
Höhere Mathematik für Physiker

Teil II

F. Krause

Kapitel 11

Das Transformationsverhalten physikalischer Größen

Copyright F.Krause

Inhalt Kap.11: **Die Parametrisierung physikalischer Größen und das zugehörige Transformationsverhalten**

- **11.1 Der allgemeine Transformationsformalismus**
 - 11.1.0 Vorbemerkung
 - 11.1.1 **Der Formalismus**
 - * 11.1.1a Wie findet man Übersetzungsabbildungen?
 - * 11.1.1b Die Transformationsgruppe
 - 11.1.2 Einige **Konventionen zur Schreibweise von Abbildungen**
 - 11.1.3 **Konventionen zur Kennzeichnung des Transformationsverhaltens.** (Tensorieller Indexkalkül)
 - * 11.1.3a Konventionen zum Indexkalkül
 - * 11.1.3b Der Übergang zum Tensorkalkül
 - * 11.1.3a Der Indexkalkül im Falle einer nicht ausgearteten orthogonalen Geometrie
 - 11.1.4 **Die Feldkomplikation**
 - * 11.1.4a Transformationsverhalten der Koordinatenbasisfelder
 - * 11.1.4b Transformationsverhalten des Tupels der partiellen Ableitungen
 - * 11.1.4c Die Ortsabhängigkeit der Koordinatenbasisfelder

- **11.2 Anwendungsbeispiele**
 - 11.2.1 **Das Transformationsverhalten eines Normalenvektors**
 - 11.2.2 **Der Spannungstensor** (Stress)
 - 11.2.3 **Der Gradient eines Skalarfeldes**
 - * 11.2.3a Ein gerechnetes Beispiel des Transformationsproblems
 - * 11.2.3b Der mathematische Formalismus
 - * 11.2.3c Der Gradient bei krummlinigen Koordinaten
 - 11.2.4 **Invariante Teilmengen der Tensorräume**
 - * 11.2.4a Aktive und passive Transformationen
 - * 11.2.4b Symmetrische und antisymmetrische Tensoren
 - * 11.2.4c Anwendung der Zerlegung auf die totale Ableitung eines glatten Vektorfeldes Die Rotation (1)
 - * 11.2.4d Die äußere Ableitung in der äußeren Algebra Rotation (2)
 - * 11.2.4e Die Divergenz
 - 11.2.5 **Isotrope Tensoren und Hooksches Gesetz**
 - * 11.2.5a Die Konstruktion $SO(3)$ -isotroper Tensoren

Kapitel 11: Die Parametrisierung physikalischer Größen und das zugehörige Transformationsverhalten

11.1 Der allgemeine Transformationsformalismus. 11.1.0 Vorbemerkung

Im Kapitel 8 über Differentialgleichungen haben wir für physikalische Größen die Rollen der Kontrollgröße und der Beobachtungsgröße eingeführt und gesehen, wie sich daraus Systemzustände in Form von Abbildungen ergaben. Hierdurch wurde die deterministische Struktur unserer physikalischen Welt für wichtige Fälle mathematisch modelliert. Jetzt wollen wir einen anderen grundlegenden Aspekt physikalischer Größen behandeln:

Der jeweilige Wert physikalischer Größen wird typischerweise über Messungen und Beobachtungen bestimmt. Das Ergebnis erscheint jedoch meist nicht **absolut** oder in mathematischer Sprache **kanonisch**, als Wert einer absoluten geometrischen oder auch objektiven Größe, sondern als Zahlentupel, das noch subjektive beobachterabhängige Elemente enthält. So mißt man keinen Punkt, sondern drei Koordinaten, die von der subjektiv-willkürlichen Festlegung des Koordinatensystems abhängen. Diese Beobachtungstupel müssen erst über geeignete Abbildungen vom Parametrisierungs- bzw. Quantifizierungstyp mit den objektiven physikalischen Werten verbunden werden, was aber in bemerkenswertem Maße konsistent möglich ist. Dabei sehen wir hier vollständig vom Problem der Meßunsicherheiten ab, stellen uns vielmehr ideal genaue Messungen vor. Worum es geht, ist: **Was für Meßergebnisse finden unterschiedliche Beobachter desselben Ereignisses oder physikalischen Sachverhaltes vor und welche Zahlen müssen zu einem Tupel zusammengefaßt werden, damit sie eine Quantifizierung derselben interessierenden physikalischen Größe ergeben?**

Hierzu gibt es einen Formalismus, der in der theoretischen Physik ausgiebig benutzt wird und der für die meisten Fälle ausreicht. Vgl. auch Kap. 10.4.6 "Relativitätstheorie". Verdeutlichen wir uns nochmals kurz und drastisch, was die zu erfassende Beobachter**unabhängigkeit** physikalischer Sachverhalte besagt.

"Ein System starrer Körper ist im Gleichgewicht" ist ein Beispiel eines absoluten beobachter**unabhängigen** Aussage. Das Gleichgewicht besteht oder es besteht nicht, unabhängig davon, wo der Beobachter des Systems seinen Ursprung wählt, wie er seine Koordinatenrichtungen wählt usw. Die Beschreibungsgrößen des Systems werden von dieser Wahl abhängen, aber nicht die aus diesen zu extrahierende physikalische Aussage, ob Gleichgewicht vorliegt oder nicht.

Denkbar und damit mathematisch modellierbar sind durchaus Welten, in denen ein Magier durch Wahl seines Koordinatenursprunges Gebäude zum Einsturz bringen kann oder das Tragen schwerer Lasten erleichtert. Aber das ist eine andere als unserer Welt mit einem anderen zugehörigen Formalismus als dem, den wir jetzt beschreiben wollen.

11.1.1 Der Formalismus

(1.1.1) Gehen wir die **Hauptpunkte der zugehörigen Argumentation** durch:

(1.1.2) Physikalische Größen sind in der Regel einerseits qualitativ (geometrisch, absolut, als objektiver Sachverhalt, als mathematische Struktur ...) gegeben. Andererseits werden ihre Werte über Messungen bestimmt. Solche Messungen ergeben Zahlentupel und verlangen fast immer mehr oder weniger viele willkürliche Vereinbarungen. Quantitativ dargestellt wird eine physikalische Kontrollgröße meist über eine **Parametrisierungsabbildung** und eine Beobachtungsgröße über eine **Darstellungsabbildung**.

"Der Ortsvektor \vec{x}_P des Punktes P" und "die Flächennormale \vec{n} des Flächenstückes F" sind typisch qualitative Festlegungen, von Objekten, von deren objektiver Existenz man überzeugt ist. Zugehörige mögliche Quantifizierungen mit Hilfe eines Koordinatensystems wären $\vec{x}_P^K = {}^t(1,2,3,7)$ und $\vec{n}^K = {}^t(1,2,1)$. Jedes Koordinatensystem verlangt zur Festlegung zahlreiche mehr oder weniger willkürliche Vereinbarungen, die der Angabe eine subjektive Komponente geben. Ein anderer Beobachter könnte etwa denselben Punkt P durch $\vec{x}_P^L = {}^t(-1,5,0,6)$ beschreiben. Solche Koordinatendarstellungen sind alles andere als kanonisch! **Wie stellt man fest, dass beide Tripel Darstellungen desselben Punktes sind?** Oder auch: Wie sagt der zu K gehörige Beobachter voraus, was L messen wird, wenn L die Lage desselben Punktes vermisst?

(1.1.3) Quantifizierungen samt der mit ihnen verbundenen Willkür sind im Bereich der Physik zur exakten Beschreibung von Beobachtungen unvermeidbar. Andererseits gilt aber: **Die Möglichkeit unterschiedlicher, aber gleichwertiger Quantifizierungen enthält wichtige Information über die Struktur unserer Welt.** Sie macht Aussagen über Symmetrieeigenschaften, die sich in der Möglichkeit und Gleichwertigkeit bzw. Verschiedenheit unterschiedlicher Beobachter ausdrückt, was wiederum bedeutende Konsequenzen für das Naturverständnis hat.

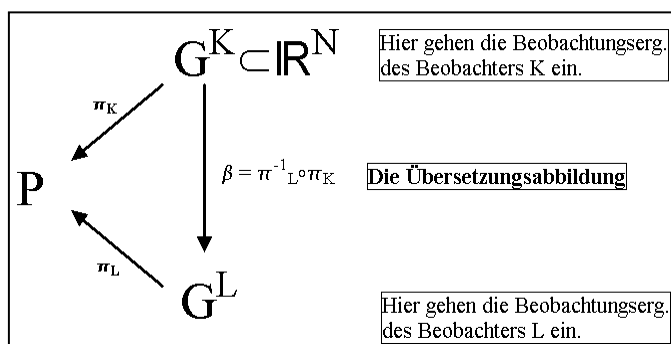
(1.1.4) Wir betrachten jetzt meßbare physikalische Größen wie Geschwindigkeit, Temperatur oder elektrische Ladung. Die denkbaren im Prinzip möglichen Werte einer solchen physikalischen Größe p vom Beobachtungstyp bilden eine Menge P. Die Menge P kann in der Regel so idealisiert werden, dass die Struktur eines Vektorraumes entsteht. Beispiel: Die vektorielle Geschwindigkeit eines Massenpunktes ist eine solche physikalische Größe. Ihre übliche Wertemenge ist V^3 oder \mathbb{R}_K^3 . Teilweise liegt auch eine Teilmenge eines Vektorraumes vor. (Die absolute Temperatur erlaubt keine negativen Werte.)

(1.1.5) Ist P vom Vektorraumtyp (der Dimension $N < \infty$, N Zahl der Freiheitsgrade), so erfolgt eine Parametrisierung von P - oder von Teilmengen davon - durch Angabe einer injektiven hinreichend glatten Abbildung $\pi_K: G \rightarrow P$ mit $G \subset \mathbb{R}^N$. Dies π_K macht also aus dem Tupel von Beobachtungsergebnissen ein absolutes mathematisches Objekt. Die Abbildungsrichtung repräsentiert die gedankliche Richtung der Datenverarbeitung. Das einfachste, aber äußerst nützliche Beispiel einer solchen Abbildungen im Falle von Vektorräumen bilden die Linearkombinationsabbildungen bezüglich gegebener Basen. Etwa

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto L_e(\alpha, \beta, \gamma) = \vec{a}\alpha + \vec{b}\beta + \vec{c}\gamma.$$

e steht für die gewählte Basis. Aber man hat immer die Möglichkeit unterschiedlicher Parametrisierungen. Etwa: Man kann die vektorielle Geschwindigkeit durch kartesische Koordinaten oder polar parametrisieren. Beides entspricht auch unterschiedlichen Beobachtungsmethoden.

(1.1.6) **Das Transformationsproblem:** Gegeben sei eine absolute Größe p mit zugehöriger Wertemenge P und zwei Parametrisierungen dieser Größe:



Das Problem: Wie rechnet man die Beobachtungsergebnisse des Beobachteten K in die von L um?
 (Beobachtungsergebnisse = quantitative Meßergebnisse)

Etwas anders formuliert: Wie kann K berechnen oder vorhersagen, was L mißt, wenn beide dasselbe physikalische Phänomen beobachten ? Das also zu demselben Wert aus P gehört.

(1.1.7) Die Antwort ist formal bereits in unserem Diagramm enthalten: **Man benötigt die dort eingeführte Übersetzungsabbildung** $\beta = \beta_{LK}$. Diese wandelt N-tupel, die Meßresultate von K repräsentieren, in die entsprechenden N-tupel von L um. $\beta(\vec{x}^K) = \beta_{LK}(\vec{x}^K)$ liefert also das Meßergebnis \vec{y}^L von L, wenn K das Ergebnistupel \vec{x}^K findet. (Reihenfolge K wird zu L in β_{LK})

- In der elementaren Vektorrechnung unterscheidet man freie und gebundene Vektoren. (Etwa Ortsvektor und Geschwindigkeitsvektor). Erklären sie den Unterschied über den Unterschied bestimmter zugehöriger Übersetzungsabbildungen.
- Für einen Mathematiker ist ein Skalar ein Körperelement, für einen Physiker ein Einstupel, dessen Übersetzungsabbildung stets die Identität ist. Geben sie ein Beispiel eines Skalars im Sinne des Mathematikers, das für den Physiker keines ist.
- Wie sieht die übliche Übersetzungsabbildung für die Zahlbeschreibung einer linearen Abbildung aus? (Kap.4.4.6)

11.1.1a Wie findet man Übersetzungsabbildungen?

