbar, dann kann man mit ihr extrem einfach arbeiten, auch einfacher als mit der Polynommethode und viel einfacher als mit der in Kapitel 4.4.4c beschriebenen Methode der Umwandlung der Bedingungen in ein Gleichungssystem für die Komponenten. Das Rechnen mit Endomorphismen oder Matrizen wird auf das Körperrechnen zurückgeführt, allerdings unter der Vorraussetzung, dass sich die beteiligten Endomorphismen aus dem Ausgangsendomorphismus u aufbauen.

☐ Bestimmen Sie für M aus (1.2.22) den Endomorphismus exp(tM)=e^{tM}. Diskutieren Sie die Konsequenzen von (1.2.14) und (1.2.16) für die Bestimmung der Lösungen linearer autonomer Differentialgleichungen (Kap.7).

☐ Folgendes ist noch abzusichern: Zeigen Sie. daß das über (1.2.14) definierte e^{tM} gleich dem in Kap.7 mit Hilfe der Potenzreihe definierten e^{tM} ist.

☐ Wie steht es mit sinM, wie mit ln(M)? Wie mit $(\text{id}+M)^{-1}$ und $(\text{id}-M)^{-1}$.

12.1.3 **Das charakteristische Polynom**

(1.3.1) Zwei Fragen verbleiben zur genaueren Klärung:

▼ 1) Wie erhält man allgemein das Spektrum eines Endomorphismus und welche Probleme treten dabei auf.

▼ 2) Wie erkennt man, ob der Endomorphismus diagonalisierbar ist.

(1.3.2) Wir beginnen mit dem ersten Themenkreis. Es sei dimV=n<∞. Für n=2 haben wir das Problem in Kap.7.1.8 eingehend besprochen. Jetzt diskutieren wir den allgemeinen Fall. Vgl. auch Kap. 9.1.1a.

(1.3.3) Was läßt sich über Sp(u) sagen? $\lambda \in$Sp(u) heißt, dass u-λid$_V$ einen nichttrivialen Kern hat. Und das ist gleichbedeutend mit det(u-λid)=0. Diese letzte Gleichung ist eine Bedingung für den Eigenwert λ allein, die gesuchten Eigenvektoren kommen in ihr nicht mehr vor.

(1.3.4) Denkt man sich diese Determinante mit Hilfe der äußeren Algebra ausgewertet, so sieht man per Inspektion, dass ein Polynom n-ten Grades in λ vorliegt. Man nennt dies Polynom das *charakteristische Polynom des Endomorphismus*. Wir bezeichnen es mit x$\mapsto \chi_u(x)$. In der Physik wird manchmal der Name *Säkulargleichung* benutzt. **Die Nullstellen dieses Polynoms bilden das Spektrum von u.** Auch einige der Koeffizienten dieses Polynoms folgen unmittelbar, wie wir bereits aus Kap.9 wissen:

$$\begin{aligned} \chi_u(x) &= (-x)^n + Tr(u)(-x)^{n-1} + ... + \det(u) \\ Tr(u) &= \text{"Spur von u"} = \text{Summe der Diagonalelemente.} \end{aligned}$$

(1.3.5) Wie wir noch sehen werden, interessieren uns vornehmlich unter u invariante Teilräume von V. Wie macht sich die Invarianz eines Teilraumes im charakteristischen Polynom bemerkbar?

(1.3.6) Der folgende nützliche Hilfssatz gibt die Antwort:

Hilfssatz 3:

Sei	u:V→V linear und F⊂V unter u invarianter Teilraum und $u_0 : F \to V$ die Restriktion von u auf F.
Dann	gilt detu=det$u_0 \cdot \det u_Q$, wobei u_Q ein hier nicht weiter zu spezifizierender Homomorphismus ist. Kurz: detu_0 ist Teiler von detu.

(1.3.7) Beweis: Wähle eine Basis von F und ergänze zu einer Basis von V. Die beschreibende Matrix hat Dreiecksblockform, so dass die Determinante in der beschriebenen Weise faktorisiert.

(1.3.8) Ist F unter u invariant, so ist F offenbar auch unter u-λid invariant. Also:

Folgerung: Ist F unter u invariant und u die Restriktion von u auf F, **dann** ist χ_{u_0} ein Teiler von χ_u. (Teiler im Sinne der Polynome.)

(1.3.9) Für invariante Geraden ist das charakteristische Polynom vom ersten Grade und hat damit immer eine Nullstelle. Jede unter u invariante Gerade besteht aus Eigenvektoren zu u! Ist λ der Eigenwert, so enthält das charakteristische Polynom den Faktor (x-λ).

(1.3.10) Also: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte. Mit etwas mehr Genauigkeit: Die Nullstellen des Polynoms, die im zu u gehörigen Körper K liegen, bilden das Spektrum. Hat man eine solche Nullstelle, ist das zugehörige Eigenvektorproblem als lineare Gleichung routinemäßig behandelbar. Vgl. Kapitel 7.1.8b.

(1.3.11) Aber damit stoßen wir auf ein Problem. Mit dem Vektorraum ist auch der Körper festgelegt. Die Nullstellen des Polynoms müssen jedoch keineswegs alle in diesem vorgegebenen Körper liegen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass wieder K=$\mathbb{R}$ oder K=$\mathbb{C}$ gilt. Dann wissen wir, dass es in $\mathbb{C}$ immer Nullstellen gibt. In $\mathbb{R}$ dagegen muss das nicht der Fall sein. p(x)=x^2+4 etwa hat keine reelle Nultstelle. Ein reeller Vektorraum mit diesem charakteristischen Polynom hat ein leeres Spektrum.

D.h man sollte besser die exakte Schreibweise $\mathrm{Sp}_K(u)$ statt $\mathrm{Sp}(u)$ verwenden.

$$Sp(u) = \{\lambda | \lambda \in K \text{ und } \lambda \text{ ist Nullstelle von } \chi_u(x)\}.$$

(1.3.12) Hierzu ein wichtiges Beispiel: V=$\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ und u=$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\boxed{\chi_u(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1.}$$

Die beiden Nullstellen sind e$^{i\alpha}$ und e$^{-i\alpha}$. Für $\alpha \neq k\pi$ mit k$\in \mathbb{Z}$ sind das keine reellen Zahlen. D.h. das Spektrum ist - der geometrischen Erwartung an ein Drehmatrix entsprechend - leer.

$$Sp_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset \quad \text{ aber } \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u) = \{e^{-i\alpha}, e^{-i\alpha}\}$$

(1.3.14) Das überaus wichtige Beipiel verdeutlicht, was geschehen kann: Sämtliche Nullstellen des charakteristischen Polynoms gehören keineswegs immer zum Spektrum. Zum Spektrum gehören nur diejenigen Nullstellen, die im Körper des Vektorraumes liegen.

(1.3.15) Im Körper $\mathbb{C}$ zerfällt nun jedes Polynom vollständig in das Produkt seiner Linearfaktoren. Hier stimmen Spektrum und Nullstellenmenge des charakteristischen Polynoms überein.

(1.3.16) **Linearfaktordarstellung des charakteristischen Polynoms im Körper der komplexen Zahlen:**

- ▼ Ist $\chi_u(x)$ das charakteristische Polynom des Endomorphismus, dann gibt e $r \leq n$ verschiedene Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_r \in \mathbb{C}$, derart dass gilt $(-1)^n\chi_u(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2}.....(x-\lambda_r)^{\alpha_r}$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_r = n = \dim V$.
- ▼ Liegen alle Nullstellen im Körper des Vektorraumes, gilt $\mathrm{Sp}_K(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_r\}$.
- ▼ Andernfalls gilt $\mathrm{Sp}_K(u) = K \cap \{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_r\}$.
- ▼ Für jedes λ $\in$Sp(u) heißt die in der Darstellung auftretende eindeutig bestimmte Zahl α *die algebraische Multiplizität des Eigenwertes.*

(1.3.17) Kritisch ist der Fall K=$\mathbb{R}$, aber λ nicht reell. Da unter diesen Umständen das charakteristische Polynom rein reelle Koeffizienten hat (K=$\mathbb{R}$), müssen solche nicht reelle Nullstellen immer **paarweise** auftreten: Denn ist λ eine solche Nullstelle, dann gilt dasselbe auch für die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}$.(Beweis: Aus $\chi_u(\lambda) = 0$ folgt $\overline{\chi_u(\lambda)} = 0$ und daraus bei **reellen** Koefizienten $\chi_u(\overline{\lambda}) = 0$.)

(1.3.18) Unter diesen Umständen gibt es zwei Möglichkeiten, um weiter zu kommen:

▼ **1. Weg:** Man macht aus dem Vektorraum über $\mathbb{R}$ einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ und gelangt so zum günstigen Fall zurück, in dem das Spektrum gleich der Menge aller Nullstellen des charakteristischen Polynoms ist.

▼ **2.Weg:** Man sucht sich anstelle der invarianten Geraden aus Eigenvektoren, die zu den in $\mathbb{R}$ liegenden Nullstellen gehören, **andere invariante Tellräume**. Etwa solche, die zu einem Paar konjugiert komplexer Nullstellen $(\lambda, \overline{\lambda})$ gehören und auf denen u auch ein einfaches Verhalten im gegebenen Vektorraum über $\mathbb{R}$ hat. (Es zeigt sich, dass das tatsächlich Ebenen sind.)

12.1.3a Komplexifizierung des Vektorraumes (Körpererweiterung)

(1.3.19) Den zweiten Weg werden wir mit Hilfe von Resultaten des ersten untersuchen. Daher zuerst die Methode der Körpererweiterung.

(1.3.20) Wir haben bereits im Zusammenhang mit der Komplexifizierung linearer Differentialgleichungen aus einem Vaktorraum V der Dimension n über $\mathbb{R}$ kanonisch einen Vektorraum W derselben Dimension über $\mathbb{C}$ gemacht. Kap.7.1.8e. War e eine Basis von V. dann sollte das auch eine Basis von W werden, nur dass eben die Zahlfaktoren jetzt aus $\mathbb{C}$ sein durften. Alternativ ließ sich W wie folgt beschreiben: W=V$\oplus$iV in dem Sinne, dass W ein Vektorraum der Dimension 2n über $\mathbb{R}$ war mit Basis 1e_k und ie_k. Jeder Vektor z aus W schrieb sich eindeutig z=x+ig mit x,y$\in$V.

☐ Man kann W über $\mathbb{C}$ noch auf eine weitere Weise einführen: Als Tensorprodukt $\mathbb{C}^1\otimes$V. Dabei ist $\mathbb{C}^1$ als zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ anzusehen. Zeigen Sie das.

(1.3.21) Als nächstes wird der Endomorphismus u kanonisch von V auf W ausgedehnt, also komplexifiziert. Für die Ausdehnung $\overline{u}$ gilt definitionsgemäß $\overline{u}(z) = \overline{u}(x + iy) = u(x) + iu(y)$. Ist nun e_k eine Basis von V und damit auch von W, dann haben u und $\overline{u}$ **dieselbe beschreibende Matrix,** wie man sofort sieht. Und damit auch dasselbe charakteristische Polynom, dessen Nullstellen sicher alle im Körper $\mathbb{C}$ liegen.

☐ Sei V=$\mathbb{Q}^2$ über $\mathbb{Q}$ und u=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Das gibt das charakteristische Polynom $\chi_u(x) = x^2 - 2$. Dieses Polynom hat in $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle! Wir wissen, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$={p+q$\sqrt{2}$| p,q$\in$ $\mathbb{Q}$} ein Körper ist. Setzen Sie W= Q[$\sqrt{2}$]$\times$Q[$\sqrt{2}$] über $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Erweitern Sie u jetzt kanonisch zu einer linearen Abbildung u:W$\to$W mit demselben charakteristischen Polynom. Und in dem größeren Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ liegen beide Nullstellen $\pm\sqrt{2}$ des Polynoms.