(1.1.8) Die Vektorraumtheorie und insbesondere das Teilgebiet der Tensorräume stellt ein **Standardverfahren** zur Behandlung der gestellten Frage nach den Übersetzungsabbildungen bereit, **indem sie die Übersetzungsabbildungen als Resultat von Basiswechseln in Tensorprodukträumen interpretiert**. Denn das Tensorprodukt ermöglicht die Objektivierung, also bei Basisvorgabe den Übergang von Komponenten und Matrizen zu den absoluten Größen und es liefert ein einfaches kanonisches Verfahren zum Umgang mit Basiswechseln.

(1.1.9) Das Modell sieht wie folgt aus:

▼	Sei V_0 der Grundraum (Konfigurationsraum) der jeweiligen Theorie. Weiter sei V_0^* der zugehörige Dualraum.
▼	Sei V ein aus V_0 und V_0^* gebildetes Tensorprodukt (wie $V_0 \otimes V_0^*$ oder $V_0 \otimes V_0 \otimes V_0^*$).
▼	Gibt man eine Basis e von V_0 vor, so bestimmt diese kanonisch eine Basis von V . Jeder Basiswechsel in V_0 induziert daher einen Basiswechsel in V . Oder auch: Gibt man ein Koordinatensystem in V_0 vor, so bestimmt dieses automatisch ein Koordinatensystem in V .
▼	Jede Basis in V bestimmt aber über die zugehörige Linearkombinationsabbildung auch eine Parametrisierung von V .
▼	Damit legt ein Basiswechsel in V_0 automatisch die zugehörige gesuchte Übersetzungsabbildung β in V fest.

(1.1.10) Gehen wir alles noch einmal in Hinblick auf die Bildung zugehöriger Formeln durch:

- Man gibt vor: Eine Basis a für V_0 . D.h ein Koordinatensystem A .
- Man erhält automatisch:
 - In V_0 die Basisdarstellung $x = \sum a_i x_i^A$ für jedes $x \in V_0$.
 - Dazu eine Parametrisierung der Elemente von V durch:

$$\pi_A = (\mathbb{R}^n, \vec{x}^A \mapsto x = \sum a_i x_i^A, V_0)$$

- In V_0^* hat man entsprechend die zu a duale Basis a^* . Und damit die Darstellung $\lambda = \sum a_i^* \lambda_i$ für jede Linearform mit zugehöriger Parametrisierung. (Bei festem Skalarprodukt kann man V und V^* kanonisch identifizieren. Die duale Basis ist dann immer als reziproke Basis zu interpretieren. Kap.10)
- In V erhält man per Tensorkonstruktion (aus a) die eindeutig bestimmte zugehörige Basis A_J . Die Basisdarstellung der Tensoren $t \in V$ lautet $t = \sum A_J T_J^A$. Dabei ist J ein geeigneter Multiindex.

Die zugehörige Parametrisierung der Elemente von V lautet

$$\Pi_A = (\mathbb{R}^N, (T_j^A) \mapsto \Sigma A_j T_j^A, V) \quad (t^A) = (T_j^A) \quad \text{Komponententupel.}$$

(1.1.11) Gibt man jetzt eine zweite Basis b für V_0 vor mit Indexbezeichnung N, so gilt dafür alles entsprechend. Zusätzlich bestimmt die zweite Basis die Transformationsmatrizen T für V_0 über $a=bT$ und \bar{T} für V über $A=B\bar{T}$. (Die Matrix \bar{T} folgt über die Tensorkonstruktion! Die Transformationsmatrix für die duale Basis ist in Kap. 5.2.4 als ${}^tT^{-1}$ bestimmt worden.) Besitzt man diese Matrizen, so hat man die letztlich benötigten Transformationsabbildungen für die Koordinatentupel: $\vec{x}^N = T\vec{x}^A$ und $(t^N)=\bar{T}(t^A)$.

Insbesondere hat man die gesuchte Übersetzungsabbildung $\beta = \beta_{NA} = \bar{T}$ aus (1.1.6)

(1.1.12) Ist T ein Tensorprodukt oder auch ein äußeres Produkt, so läßt sich \bar{T} mit Hilfe von T unmittelbar angeben. Zu rechnen ist nichts mehr, was einen der Vorzüge dieses Standardverfahrens ausmacht. (Im Falle der äußeren Algebra muß man allerdings die Darstellung mit dem Erzeugendensystem aus allen Indexworten wählen, nicht die übliche Basis zu den Worten mit wachsendem Index. Dasselbe gilt für die in 11.5 einzuführenden invarianten Teiltäume.)

(1.1.13) Betrachten wir ein Beispiel: Sei $V=V_0 \otimes V_0^* \otimes V_0^* \otimes V_0$. Dann ist A mit $A_{irsj}=a_i \otimes a_r^* \otimes a_s^* \otimes a_j$ die alte zugehörige Basis von V. Die Konstruktion der neuen Basis B sei analog. Dann schreibt sich die zugehörige Transformationsgleichung der Tensorkomponenten

$$Y_{irsk}^B = \Sigma T_{ia} {}^tT_{rb}^{-1} {}^tT_{sc}^{-1} T_{kd} Y_{abcd}^A \quad \text{oder kurz} \quad \vec{Y}^B = \bar{T}\vec{Y}^A$$

(1.1.14) Ausgeschrieben ist das ein i.a. enorm langer Ausdruck mit n^4 Summanden. Aber in der Regel lassen sich die benötigten Rechnungen im Indexkalkül ausführen, für den die Zahl der Terme unwichtig ist.

(1.1.15) Beachten Sie den Bau der Formel:

Jedem Tensorfaktor entspricht ein Index und beim Transformieren eine Matrix. Ist der Faktor V_0 , so ist diese Matrix T, ist der Faktor V_0^* , so ist die Matrix ${}^tT^{-1}$. Die freien Indizes i,r,... links tauchen rechts in derselben Reihenfolge als jeweils erster Index der Matrizen auf. Der zweite Index, über den summiert wird, erscheint dann wieder als Index der alten Komponenten. usw.

Die gesamte Struktur ist völlig festgelegt, wenn man nur angibt, von welchem Typ die einzelnen Tensorfaktoren sind.

(1.1.16) Der Physiker tut das, indem er die Faktoren des Typs V_0 *kontravariant* und die des Typs V_0^* *kovariant* nennt. Zu kontravariant gehört T und zu kovariant ${}^tT^{-1}$.

(1.1.17) Mathematisch entspricht der Transformationsformel aus (1.1.13) die folgende absolute Gleichung in V. Sie stellt ein und denselben Vektor (Tensor) Y mit Hilfe von zwei Basen dar:

$$\boxed{Y = \Sigma a_i \otimes a_r^* \otimes a_s^* \otimes a_j Y_{irsj}^A = \Sigma b_i \otimes b_r^* \otimes b_s^* \otimes b_j Y_{irsj}^B}$$

Die Transformationsformel (1.1.13) folgt aus dieser Gleichung unmittelbar, wenn man wie üblich die a-Basis (= alt) durch die b-Basis ("neu") ausdrückt. Denn T ist ja die Transformationsmatrix für a und ${}^tT^{-1}$ ist die Transformationsmatrix für die zugehörige Dualbasis a^* . (Kap.5.2.4 und 9.2.2)

(1.1.18) Manchmal kann man das Transformationsgesetz in die Form einer Matrixmultiplikation umschreiben, die dann einfacher zu handhaben ist. Für die beschreibende Matrix einer linearen Abbildung gilt in Indexformulierung $M_{ik}^N = \Sigma T_{ir} {}^tT_{ks}^{-1} M_{rs}^A$. Das läßt sich schreiben als Matrixprodukt $M^N = T M^A T^{-1}$ wie wir aus Kap. 4.4.6a wissen. Für die beschreibende Matrix einer Bilinearform gibt (4.2.3) die entsprechende Umformung. Diese Matrix transformiert sich doppelt kovariant. Also $B_{ik}^N = \Sigma {}^tT_{ir}^{-1} {}^tT_{ks}^{-1} M_{rs}^A$. Das gibt die etwas andere Matrixgleichung $B^N = {}^tT^{-1} B^A T^{-1}$.

11.1.1b Die Transformationsgruppe

(1.1.19) Welche Basen sind zulässig und bestimmen dadurch auch *die zulässigen Basiswechsel*? In der Regel wird man keineswegs **alle** Basen nehmen, sondern nur die eines bestimmten Typs, etwa alle Orthonormalbasen oder alle Sylvesterbasen. Die Menge aller zugehörigen Basiswechsel sollte durch eine Gruppe, die

jeweilige Transformationsgruppe induziert werden. Etwa $S(3)$ im euklidischen Fall und die Lorentzgruppe $S(1,3)$ im Fall der Realivitätstheorie. Und $\text{Aut}(V_0)$, wenn man alle Basen zuläßt.

(1.1.20) Diese Gruppe operiert nun auf einer Vielzahl von Objekten und Räumen. Dadurch wird das in Kap. 3.3 beschriebene Konzept realisiert, ein und dieselbe Operation auf die unterschiedlichsten Objekte wirken zu lassen. Hier geht es natürlich um die Frage: **Was geschieht mit irgendwelchen Messergebnissen am System, wenn man einen Beobachterwechsel vornimmt.**

(1.1.21) Gehen wir einige für uns wichtige Gruppenoperationen durch. Sei zunächst \mathcal{B} die Menge der zulässigen Basen. Dann operiert G auf dieser Menge gemäß $e=fT$ oder besser $(T,e) \mapsto T \star e = f = eT^{-1}$. Dabei ist T die Transformationsmatrix und e wie üblich die alte und f die neue Basis. Überdies identifizieren wir die Gruppenelemente mit den Matrizen $T=T_g$. Entsprechend operiert G auf den dualen Basen durch Übergang zur transponierten Abbildung.

(1.1.22) Sei jetzt V einer der oben beschriebenen Tensorräume der Dimension N . e_j eine zulässige Basis von V_0 und e_J die Ausdehnung dieser Basis auf V . Dabei verallgemeinern wir die Kollektivindexschreibweise, die wir in der äußeren Algebra benutzt haben, in naheliegender Weise. $J=13 \dots 42$ etwa besage $e_J = e_1 \otimes e_3^* \otimes e_4 \otimes e_2$. Jeder Tensor $Y \in V$ hat dann die Basisdarstellung $Y = \sum e_J Y_J^K$. Das ergibt die Darstellungsabbildung $D_{e,} = (V, Y \mapsto \vec{Y}^K, \mathbb{R}^N)$. Dabei ist \mathbb{R}^N der Raum der Komponententupel, der also die Tupel der jeweiligen Meßergebnisse aufnimmt. Und dann operiert G von links auf \mathbb{R}^N vermöge $(T, \vec{Y}^A) \mapsto \vec{Y}^N = \overline{T} \vec{Y}^A$. Wir schreiben auch $T \star \vec{Y} = \overline{T} \cdot \vec{Y}$, um die Operationsstruktur zu verdeutlichen. In Komponentenform ist das jetzt $Y_J = \sum \overline{T}_{JK} Y_K$.

(1.1.23) Das bedeutet, dass die Gruppenelemente durch $N \times N$ Matrizen (\overline{T}_{JK}) beschrieben dargestellt werden, welche wegen $g \star (h \star Y) = (g \circ h) \star Y$ die folgende Linearitätseigenschaft erfüllen müssen:

$$\boxed{\overline{T}_g \overline{T}_h = \overline{T}_{g \circ h}} \quad \text{Etwa bei Drehungen um} \quad R(\varphi)R(\psi) = R(\varphi + \psi) \\ \text{eine feste Achse:}$$

Oder auch: Man hat einen Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$, der Transformationsgruppe G in die lineare Gruppe von V . Derartige Gruppenhomomorphismen beherrscht man mathematisch gut, woraus viele wichtige und tieferliegende physikalische Konsequenzen resultieren. Vgt. Kap 9.2.7a.