> **Ergebnis:** Es sei V reeller Vektoraum und u:V$\to$V linear. Falls das charakteristische Polynom von u Nullstellen besitzt, die nicht reell sind, erweitert man u zu einer linearen Abbildung $\overline{u}$ der Komplexifizierung W von V. Dies $\overline{u}$ hat dasselbe charakteristische Polynom wie u und das Spektrum von u ist gleich der Nullstellenmenge des charakteristischen Polynoms. Damit sind für die Erweiterung $\overline{u}$ gerade die Bedingungen erfüllt, die wir zur Analyse der Frage der Diagonalisierbarkeit benötigen. Das Verfahren nennen wir Körpererweiterung (auf $\mathbb{C}$).

(1.3.23) Bemerkung: Die vorangegangene Aufgabe zeigt, dass Körpererweiterung nicht nur von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ möglich ist, dass vielmehr eine sehr allgemeine Konstruktion vorliegt: Es gilt: Man kann immer einen größeren Körper finden, in dem das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Allgemein heißt ein Endomorphismus $\boxed{\textbf{halbeinfach}}$, wenn er die Eigenschaft hat, unter geeigneter Körpererweiterung diagonalisierbar zu werden. Das erklärt die Bemerkung aus (1.2.5).

12.1.3b **Invariante reelle Ebenen**

(1.3.24) Wie steht es mit dem zweiten Weg aus (1.3.18)? Wenn wir also aus irgendwelchen Gründen den Körper unseres Vektorraumes nicht vergrößern wollen? Wie bereits angedeutet, müssen wir dann andere invariante Teilräume zulassen, auf denen die Restriktion von u nicht mehr einfach ein Vielfaches der Eins ist. Diese Frage wollen wir jetzt kurz verfolgen.

(1.3.25) Sei also $\lambda = \alpha + i\beta$ eine nicht reelle Nullstelle des charakteristischen Poignoms ($\beta \neq 0$). Dann ist $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ auch eine Nullstelle und beide haben - wie obige Argumentation zeigt- dieselbe algebraische Multiplizität α.

Sei weiter E=e+if ein Eigenvektor zu λ in der eingeführten komplexen Erweiterung W. Dann ist E^*=e-if ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ wie man sofort verifiziert. Dabei sind e und f natürlich beides Vektoren aus V. Über Hilfssatz 2 aus (1.1.10) folgt, dass E und E^* über $\mathbb{C}$ unbhängig sind. Und das ist nur möglich, wenn e und f das über $\mathbb{R}$ sind.

(1.3.26) Sei H=<e,f> die von e und f erzeugte Ebene in V über $\mathbb{R}$. Wir vermuten: **H ist einerseits unzerlegbar bezüglich u und andererseits invariant unter u.** Gehen wir diese Vermutung einmal durch: Ist H invariant? Wir haben 2e=E+E* und 2if =E-E*. Einsetzen gibt sofort: 2u(e)=λE +$\overline{\lambda}$E*= 2(αe-βf) und 2iu(f)=2i(βe+αf). Zur Erinnerung $\lambda = \alpha + i\beta$.

(1.3.27) H ist also tatsächlich invariant und die Restriktion u_0 von u auf H hat folgende beschreibende Matrix

$$M_{u_0} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix}. \qquad \text{Also} \qquad \begin{array}{l} \chi_{u_0}(x)=(\alpha\text{-}x)^2+\beta^2=(x\text{-}\alpha\text{-}i\beta)(x\text{-}\alpha+i\beta) \\ = (x-\lambda)(x-\overline{\lambda}) \end{array}$$

(1.3.28) Die gefundene Matrix kann wie folgt zerlegt werden:

$$\boxed{\mathrm{M}_{u_0}=\sqrt{D}\begin{pmatrix} \cos & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{D}=\alpha^2+\beta^2 \qquad \text{und} \quad \cos\varphi=\tfrac{\alpha}{\sqrt{D}} \qquad \sin\varphi=\tfrac{\beta}{\sqrt{D}}}.$$

D.h. es liegt ein Produkt aus einer Drehmatrix und einer Umskalierung vor! Die Umskalierung der Längen erfolgt mit der Wurzel aus D=det(M). Daher ändert sich der Flächeninhalt von Figuren mit dem Faktor D=$\alpha^2 + \beta^2 = \lambda\overline{\lambda}$. Und das ist die Determinante von u.

(1.3.29) Fassen wir zusammen:

Satz: Zu jedem Paar $(\lambda, \overline{\lambda})$ konjugiert komplexer Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren E=e+if und F=e-if der komplexifizierten Theorie gehört ein unzerlegbarer invarianter Teilraum H=<e,f> des reellen Raumes V, dessen Basisvektoren sich mit der der folgenden Matrix transformieren:

$$\boxed{\mathrm{M}_{u_0}=\sqrt{D}\begin{pmatrix} \cos & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{D}=\lambda\overline{\lambda} = \alpha^2+\beta^2 \qquad \text{und} \quad \cos\varphi=\tfrac{\alpha}{\sqrt{D}} \qquad \sin\varphi=\tfrac{\beta}{\sqrt{D}}}$$

Damit haben wir den relevanten Typ invarianter Teilräume im Fall komplexer Eigenwerte für einen reellen Vektorraum konstruiert.

12.1.4 **Diagonalisierbarkeit**

(1.3.30) Was läßt sich für den wichtigen Fall ausssagen, bei dem alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms im betrachteten Körper liegen? Hier liefern unsere Überlegungen zum charakteristischen Polynom noch das folgende allgemeine Resultat:

Satz:	V Vektorraum über K. u:V$\to$V linear und F$\subset$V ein invarianter Teilraum unter u. Weiter sei u_0 die Restriktion von u auf F. Schließlich habe das charakteristische Polynom alle seine Nullstellen in K.
Dann gilt:	1) F enthält wenigstens einen Eigenvektor von u. 2) Sei $\lambda \in Sp(u)$ mit algebraischer Multiplizität α. Es sei $\mathcal{E}(\lambda)$ der zugehörige Eigenraum mit μ =dim($\mathcal{E}(\lambda)$). **Dann gilt** $\mu \leq \alpha$. $\boxed{\text{Geometrische Multiplizität} \leq \text{algebraische Multiplizität}}$

(1.3.31) Beweis: 1) χ_{u_0} ist Teiler von χ_u und enthält damit mindestens einen der Linearfaktoren (x-λ) und damit eine Nullstelle. Der zugehörige Eigenvektor von u ist auch Eigenvektor von u.

2) Auf F=$\mathcal{E}(\lambda)$ ist u gerade die Multiplikation mit λ. Das zugehörige charakteristische Polynom der Restriktion ist (X-λ)$^\mu$. Und das muss ein Teiler von χ_u sein. Aus der Linearfaktordarstellung folgt $\mu \leq \alpha$.

(1.3.32) Für die Frage der Diagonalisierbarkeit bedeutet das:

Satz	u:V$\to$V linear. Das charakteristische Polynom habe alle seine Nullstellen in K.
Dann	ist u genau dann diagonalisierbar, wenn für alle $\lambda \in$Sp(u) die algebraische gleich der geometrischen Multiplizität ist.

Die Bedingung (1.2.6) ist ein Spezialfall hiervon.

(1.3.33) Wir formulieren noch die folgende abschließende Charakterisierung des diagonalisierbaren Falles, die zeigt, dass dann sämtliche invariante Teilräume aus Eigenvektoren aufgebaut sind.

Satz:	Sei u:V→ V diagonalisierbar. Speziell zerfällt also das charakteristische Polynom in Linearfaktoren. Weiter sei F⊂V ein unter u invarianter Teilraum.
	gibt es eine direkte Zerlegung V=F⊕F′' mit den Eigenschaften:
Dann	a) Auch F′ ist invariant unter u.
	b) Die Restriktionen von u auf F und F′ sind beide diagonalisierbar.

(1.3.25) Wir geben erneut eine zusammenfassende **Übersicht** zum Vorgehen beim Durchrechnen eines konkreten Beispieles. Die letzten Schritte werden etwa in den Anwendungen der theoretischen Physik nicht ausgeführt.

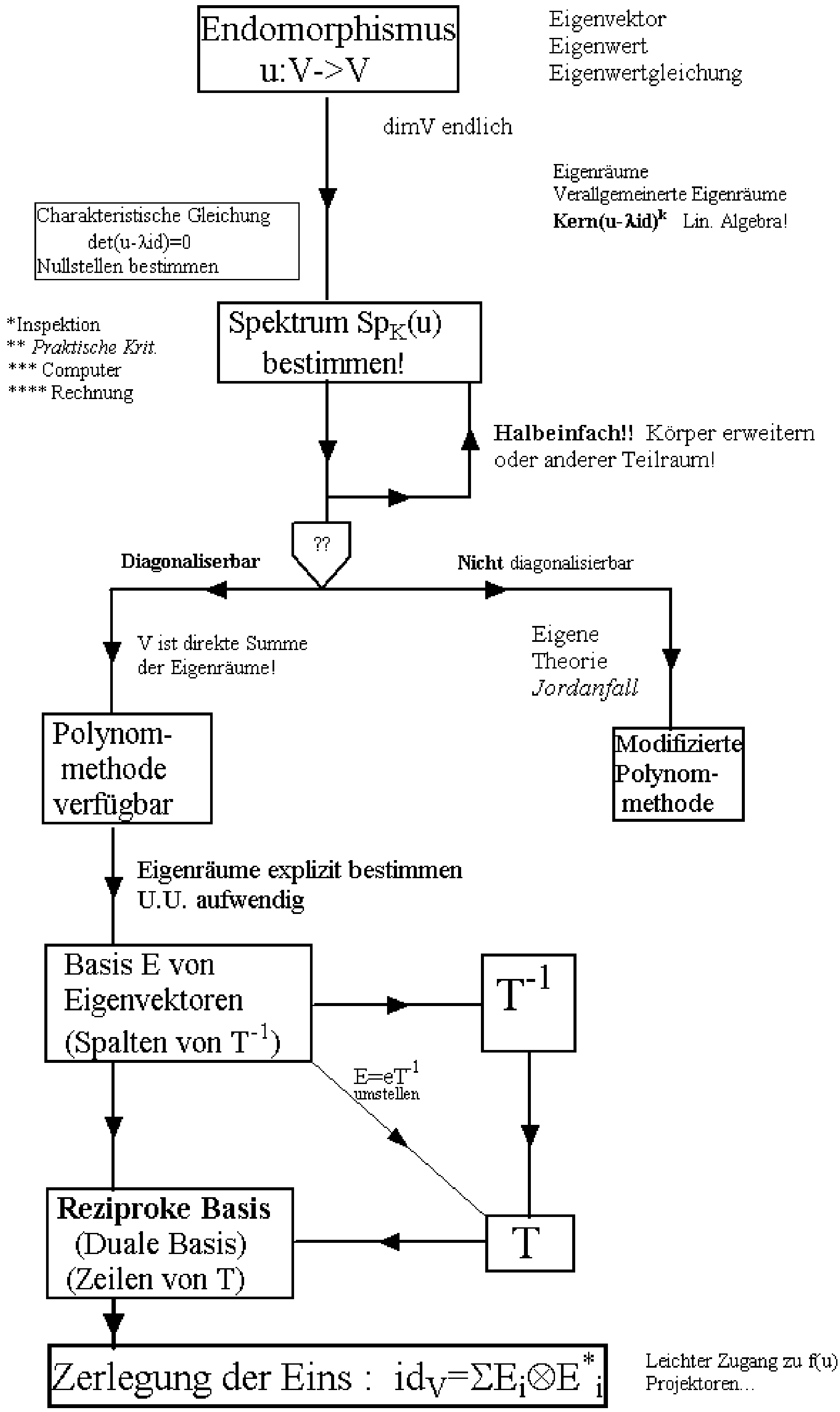
u:V→ V gegeben	M= $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
▼ Bestimme $\chi_u(x) = \det(u - xid_V)$	$\chi_M(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
▼ Die Nullstellen von χ_u suchen	Nullstellen bei x=1,2,3 (x=1 geraten)
▼ ? Körpererweiterung ?	Unnötig
▼ **Spektrum** bestimmen	$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \{1, 2, 3\}$
▼ u diagonaliserbar? (Hier angenommen)	Ja! Wegen (1.2.6)
■ **Polynommethode** verfügbar	Etwa $e^{tM} = \alpha id + \beta M + \gamma M^2$ ....
▼ Für jedes λ die zugeh. homogene Gl. u(x)-$\lambda x = 0$ losen. (Eigenraum)	$\lambda = 1 : \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{E}_1 = ...$
▼ Basis aus Eigenvektoren bestimmen	$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{E}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
■ Übliche Anwendungen bis hier. Differentialgleichung: Allg. Lösung	$\dot{\vec{y}}(t) = M.\vec{y}(t) \qquad \vec{y}_{\alpha\beta\gamma}(t) = \alpha e^{1t}\vec{E}_1 + \beta e^{2t}\vec{E}_2 + \gamma e^{3t}\vec{E}_3$

▼ Über E erhält man T^{-1} (E=eT^{-1})	$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
▼ Durch Invertieren oder Auflösen folgt T Die Zeilen geben die reziproke Basis.	T= $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
▼ $\boxed{M_u^N = TM_u^AT^{-1} \text{ ist Diagonalmatrix}}$ Die Diagonalelemente sind die Eigenwerte	$TMT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
■ Zugehörige **Zerlegung der 1** hinschreiben **Ziel erreicht.**	$id_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} (-2, -2, -1) + ... = ...$

☐ Rechnen Sie (in numerischer Näherung) mit Hilfe eines Computeralgebrasytem den Fall

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Wir geben jetzt noch ein Schema, das die Zusammenhänge in Diagrammform zeigt.



Endomorphismus
u:V->V
Eigenvektor
Eigenwert
Eigenwertgleichung
dimV endlich
Eigenräume
Verallgemeinerte Eigenräume
Kern(u-λid)^k Lin. Algebra!
Charakteristische Gleichung
det(u-λid)=0
Nullstellen bestimmen
*Inspektion
** Praktische Krit.
*** Computer
**** Rechnung
Spektrum Sp_K(u)
bestimmen!
Halbeinfach!! Körper erweitern
oder anderer Teilraum!
??
Diagonaliserbar
Nicht diagonalisierbar
V ist direkte Summe
der Eigenräume!
Eigene
Theorie
Jordanfall
Polynom-
methode
verfügbar
Modifizierte
Polynom-
methode
Eigenräume explizit bestimmen
U.U. aufwendig
Basis E von
Eigenvektoren
(Spalten von T^-1)
T^-1
E=eT^1
umstellen
Reziproke Basis
(Duale Basis)
(Zeilen von T)
T
Zerlegung der Eins : id_V=ΣE_i⊗E*_i
Leichter Zugang zu f(u)
Projektoren...

12.1.5 **Der Satz von Hamilton-Cayley**

(1.5.1) Zu jedem Polynom p in der Variablen x hatten wir den Endomorphismus p(u) durch "Einsetzen von u für x" gebildet. Diese Struktur wollen wir etwas genauer analysieren. Formal liegt offenbar ein Ringhomomorphismus (K[x],p $\mapsto$p(u), End(V)) vor. Dazu gehört die Verträglichkeitsbedingung für die Multiplikation. Ebenso wird das konstante Polynom x$\mapsto$1 auf den Einheitsendomorphismus id_V abgebildet. Zum Polynomring K[x] vergleiche Kapitel 3.4.2b.

Das Bild dieser Abbildung wollen wir mit E_u bezeichnen. Es ist ein kommutativer Teilring von End(V). Dieser Teilring erweist sich als die für uns relevante Struktur. Überdies ist E_u über (p(x),λ) $\mapsto p(u) \circ \lambda$ auch ein K[x]-Modul, was für die weiterführende mathematische Analyse wichtig ist.

(1.5.2) Wie immer bei solchen Homomorphismen sind Kern und Bild von Interesse. Beschäftigen wir uns mit dem Kern. Gesucht sind also Polynome, die nach Einsetzen von u für x den Nulloperator ergeben. Wenn u diagonalisierbar ist, dann können wir solche Polynome mit der Polynommethode bereits angeben. Sei etwa χ_u(x) das charakteristische Polynom von u. Wir nehmen an, dass es wie in (1.3.16) beschrieben vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Dann stimmt χ_u auf dem Spektrum von u vollständig mit dem Nullpolynom überein, hat dort überall den Wert Null. D.h. es gilt χ_u(u)=0 oder auch: Das charakteristische Polynom liegt immer im Kern des oben eingeführten Ringhomomorphismus. Diese Eigenschaft gilt jetzt aber nicht nur für diagonalisierbare Endomorphismen, sondern immer. Das werden wir unten beweisen ("Satz von Hamilton-Cayley").

(1.5.3) Er sagt folgendes aus: Wenn wir das Bild E_u des eingeführten Endomorphismus K[x]$\to End_K(V)$ als Teilvektorraum der Algebra End(V) ansehen, dann hat dieser Raum höchstens die Dimension n, wenn n=dimV der Grad des charakteristischen Polynoms ist. Nehmen wir den Fall n=2. Dann sagt der Satz, dass u^2-Sp(u)u+det(u)id=0 gilt. Dh. u^2 und entsprechend alle höheren Potenzen von u lassen sich als Linearkombination von u=u^1 und id=u^0 darstellen!

Oder allgemein: u^{n-1}, ...u^1, u^0 **ist immer ein Erzeugendensystem des Bildes E_u.**

(1.5.4) Gibt es Polynome **mit kleinerem Grad**, die auch im Kern liegen? Nun, wichtig ist nur, dass das Polynom für alle Elemente des Spektrums verschwindet. Dann liefert die Polynommethode das Gewünschte.Wir bilden daher das folgende Polynom (vgl. (1.3.16)):

$$\boxed{\mu_u(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)....(x-\lambda_r) \quad \text{für } Sp(u)=\{\lambda_1,\lambda_2,..,,\lambda_r\}.}$$

Falls jetzt alle algebraischen Multiplizitäten gleich 1 sind, ist das gleich dem charakteristischen Polynom. Andernfalls liegt ein Polynom von echt kleinerem Grad vor, das zum Kern gehört. Man kann zeigen, dass jedes Polynom aus dem Kern dann ein Vielfaches dieses Polynoms ist. (Vielfaches im Sinne des Ringes, also ein Produkt aus μ_u mit einem beliebigen anderen Polynom). μ_u heißt daher *Minimalpolynom.* Genauer: *Das Minimalpolynom des Endomorphismus u*, für diagonalisierbares u. Im diagonalisierbaren Fall hat das Bild (unserer linearen Abbildung K[x]$\to End(V)$) daher die Dimension r. wenn r die Zahl der verschiedenen Eigenwerte von u ist. Im nichtdiagonatisierbaren Fall gibt es auch ein Minimalpolynom, aber die Linearfaktoren sind nicht alle einfach.

☐ Testen Sie das Gesagte am Beispiel des Endomorphismus u=$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass für p_u(x)=x-λ noch nicht p_u(u)=0 gilt.

(1.5.5) Am Ende des Kapitels werden wir die Polynommethode auch auf nichtdiagonalisierbare Endomorphismen ausdehnen. Dann läßt sich der Satz von Hamilton-Caylay auf die skizzierte Weise allgemein beweisen.

(1.5.6) Beweis des Satzes

Über den eingeführten Endomorphismus u operiert der Polynomring K[x] auf dem Vektorraum V. Genauer: (p,v)$\mapsto$p(x)$\star$v=p(u).v. D.h. man setzt für x zunächst u ein und läßt den entstehenden Endomorphismus dann auf den Vektor v los. Man verifiziert sofort, dass das eine Linksoperation ergibt.

Jetzt führen wir eine Basis e von V ein. Sei dann M(x)=M_{u-xid_V} die beschreibende Matrix des Endomorphismus u-xid_V. Klar ist M(x)$\in E_u$. Wir haben in Kap.9 (2.10.11) gezeigt, dass es hierzu eine zweite Matrix $\tilde{M}$(x) auch mit polynomwertigen Koeffizienten gibt, die die Gleichung $\tilde{M}$(x)M(x)=det(M(x))id erfüllt. Wendet man die Gleichung auf einen Vektor v an, so ergibt das im Sinne des Operierens zunächst M(x)$\star$v=M(u).v=(u-uid).v=0.v=0. Denn setzt man in u-xid für x den Endomorphismus u ein, so gibt das Null.

Also gibt die linke Seite Null. Die rechte gibt aber wegen detM(x)= $\chi_u(u)$ auch $\chi_u(u).v = 0$ für alle v was nur mit $\chi_u(u) = 0$ möglich ist. Das aber ist das gewünschte Resultat.

(1.5.7) Wir wollen die entscheidende Stelle im Beweis noch etwas herausarbeiten.

Wir haben (M-xid)$\in$ $Mat_K(2,2)[x]$. Für x dürfen wir alle K-wertigen 2×2-Matrizen einsetzen. Wir formen um:

$$\boxed{\text{M-xid}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\text{-x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$$

Achtung: Die letzte Umformung gehört nicht zur Ringstruktur von Mat(2,2)[x], sondern zu der von Mat(2,2). Dabei wird für x ein Rollenwachsel vorgenommen. In der rechten Form dürfen für x nur noch Elemente aus K eingesetzt werden. (Vorher waren es Matrizen). Nachfolgend kennzeichnen wir das, indem wir einmal X und einmal x schreiben. X wenn man Matrizen, x wenn man Körperelemente einsetzt. In der linken Form sind alle x-Potenzen aus der Matrix herausgzogen, in der rechten ist mit den Regeln von Mat$_K(n.n)$ alles zu einer einzigen Matrix vereinigt.

Das Ergebnis ist eine **polynomwertige Matrix**: Ein Element aus Mat$_{K[x]}$(2.2). Versucht man jetzt für x eine Matrix einzusetzten, so ergibt das Probleme. Wir haben aber einen kanonischen Ringisomorphismus, der obiger Rechnung entspricht

$$(Mat_K(n,n)[X], p(X) \mapsto p(x), Mat_{K[x]}(n,n))$$

mit Rollenwechsel der Einsetzungsgröße. Damit haben wir zwei isomorphe Ringe jeweils mit zusätzlicher unterschiedlicher Struktur.

☐ Verifizieren Sie, dass ein Ringisomorphismus vorliegt.

(1.5.8) Diesen Formalismus wenden wir wie folgt an: Starte mit (u-Xid), gehe über zu M(x)=u-xid. Bestimme die Matrix $\tilde{\text{M}}$(x) gemäß Kap 9.2.10, so daß $\tilde{\text{M}}$(x)M(x) =$\chi_u(x)id_V = \det(u - xid)id_V$. Im Beispiel ist

$$\tilde{M}(x) = \begin{pmatrix} d-x & -b \\ -c & a-x \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{M}(x)M(x) = \left[x^2 - (a+d)x + (ad-bc)\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gemäß der Konstruktionsformel (2.10.11) aus Kap.9 liegt $\tilde{\text{M}}$(x) in Mat$_{K[x]}(n,n)$, so dass wir zu $\tilde{\text{M}}$(X) übergehen können. Dafür gilt $\tilde{\text{M}}$(X)M(X) =$\chi_u(X)id_V$. Hier darf man u für X einsetzen. Da aber auf der linken Seite M(u)=0 ist, folgt χ_u(u) $= 0$. Im Beispiel:

$$\left[\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} - X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \left[X^2 - (a+d)X + (ad-bc)\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.5.9) Das ist der Satz von Hamilton und Cayley. Also: Einsetzen des Endomorphismus in das charakteristische Polynom gibt die Nullmatrix!