(1.1.24) Die Gruppe G erfaßt die unter (1.1.3) genannten Symmetrieeigenschaften. Die Gruppe ist im Prinzip immer mit anzugeben. Also *Tensor bezüglich der orthogonalen Gruppe* oder *Vektor bezüglich der Lorentzgruppe* usw. Der ε -Tensor der Physik ist nur Tensor bezüglich der speziellen orthogonalen Gruppe. Usw.

(1.1.25) Über die uns letztlich interessierenden Übersetzungsabbildungen können wir damit zusammenfassend sagen:

Der Beobachterwechsel werde durch das Gruppenelement $g \in G$ also T_g beschrieben. Gehört das Koordinatentupel \vec{Y}^A zu einem Element des Raumes V , dann, wird die Übersetzungsabbildung durch die Matrix \overline{T} der jeweiligen Gruppendarstellung gegeben.

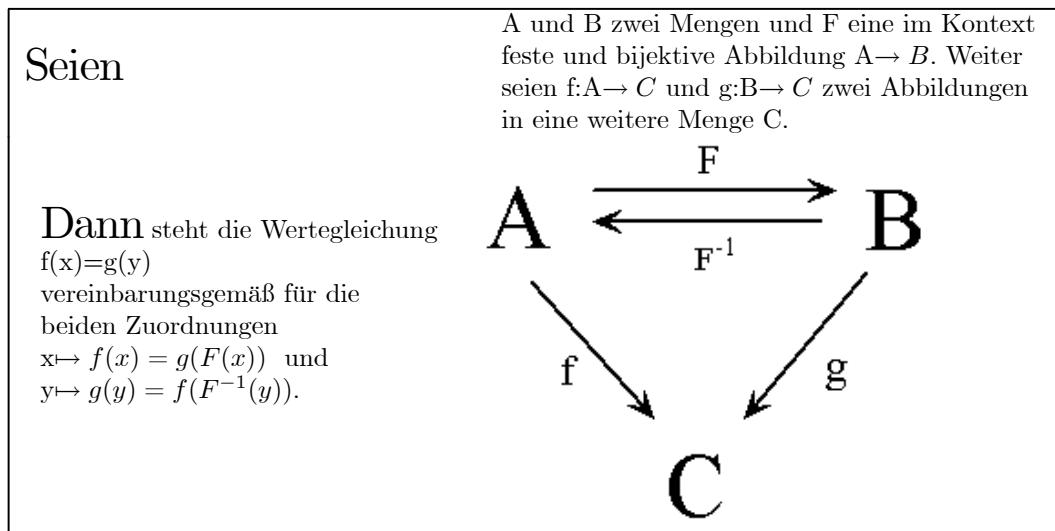
(1.1.26) Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse

(1)	Die gesamte Struktur wird durch Vorgabe des Konfigurationsraumes V_0 des zur betrachteten Größe gehörigen Tensorraumes V sowie durch Angabe der Transformationsgruppe festgelegt. Zur Transformationsgruppe gehört auch die Angabe der zulässigen Basen. Das sind die benötigten Zutaten.
(2)	Sobald man dann in V_0 zwei zulässige Basen oder eine Basis und ein Gruppenelement vorgibt, verhält sich das System wie ein System kommunizierender Röhren: Das Einfüllen von T in V_0 fixiert die Transformationsmatrix \overline{T} für V und damit die Übersetzungsabbildung zugehörigen Koordinatentupel.
(3)	Mathematisch liegt eine Darstellung $(G, g \mapsto \overline{T}_g, \text{Aut}(\mathbb{R}^N))$ in Form eines Gruppenhomomorphismus vor.

11.1.2 Einige Konventionen zur Schreibweise von Abbildungen

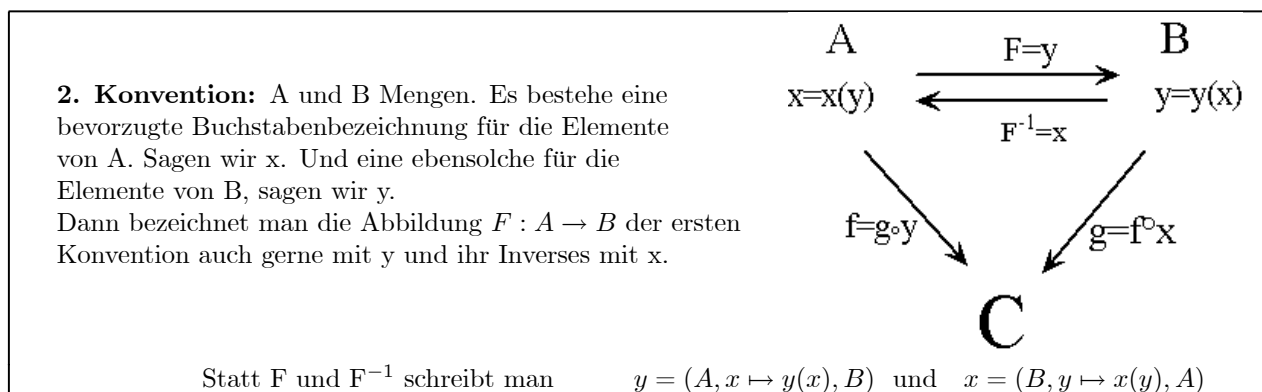
(1.2.1) In der Physik und anderen Anwendungsbereichen entstehen Abbildungen vielfach über definierende Gleichungen für die Werte. Dabei haben sich einige nützliche Konventionen herausgebildet, die den in der Mathematik üblichen konträr sind, die aber für manche Zwecke, insbesondere für die Quantifizierung und die Transformation von Feldern vorteilhaft sein können. Wir beschreiben diese Konventionen hier kurz. Für das Verständnis dieser Vereinbarungen erweist sich erneut der Rollenbegriff als vorteilhaft.

(1.2.2) **1. Konvention:**



(1.2.3) D.h. $f(x)=g(y)$ steht sowohl für die Abbildungsgleichung $f=g \circ F$ als auch alternativ für $g=f \circ F^{-1}$. Im Rahmen des Rollenzuweisungskonzeptes ist jeweils fallspezifisch festzulegen, ob x oder y unabhängige Variable sein soll. Die andere Größe erhält dann jeweils die Rolle einer abhängigen Hilfsgröße.

(1.2.4) Man kann die Gleichung $f(x)=g(y)$ verwenden, um eine der beiden Abbildungen g oder f zu definieren. Beim Differenzieren ist die genannte Konvention unbedingt zu beachten. Die Gleichung $f(x,y)=g(r,\theta)$ steuert so die Umrechnung zwischen ebenen kartesischen und polaren Koordinaten.



(1.2.5) Man muß also jeweils mit Hilfe des Kontexts entscheiden, **ob ein Buchstabe Abbildung oder Wert** bezeichnet, was natürlich wieder eine Rollenzuweisung beinhaltet. Wir werden diese Konvention meist dadurch mildern, dass wir die Abbildung durch einen Index kenntlich machen und etwa $x = x_P(y)$ statt $x=x(y)$ schreiben.

Anmerkung: Das totale Differential ds eines Skalfeldes wird von uns als Wert $Ds(x) \cdot \Delta x$ der totalen Ableitung interpretiert. Im Differentialformenkalkül übernimmt ds dann die Rolle von $Ds(x)$, wird zur Abbildung $ds: \Delta x \mapsto Ds(x) \cdot \Delta x$.

(1.2.6) Beispiel: Das Element $J_{ik} = \partial_k F_i$ der Jacobimatrix wird gerne mit $\partial_k y_i$ bezeichnet.

(1.2.7) Beide Konventionen zusammen ergeben:

$f(x)=g(y)$ ist je nach Situation interpretierbar als $f(x)=g(y(x))$ oder $f(x(y))=g(y)$.

Erneut entstehen die rechten Gleichungen durch unterschiedliche Rollenzuweisungen an die beiden Buchstaben x und y .

(1.2.8) Schließlich wird durch eine dritte Konvention alles auf die Spitze getrieben.

3. Konvention: Man legt dazu die Bezeichnung für die Elemente aus A und B , also x und y kanonisch fest, was allen Regeln der mathematischen Abbildungstheorie widerspricht. Dann sagt einem die Bezeichnung unmittelbar, welcher Urbildraum gemeint ist, und man vereinbart, auch noch f und g mit demselben Buchstaben zu bezeichnen.

Man schreibt also $f(x)=f(y)$ und meint mit dem linken f etwas anderes als dem rechten.

(1.2.9) In eine derartige Gleichung darf man nicht einfach Werte einsetzen. Ist etwa $y=F(x)$ und $5=F(2)$ und $2 \in B$, so gilt keineswegs $f(2)=f(2)$ sondern $f(2)=f(5)$. Einzige Rettung sind dann Schreibweisen wie $f(x=2)=f(y=5) \neq f(x=5)$ usw.

(1.2.10) Formal ist das Vorgehen so zu interpretieren: Die Buchstaben x und y haben in der Gleichung eine Doppelrolle! Sie sind einmal **Index zur Charakterisierung der Abbildung** und zum anderen eben **Variable**. Trennt man die beiden Rollen, erhält man Gleichungen wie $f_x(x)=f_y(y)$. Und **hier** darf man einsetzen. Etwa $f_x(2)=f_y(5) \neq f_y(2)$.

(1.2.11) Im Sinne des Problemkreises der Parametrisierung physikalischer Größen ist auch die dritte Konvention durchaus stimmig: Ein und dieselbe physikalische Größe f wird auf unterschiedliche Weise parametrisiert, einmal auf die kanonisch durch den Buchstaben x fixierte Weise und einmal auf die durch y fixierte Weise. Bezeichnet T ein Temperaturfeld der Ebene, so schreibt man

$$T(\vec{x}) = T(x, y) = T(r, \theta) \quad \text{statt} \quad T_A(\vec{x}) = T_K(x, y) = T_P(r, \theta).$$

Hier bezeichnet T drei ganz unterschiedliche Funktionen (Abbildungen), was beim Rechnen zu beachten ist. Solange einem das bewußt ist und man keine Werte einsetzen oder differenzieren muß, kann man sich die Indizes tatsächlich sparen: Denn A für "absolut" und K für "kartesisch" und P für "polar" geht natürlich ebenso aus den kanonischen Variablenbezeichnungen hervor.

(1.2.12) Wir werden die dritte Konvention meiden, indem wir zusätzliche Indizes anbringen, die beiden anderen Konventionen jedoch durchaus verwenden. Konkret: Statt etwa die Ortsvektoren zweier Geraden g und h mit $\vec{x}(\alpha)$ und $\vec{x}(\beta)$ zu bezeichnen, schreiben wir $\vec{x}_g(\alpha)$ und $\vec{x}_h(\beta)$. Das ermöglicht uns einerseits, die Hilfen zu nutzen, die gleiche Symbole für Intuition und Erinnerung liefern, vermeidet aber das formale Kuddelmuddel, das vielfach so geklärt und erklärt wird, daß der Fragende mit dem Satz "Ist doch klar, wie das gemeint ist", abgespeist wird.

11.1.3 Konventionen zur Kennzeichnung des Transformationsverhaltens. (Tensorieller Indexkalkül)

Die Konventionen dieses Abschnittes ergänzen und verfeinern die Regeln des Indexkalküls aus Kapitel 4.4.2b. Zur Erinnerung wiederholen wir zunächst die **Grundideen des Indexkalküls für Moduln und Vektorräume** Kapitel 4.4.2:

◆ (I.0) Alle Rechnungen mit Matrizen und Koordinatenvektoren sollen möglichst in Rechnungen für die Komponenten umgewandelt werden. Denn dann kommt man vollständig mit den Rechenregeln für Körper und Ringe aus.

(1.3.1) Betrachten wir etwa die Gleichung $\vec{y} = \sum \vec{b}_i M_{ik} x_k$. Anwenden von L_b^{-1} macht daraus die reinen Gleichungen vom Indextyp $y_i = \sum_k M_{ik} x_k$ (i freier Parameter). Vielfach interpretieren wir aber auch die erste vektorielle Gleichung bereits als Gleichung des Indexkalküls, einfach nur etwas anders zusammengefaßt. Oder auch: Alle relevanten Elemente des Indexkalküls sind in der Darstellung für feste Basen bereits enthalten, nur dass sie vektoriell codiert sind. Mit Hilfe von Koeffizientenvergleich erhält man aus der Vektorgleichung sofort das Gleichungssystem des Indexkalküls im engeren Sinne.