(1.5.10) Eine für uns wichtige Folgerung: Der Endomorphismus u^n kann auf jeden Fall durch ein Polynom (n-1)-ter Ordnung (in u, also ein Element aus End$_K$(V)[X] ausgedrückt werden. Man muss nur $\chi_u(u)$=0 nach u^n auflösen. Natürlich kann u auch noch ein Polynom kleineren Grades erfüllen.

☐ Sei M eine beliebige 2×2-Matrix. Verifizieren Sie, daß dann immer M^2-Tr(M)M+det(M)id$_{\mathbb{R}^2}$ $= 0$ gilt wie es (1,4.6) vorhersagt.

☐ Testen sie den Sachverhalt an einem Beispiel für n=3, etwa der Matrix aus (1.2.22).

12.2 Praktische Kriterien für die Diagonalsierbarkeit von Endomorphismen.

12.2.1 Normale Oparatoren

(2.1.1) In manchen Fällen kann man einer gegebenen Matrix oder einem gegebenen Endomorphismus durch Inspektion unmittelbar ansehen, ob der diagonalisierbare Fall vorliegt. Zusätzlich läßt sich auch einiges über das Spektrum sagen. **Kriterien, die das leisten, sind von beträchtlichem Nutzen**. Wir beweisen und formulieren einige wichtige Kriterien dieser Art. Traditionellerweise formuliert man sie gerne als *Kriterien für die Diagonalisierung von Matrizen.*

(2.1.2) Die dahinterstehende **Idee** ist, V zu einem euklidischen oder unitären Raum zu machen. Diese zusätzliche Struktur sichert dann die Diagonalisierbarkeit gewisser Typen von Endomorphismen.

(2.1.3) Zunächst etwas Vorbereitung, dann die Konkretisierungen.

(2.1.4) Sei V Vektorraum über K=$\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Im reellen Fall soll V euklidisch sein umd im komplexen Fall unitär. Das Skalarprodukt werde mit B bezeichnet. Um beide Fälle - also bilinear und sesquilinear - gemeinsam behandeln zu können, führen wir eine Abbildung $*$: K$\to$K ein, wobei $*$=id im reellen und $*$= "komplexe Konjugation" im komplexen Fall sein soll. Es gilt $**$=id$_K$. Und das Skalarprodukt erfüllt stets B(αx,βy)=$\alpha^*\beta$B(x,y) mit α^*=$*(\alpha)$. Schließlich haben wir B(x,y)=$(B(y,x))^*$.

(2.1.5) Zu jedem linearen u: V$\to$V gibt es den adjungierten Operator u†:V$\to$V. Er erfüllt B(x.u(y))=B(u†(x),y) und B(u(x),y)= B(x,u†(y)). Beachten Sie (λid)† = λ^*id.

(2.1.6) Jetzt die für unseren Zweck zentrale

Definition: Der Endomorphisrnus u: V$\to$V heißt ***normal*** *bezüglich B*, wenn $\boxed{u^\dagger \circ u = u \circ u^\dagger}$ gilt. D.h., wenn die beiden Endomorphismen miteinander vertauschen.

(2.1.7) Nun kann man in konkreten Fällen vielfach leicht erkennen, ob ein Endomorphismus normal ist oder nicht: So ist u sicher normal, wenn u=u† gilt oder wenn u† $= u^{-1}$ ist. Andererseits wollen wir zeigen: **Normal impliziert diagonalisierbar**. Zusammen gibt das die gewünschten Kriterien. Umgekehrt folgt aus diagonalisierbar keineswegs automatisch normal.

☐ Nicht alle Endomorphismen sind normal. Nehmen Sie J=$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass J weder normal noch diagonalisierbar ist. V ist der euklidische $\mathbb{R}^2$.

(2.1.8) Den Beweis unserer Behauptung - normal bewirkt diagonalisierbar - führen wir in mehreren Schritten.

(2.1.9) **Hilfssatz**:

Sei u:V$\to$V normal. **Dann** gilt: u(x)=λx $\Longrightarrow$ u$^\dagger(x) = \lambda^* x$
D.h. $\mathcal{E}_u(\lambda) = \mathcal{E}_{u^\dagger}(\lambda^*)$ und Sp(u)=(Sp(u†))*.

Die Spektren und Eigenwerte von u und u† hängen also eng miteinander zusammen. Hat etwa u den Eigenwert 2i$\in\mathbb{C}$, so hat u† den Eigenwert -2i zu demselben Eigenvektor.

(2.1.10) Beweis: Setze v= u-λid. Mit u ist offensichtlich auch v normal. Rechne

$$B(v(x), v(y)) = B(x, v^\dagger \circ v(y)) = B(x, v \circ v^\dagger(y)) = B(v^\dagger x, v^\dagger(y)).$$

Beim 2. Schritt geht normal entscheidend ein. Wähle nun x=y. Wegen positiv definit folgt v(x)=0$\Longleftrightarrow$ $v^\dagger(x) = 0$. Wegen v† $= u^\dagger - \lambda^* id$ ist das die Behauptung.

(2.1.11) Ersetzt man *positiv definit* durch *nicht ausgeartet*, so läßt sich der Beweis leider nicht übertragen. (Testen Sie das!)

(2.1.12) **Folgerung**:

▼ Gilt u=$u^\dagger$, d.h. ist u ein *hermitescher Operator,* so erfüllen die Eigenwerte.$\lambda = \lambda^*$, sind also im unitären Fall reell.
▼ Gilt u^{-1} =u†, ist u also unitär oder orthogonal, so ist $\lambda\lambda^* = 1$. Im reellen Fall gilt $\lambda = \pm 1$.

(2.1.13) Als nächster Schritt kommt ein weiterer **Hilfssatz**:

Sei u:V$\to$ V normal und $\lambda_1, \lambda_2 \in Sp(u)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Dann gilt $\mathcal{E}(\lambda_1) \perp \mathcal{E}(\lambda_2)$. Eigenvektoren zu **verschiedenen** Eigenwerten stehen aufeinander senkrecht.

(2.1.14) Wir wissen, dass das generell nicht der Fall sein muß. Es liegt eine Auswirkung von normal vor. Auch kann man nicht auf positiv definit verzichten. Für eine spezielle Lorentztransformation ist die Lichtkegelbasis eine Eigenwertbasis: Aber die beiden Achsen stehen keineswegs aufeinander senkrecht.

(2.1.15) Beweis: x$\in \mathcal{E}(\lambda_1)$ und y$\in \mathcal{E}(\lambda_2)$. Rechne:

$$\lambda_2 B(x,y) = B(x,u(y)) = B(u^\dagger(x),y) = B(\lambda_1^* x,y) = \lambda_1^{**} B(x,y) = \lambda_1 B(x,y).$$

Oder $(\lambda_1 - \lambda_2)$B(x,y)=0. Das ergibt die behauptete Orthogonalität.

(2.1.16) Invariante Teilräume sind wichtig, weil in ihnen nach (1.1.30) Eigenvektoren existieren. Hierzu ein weiterer Hilfssatz

Sei	u:V→V normal und F ein unter u und u† invarianter Teilraum. Also u(F)$\subset F$ und u$^\dagger(F) \subset F$.
Dann	ist auch F$^\perp$ unter u und u† invariant.

Man kann daher unter den genannten Bedingungen das Eigenwertproblem für V auf die restringierten Probleme für F und F$^\perp$ zurückführen. Und das sind i.a.kleinere Räume.

(2.1.17) Beweis: B(F,F$^\perp$)=0 mit selbsterklärender Interpretation. Wegen u(F)$\subset F$ folgt B(u(F),F$^\perp$)=0. Oder: B(F,u$^\dagger(F^\perp)) = 0$. Also u$^\dagger(F^\perp) \subset F^\perp$. Analog folgt u(F$^\perp$)$\subset$F$^\perp$.

(2.1.18) Nach diesen Vorbereitungen können wir unser **Hauptresultat** formulieren.

Satz: Sei u:V$\to V$ normal. Das charakteristische Polynom von u habe alle seine Nullstellen in K. **Dann** ist u diagonalisierbar. Überdies gilt V=$\underset{\lambda\in Sp(u)}{\perp} \mathcal{E}(\lambda)$, so dass man eine **Orthonormalbasis** von Eigenvektoren wählen kann.

(2.1.19) **Beweis**: Sei W der von allen Eigenvektoren erzeugte Raum. Wir wissen W=$\underset{\lambda\in Sp(u)}{\perp} \mathcal{E}(\lambda)$ nach (2.2.13). Stets gilt V=W$\perp W^\perp$. Zu zeigen ist V=W, d.h. W$^\perp = \{0\}$. Oder: Alle Vektoren sind Linearkombinationen von Eigenvektoren. $\mathcal{E}(\lambda)$ ist unter u und nach (2.1.9) unter u† invariant. Also ist W$^\perp$ nach (2.1.16) auch unter u und u† invariant. In jedem invarianten nichttrivialen Teilraum existiert wegen der Nullstelleneigenschaft aber mindestens ein Eigenvektor E von u. Vgl. (1.3.30). Die Eigenvektoren liegen aber alle bereits in W. Also E$\in$W$\cap$W$^\perp$, was weder im euklidischen noch im untären Fall möglich ist.

12.2.2 Die Kriterien

(2.2.1) Um konkrete Kriterien zu erhalten, muß man die betrachtete Matrix als normalen Endomorphismus eines euklidischen bzw. unitären Raumes interpretieren. Und man muß sicherstellen, dass alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms im betrachteten Körper liegen.

(2.2.2) Wir beginnen mit dem reellen Fall.

(2.2.3) Sei V=$\mathbb{R}^n$ mit dem üblichen kanonische Skalarprodukt. Also M$^\dagger = {}^tM$. Die kanonische Basis ist Orthonormalbasis.

(2.2.4) Weiter sei M eine s**ymmetrische** n×n-Matrix. Also M= ${}^tM = M^\dagger$. Laut (2.1.9) ist das Spektrum rein reell. Der Körper muss nicht erweitert werden. Anwendung von Satz (2.1.18) gibt:

- ▼ Jede relle symmetrische n×n-Matrix ist reell diagonalisierbar.
- ▼ Man kann eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren finden.
- ▼ Die zugehörige Transformationsmatrix ist eine orthogonale Matrix.
- ▼ Diese Transformation unterscheidet nicht zwischen ko- und kontravariant.

(2.2.5) Das ist das nützlichste aller Kriterien. Es ist auf die symmetrischen Matrizen reeller quadratischer Formen anwendbar, also auf die Stichworte Trägheitstensor, Deformationstensor, 2. Ableitung eines Skalarfeldes usw. usw. Vgl. Kap.12.2.3.

☐ Sei M=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ reelle symmetrische Matrix. Verifizieren Sie an diesem Beispiel den Inhalt des Kriteriums (2.2.4).

(2.2.6) Sei V=$\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{C}$ mit dem kanonischem unitären Skalarprodukt. Dann ist $u^\dagger = {}^t\bar{u}$. In $\mathbb{C}$ liegen stets alle Nullstellen. Die kanonische Basis ist Orthonormalbasis. (2.1.12) und (2.1.18) geben:

- ▼ Jede komplexe hermitesche n×n-Matrix (also mit $\boxed{M={}^t\bar{M}}$) ist komplex diagonalisierbar.
- ▼ Die Eigenwerte sind **reell**.
- ▼ Man kann eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren angeben.
- ▼ $M' = TMT^{-1}$ ist **reelle** Diagonalmatrix.