11.1.3a Konventionen zum Indexkalkül

(1.3.2) Wir stellen nochmals die in den Kapiteln 4 und 5 entwickelten Regeln zum Indexkalkül zusammen.

◆ (I.1) Die Koordinatenräume K^N der Koordinatenvektoren werden als **Linksvektorräume** geschrieben, sobald sie in der Rolle von Parameterräumen auftreten, was fast immer der Fall ist. D.h. als Urbildmenge einer Linearkombinationsabbildung. Alle zugehörigen Tupel sind als Spaltenvektoren anzusetzen.

Das sichert die übliche Form der Matrixrechnung Spalte=Matrix×Spalte.

◆ (I.2) **Alle geometrischen Vektorräume werden als Rechtsvektorräume** geschrieben. D.h. die typische Basisdarstellung hat immer die Form:

$$\vec{x} = \sum \vec{b}_j x_j = \vec{b}_1 x_1 + \dots + \vec{b}_n x_n .$$

Eine Linearkombinationsabbildung führt daher immer von einem Linksraum in einen Rechtsraum: $L : K^n \rightarrow V$.

◆ (I.3) Vorgabe eines Koordinatensystems S bedeutet, dass man in **allen** am Problem beteiligten Räumen eine Basis vorgibt. Wie üblich kennzeichnen wir zugehörige Koordinatengrößen durch einen Index S .

Ist also b eine zu S gehörige Basis und $\vec{x} = \sum \vec{b}_i x_i$, dann ist der Spaltenvektor $\vec{x}^S = (x_i)$ der zugehörige Koordinatenvektor. Im Indexkalkül ist das einfach x_i .

◆ (I.4) Ein Index, der als äußerer Parameter auftritt, heißt *laufender oder freier Index*. Er läuft über die Indexmenge einer der beteiligten Basen. Ein freier Index steht immer auf beiden Seiten einer Gleichung des Indexkalküls der Gleichung (Merkmal!).

◆ (I.5) Ein Index, über den summiert wird, heißt *stummer Index*. Auch er bezieht sich auf eine der beteiligten Basen. Ein stummer Index tritt - von ganz seltenen Ausnahmen abgesehen - in der Summe, zu der er gehört, immer doppelt auf. Sonst (außerhalb der Summe) kommt er nicht vor. (Das Vorkommen am Summenzeichen wird nicht gezählt!)

Im Rahmen der Matrixrechnung ist es in der Regel so, dass **zwischen** den beiden Vorkommen eines stummen Index kein weiterer Index steht. Diese Indexstruktur spiegelt die Regel Zeile mal Spalte der Matrixrechnung wider. Also

$$\sum_k M_{ik} N_{kj} \quad \text{aber nicht ohne Grund} \quad \sum_k N_{kj} M_{ik} .$$

◆ (I.6) Von allen Rechenregeln des Körpers sollte man das Kommutativgesetz der Multiplikation so lange wie möglich meiden. Nie Faktoren vertauschen, ohne dass ein besonderer Grund vorliegt! Denn beim Vertauschen der Faktoren wird die Indexreihenfolge verändert, und das ist in der Regel nicht gut.

11.1.3b Der Übergang zum Tensorkalkül

(1.3.3) Das **Grundkonzept des (bisherigen) Indexkalküls** war: Führe vektorielle Rechnungen auf Rechnungen für die einzelnen Komponenten zurück. Das erfolgt vielfach gleichwertig durch Rechnen mit festen Basen. Bei der Einführung beschreibender Matrizen läuft das (meist) auf die Frage hinaus: *Wie wird diese Matrix definiert?*

(1.3.4) Das neue **Grundproblem des Tensorkalküls** ist: Man hat ein Tupel (irgendwie bereits eingeführter) mathematischer Objekte. Man fragt: Wie verhalten sich diese bei Koordinatenwechsel? Dazu muss man sie zunächst in eine *standardisierte Form bringen, die es dann erlaubt, das zugehörige Transformationsverhalten abzulesen*. Und das ist die Form, die im Indexkalkül unter (I.1) für die Koordinatenvektoren eingeführt ist:

$$\boxed{\text{Neue Spalte} = \text{Matrix} \cdot (\text{alte Spalte})}$$

Beide Formen können, müssen aber nicht übereinstimmen. Insbesondere ist die Herstellung der tensoriellen Transformationsform ein Grund, Faktoren zu vertauschen. (Verletzung von (I.6)).

(1.3.5) Unser Vektormodell liefert zwei Arten von Transformationsverhalten vektorieller Größen, *kovariantes* und *kontravariantes*. In physikalischen Texten werden Formeln gerne im Indexkalkül **als Formeln für die Komponenten** dargestellt. Dann ist es vordringlich, das jeweilige Transformationsverhalten und weitere wichtige Eigenschaften möglichst unmittelbar durch Inspektion erkennen zu können. Die nachfolgend beschriebenen im physikalischen Bereich verbreiteten Konventionen erleichtern das, sobald man sich an sie gewöhnt hat. Sie beziehen sich vornehmlich auf einen Grundraum mit symmetrischem nicht ausgeartetem Skalarprodukt, einem Fall, für den sie einen besonders effizienten Kalkül bereitstellen.

(1.3.6) Schreibweisen des tensoriellen Indexkalküls

(▼ T.1) Zur Unterscheidung der beiden Arten von Transformationsverhalten verwendet man die **Indexstellung**. Indizes können hoch oder tief gestellt werden. Bei Hochstellung besteht die Gefahr, den Index mit einer Potenz zu verwechseln, x^2 könnte sowohl für "x-zwei" als auch "x-Quadrat" stehen. Fast immer ist jedoch aus dem Zusammenhang klar, was gemeint ist. $(x^2)^2$ steht meist für "x-zwei-Quadrat".

(▼ T.2) Eine kontravariante (sich mit T transformierende) Indexgröße wird durch einen **hochgestellten** Index kenntlich gemacht. Anknüpfungsbeispiel sind die Komponenten von Orts- und Geschwindigkeitsvektoren, die mit $\boxed{x^i}$ bzw. $\boxed{v^j}$ bezeichnet werden. Wie üblich läuft der Parameter i hier (stillschweigend) von 1 bis $n = \dim V$.

(▼ T.3) Eine kovariante (sich mit ${}^tT^{-1}$ transformierende) Indexgröße wird durch einen tiefgestellten Index kenntlich gemacht. Etwa $\boxed{\lambda_i}$.

(▼ T.4) Summiert wird immer über einen doppelt auftretenden Index, der einmal hoch- und einmal tief gestellt ist, was Basisunabhängigkeit der Summe sichert.

(▼ T.5) Die Komponenten der Transformationsmatrix T werden wie folgt bezeichnet: $\boxed{T = (T_{\cdot k}^i)}$. Also: Der erste Index hoch-, der zweite tiefgestellt.

(▼ T.6) Die Komponenten der Matrix ${}^tT^{-1}$ werden mit $T_{i \cdot}^k$ bezeichnet. Also $\boxed{{}^tT^{-1} = (T_{i \cdot}^k)}$. Derselbe Buchstabe T, aber mit anderer Indexstellung!

(▼ T.7) Die Basisdarstellung eines Vektors lautet $\boxed{\vec{x} = \sum \vec{a}_i x^i}$.

(▼ T.8) Für die Komponenten der inversen Matrix erhält man (durch Rückgängigmachen der Transposition in $T_{\cdot k}^i$) $\boxed{(T^{-1})_{\cdot k}^m = T_{k \cdot}^m}$

(▼ T.9) Entsprechend für die Komponenten der transponierten Matrix $\boxed{({}^tT)_{\cdot k}^i = T_{\cdot k}^i}$

(1.3.7) Neu und gewöhnungsbedürftig sind die Indexstellungen an der Transformationsmatrix T. Daher eine zusammenfassende Zuordnungstabelle für die unterschiedlichen Stellungen:

Herkömmlich	$(T)_{ik}$	$({}^tT)_{ik}$	$({}^tT^{-1})_{ik}$	$(T^{-1})_{ik}$
Tensoriell	$T_{\cdot k}^i$	$T_{\cdot i}^k$	$T_{\cdot i}^k$	$T_{\cdot k}^i$

(1.3.8) Wieso erhalten die Basisvektoren in (T.7) einen unteren Index "kovariant" ? Wie ist das zu verstehen? Die übliche Beziehung zwischen den beiden Basen ist "Alte Basis durch neue ausdrücken" Also $\boxed{\vec{a}_i = \sum \vec{b}_k T_{ki}}$ Aber das ist die **Definitionsgleichung** für T. Sie hat nicht die **Form, aus der man das Transformationsverhalten abliest**. Das verlangt *neu durch alt* und Linksschreibweise. Lösen wir

die Definitionsgleichung nach der neuen Basis b auf, so folgt $\vec{b}_k = \Sigma ({}^t T^{-1})_{kj} \vec{a}_j$. Dabei haben wir die Matrixkomponenten wie bisher bezeichnet. In der neuen Schreibweise lauten die beiden Gleichungen

$$\vec{a}_i = \Sigma \vec{b}_k T_{..i}^{k..} \quad \text{und} \quad \vec{b}_k = \Sigma T_{k..}^{..j} \vec{a}_j.$$

Summiert wird über einen oberen und einen unteren Index und diese grenzen aneinander!

(1.3.9) Wie schreiben sich die Gleichungen $T^{-1}T = TT^{-1} = id_V$ mit den neuen Bezeichnungen? Einsetzen gibt $\Sigma T_{rk}^{-1} T_{ks} = \Sigma T_{rk}^{-1} T_{..s}^{k..} = \Sigma T_{k..}^{..r} T_{..s}^{k..} = \delta_s^r$ und $\Sigma T_{rk} T_{ks}^{-1} = \Sigma T_{..k}^{r..} T_{s..}^{-1} = \delta_s^r$. Das ist etwas gewöhnungsbedürftig. Die Matrixproduktregel *angrenzender Summationsindizes* ist hier verletzt.

(1.3.10) **Bemerkung zur Bezeichnungsweise:** Die Termbezeichnung ${}^t T^{-1}$ enthält codiert die übliche Beschreibung des Weges, wie man aus T die neue Matrix erhält: T wird transponiert und invertiert ohne Beachtung der Reihenfolge. In der neuen Bezeichnung $(T_{i..}^{..k})$ fehlt diese Wegbeschreibung. Wir werden jedoch sehen, dass die neue Bezeichnung bei Vorhandensein einer nicht ausgearteten orthogonalen Geometrie einen dann einfacheren anderen Konstruktionsweg von T nach ${}^t T^{-1}$ beschreibt!

(1.3.11) Wie steht es mit dem **Transformationsverhalten der dualen Basis** a^* ? Für sie haben wir die Festlegungsgleichung $a_i^* = \Sigma b_k^* ({}^t T^{-1})_{ki}$. Umgestellt gibt das als Gleichung zum Ablesen des Transformationsverhaltens: $b_k^* = \Sigma_i T_{ki} a_i^*$. (Neu durch Alt und Linksschreibweise). Das ist kontravariant, d.h. wir haben einen oberen Index zu verwenden!

(▼ T.10) Die Vektoren der dualen Basis erhalten einen oberen Index. Für sie gilt

$$a^{*i} = \Sigma b^{*i} T_{k..}^{..i} \quad \text{und} \quad b^{*k} = \Sigma T_{..i}^{k..} a^{*i}.$$

Erneut liefert die neue Bezeichnung über die Indexstellung die gesamte Information. Und ein Vektor des Dualraumes schreibt sich $\lambda = \Sigma a^{*i} \lambda_i$.

(1.3.12) **Bemerkung zur Summation:** Beachten Sie, wie (T.7) und (T.10) auch für vektorielle Summen die Regel (T.4) erfüllen!