Die Eigen**vektoren** sind hier in der Regel noch komplex. Beachten Sie, dass dies Kriterium auch auf reelle symmetrische Matrizen anwendbar ist und garantiert, dass alle Eigenwerte reell sind, was wir aber bereits über (2.1.9) wissen.

(2.2.7) Und noch ein Kriterium:

- ▼ Jede unitäre n×n-Matrix (also mit $M^\dagger = M^{-1}$) ist komplex diagonalisierbar.
- ▼ Ihre Eigenwerte haben den Absolutbetrag 1 Also $\lambda = e^{i\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$..
- ▼ Man kann eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren wählen.
- ▼ Die Transformationsmatrix ist unitär.
- ▼ Insbesondere ist jede reelle orthogonale Matrix auch unitär.

(2.2.8) Ein weiteres Beispiel eines behandelbaren Falles:

- ▼ Jede antihermitesche Matrix - also $M^\dagger = -M$ - ist komplex diagonalisierbar.
- ▼ Ihre Eigenwerte sind rein imaginär (wegen $\lambda = -\lambda^*$).
- ▼ Man kann eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren wählen mit untärer Transformationsmatrix. $M' = TMT^{-1}$ ist rein imaginäre Diagonalmatrix.
- ▼ Das gilt insbesondere für schiefsymmetrische Matrizen.

Als weiteres Beispiel können Sie noch antiunitäre Matrizen $U^{-1} = -U^\dagger$ betrachten.

(2.2.9) Eine herkömmliche Formulierung von (2.2.5), die man immer noch vorfindet, sieht so aus:

> Es sei M eine symmetrische n×n-Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Matrix R, so dass RMR^{-1} eine Diagonalmatrix ist. (Und mit diesem R wird dann weiter argumentiert.) Auf diese Weise kann man auf das Verstehen der Bedeutung der Konstruktion verzichten und sich rein auf den Rechenformalismus beschränken.

☐ Verifizieren Sie (2.2.6) am Beispiel von M=$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ und (2.2.8) am Beispiel von M=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren einer speziellen Lorentztransformation $\Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$. Welches Kriterium greift?

12.2.3 Anwendung auf die Hauptachsentransformation einer quadratischen Form

(2.3.1) Nicht selten trifft man auf die Meinung, die Hauptachsentransformation einer quadratischen Form bzw. einer symmetrischen Bilinearform sei eine triviale Konsequenz der Symmetrie der beschreibenden Matrix. Das ist nicht ganz korrekt. Die zugehörige Begründung über (2.2.5) ist vielmehr durchaus subtil. Nachfolgend arbeiten wir nicht mit hochgestellten Indizes.

(2.3.2) Es sei q_B=($\mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto q_B(\vec{x}) = \sum B_{ik}x_ix_k, \mathbb{R}$) eine quadratische Form mit zugehöriger symmetrischer Matrix B . Das ist die beschreibende Matrix einer Bilinearform B bezüglich der kanonischen Basis. Also $B_{ik} = B(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$.Daher ist ($B_{ik}$) zunächst **nicht die Matrix eines Endomorphismus!** Wir können jedoch einen Endomorphismus C von $\mathbb{R}^n$ hilfsweise einführen durch $C(\vec{e}_i)=\Sigma\vec{e}_kB_{ki}$ mit derselben Matrix (B_{ik}). Auf C - nicht B - können wir die Eigenwerttheorie anwenden. C hat nun eine symmetrische beschreibende Matrix, so dass obiges Resultat (2.2.5) gilt.

(2.3.3) C ist reell diagonalisierbar mit neuer beschreibender Matrix $C'=TBT^{-1}$. Wie sieht nun die uns eigentlich interessierende Bilinearform B in dieser Basis aus? Das Transformationsgesetz ist $B' = {}^t\vec{T}^{-1}B$

T^{-1}. Nach unserem Resultat (2.2.5) ist T jedoch orthogonal, so dass B′=C′ folgt. D.h., wenn man den hilfsweise eingeführten Endomorphismus C diagonalisiert, wird die gegebene Bilinearform automatisch (aber in gewisser Weise zufällig) mit diagonalisiert.

Wäre T nicht orthogonal, so müßte B′ keineswegs diagonal sein.

(2.3.4) Resultat: Ist $\vec{E}_i$ eine Eigenwertbasis von C=B. so gilt für die quadratische Form q_B die Darstellung:

$$\boxed{q_B(\vec{x})=B(\vec{x},\vec{x})=\Sigma\lambda_i x_i'^2 \quad \text{mit} \quad \vec{x}=\Sigma\vec{E}_i x_i' \quad \text{und} \quad C(\vec{E}_i)=\lambda_i\vec{E}_i}$$

D.h. es liegt Hauptachsenform vor und die Koeffizienten sind die Eigenwerte. Die Hauptachsenform ist für die rechnerische und die interpretatorische Arbeit von größtem Nutzen. Im Falle n=2 etwa hat man $q_B(\vec{x}) = \lambda_1 x\prime_1^2 + \lambda_2 x_2'^2$ anstelle des allgemeinen $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$.

(2.3.5) Hinsichtlieh der Aussage "die Koeffizianten der Diagonalmatrix sind die Eigenwerte" ist eine gewisse Vorsicht angebracht. e ist zunächst die kanonische Orthonormalbasis. Da T orthogonal ist, ist $E=eT^{-1}$ erneut eine Orthonormalbasis. Sei jetzt F eine weitere Ortho**gonal**basis aus Eigenvektoren, die jedoch nicht normiert sein müssen. Aber es handelt sich doch um eine Basis aus Eigenvektoren. Wir dürfen $\vec{E}_i=n_i\vec{F}_i$ ansetzen. Also $\vec{x} = \Sigma\vec{E}_i x_i'=\Sigma\vec{F}_i(n_i x_i')$. Bezüglich dieser Basis haben wir $B(\vec{x},\vec{x})=\Sigma\left(\frac{\lambda_i}{n_i^2}\right)x_i''$. Die quadratische Form hat immer noch Diagonalform, aber die Koeffizienten sind keineswegs mehr die Eigenwerte! Positiv gewendet: Haben alle Eigenwerte die geometrische Dimension 1, so bringt immer noch jede Basis aus Eigenvektoren die quadratische Form in Hauptachsengestalt, aber mit u.U. anderen Diagonalelementen..

> Achtung: Ihr M sei symmetrisch mit lauter verschiedenen Eigenwerten. Sie verschaffen sich eine Basis von Eigenvektoren auf die übliche Weise, normieren aber nicht. Dann ist die Transformationsmatrix auch nicht orthogonal, die transponierte Matrix ist nicht notwendig die inverse Matrix.

(2.3.6) Sei schließlich λ ein Eigenwert mit geometrischer Dimension $\mu > 1$. Dann ist jede Basis dieses Teilraumes eine Eigenvektorbasis! Sagen wir μ=2 und $\vec{F}_1=\vec{E}_1$ und $\vec{F}_2=\vec{E}_1+\vec{E}_2$. Es folgt B(E .E,)=$B(\vec{E}_1,\vec{E}_1)=B(\vec{E}_2,\vec{E}_2) = \lambda$ und $B(\vec{E}_1,\vec{E}_2)=0$. Sei schließlich x=$\vec{F}_1x_1''+\vec{F}_2x_2''$. Dann folgt $B(\vec{x},\vec{x})=\lambda\left(x_1''^2+2x_2''^2+2x_1''x_2''\right)$. **In dieser Eigenvektorbasis ist die quadratische Form nicht mehr diagonalisiert**. Wir erhalten durch die Eigenvektorbasis keine Hauptachsenform der quadratischen Form. Aber man kann notfalls in jedem Eigenraum das Orthonormierungsverfahren anwenden.

☐ Leiten Sie mit Hilfe von (2.2.5) den Sylvesterschen Klassifikationsatz für orthogonale Geometrien her.

12.2.4 Zur Vertauschbarkeit von Endomorphismen

(2.4.1) Wir wollen die Vertauschbarkeitsbedingung von M und $M^\dagger$ etwas allgemeiner analysieren. Was sagt sie (eine solche Vartauschbarkeit) aus?

(2.5.2) Seien u und v zwei Endomorphismen von V. Wir nehmen an, dass $u\circ v = v\circ u$ gilt und dass u diagonalisierbar sei. Was folgt (zumindest unter günstigen Zusatzbedingungen) für v? Diese Frage gewinnt im Rahmen der Quantenmechanik größere Bedeutung.

(2.5.3) Wir haben eine Zerlegung der Eins für u. Also $id_V = \Sigma\vec{E}_i\otimes\vec{E}_i^*$. Was ist $\vec{Y}_i$= v($\vec{E}$)? Wir haben $u(\vec{Y}_i)=u(v(\vec{E}_i)) = v(u(\vec{E}_i))= v(\lambda_i\vec{E}_i) =\lambda_i\vec{Y}_i$. D.h. $\vec{Y}_i$ ist notwendig Eigenvektor von u mit Eigenwert $\vec{\lambda}_i$. Jetzt nehmen wir zusätzlich an, dass alle Eigenräume von u eindimensional sind. Dann gilt $\vec{Y}_i=v(\vec{E}_i) = \vec{E}_i\alpha_i$ für ein eindeutig bestimmtes $\alpha_i \in K$.D.h. $\vec{E}_i$ ist auch Eigenvektor zu v mit Eigenwert α_i.v wird daher bezüglich der Eigenwertbasis von u auch durch eine Diagonalmatrix beschrieben

$$\boxed{v = \Sigma\alpha_i\vec{E}_i\otimes\vec{E}_i^*}.$$

Wir suchen eine Funktion f - etwa ein Polynom - das $f(\lambda_i)=\alpha_i$ erfüllt für alle Elemente des Spektrums. $\boxed{\text{Dann ist } v=f(u)}$. D.h. v läßt sich durch u darstellen, auch als Polynom. Die Eigenvektoren sind dieselben, die zugehörigen Eigenwerte sind α_i. Aber die müssen nicht mehr alle verschieden sein!

☐ u sei normal und E eine Eigenvektorbasis. Wie sieht dann die Tensordarstellung von $u^\dagger$ aus?

(2.5.4) **Definition:** Sei $\lambda \in \mathcal{S}$p(u) und dim$\mathcal{E}(\lambda)$=k>1. Ein solcher Eigenwert heißt "k-fach entartet". Oder auch: Ein entarteter Eigenwert hat eine geometrische Dimension μ>1.

Fassen wir zusammen:

u **sei** diagonalisierbar mit lauter verschiedenen, nicht entarteten Eigenwerten. **Dann gilt:** v:V→V ist genau dann gleichzeitig mit u diagonalisierbar (dieselbe Zerlegung der Eins), wenn v und u vertauschen. Weiter ist v eine Funktion von u, also v=f(u).

Der Beweis der zweiten Richtung ist trivial.

(2.2.6) Welche Bedeutung hat diese Eigenschaft? In der Quantenmechanik werden die Meßoperationen durch (hermitesche) Endomorphismen repräsentiert. Wenn zwei solche Operatoren miteinander vertauschen, stören sich die Messungen nicht wechselseitig.

Vertauschen sie nicht, so beeinflußt die eine Messung das Resultat der zweiten.

(2.2.7) Ist u diagonalisierbar, aber entartet, ist die Situation komplizierter. Wir geben hierzu nur ein Beispiel, das zeigt, was vorkommen kann.