(1.3.13) **Bemerkung zur Indexstellung:** Nehmen wir an, wir hätten einen Tensor $U \in V^* \otimes V^* \otimes V$. Die nachfolgende Tabelle liefert die zugehörige Basisdarstellung sowie das Transformationsverhalten einmal in der bisherigen Schreibweise und einmal in der neuen tensoriellen:

Bisher:	$U = \Sigma a_i^* \otimes a_j^* \otimes \vec{a}_k U_{ijk}$	$U_{ijk}^N = \Sigma {}^t T_{ir}^{-1} {}^t T_{js}^{-1} T_{kt} U_{rst}^A$
Tensorform	$A = \Sigma a^{*i} \otimes a^{*j} \otimes \vec{a}_k A_{ij}^{..k}$	$(U^N)_{ij}^{..k} = \Sigma T_{i..}^{r..} T_{j..}^{s..} T_{..t}^{k..} (U^N)_{rst}^{..t}$

Das Beispiel zeigt einmal die enorme Schematisierung der Darstellung. Zum anderen zeigt es, wie gut die eingeführte Indexstellung für die beiden Matrizen $T = (T_{i..}^{..k})$ und ${}^t T^{-1} = (T_{i..}^{..k})$ zur Transformationsformel der Komponenten paßt, die die neuen Größen durch die alten ausdrückt. Zuerst (von links) immer der freie Index - im Beispiel i, j, k - und dann der zu summierende stumme. Im Beispiel r, s und t .

(1.3.14) Es folgen zwei wichtige, aber jetzt bereits klare Regel.

(▼ T.11) Die Tensor Darstellung einer **linearen Abbildung** $\varphi : V \rightarrow W$ bezüglich der Basen a und b lautet $\varphi = \Sigma b_k \otimes a_r^* M_{kr}$. Das ist abzuändern zu $\varphi = \Sigma \vec{b}_k \otimes a^{*r} M_{..r}^{k..}$, konsistent mit dem bekanntem Transformationsverhalten $M^N = T M^A T^{-1}$. Die zugehörige Fundamentalidentität lautet

$$\varphi(\vec{x}) = \Sigma a_k M_{..i}^{k..} x^i.$$

Das Transformationsverhalten in tensorieller Form

$$(M^N)_{..k}^{i..} = \Sigma T_{..r}^{i..} T_{k..}^{..s} (M^A)_{..s}^{r..}$$

Wieder rechts mit den freien Indizes zuerst und in korrekter Stellung.

(▼ T.12) Eine **Bilinearform** dagegen schreibt sich jetzt $B = \Sigma a^{*k} \otimes a^{*r} B_{kr}$ mit zugehöriger Fundamentalidentität

$$B(x, y) = \Sigma y^i B_{ik} x^k = \Sigma B_{ik} y^i x^k.$$

Das zugehörige Transformationsverhalten in tensorieller Form

$$B_{ik}^N = \Sigma T_{i..}^r T_{k..}^s B_{rs}^A.$$

Die bisherigen Beispiele sollten bereits verdeutlicht haben, dass man der Indexstellung alle relevante Information entnehmen kann.

(1.3.15) Die nachfolgende Übung enthält eine wichtige Anwendung des bisher Gesagten, die allerdings eigenständige Überlegungen verlangt. Wir kommen später auf die Antwort zurück.

- Es seien $\vec{\alpha} \mapsto \vec{x}_\pi(\vec{\alpha}) = \vec{x}$ und $\vec{\beta} = \vec{x}_\varphi(\vec{\beta}) = \vec{x}$ zwei Parametrisierungen des Ortsvektors \vec{x} . Die Konventionen zur Schreibweise von Abbildungen aus 11.1.2 sollen verwendet werden. Erklären und interpretieren Sie damit die folgenden Gleichungen, wie man sie teilweise in physikalischen Texten findet.

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha^i} = \Sigma_k \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta^k} \frac{\partial \beta^k}{\partial \alpha^i} \quad T_{.r}^{k.} = J_{.r}^{k.} = \frac{\partial \beta^k}{\partial \alpha^r} = \partial_r \beta^k.$$

Interpretieren soll insbesondere heißen: Machen Sie sich auch Gedanken über den merktechnischen Nutzen dieser Schreibweisen! T steht wie üblich für die Transformationsmatrix eines Basisfeldwechsels und J für eine Jacobimatrix.

11.1.3c Der Indexkalkül im Falle einer nicht ausgearteten orthogonalen Geometrie

(1.3.16) Zum Konfigurationsraum V gehöre das nicht ausgeartete symmetrische Skalarprodukt G. Die beschreibende Matrix - den *metrischen Tensor* - bezeichnen wir mit g. Also $g_{ik} = G(a_i, a_k)$, wenn a die gewählte Basis ist. Der metrische Tensor g transformiert sich im Matrixkalkül nach der Regel $g^N = {}^t T^{-1} g^A T^{-1}$, also doppelt kovariant, was die unteren Indizes rechtfertigt.

(1.3.17) Hieraus folgt:

$$\boxed{{}^t T^{-1} = g^N T (g^A)^{-1}}.$$

Diese Gleichung enthält den in (1.3.10) bereits angekündigten zweiten Weg, die Matrix ${}^t T^{-1}$ zu berechnen. Und wir werden sehen, dass sich dieser Weg mit Hilfe des Indexkalküls gut codieren läßt.

(▼ T.13) Wir bezeichnen die Komponenten der inversen Matrix von g mit g^{ik} . Also

$$\boxed{g^{-1} = (g^{ik})}.$$

Das gibt die (zunächst gewöhnungsbedürftigen) Gleichungen $\boxed{\Sigma_r g_{ir} g^{rk} = \Sigma g^{ir} g_{rs} = \delta_s^r}$.

- Weisen Sie nach, dass tatsächlich doppelt kontravariantes Transformationsverhalten vorliegt, was die oberen Indizes rechtfertigt.

Damit schreibt sich (1.3.16) im Indexkalkül

$$\boxed{T_{i..}^{.k} = \Sigma g_{ir}^N T_{..s}^{r.} g_A^{sk}}$$

D.h. die Berechnung der neuen Matrix ${}^t T^{-1}$ erfolgt durch Multiplikation von T mit g bzw. g^{-1} und diese Multiplikation wird vollständig durch die Indexstellung beschrieben.

(1.3.18) Genauer:

(▼ T.14) Das Herauf- und Herunterziehen von Indizes:

- Der Übergang von $T_{..k}^{i.}$ zu T_{ik} erfolgt durch Multiplikation mit g^N von links: $T_{ik} = \Sigma g_{ir}^N T_{..k}^{r.}$ (**Herunterziehen eines Index mit g**).
- Der Übergang von $T_{..k}^{i.}$ nach T^{ik} erfolgt durch Multiplikation von rechts mit $(g^A)^{-1}$. Also $T^{ik} = \Sigma T_{..r}^{i.} g_A^{rk}$. (**Heraufziehen eines Index mit g**).

(1.3.19) **Wir identifizieren den Dualraum mit dem Grundraum** durch den Isomorphismus $\iota : V \rightarrow V^*$ ausDie zu a reziproke Basis wird mit $(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^n)$ bezeichnet. D.h. $\vec{a}^i = \iota^{-1}(a^{*i})$. Und die Vektoren dieser Basis transformieren sich nach (..) kovariant, wie die Indexstellung anzeigt.

(1.3.20) Zu jeder Basis von V haben wir jetzt automatisch die 2. reziproke Basis a^* von V. Oder auch: Tupel, die bisher als Elemente des Dualraumes interpretiert werden mußten, können jetzt als Vektoren aus V selbst angesehen werden - nur gehören sie eben zu einer anderen Basis des Grundraumes.

Wir wissen bereits, dass g den Übergang zwischen Basis und reziproker Basis beschreibt $a = a^*g$. Das zeigt, dass der Wchsl zwischen Basis und reziproker Basis auch durch Herauf- und Herunterziehen des Index erfolgt:

$$\vec{a}^i = \Sigma \vec{a}_r g^{ri} \quad \text{und} \quad \vec{a}_k = \Sigma \vec{a}^r g_{rk}.$$

(▼ T.15) **Ko- und kontravariante Komponenten eines Vektors.** Jeder Vektor \vec{x} kann entweder durch die Basis a oder die zugehörige reziproke Basis a^* dargestellt werden:

$$\vec{x} = \Sigma \vec{a}_i x^i = \Sigma \vec{a}^i x_i.$$

Man nennt die x^i die kontravarianten und x_i die kovarianten Komponenten des Vektors \vec{x} . Die Umrechnung erfolgt vollständig schematisch mit Hilfe der Indexstellung:

$\vec{a}^i = \Sigma \vec{a}_k g^{ki}$	$\vec{a}_k = \Sigma \vec{a}^i g_{ik}$	$x^i = \Sigma g^{ik} x_k$	$x_k = \Sigma g_{ki} x^i$
Klar gilt		$\Sigma x_i y^i = \Sigma x^i y_i = G(\vec{x}, \vec{y})$ (Fundamentalidentität)	

(1.3.21) **Wann muss man zwischen g^N und g^A unterscheiden?** Nicht beim Übergang zwischen ko- und kontravarianten Komponenten, da dann die Grundraumbasis fixiert ist. Anders bei der Berechnung der Transformationsmatrix ${}^tT^{-1}$.

Nun ist es in der Regel in der Physik so, dass die Transformationsgruppe aus Isometrien besteht, und das bedeutet, dass dann $g^A = g^N$ gilt. Dann läuft der gesamte Rechenkalkül schematisch über die Indexstellung ab und diese wird durch Herauf- und Herunterziehen der Indizes mit Hilfe von g bewirkt. In diesem Fall vereinfacht sich (1.3.17) zu

$$T_{i..}^{..k} = \Sigma g_{ir} T_{..s}^{r..} g^{sk}.$$

(1.3.22) Und beachten Sie: **Einem einschlägigen Rechenausdruck kann man sein Transformationsverhalten bzw. seine mathematische tensorielle Struktur unmittelbar durch Inspektion der Indexstellung ansehen**

- Testen Sie das am Beispiel $R_{..km}^{ij..}$. Wie sieht die Tensorarstellung dieses (im Indexkalkül gegebenen) Komponententupels aus? Wie das zugehörige Transformationsverhalten? Und dann dasselbe für die Größe $\Sigma_k R_{..km}^{ik..}$.
- Wie stellt sich die in Kap 9.3.4e eingeführte Kontraktion von Tensoren in der der jetzigen Indexschreibweise dar?

(1.3.23) Als weiteres Beispiel behandeln wir die **Strukturkonstanten einer Algebra.**

(V_0, \star) sei eine Algebra. Die Multiplikation sei bezüglich der alten Basis a durch die Strukturkonstanten c_{ik}^ℓ gegeben. Also $a_i \star a_k = \Sigma a_\ell c_{ik}^\ell$. Bezüglich der neuen Basis A seien die Strukturkonstanten d_{st}^r . Wir **erwarten** folgendes durch die Indexstellungen beschreibens und unmittelbar festgelegtes Transformationsverhalten:

$$A_r \star A_s = \Sigma_t A_t d_{rs}^t \quad \boxed{d_{rs}^t = \Sigma T_{..i}^{t..} T_{r..}^{..j} T_{s..}^{..k} c_{jk}^{i..}}$$

Das **prüfen** wir mit einer Rechnung herkömmlicher Art, bei der wir die d-s durch die c-s ausdrücken müssen. Der Gang der Rechnung ist klar:

$$\begin{aligned} A_r \star A_s &= \Sigma_t A_t d_{rs}^t = (\Sigma a_i (T^{-1})_{ir}) * (\Sigma a_k (T^{-1})_{ks}) \\ &= \Sigma a_i * a_k (T^{-1})_{ir} (T^{-1})_{ks} = \Sigma a_n c_{ik}^n (T^{-1})_{ir} (T^{-1})_{ks} \\ &= \Sigma_t T_{tn} c_{ik}^n (T^{-1})_{ir} (T^{-1})_{ks} \\ &= \Sigma_t T_{t.n} ({}^tT^{-1})_{ri} ({}^tT^{-1})_{sk} c_{ik}^n \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich gibt die Transformationsformel und unsere Übersetzungstabelle für die Indexstellung liefert tatsächlich das zunächst schematisch erhaltene Transformationsgesetz.

Herkömmlich	$(T)_{ik}$	$({}^tT)_{ik}$	$({}^tT^{-1})_{ik}$	$(T^{-1})_{ik}$	$d_{rs}^t = \sum T_{t,n} ({}^tT^{-1})_{ri} ({}^tT^{-1})_{sk} \cdot c_{ik}^n$
Tensoriell	$T_{.k}^i$	$T_{.i}^k$	$T_{i.}^k$	$T_{k.}^i$	$d_{,rs}^t = \sum T_{.n}^t T_{r.}^i T_{s.}^k \cdot c_{ik}^n$

□ Zu welchem Tensorraum gehören die Strukturkonstanten daher?