Der Raum sei vierdimensional und E_i eine Basis. Wir definieren

$$\begin{aligned} u &= (E_1 \otimes E_1^* + E_2 \otimes E_2^*)\lambda_1 + (E_3 \otimes E_3^* + E_4 \otimes E_4^*)\lambda_2 \qquad \text{mit } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ v &= E_1 \otimes E_1^*\mu_1 + (E_2 \otimes E_2^* + E_3 \otimes E_3^*)\mu_2 + E_4 \otimes E_4^*\mu_3 \end{aligned}$$

Beide Operatoren vertauschen, beide haben eine gemeinsame Zerlegung der Eins, aber es ist offensichtlich wegen der Art der Entartung nicht möglich, u als Funktion von v oder umgekehrt v als Funktion von u auszudrücken.

12.3 Der allgemeine Fall: Die Jordanzerlegung eines Endomorphismus.

12.3.0 Vorbemerkung

(3.0.1) Das Programm zur Strukturanalyse eines Endomorphismus u sah wie folgt aus:

> Der Vektorraum V soll in Teilräume zerlegt werden, auf denen die Restriktion von u jeweils eine besonders einfache Form hat. Diese Teilräume sollten möglichst eindeutig bestimmt, invariant und unzerlegbar (bezüglich u) sein.

(3.0.2) Im diagonalisierbaren Fall leisteten die Eigenräume $\mathcal{E}(\lambda)$ das weitgehend. Allerdings waren sie im entarteten Fall nicht mehr unzerlegbar. Die unzerlegbaren Teile waren nicht mehr eindeutig bestimmt, aber jeder invariante Teilraum baute sich aus Eigenräumen auf. In ihnen war u diagonalisierbar.

(3.0.3) Aber es gibt auch nicht diagonalisierbare Endomorphismen mit zu wenig Eigenvektoren. Wir behandeln nur den Fall, bei dem das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, setzen also eine eventuelle Körpererweiterung voraus. Dann erwarten wir, dass die verallgemeinerten Teilräume $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$ die gewünschte Zerlegung liefern.

(1.1.7). Aber wie groß ist k zu wählen? Für k=1 erhalten wir den diagonalisierbaren Fall als Spezialfall. Und wie sehen jetzt die unzerlegbaren Teilraume aus? Wie wirkt auf ihnen die Restriktion von u? Welche Basen wählt man, um so u.a. die beschreibende Matrix zu finden, die aus Jordankästchen aufgebaut sein wird?

(3.0.4) Diese Fragen gehen wir nacheinander durch.

12.3.1 Die Zerlegung des Raumes

(3.1.1) Zunächst ein Satz, der eine interessante, allgemein vorhandene Struktur aller Endomorphismen aufzeigt. Wir benötigen ihn weiter unten.

Satz: Sei V endlichdimensionaler Vektorraum und φ:V→V Endomorphismus. Dann ist φ die direkte Summe aus einem invertierbaren und einem nilpotenten Endomorphismus.

Das soll heißen: Es gibt zwei unter u invariante Teilräume B und N mit V=B⊕N, so dass die Restriktion von u auf N nilpotent und die auf B invertierbar ist.

(3.1.2) Jeder Vektor x∈V läßt sich daher eindeutig schreiben als x=n+b, so dass φ^k(n)=0 für k geeignet groß und φ(a)=b eindeutig lösbar in a∈ R ist. Immer ist $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ usw.

(3.1.3) Beispiel: M sei 2×2-Matrix vom Rang 1. Setze N=Kern(M) und R=Bild(M), sofern N≠R gilt . Ist dagegen Kern(M)=Bild(M). dann ist N=$\mathbb{R}^2$ und B={0} zu nehmen. Die Bedingungen des Satzes sind jeweils erfüllt.

(3.1.4} Beweis. Wir setzen N_0 ={0}, N_1 = Kernφ, N_2 =Kernφ^2 usw. Offensichtlich gilt $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset ...$. Diese Kette von Teilräumen muß aus Dimensionsgründen irgendwann stationär werden. D.h., es gibt ein q mit $N_{q-1} \neq N_q$, aber N_{q+k}=N_q für k=1,2...... . Aus N_{q+1}= N_q folgt $N_{q+2} = N_{q+1}$ usw. wie man leicht sieht. Ensprechend setzen wir $B_k = Bild\varphi^k$ und $B_0 = V$. Es gilt $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset$ ....Auch diese Kette muß stationär werden.

Wir setzen N=N_q und B=B_q. Es ist zu zeigen, dass für diese Wahl alle im Satz behaupteten Eigenschaften gelten. Beachten Sie: q ist allein über die Kette der Kerne definiert. Gehen wir die Eigenschaften durch.

▼ a) N_q+B_q ist direkte Summe. D.h. also $N_q \cap B_q$ ={0}. Nun besagt x∈$N_q \cap B_q$ aber $\varphi^q(x) = 0$ und x=$\varphi^q(y)$ für ein y∈V. Also $\varphi^{2q}(y)$=0 oder y∈ N_{2q}. Weiter war q so gewählt, daß N_{2q}=N_q gilt. Also y∈ N_q. Oder $\boxed{x=\varphi^q(y)=0}$, was zu zeigen war.

▼ b) $N_q \oplus B_q$ = V. Der gesamte Raum wird erzeugt. Es ist dimN_q +dimB_q = dim(Kernφ^q)+dim($Bild\varphi^q$)= n nach dem Dimensionssatz für Homomorphismen. Also (nach dem Dimensionssatz für Teilräume) dim($N_q \oplus B_q$)=dim(N_q)+dim(B_q)=n. Das beinhaltet die gewünschte Gleichheit der Räume.

▼ c) N_q ist invariant unter φ, wegen $\varphi(N_q) \subset N_{q+1}$ =N_q. Und $\varphi(B_q)$=$B_{q+1} \subset B_q$ gilt immer.

▼ d) Ist φ **nilpotent** auf N_q? Nun ist N_q=Kernφ^q. Also $\varphi^q(x) = 0$ für alle x∈N_q. Das beinhaltet die behauptete Nilpotenz.

▼ e) φ ist **invertierbar** auf B . Zu zeigen ist: φ(x)=0 für x∈B_q ⇒x=0. Nun besagt aber x∈B_q gerade x=φ^q(y) mit y∈V. Dann ist $\varphi(x) = \varphi^{q+1}$(y) =0 laut Annahme. Oder y∈N_{q+1}. Wegen der Wahl von q ist aber N_{q+1}=N_q . Also y∈N_q. Oder x=φ^q(y) =0 wie gewünscht. **Damit ist der Satz bewiesen.** Insbesondere folgt, dass die Serie der B_j auch für j=q stationär wird . Vgl. Punkt b) des Beweises).

(3.1.5) Mit Hilfe des Zerlegungssatzes (3.1.1) können wir die behauptete allgemeingültige Zerlegung von V in verallgemeinerte Eigenräume beweisen. Genauer gesagt ist V die Summe der $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$, wobei k=$\alpha(\lambda)$ = algebraische Multiplizität des Eigenwertes λ gewählt werden kann.

(3.1.6) **Satz:**

Sei	V endlichdimensionaler Vektorraum über K und u:V→V Endomorphismus. Weiter zerfalle das charakteristische Polynom von u in K vollständig in Linearfaktoren. Also $\chi_u(x) = (\lambda_1 - x)^{\alpha_1}.....(\lambda_r - x)^{\alpha_r}$. Die α_i sind die algebraischen Multiplizitäten der Eigenwerte.
Dann	gilt mit $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda) = Kern(u - \lambda id_V)^k$ V=$\mathcal{E}^{(\alpha_1)}(\lambda_1) \oplus \mathcal{E}^{(\alpha_2)}(\lambda_2) \oplus ..... \oplus \mathcal{E}^{(\alpha_k)}(\lambda_k)$ Und v_i =u-$\lambda_i id_V$ ist nilpotent auf $\mathcal{E}^{(\alpha_i)}(\lambda_i)$ für i=1,2,..,r.

(3.1.7) Beweis: Für λ_i ∈Sp(u) sei v_i=u-$\lambda_i$id. Auf diesen Endomorphismus wenden wir unseren Zerlegungssatz (3.1.1) an. Da $\mathcal{E}^{(q)}(\lambda_i) = Kernv_i^q$ ist, folgt: $\boxed{V=\mathcal{E}^{(q_i)}(\lambda_i) \oplus Bildv_i^{q_i}}$.

Nun sind beide Summanden invariant unter v_i und wegen u=v_i+$\lambda_i id$ auch unter u. Bezeichnen wir daher die Restriktion von u auf $\mathcal{E}^{(q)}(\lambda_i)$ mit u_0, so ist das charakteristische Polynom p_{u_0} von u_0 nach (1.3.8) ein Teiler von χ_u. Es muß die Gestalt p_{u_0}(x)=$(\lambda_i - x)^{\alpha_i - k}$ haben. Dabei ist k noch geeignet zu bestimmen.

(Andere Linearfaktoren würden zu Eigenvektoren führen, die nicht in diesem Teilraum liegen können. Die Eigenvektoren aller anderen Spektrumselemente liegen in Bild$v_i^{q_i}$).

Weiter muss k=0 gelten. Oder auch: **Alle** α_i Faktoren (λ_i-x) aus der Linearfaktordarstellung von χ_u müssen in p_{u_0} liegen. Andernfalls gäbe es einen zu λ_i gehörigen Eigenvektor in Bildv^q und das wäre ein Verstoß gegen die Invertierbarkeit von v_i auf diesem Raum. **Also gilt** dim$\mathcal{E}^{(q)}(\lambda_i) = \alpha_i$.

Da die Summe aller algebraischen Multiplizitäten n ergibt und wir aus (1.1.10) wissen, dass die verallgemeinerten Eigenräume eine direkte Summe bilden, haben wir jetzt:

$$V = \mathcal{E}^{(q_1)}(\lambda_1) \oplus \mathcal{E}^{(q_2)}(\lambda_2) \oplus .... \oplus \mathcal{E}^{(q_r)}(\lambda_r) \qquad \text{für geeignet hohe } q_i.$$

(3.1.8) **Zu zeigen ist noch,** daß man q_i=α_i wählen darf. Das beweisen wir mit Hilfe des folgenden
(3.1.9) Hilfssatzes:

Es sei	$\varphi : V \to V$ Endomorphismus. Der Vektor x$\in V$ habe die Eigenschaft $\boxed{\varphi^p(x) = 0, \text{ aber } \varphi^{p-1}(x) \neq 0.}$
Dann	sind die Vektoren x,$\varphi(x), ...\varphi^{p-1}(x)$ linear unabhängig. Sie spannen einen invarianten p-dimensionalen Teilraum auf.

(3.1.10) D.h. man kann aus einem Vektor x mit x$\in$Kernφ^p, aber x$\notin$Kernφ^{p-1} einen Satz (eine Familie) von p unabhängigen Vektoren bilden! Diese Vektoren erzeugen einen p-dimensionalen Teilraum von V, der sich als unzerlegbar erweisen wird. Die Konstruktion des Hilfssatzes erweist sich somit als ausgesprochen nützliche Konstruktion.

(3.1.11) Beweis: Sei

$$\alpha_0 x + \alpha_1\varphi(x) + ...\alpha_{p-1}\varphi^{p-1}(x) = 0.$$

Angenommen, das wäre eine nichttriviale Linearkombination, dann wären nicht alle α_i gleich Null. Sei j der kleinste Index mit $\alpha_j \neq 0$.Dann folgt:

$$\varphi^j(x) = -\frac{1}{\alpha_j}(\alpha_{j+1}\varphi^{j+1}(x) + ... + \alpha_{p-1}\varphi^{p-1}(x)).$$

Wendet man auf diese Gleichung φ^{p-j-1} an, so steht links $\varphi^{p-1}(x) \neq 0$, rechts dagegen Null, was Unfug ist. **Also ist unsere Familie linear unabhängig**.