(1.3.24) Natürlich gibt es auch Indizes, bei denen das Transformationsverhalten weder ko- noch kontravariant ist. Etwa bei nichtlinearen Parametrisierungen des Ortsvektors $\vec{\alpha} \mapsto \vec{x}(\vec{\alpha})$. Trotzdem wollen wir auch hier eventuelle Indizes nach oben schreiben. Also $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$. Der Nutzen dieser Vereinbarung wird sich beim Differenzieren zeigen.

(1.3.25) Wir besprechen jetzt drei größere Beispiele, die zeigen, wie mathematische und physikalische Gegebenheiten das Transformationsverhalten bestimmter Größen genauer **der sie beschreibenden Zahlupel** festlegen. Und zwar betrachten wir den **Normalenvektor** (11.1.4), den **Spannungstensor** (11.1.5) und den **Gradienten eines Skalarfeldes** (11.1.6). In all diesen Fällen findet man ein nichttriviales Transformationsverhalten, das jedoch in jedem Fall durch ein kurzes Stichwort gut merkbar wird.

11.1.4 Die Feldkomplikation

(1.4.1) Bei Abbildungen, speziell bei Abbildungen vom Feldtyp, ist es meist erforderlich, Urbildraum und Wertraum gesondert zu parametrisieren. Kap.6.1.4-6. Nehmen wir an, wir hätten eine Abbildung, bei der der Urbildraum die Konfigurationsraumrolle hat, etwa ein Feld auf V_0^3 . Dann hat dieser Urbildraum folgende vier Funktionen:

1. Er beschreibt in seiner Rolle als Konfigurationsraum die physikalische Größe "**Ort**".
2. Er beschreibt die **vektorielle Geschwindigkeit** im Konfigurationsraum über Formeln des Typs $\vec{V} \Delta t = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ bzw. $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$.
3. Er ermöglicht und beschreibt die **Parallelverschiebung** von Vektoren.
4. Er übernimmt die oben skizzierte Rolle des Grundraumes V_0 für den tensoriellen **Transformationsskalkül**.

(1.4.2) Eine derartige Aufgabenvielfalt kann nur beim ersten Ansatz unentfaltet einem einzigen Raumtyp zugeordnet werden. Ein erstes Argument gegen diese Rollenidenkonzentration ist, dass die möglichen Orte wegen 1.) immer einen Vektorraum oder Teilvektorraum bilden müssen. Diese Annahme ist schon bei einfachen Beispielen wie ebene oder räumliche Pendelbewegung, starres Molekül usw. wenig sinnvoll und angemessen. Der in Kapitel 16 zu besprechende Formalismus der Mannigfaltigkeiten trennt die vier Funktionen dann auch weitgehend. Etwas genauer:

- Zu 1): Der den Ort beschreibende Konfigurationsraum verliert seine Rolle als Vektorraum, er wird zur Mannigfaltigkeit.
- Zu 2) und 4): Zu jedem Punkt wird die Menge der möglichen momentanen Geschwindigkeiten gebildet und diese bildet einen Vektorraum, genauer ein Vektorraumfeld. (Kein Vektorfeld! Den Punkten wird kein individueller Vektor, sondern jeweils ein ganzer Vektorraum zugeordnet!) Denn die möglichen Geschwindigkeiten können sich von Punkt zu Punkt ändern. Man denke an die Bewegung auf einer Kugeloberfläche. Dieser Raum der lokal möglichen Geschwindigkeiten übernimmt dann die 4. Funktion, also die Rolle des Grundraumes V_0 für den Transformationsformalismus. Mit dieser auszuführenden Präzisierung bleibt der soeben besprochene Formalismus gültig und wichtig. Vgl. auch Kap. 6.3.3, "geometrischer Tangentialraum".
- Zu 3) Die Parallelverschiebung - etwa einer Geschwindigkeit von einem Punkt (= Ort) zu einem anderen oder der Vergleich zweier Feldstärken zu **verschiedenen** Orten - schließlich ist i.a. nicht mehr auf kanonische Weise möglich. Will man sie dennoch, so benötigt man eine zusätzliche Struktur.

Die in den Anwendungen auftretenden Vektoren sind in der Regel keine Einzelvektoren, sondern Vektorfelder auf dem Konfigurationsraum. Manchmal kann man den Konfigurationsraumpunkt einfach als äußeren Parameter behandeln. Dann gilt alles bisher Gesagte entsprechend modifiziert. Zwei neue Probleme treten auf.

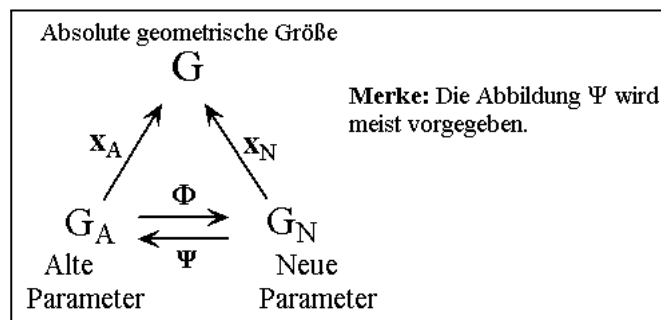
- Wie transformieren sich die Vektorgrößen, wenn man die Konfigurationsraumparametrisierung wechselt. Kurz: Wie transformieren sich die Basisfelder $\vec{\partial}$? Es zeigt sich, dass der Parameter $\vec{\alpha}$ auch hier weitgehend äußerer Parameter ist
- Wie ändern sich die Basisfelder $\vec{\partial}(\vec{\alpha})$, wenn man den Aufpunkt ändert? Kurz: Wie sieht die Tangentenapproximation für $\vec{\partial}(\vec{\alpha} + \Delta\vec{\alpha})$ aus?

Auf diese beiden Fragen gehen wir jetzt nacheinander ein.

11.1.4a Transformationsverhalten der Koordinatenbasisfelder

(1.4.3) Was das Transformationsverhalten betrifft, so beschränken wir uns im Augenblick auf die Diskussion eines Vektorfeldes vom Typ $V_0 \rightarrow V_0$. Hat man hier die Zusammenhänge verstanden, so lassen sich die anderen Fälle relativ leicht anschließen. Unser Feld sei $f = (G, \vec{x} \mapsto f(\vec{x}), V_0)$ und G sei offenes Gebiet von V_0 .

(1.4.4) Es sei daran erinnert, dass jetzt Urbild und Wert beide durch Koordinaten ausgedrückt werden müssen, d. h. beide Seiten müssen transformiert werden. Daher können wir nicht mehr wie sonst mit dem Basiswechsel starten. Stattdessen starten wir mit der Vorgabe von zwei bijektiven Parametrisierungen der Urbildmenge G . Wir werden sehen, dass hier im Feldfall die gesamte Struktur durch diese Vorgabe festgelegt wird. Die Skizze erklärt die Bezeichnungen.



Ψ ist die übliche **Einstiegsabbildung**: Die alten Koordinaten werden als Funktion der neuen dargestellt. Etwa $x=r\cos\theta$ und $y=r\sin\theta$ beim Übergang zu ebenen Polarkoordinaten.

(1.4.5) Φ soll die dazu inverse Abbildung sein, also $\Phi = \Psi^{-1}$. Wir werden sehen, dass diese Abbildung hier rechnerisch wichtig ist. Wir haben die Darstellungsgleichungen $\vec{x} = \vec{x}_A(\vec{\alpha}) = \vec{x}_N(\vec{\beta})$, die den Vektor $\vec{x} \in G$ durch die Parameter ausdrücken. Durch Ableiten erhalten wir die beiden Basisfelder $\vec{\partial}_A = \vec{\partial}_A(\vec{\alpha})$ und $\vec{\partial}_N = \vec{\partial}_N(\vec{\beta})$. Zunächst sind das Basisfelder über der jeweiligen Parametrisierung. Aber infolge der vorausgesetzten Bijektivität kann man sie auch als Felder über G interpretieren. (Kap. 6.3.4b). Damit wirklich Basen vorliegen, muß das Rangkriterium aus 6.3.3 erfüllt sein. Der Rang von $D\Phi$ muß überall maximal gleich $\dim V_0 = n$ sein. Oder auch: Φ muß im Sinne des Satzes von der inversen Abbildung aus Kap.7. invertierbar sein.

(1.4.6) Wie üblich soll die alte $\vec{\partial}_A$ -Basis durch die neue $\vec{\partial}_N$ dargestellt werden. Daher schreiben wir $\vec{x}_A(\vec{\alpha}) = \vec{x}_N(\Phi(\vec{\alpha}))$. Beachten Sie, dass wir hier Φ und nicht Ψ benötigen! Diese Gleichung differenzieren wir nach der Kettenregel und finden:

$$\frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \alpha^j}(\vec{\alpha}) = \sum_s \frac{\partial \vec{x}_N}{\partial \beta^s}(\vec{\beta}) \frac{\partial \Phi^s}{\partial \alpha^j}(\vec{\alpha}) \quad \text{D.h.} \quad \vec{\partial}_{A,j} = \sum_s \vec{\partial}_{N,s} J^s_j(\vec{\alpha}) \quad \text{mit} \quad J^s_j(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \Phi^s}{\partial \alpha^j}(\vec{\alpha}).$$

D.h.: Die Transformationsmatrix der beiden Basisfelder ist einfach die Jakobimatrix J der Funktion Φ .

Nochmals: Φ gehört zu "neu durch alt" und gibt uns die Transformationsmatrix für "alt durch neu" der $\vec{\partial}$ -Felder. In der rechten geometrischen Kurzform $\vec{\partial}_{A,j} = \sum_s \vec{\partial}_{N,s} J_{.j}^s(\vec{\alpha})$ sind die meisten Argumente fortgelassen.

Für die durch die Indexstellung gekennzeichnete inverse Matrix folgt dann:

$$J_{.j}^s(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \Phi^s}{\partial \alpha^j}(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \beta^s}{\partial \alpha^j}(\vec{\alpha}) \quad \boxed{J_{i.}^k(\vec{\beta}) = \frac{\partial \Psi^k}{\partial \beta^i}(\vec{\beta}) = \frac{\partial \alpha^k}{\partial \beta^i}(\vec{\beta})}$$

(1.4.7) Jetzt sind wir problemlos in der Lage, das Transformationsverhalten unseres Vektorfeldes $f : V_0 \rightarrow V_0$ abzuleiten. Dabei nehmen wir ja an, dass beide Größen \vec{x} und $\vec{y} = f(\vec{x})$ bezüglich der beiden Basisfelder $\vec{\partial}_A$ und $\vec{\partial}_N$ entwickelt werden. Wir beginnen mit der absoluten Darstellung:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \sum \vec{\partial}_j^A f_A^j(\vec{\alpha}) = \sum \vec{\partial}_s^N f_N^s(\vec{\beta}) \\ &= \sum \vec{\partial}_s^N(\vec{\beta}) J_{.j}^s(\vec{\alpha}) f_A^j(\vec{\alpha}) \\ &= \sum \vec{\partial}_s^N J_{.j}^s(\Psi(\vec{\beta})) f_A^j(\Psi(\vec{\beta})). \end{aligned}$$

Zur zweiten Zeile: Wir müssen die neuen Komponenten durch die alten ausdrücken und $\vec{\beta}$ über $\vec{\alpha} = \Psi(\vec{\beta})$ als unabhängige Variable nehmen. Über Koeffizientenvergleich folgen die neuen Komponenten als Funktion der alten, **folgt also die gewünschte Transformationsbeziehung:**

$$\boxed{f_N^s(\vec{\beta}) = \sum_j J_{.j}^s(\Psi(\vec{\beta})) f_A^j(\Psi(\vec{\beta})) \quad \text{oder auch} \quad f_N^s(\vec{\beta}) = \sum_j \frac{\partial \Psi^s}{\partial \alpha^j}(\Psi(\vec{\beta})) f_A^j(\Psi(\vec{\beta}))}$$

(1.4.8) Damit wissen wir, wie sich Vektoren und Vektorfelder des Grundraumes transformieren. Wir haben J als Transformationsmatrix und wir müssen mit Hilfe von Ψ die korrekten Argumente einführen. Es sollte klar sein, wie die entsprechende Ausdehnung auf Tensorfelder aussieht.

- Rechnen Sie $f(\vec{x}) = \vec{x}$ und $g(\vec{x}) = (\vec{e}_3 \vec{x}) \vec{x}$ in Polarkoordinaten um. Absolut ist das leicht. Aber sie können und sollen das jetzt mit einigem Aufwand auch allein durch Transformation der Koordinaten ausführen. Beachten Sie: Sie können die Funktionalableitungen von Ψ bilden, die zugehörige Jacobimatrix invertieren, die korrekten Argumente einfügen und haben nach den Ableitungsregeln die gesuchte Jacobimatrix von Φ . Auf diese Weise umgehen Sie die Berechnung von Φ selbst.

11.1.4b Transformationsverhalten des Tupels der partiellen Ableitungen

(1.4.9) Wir haben gesehen, dass sich die Koordinatenbasisfelder $\vec{\partial}_i = \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial \alpha^i}$ kovariant transformieren. Dieser Sachverhalt läßt sich wie folgt verallgemeinern:

Seien $\vec{\alpha} \mapsto \vec{x}_A(\vec{\alpha})$ und $\vec{\beta} \mapsto \vec{x}_N(\vec{\beta})$ wieder zwei Parametrisierungen des Ortsfaktors \vec{x} . Weiter sei $f = (V_0, \vec{x} \mapsto f(\vec{x}), W)$ eine in irgendeinen Raum weiterführende differenzierbare Abbildung in einen Vektorraum W , in dem wir aber keine Basis einführen. Wie üblich setzen wir $f_A(\vec{\alpha}) = f(\vec{x}_A(\vec{\alpha}))$ und $f_N(\vec{\beta}) = f(\vec{x}_N(\vec{\beta}))$. Im Sinne der 2. Konvention bezeichnen wir die oben mit Φ und Ψ bezeichneten Übersetzungsabbildungen mit $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\vec{\beta})$ und $\vec{\beta} = \vec{\beta}(\vec{\alpha})$. Dann gilt beispielsweise $f_N(\vec{\beta}) = f_A(\vec{\alpha}(\vec{\beta}))$. (Fertigen Sie eine Skizze dieser Konfiguration!) Jetzt differenzieren wir partiell nach der neuen Koordinate β^i . Das gibt mit der Kettenregel

$$\frac{\partial f_N}{\partial \beta^i}(\vec{\beta}) = \sum_k \frac{\partial f_A}{\partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) \frac{\partial \alpha^k}{\partial \beta^i}(\vec{\alpha}(\vec{\beta})) = \sum_k \frac{\partial f_A}{\partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) J_{i.}^k = \sum_k J_{i.}^k(\vec{\alpha}) \frac{\partial f_A}{\partial \alpha^k}(\vec{\alpha}(\vec{\beta}))$$

und das bedeutet kovariantes Verhalten. Oder etwas anders geschrieben und mit fortgelassenen Argumenten

$$\boxed{\partial_i^N f_N = \sum_k J_{i.}^k \partial_k^A f_A.}$$

(1.4.10) Nochmals: Das ist die Kettenregel. Läßt man jetzt im Sinne der dritten Konvention in f noch die unterschweidenden Indizes A und N fort, dann kann man auch f "fortkürzen" und erhält für das Tupel der partiellen Ableitungen das Transformationsgesetz

$$\partial_i^N = \sum_k J_{i,k} \partial_k^A.$$

(1.4.11) (▼ T.16) Wegen $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \alpha^i}$ usw. merkt man sich das in Form einer **Eselsbrücke**: *Oben ist unten und unten ist oben*. Soll sagen: Ein oberer Index unten im Nenner ist oben unterer Index, da kovariant.

□ s Skalarfeld. Bilde $\frac{\partial^2 s}{\partial x^i \partial x^j}$. Welches Transformationsverhalten folgt aus der Eselsbrücke? Wieso ist das in diesem Fall korrekt?

(1.4.9) Fassen wir zusammen: **Die Feldkomplikation sieht in ihrer allgemeinen Form wie folgt aus:**

1. Urbild und Wert müssen u.U. gesondert transformiert werden.
2. Man startet günstig mit zwei bijektiven Parametrisierungen des Urbildraumes, die überall das Rangkriterium erfüllen.
3. Diese ergeben die benötigten Koordinatenbasisfelder und die Transformationsmatrix.
4. Mit der Transformationsmatrix kann man den gesamten Formalismus gemäß (1.1.26) starten, wobei der Ort als äußerer Parameter anzusehen ist.
5. Mit Hilfe der Parametrisierungen kann man die jeweils benötigte unabhängige Variable in den Argumenten einführen.

(1.4.10) Als wichtige Ergänzung zur Einführung des Transformationsformalismus sollte man sich noch bewußt machen, daß es zwei unterschiedliche zugehörige Aufgabentypen gibt:

□ Die **leichte Aufgabe** des Lernenden: Man kennt den Vektorraum V und die zugehörige Konstruktion von Basen für diesen Raum. Problem: Leite das Transformationsverhalten der Komponententupel, also die Übersetzungsabbildung her. Beispiel: Unsere Diskussion der Relativitätstheorie in Kap. 10.7. In den typischen Lehrbuchdarstellungen hat man es mit diesem Aufgabentyp zu tun.

□ Die **schwere Aufgabe** des (forschenden) Physikers: Man bildet aus Beobachtungsdaten ein Koordinatentupel und stellt korrespondierende Daten (derselben physikalischen Ereignisse) unterschiedlicher Beobachter zusammen. Suche dazu die passende mathematische Struktur, die mit den Daten vereinbar ist und prüfbare Voraussagen macht. (V, V₀, Transformationsgruppe, eventuell Konfigurationsraumparametrisierung.) Hierbei sollte man an die in Kapitel 10 besprochenen Beispiele aus der Relativitätstheorie denken:

Etwa: Aus dem experimentell gefundenen Sachverhalt der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit baue man die dazu passende Struktur der hyperbolischen Ebene auf.

Oder: Man erkläre die physikalischen Phänomene, die ein bewegter Beobachter vorfindet, wenn er statische elektrische oder magnetische Felder betrachtet durch Einführen der beschriebenen Zweiform F.

(1.4.11) Tatsächlich hat man es meist mit einer Mischform beider Aufgaben zu tun: Man hat eine physikalische Größe mit einem bestimmten theoretisch gegebenen Transformationsverhalten sowie erwartete Formelverknüpfungen mit anderen physikalischen Größen. Kurz: Man hat eine theoretische Vorerwartung und fragt sich, was man wie am günstigsten messen sollte, um dieses Verhalten und die Formeln zu überprüfen.

11.1.4c Die Ortsabhängigkeit der Koordinatenbasisfelder

(1.4.12) Wir wollen den drei- bzw. n-dimensionalen Raum V_0^n durch krummlinige Koordinaten parametrisieren:

$$\vec{x}_F = (G, \vec{\alpha} \mapsto \vec{x}_F(\vec{\alpha}), V_0^n) \quad G \subset \mathbb{R}^n \quad \text{offen}$$

Dabei soll \vec{x}_F glatt und regulär sein, d.h. die Abbildung soll ausreichend oft differenzierbar sein und die Funktionaldeterminante soll überall ungleich Null sein, so dass der Schluss von der Rechnung auf die Geometrie möglich ist. Genauer heißt das hier

Die Vektoren $\vec{\partial}_i$ bilden ein Basisfeld über der Parametrisierung \vec{x}_F . Für jedes $\vec{\alpha} \in G$ ist $\vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \vec{x}_F}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha})$ eine Basis von V_0^n im Punkte $\vec{x}_F(\vec{\alpha})$.

Beachten Sie, dass wir von \vec{x}_F nicht einmal *injektiv* verlangen. Injektiv muss nur die Ableitung $D\vec{x}_F(\vec{\alpha})$ sein.

(1.4.13) Im vergangenen Abschnitt haben wir untersucht, was geschieht, wenn wir die Parametrisierung wechseln. Dabei war der Ort $\vec{x} = \vec{x}_A(\vec{\alpha}) = \vec{x}_N(\vec{\beta})$ fest, war äußerer Parameter. Jetzt halten wir die Parametrisierung fest und verändern den Ort. Oder auch: Wir suchen nach der Tangentenapproximation für unser Basisfeld $\vec{\alpha} \mapsto \vec{\partial}_i(\vec{\alpha})$

(1.4.14) Dazu bilden wir zunächst die zweite Ableitung von \vec{x}_F :

$$\vec{x}_F(\vec{\alpha} + \Delta\vec{\alpha}) = \vec{x}_F(\vec{\alpha}) + D\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot \Delta\vec{\alpha} + \frac{1}{2} D^2\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot (\Delta\vec{\alpha}, \Delta\vec{\alpha}) + \dots$$

Dabei ist $D^2\vec{x}_F(\vec{\alpha})$ eine bilineare Abbildung (Abbildung, keine Bilinearform):

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (\Delta\vec{\alpha}_1, \Delta\vec{\alpha}_2) \mapsto D^2\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot (\Delta\vec{\alpha}_1, \Delta\vec{\alpha}_2), V_0^N)$$

Im \mathbb{R}^n haben wir die kanonische Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Denken Sie daran: $\Delta\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ ist ein Zahl tupel. Entwicklung bezüglich dieser Basis gibt

$$D^2\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot (\Delta\vec{\alpha}_1, \Delta\vec{\alpha}_2) = \Sigma_{ik} \frac{\partial^2 \vec{x}_F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) \Delta\alpha_1^i \Delta\alpha_2^k \quad \text{mit} \quad \frac{\partial^2 \vec{x}_F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) = D^2\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_k) \in V_0^n.$$

(1.4.15) Beachten Sie, das sind jetzt keine Zahlen, sondern Vektoren aus V_0^n . In diesem Raum haben wir aber ein Basisfeld, nämlich $\vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \vec{x}_F}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha}) = D\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot \vec{e}_i$. Daher können wir die Vektoren der zweiten partiellen Ableitungen nach diesem Basisfeld entwickeln. Das gibt eine Darstellung der folgenden Art:

$$\frac{\partial^2 \vec{x}_F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) = \Sigma \vec{\partial}_m(\vec{\alpha}) \Gamma_{ik}^m(\vec{\alpha}).$$

Diese Koeffizienten heißen Christoffelsymbole. Aber **Achtung: Trotz der Indexstellung transformieren Sie sich nicht wie einer der üblichen Tensoren!** Jetzt spezifizieren wir die Glattheit von \vec{x}_F dahingehend, dass wir (mindestens) C^2 verlangen. D.h. die zweiten Ableitungen vertauschen. Und das bedeutet, dass die Γ -s in den unteren Indizes symmetrisch sind: $\Gamma_{ik}^m = \Gamma_{ki}^m$ für alle i und k. Das wird sich als eine wichtige Eigenschaft erweisen.