(3.1.12) Damit kann das fehlende Beweisstück für (3.1.6) wie folgt erbracht werden:

Angenommen $\mathcal{E}^{(q_i)}(\lambda_i)$ wäre für $q_i = \alpha_i$ noch nicht stationär. Dann gäbe es x$\notin$ $\mathcal{E}^{(\alpha_i)}(\lambda)$, aber x$\in$ $\mathcal{E}^{(\alpha_i+1)}(\lambda_i)$. Oder auch: $v_i^{\alpha_i+1}(x)$=0. aber $v_i^{\alpha_i}$(x)$\neq$0. Der letzte Hilfssatz würde uns eine unabhängige Familie von $\alpha_i + 1$ Vektoren in einem α_i-dimensionalen Raum liefern, was nicht geht. Die Raumfolge muß daher bereits stationär sein.

Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

12.3.2 Jordanzerlegung und Jordanbasen

(3.2.1) Wir wissen bereits, dass der gesamte Raum V in eine direkte Summe invarianter Teilräume $\mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$ mit $\lambda \in Sp(u)$ und $\alpha = \alpha(\lambda)$ = (algebraische Multiplizität von λ) zerfällt. Als nächstes müssen wir analysieren, wie sich u auf diesen Teilräumen verhält. Ist $\alpha_i = \mu_i$, also algebraische Multiplizität gleich geometrischer, dann wissen wir: Die Restriktion ist ein Vielfaches der Einheit. Der gesamte Raum besteht ja aus Eigenvektoren. Aber wie ist das Verhalten im nicht diagonalisierbaren Fall?

(3.2.2) Dann gibt es jedenfalls ein p>1 und ein x$\in$ $\mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$ mit (u-λid)^p(x)=0, aber (u-λid)$^{p-1}$(x)$\neq$0. Das ist genau die Situation unseres Hilfssatzes (3.1.9) für φ=u-λid. Wir bilden zu einem derartigen x die dort gegebene Folge von Vektoren, **wobei wir in umgekehrter Reihenfolge numerieren**. Also mit v=u-λid:

$$\boxed{b_1 = v^{p-1}(x) = (u-\lambda id)^{p-1}(x), \qquad b_2 = v^{p-2}(x), \qquad b_p = x}$$
$$v(b_j) = (u-\lambda id)(b_j) = b_{j-1} \qquad b_{-1} = 0$$

Also: Der Vektor x, mit dem man startet, kommt in der für die Basis relevanten Numerierung zuletzt!

(3.2.3) Diese Vektoren bilden nach (3.1.9) eine Basis eines invarianten Teilraumes von $\mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$. Und die Wirkung von u - dem gegebenen Endomorphismus - auf diesem Teilraum läßt sich leicht angaben. Laut Definition ist ja v(b_j)=b_{j-1} und v=u-λid. Also u(b_j)-λb_j=b_{j-1}.

$$\begin{aligned} u(b_j) &= \lambda b_j + b_{j-1} \quad (j=2,..,p) \\ u(b_1) &= \lambda b_1 \end{aligned} \qquad J_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & .. & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & .. & 0 \\ : & : & & & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(3.2.4) Rechts ist die beschreibende Matrix gegeben, die u in diesem Teilraum bezüglich der Basis b beschreibt.

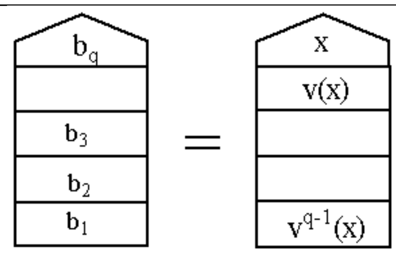
Für p=2 ergibt sich das einfachste echte Jordankästchen $J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Aber natürlich können auch höhere Werte von p auftreten.

(3.2.5) Nennen wir den von $b_1, ..., b_p$ erzeugten p-dimensionalen Teilraum $\mathcal{J}(x, \lambda; p)$. Die benötigten Zutaten: der Vektor x=b_p und $\lambda \in Sp(u)$ der betrachtete Eigenwert von u sowie die Raumdimension p mit $v^p(x) = 0$. Da es sich um einen Teilraum von $\mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$ handelt, ist alles, was man zu p sagen kann, dass p$\leq \alpha(\lambda)$, der algebraischen Dimension von λ, sein muss. Diese beiden Zahlen müssen aber keineswegs gleich sein. Beachten Sie, dass jeder Teilraum $\mathcal{J}$ einen eindimensionalen Teilraum von Eigenvektoren zu u enthält: Die von b_1 erzeugte Gerade. Weitere Eigenvektoren enthält $\mathcal{J}$ nicht.

☐ Zeigen Sie: Allgemeiner ist der von $b_1, b_2, ..., b_k$ aufgespannte Teilraum (k$\leq p$) invariant unter u. Damit hat man eine ganze Kette ineinander verschachtelter invarianter Teilräume.

(3.2.6) Die zu $\mathcal{J}$ gehörigen Teilräume sind i.a. nich kanonisch festgelegt. Was wir dagegen hoffen können, ist, dass die Teilräume $\mathcal{J}$ bezüglich u **unzerlegbar** sind. Und das kann tatsächlich gezeigt werden. Zur Erinnerung: $\mathcal{J}$ heißt unzerlegbar, wenn man $\mathcal{J}$ **nicht** als direkte Summe zweier echter invarianter Teilräume schreiben kann: $\mathcal{J} = U \oplus W$ mit nicht trivialen invarianten U und W.

Zur Verdeutlichung verwenden wir Bilder der nebenstehenden Art. Ganz unten steht der Eigenvektor b_1 und ganz oben der den Raum bestimmende Vektor x. Die Höhe einer solchen *Latte* gibt die zugehörige Dimension.



(3.2.7) **Satz:**

Sei	u:$V \to V$ Endomorphismus. $\lambda \in Sp(u)$ und v=u-λid. Der Vektor x$\in V$ habe die Eigenschaft $v^p(x) = 0$, aber $v^{p-1}(x) \neq 0$.
Dann	ist der mit x gebildete Teilraum $\mathcal{J}(x, \lambda; p)$ unzerlegbar bezüglich u.

(3.2.8) Beweis: Angenommen $\mathcal{J} = U \oplus W$ mit $p_1 = \dim U$ und $p_2 = \dim W$ sowie 0<$p_1, p_2 < p$. Dann folgt x=$x_1 + x_2$ mit $x_1 \in U$ und $x_2 \in W$. Da U und W beide invariant unter u und damit v sind, können wir v(x_1) $\in U$, $v^2(x_1) \in U$ usw. bilden. Da in u aber nicht mehr als p_1 unabhängige Vektoren existieren können, muss $v^{p_1}(x_1) = 0$ gelten. Vgl. (3.1.9). Entsprechend $v^{p_2}(x_2) = 0$. Dann gilt aber $v^{p-1}(x) = v^{p-1}(x_1) + v^{p-1}(x_2) = 0$ entgegen der Voraussetzung. Der Raum muss tatsächlich unzerlegbar sein!

(3.2.9) Damit haben wir alles zusammen, um unser Hauptresultat zu formulieren.

Satz	über die Jordanzerlegung eines Endomorphismus
Sei	u:$V \to V$ Endomorphismus. Das zugehörige charakteristische Polynom zerfalle in Linearfaktoren. $\lambda \in Sp(u)$ habe die algebraische Multiplizität α und den verallgemeinerten Eigenraum $\mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$.
Dann	kann man Vektoren $x_1, x_2, ..x_r \in \mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$ finden sowie zugehörige Zahlen q_i, derart, dass gilt: $\mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda) = \mathcal{J}(x_1, \lambda; q_1) \oplus \mathcal{J}(x_2, \lambda; q_2) \oplus ..... \oplus \mathcal{J}(x_r, \lambda; q_r) \quad q_1 + .. + q_r = \dim \mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$. Die Anzahl r und die Anzahlen der x_i, für die jeweils $x_i = 1, 2, .., \dim \mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$ ist, sind eindeutig bgestimmt.

□ r=4, $q_1 = 1$, $q_2 = q_3 = 2$ und $q_4 = 3$. Wie sieht die beschreibende Matrix (bezüglich einer Jordanbasis) aus? Für welches q≤ 8 wird $\mathcal{E}^{(q)}(\lambda)$ bereits konstant?

(3.2.10) Verdeutlichen wir uns die Probleme, die entstehen, **wenn man die Zerlegung konstruktiv ausführen möchte.** Man wählt $\lambda \in Sp(u)$ und bestimmt Kernv=$\mathcal{E}^{(1)}(\lambda)$. Das ist ein eindeutig bestimmter Teilraum. Dann bildet man Kern$v^2 = \mathcal{E}^{(2)}(\lambda)$. In dem uns interessierenden Fällen ist dieser Raum größer. Wir haben dann $\mathcal{E}^{(2)}(\lambda) = \mathcal{E}^{(1)}(\lambda) \oplus S_2$, wobei der supplementäre Raum **nicht eindeutig bestimmbar** ist. Nur seine Dimension liegt fest. Nehmen wir an, dass es noch einen Schrittt weiter geht und dass $\mathcal{E}^{(3)}(\lambda) = \mathcal{E}^{(2)}(\lambda) \oplus S_3$ mit nicht trivialem S_3 gilt. Danach mögen die $\mathcal{E}^{(i)}(\lambda)$ nicht mehr wachsen.

Jedes x∈ S_3 erfüllt dann die nach (3.1.9) und (3.2.7) relevante Eigenschaft: $v^3(x) = 0$, aber $b_1 = v^2(x) \neq 0$. Also muss man mit einem x aus einem der möglichen supplementären Räume S_3 starten. Diese Räume erhält man günstig, indem man mit einer Basis von $\mathcal{E}^{(2)}(\lambda)$ beginnt und sie zu einer Basis von $\mathcal{E}^{(3)}(\lambda)$ ergänzt, was S_3 gibt. Zu einem solche x=b_1 gehören dann automatisch die weiteren unabhängigen Vektoren $b_2 = v(x)$ und $b_3 = v^2(x)$, wobei b_3 Eigenvektor zu λ ist.

Was ist, wenn S_2 mehrdimensional, sagen wir zweidimensional ist? Dann müssen wir mit einer Basis x_1, x_2 starten und erhalten zwei unserer "Latten" nach (3.2.6). Sind die so erhaltenen Vektorenfamilien unabhängig? Das ist die verbleibende offene Frage.

(3.2.11) Der nachfolgende **Hilfssatz** erlaubt, diese Frage anzugehen.

Es sei	$\varphi : V \to V$ nilpotent mit $\varphi^q = 0$, aber $\varphi^{q-1} \neq 0$. Weiter sei $N_i = Kern(\varphi^i)$ und F ein Teilraum mit $F \cap N_i = \{0\}$. Dabei sei i fest mit $1 \leq i \leq q$.
Dann	gilt $\varphi(F) \cap N_{i-1} = \{0\}$ und φ induziert einen Isomorphismus F→ $\varphi(F)$. D.h. Insgesamt ist $N_{i-1} \oplus \varphi(F)$ eine direkte Summe.

"Isomorphismus" bedeutet insbesondere, dass in F unabhängige Vektoren auf unabhängige Vektoren in $\varphi(F)$ abgebildet werden.

(3.2.12) Beweis des Hilfssatzes: Sei x∈ $N_{i-1} \cap \varphi(F)$. Es folgt x=$\varphi(y)$ mit y∈ F und $\varphi^{i-1}(x) = \varphi^i(y) = 0$. D.h. aber: y∈ $N_i \cap F = \{0\}$. Also y=0 und damit x=$\varphi(y) = 0$. Damit ist $\varphi(F) \cap N_{i-1} = \{0\}$ gezeigt. Für die Injektivität von φ genügt es, in der gegebenen Überlegung mit x=0 zu starten.

(3.2.13) Jetzt kann man die Lücke in der Konstruktion der Jordanbasis schließen.

▼ Beginne mit $\mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$

▼ Ergänze eine Basis von $\mathcal{E}^{(\alpha-1)}(\lambda)$ zu einer Basis von $\mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$ durch Vektoren $x_1, x_2, ...$ Diese Vektoren spannen einen Teilraum $F_{\alpha-1}$ auf.

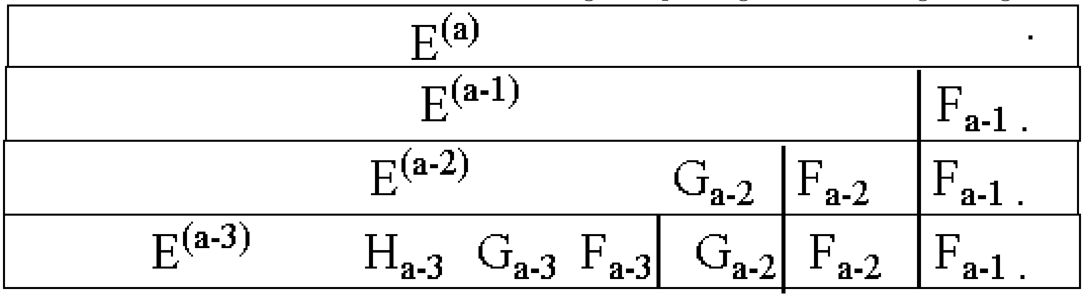
▼ Bilde $v(x_1), v(x_2)$....Diese Vektoren sind laut Hilfssatz unabhängig und spannen einen Teilraum $G_{\alpha-2}$ von $\mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$ auf, der laut Hilfssatz mit $\mathcal{E}^{(\alpha-2)}(\lambda)$ eine direkten Summe bildet.

▼Andererseits ist $G_{\alpha-2} \subset \mathcal{E}^{(\alpha-1)}(\lambda)$, so dass auch $G_{\alpha-2} \oplus F_{\alpha-1}$ direkt ist.

▼ Jetzt ergänze eine Basis von $\mathcal{E}^{(\alpha-2)}(\lambda) \oplus G_{\alpha-2}$ zu einer Basis von ganz $\mathcal{E}^{(\alpha-2)}(\lambda)$ durch Vektoren $y_1, y_2, ...$Den Raum bezeichnen wir mit $F_{\alpha-2}$.

▼ Usw. Bleibt am Ende von $\mathcal{E}^{(1)}(\lambda)$ noch etwa übrig, so ist davon eine Basis aus Eigenvektoren zu wählen.

In der Figur steht $E^{(a)}$ für $\mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$. Weiter ist G_{a-1}=v(F_a) und $H_a = v(H_a)$
Die vertikalen Striche beschreiben nicht eindeutige Abspaltung durch Basisergänzung.



(3.2.13) Beispiele:

$$\boxed{M=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}} \qquad \text{M-xid}=\begin{pmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ -2 & -6-x & 13 \\ -1 & -4 & 8-x \end{pmatrix} \qquad \boxed{\chi_M(x)=(-1)^3(x-1)^3}$$

Das charakteristische Polynom wird durch eine Routinerechnung gewonnen. Also $\boxed{Sp(M)=\{1\}}$. Wie steht es mit den verallgemeinerten Eigenräumen?

$$M-1id=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad (M-1id)^2=\begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad (M-1id)^3=0.$$

Das gibt für die Kerne, also die verallgemeinerten Eigenräume

$$\mathcal{E}(1)=\mathcal{E}^{(1)}(1)=Kern(M-id)=< x_1 > \quad mit \quad x_1 = {}^t(3,1,1)$$

Folglich ist M nicht diagonalisierbar. Es folgt weiter:

$$\mathcal{E}^{(2)}(1)=Kern(M-id)^2=< x_1,x_2 > \qquad mit \quad x_2 = {}^t(6,0,1)$$

$\mathcal{E}^{(3)}(1)$ ergibt schließlich den gesamten Raum. Ein möglicher ergänzender Vektor ist $x_3 = {}^t(0,1,0)$. Damit können wir beginnen, die gesuchte Basis zu konstruieren. $\boxed{b_3 = x_3}$. Und $b_2 = (M-1id)x_3 = {}^t(-3-7-4) = -7x_1+3x_2$. *Dieser* Vektor liegt daher im erwarteten Bereich. Weiter $b_1 = (M-1id)^2x_3 = 3\ {}^t(3,1,1)$. Das ist erwartungsgemäß ein Eigenvektor. Zusammen:

$$b_1=\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad b_2=\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad b_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T^{-1}=\begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Inversion und Basiswechsel geben

$$T=\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -9 \\ 9 & 27 & -54 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad TMT^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die transformierte Matrix hat die erwartete Jordanblockform. Die letzte Rechnung ist natürlich unnötig. Das Ergebnis ist durch die Konstruktion der Basis b vorgegeben.

Rechnet man dagegen die Matrix $N=\begin{pmatrix} -8 & 47 & -5 \\ -4 & 18 & -2 \\ -8 & 39 & -5 \end{pmatrix}$, so folgt $\chi_N(x) = -(x-2)^2(x-1)$. Der Raum $\mathcal{E}(2)$ erweist sich als eindimensional.

☐ Was bedeutet das für die weitere Rechnung?

☐ Sei Q= $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ und T eine Transformationsmatrix. Bilde $Q^N = TQT^{-1}$. Was wird die Rechnung für Q^N ergeben? Charakteristisches Polynom, Diagonalisierbarkeit, Konstruktion einer Jordanbasis und Endergebnis?

(3.2.14) **Zusammenfassung des gesamten, durch die Resultate gesicherten Vorgehens für einen Endomorphismus u:V→ V.:**

1. Bestimme Sp(u), eventuell nach einer Körpererweiterung. Das charakteristische Polynom muss vollständig in Linearfaktoren zerfallen.

2. Für jedes $\lambda \in Sp(u)$ bestimme die Folge der erweiterten Eigenräume $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$ durch Kernberechnung. Ab welchem q wird diese Folge konstant? Ist q=1, liegt für diesen Eigenwert der diagonalisierbare Fall vor. Stets ist q≤ $\alpha(\lambda)$ der algebraischen Multiplizität von λ.Man erhält eine direkte Zerlegung von V in eindeutig bestimmte, aber u.U. noch zerlegbare Teilräume.

3. Für jedes λ bestimmt man Vektoren, die den Unterschied von $\mathcal{E}^{(q)}(\lambda)$ und $\mathcal{E}^{(q-1)}(\lambda)$ in Form einer Basis erzeugen. q aus dem vorigen Punkt. Jeder dieser Vektoren x erzeugt einen unzerlegbaren Teilraum $\mathcal{J}(x,\lambda;q)$ der Dimension q. Es geba d_q derartige Vektoren x.

4. Jetzt nimmt man den Unterschied von $\mathcal{E}^{(q-1)}(\lambda)$ und $\mathcal{E}^{(q-2)}(\lambda)$. Und darin wieder alles, was noch nicht durch die Räume $\mathcal{J}(x,\lambda;q)$ in Form der Vektoren v(x) festgelegt ist. Hiervon wählt man erneut eine Basis. Jedes y dieser Basis erzeugt wieder einen unzerlegbaren Teilraum $\mathcal{J}(y,\lambda;q-1)$ der Dimension q-l. Es gebe d_{q-1} derartige Vektoren y.

5. Usw. bis $\mathcal{E}(\lambda)$ erreicht ist.

6. Dieses Programm ist füe alle $\lambda \in Sp(u)$ durchzuführen.

7. Am Ende ist V vollständig in unzerlegbare Teilräume des Typs $\mathcal{J}(x,\lambda;p)$ zerlegt. Für jeden dieser Zeilräume hat man eine zugehörige Jordanbasis. Daher zerfällt die beschreibende Matrix von u in lauter Jordankästchen. Die Anzahlen d_p der jeweiligen invarianten Teilräume der Dimension p sind eindeutig festgelegt, die Räume selbst i.a. nicht. Man hat $\Sigma d_i = \dim \mathcal{E}^{(\alpha)}(\lambda)$ für jedes $\lambda \in Sp(u)$.

8. Die gesamte Konstruktion kann im konkreten Fall konstruktiv nachvollzogen werden. Eine reine Existenzaussage wurde nirgends benutzt.

12.3.3 Die allgemeine Tensorzerlegung des Endomorphismus

(3.2.16) Kann man auch im allgemeinen Jordanfall eine Zerlegung der Eins angeben? Es genügt hierzu, die gewünschte Darstellung für einen einzelnen Jordankasten zu entwickeln. Die Kastendimension sei k. Weiter sei E_i eine zugehörige Jordanbasis. D.h. es gilt

$$\boxed{u(E_1)=\lambda E_1,} \qquad \text{und} \qquad \boxed{u(E_i)=\lambda E_i+E_{i-1}} \qquad \text{für} \qquad i=2,3,....,k.$$

(3.2.17} Wir definieren jetzt die folgenden Hilfsgrößen:

$$\Delta_0 = id = \Sigma E_i \otimes E_i^* \qquad \Delta_r = \Sigma_{j=r+1}^k E_{j-r} \otimes E_j^* \qquad \text{r=1,....,k-1} \qquad \Delta_r = 0 \quad \text{für r} \geq k.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \text{u} &= u \circ id = \Sigma u(E_i) \otimes E_i^* = \lambda id + \Delta_1 \\ u^2 &= \lambda^2 id + 2\lambda\Delta_1 + \Delta_2 \end{aligned}$$

Und weiter induktiv (k die Ordnung des Jordankästchens!)

$$\boxed{u^n = \Sigma_{r=0}^{k-1}\binom{n}{r}\lambda^{n-r}\Delta_r}$$

Bereits k=2, also u=$\lambda id + \Delta_1$ zeigt, dass man dies u nicht auf eine "Zerlegung der Eins" zurückführen kann wie im diagonalisierbaren Fall k=1. Im Falle k=n=3 etwa hat man

$$u = \lambda(E_1 \otimes E_1^* + E_2 \otimes E_2^* + E_3 \otimes E_3^*) + E_1 \otimes E_2^* + E_2 \otimes E_3^*$$

und die letzten beiden Beiträge stören bei dem Versuch, von u nach id zu gelangen.

Durch Summation und mit Hilfe der Formel $\binom{n}{r}h_n^{(r)} = \frac{1}{r!}h_{n-r}$ für die homogenen Polynome $h_n(x) = x^n$ erhält man dann jedoch für ein beliebiges Polynom p die Formel

$$\boxed{p(u) = \Sigma_{r=0}^{k-1}\frac{1}{r!}p^{(r)}(u)\Delta_r = p(\lambda)id + \Sigma_{r=1}^{k-1}\frac{1}{r!}p^{(r)}(\lambda)\Delta_r.}$$

Das ist die gesuchte Formel. Die Polynommethode läßt sich hiermit problemlos übertragen. **f und p müssen nur auf dem Spektrum bis zur (k-1)-ten Ableitung übereinstimmen.**

☐ Sei M Matrix mit k=3. Sie haben eine Jordanbasis E bestimmt. Wie lautet die beschreibende Matrix von e^{tM} bezüglich dieser Basis? Wie erhält man e^{tM} selbst? (Antwort: T und T^{-1} folgen aus E. Die darstellende Matrix bezüglich E ist nach unserer Formel wegen $p(x)=e^{tx}$

$$\left(e^{tM}\right)_N = e^{tM_N} = e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } M_N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Dann folgt e^{tM} bezüglich der alten Ausgangsbasis über $e^{tM} = T^{-1}(e^{tM})_N T.$). Verifizieren Sie, dass hierdurch wirklich die Differentialgleichung $\vec{y}'(t) = M_N\vec{y}(t)$ gelöst wird. Aber man kann (e^{tM_N}) auch unmittelbar über die Reihenentwicklung erhalten. Wie geht das?)