(1.4.16) Da die zweite Ableitung die erste Ableitung der ersten ist, können wir die **Tangentenzerlegung des Basisfeldes** $\vec{\partial}_i$ angeben. Zur Erinnerung: $D(D\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot \vec{e}_i) \cdot \Delta\vec{\alpha} = \Sigma \frac{\partial^2 \vec{x}_F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) \cdot \Delta\alpha^k$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \vec{\partial}_i(\vec{\alpha} + \Delta\vec{\alpha}) &= \frac{\partial \vec{x}_F}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha} + \Delta\vec{\alpha}) = \frac{\partial \vec{x}_F}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha}) + \Sigma \frac{\partial^2 \vec{x}_F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) \cdot \Delta\alpha^k + \dots \\ &= \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) + \Sigma \vec{\partial}_m \Gamma_{ik}^m \Delta\alpha^k + \dots \end{aligned}$$

(1.4.17) Diese Entwicklung erweist sich für uns als ausgesprochen wichtig. Die zugehörige Tangentenapproximation der Basisfelder lautet

$$\vec{\partial}_i(\vec{\alpha} + \Delta\vec{\alpha}) = \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) + \Sigma \vec{\partial}_m \Gamma_{ik}^m \Delta\alpha^k \quad \text{mit} \quad \Gamma_{ik}^m = \Gamma_{ki}^m.$$

Oder in Form einer partielle Ableitung

$$\partial_k \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \vec{\partial}_i}{\partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) = \sum_m \vec{\partial}_m(\vec{\alpha}) \Gamma_{ik}^m(\vec{\alpha})$$

(1.4.18) Jetzt sei $\vec{\partial}^i$ das zu $\vec{\partial}_i$ reziproke Basisfeld. Also $(\vec{\partial}^r(\vec{\alpha}) \cdot \vec{\partial}_s(\vec{\alpha})) = \delta_s^r$. Ableiten mit der Produktregel gibt

$$0 = \left((\partial_i \vec{\partial}^r)(\vec{\alpha}) \cdot \vec{\partial}_s(\vec{\alpha}) \right) + \left(\vec{\partial}^r(\vec{\alpha}) \cdot (\partial_i \vec{\partial}_s)(\vec{\alpha}) \right).$$

Andererseits haben wir die folgenden beiden Entwicklungsformeln (Darstellung der Komponenten mit Skalarprodukten):

$$\begin{aligned} \partial_i \vec{\partial}_s &= \sum_m \vec{\partial}_m \left(\vec{\partial}^m \cdot (\partial_i \vec{\partial}_s) \right) = \sum_m \vec{\partial}_m \Gamma_{is}^m \\ \partial_i \vec{\partial}^r &= \sum_s \vec{\partial}^s \left(\vec{\partial}_s \cdot (\partial_i \vec{\partial}^r) \right) = -\sum_s \vec{\partial}^s \left(\vec{\partial}^r \cdot (\partial_i \vec{\partial}_s) \right) = -\sum_s \vec{\partial}^s \Gamma_{is}^r \end{aligned}$$

Vergleich gibt

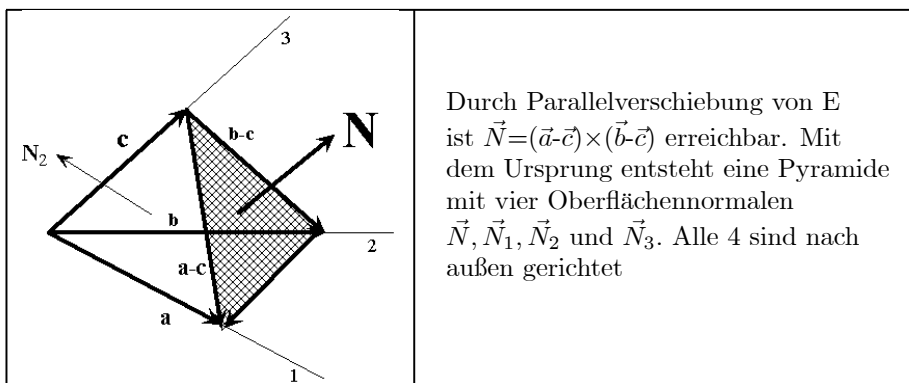
$$\partial_i \vec{\partial}^r(\vec{\alpha}) = -\sum_s \vec{\partial}^s(\vec{\alpha}) \Gamma_{is}^r(\vec{\alpha}).$$

11.2 Anwendungsbeispiele

11.2.1 Das Transformationsverhalten eines Normalenvektors

(2.1.1) Wir betrachten den euklidischen V_0^3 , in dem physikalisch oder geometrisch eine Basis e , festgelegt ist, die keineswegs eine Orthonormalbasis sein muß. Unser Ziel ist, möglichst viele Größen einerseits quantitativ und andererseits möglichst einfach mit Hilfe dieser Basis zu beschreiben.

(2.1.2) Betrachten wir als Beispiel die Beschreibung des Flächennormalenvektors \vec{N} zu einer Ebene E , die gemäß der nachfolgenden Skizze durch die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} festgelegt sein soll. E soll keine der drei Achsen enthalten, so dass jede Parallelverschiebung der Ebene drei eindeutige Schnittpunkte mit den Achsen produziert. Die drei entstehenden Achsenvektoren $\vec{a} = \vec{e}_1 a$, $\vec{b} = \vec{e}_2 b$ und $\vec{c} = \vec{e}_3 c$ bilden dann mit der Ebene eine Pyramide.



(2.1.3) Wir haben

$$2\vec{N} = (\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c}) \quad 2\vec{N}_1 = -\vec{b} \times \vec{c} \quad 2\vec{N}_2 = -\vec{c} \times \vec{a} \quad 2\vec{N}_3 = -\vec{a} \times \vec{b}$$

Die Verschiebung von E ist gemacht, damit diese Gleichungen gelten. Jetzt verifiziert man durch Nachrechnen sofort

$$-\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3.$$

(2.1.4) Nochmal der wichtige Punkt: Durch Parallelverschieben der Ebene können wir erreichen, daß $\vec{N} = \frac{1}{2} \varepsilon (\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})$ wird, wobei \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} die Koordinatenabschnittsvektoren der Ebene sind. $|\vec{N}|$ der Flächeninhalt des Dreiecks. Das geht, da der Ausdruck auf der rechten Seite stetig von Null nach unendlich wächst. Das Vorzeichen ε ist so zu wählen, daß \vec{N} bezüglich der Pyramide äußere Normale ist. ($\varepsilon = +1$, wenn 1 oder drei Achsenabschnitte positiv sind, $\varepsilon = -1$, wenn 0 oder zwei Achsenabschnitte positiv sind).

(2.1.5) $|\vec{N}|$ ist der Flächeninhalt des von den Achsenabschnitten erzeugten Dreiecks. Weiter setzen wir $v = \vec{e}_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$. Das ist das orientierte Volumen des von den drei Basisvektoren aufgespannten Spates.

(2.1.6) Damit rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} 2\vec{N} &= (\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} \\ &= ab\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + ac\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + bc\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \\ &= (abv)\vec{e}^{*3} + (acv)\vec{e}^{*2} + (bcv)\vec{e}^{*1}. \end{aligned}$$

Hierbei ist \vec{e}^{*i} die zu \vec{e}_i reziproke Basis, also $\vec{e}^{*i} \cdot \vec{e}_k = \delta_k^i$. Wir haben bekanntlich $\vec{e}^{1*} = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{v}$ usw., was die letzte Umformung erklärt.

□ Machen sie eine Einheitenkontrolle!

(2.1.7) Die Rechnung aus (1.4.6) gibt für \vec{N} die Basisdarstellung bezüglich der reziproken Basis. Diese Darstellung ist unter den gegebenen Umständen von einfacher Form, kann unmittelbar aus den Systemdaten, die in Form der Achsenabschnitte a, b und c vorliegen, angegeben werden. Die Basisdarstellung durch die Ausgangsbasis selbst ist weitaus komplizierter. Nur wenn die Ebene eine der drei Achsen enthält und sich die Pyramide nicht bilden läßt, wird es komplizierter. Dann muß man notfalls einen geeigneten Grenzwert bilden.

(2.1.8) Nochmals das Ergebnis in Formelgestalt zusammengefaßt:

$\vec{N} = \sum \vec{e}^{*i} N_i$	$N_i = (\vec{e}_i \cdot \vec{N})$	$2N_1 = bcv$	$2N_2 = acv$	$2N_3 = abv$
oder	$\vec{N} = abc v (\vec{e}^{*1} \frac{1}{a} + \vec{e}^{*2} \frac{1}{b} + \vec{e}^{*3} \frac{1}{c})$			
oder mit $2V = abc v$	$2\vec{N} = 2V (\vec{e}^{*1} \frac{1}{a} + \vec{e}^{*2} \frac{1}{b} + \vec{e}^{*3} \frac{1}{c})$			
Gesamtvolumen!				

(2.1.9) Liegt die ursprüngliche Fläche in einer der Koordinatenebenen, dann ist nur eines der \vec{N}_i von Null verschieden. Die Formel $N_i = (\vec{e}_i \cdot \vec{N})$ bleibt gültig. Die Normale hat dann die Richtung des entsprechenden \vec{e}^{*i} . Bei der Darstellung durch die \vec{e}_i dagegen werden alle drei Terme benötigt. Die resultierende Richtung ist nicht mehr unmittelbar ersichtlich.

(2.1.10) Die weiteren Formeln aus (1.4.8) sind als Parametrisierung der drei Komponenten durch a, b und c anzusehen, wobei die Parameter geometrische Bedeutung besitzen. Das wird es uns ermöglichen, die beiden Gleichgewichtsbedingungen der Statik aus Kap.5 für den Pyramidenkörper in eine unmittelbar auswertbare Form zu bringen.

(2.1.11) Das Tupel $\vec{N}^K = (N_i)$ der drei Normalenvektoren transformiert sich - wie die Formel $N_i = (\vec{e}_i \cdot \vec{N})$ zeigt, kovariant. Wir haben es mit den kovarianten Komponenten eines Vektors zu tun. Also

$$N_i^{neu} = \sum_k ({}^t T^{-1})_i^k N_k^{alt}$$

11.2.2 Der Spannungstensor (Stress)

(2.2.1) Wir betrachten erneut einen elastischen Körper und nehmen an, dass er sich in einem Spannungszustand befinde. Wir wählen einen Punkt \vec{x} dieses Körpers mit zugehöriger Basis $\vec{e}_i = \vec{e}_i(\vec{x})$. Die zugehörige reziproke Basis bezeichnen wir mit \vec{e}^i , kennzeichnen sie also **nur noch durch die Indexsteilung**.

(2.2.2) Der Spannungszustand macht sich im Gedankenexperiment wie folgt bemerkbar: Schneidet man um x ein kleines ebenes Flächenstück mit äußerer Normale \vec{N} frei, so muß zum Aufrechterhalten des Gleichgewichtes eine kompensierende Kraft $\vec{K} = \vec{T}(\vec{N})$ angebracht werden. Die Größe des Stückes wählen wir so gering, dass Tangentenapproximation gültig ist. In diesem Bereich (und dann per Idealisierung allgemein) ist die Kraft proportional zur Fläche. Also $\vec{T}(\alpha\vec{N}) = \alpha\vec{T}(\vec{N})$. Oder auch: Der jeweilige Spannungsvektor $\frac{\vec{T}(\vec{N})}{|\vec{N}|}$

ist für feste Richtung konstant. $\frac{\vec{T}(\vec{N})}{|\vec{N}|}$ ist also ein Maß dafür, welchen Kräften und Spannungen das Material am Punkte \vec{x} ausgesetzt ist.

(2.2.3) **Uns interessiert die Zuordnung $\vec{N} \rightarrow \vec{T}(\vec{N})$, die die gesamte Information enthält.**

(2.2.4) Sei \vec{N} ein Normalenvektor, der in (1.4.2) beschriebenen Art und \vec{e}_i eine **konstante** Basis. Es sei $(\vec{N} \cdot \vec{e}_i) \neq 0$. Wir konstruieren die in (1.4.2) beschriebene Pyramide aus Dreiecksflächen und schneiden sie frei, fragen also nach dem **Kräftegleichgewicht am herausgeschnittenen Körper**. Das Flächenstück sei ausreichend klein gewählt, so dass Volumenkräfte gegen Flächenkräfte vernachlässigt werden können. (Die Volumenkräfte gehen mit der dritten Potenz des typischen Figurdurchmessers nach Null, die Flächenkräfte nur mit der zweiten.) Der Sonderfall, dass die Fläche eine der Achsen enthält, sei ausgenommen. Dann haben wir insgesamt 4 Flächenkräfte zu betrachten. Kräftegleichgewicht für die Pyramide verlangt, dass die Summe aller vier Kräfte verschwindet.

Oder mit selbsterklärenden Bezeichnungen:

$$\vec{K}_N = -\vec{K}_1 - \vec{K}_2 - \vec{K}_3.$$

Nun gehört \vec{K}_1 zu dem von b und c aufgespannten Dreieck, mit äußerem Normalenvektor $\vec{N}_1 = -\frac{1}{2}\vec{b} \times \vec{c}$. Es ist die für diese Fläche benötigte Kompensationskraft. Also $-\vec{K}_1 = \vec{T}(\vec{N}_1)$. Analog für die beiden anderen Indizes. Unter Verwendung der in (1.5.2) besprochenen Homogenität folgt

$$\boxed{\vec{T}(\vec{N}) = \vec{T}(\vec{N}_1) + \vec{T}(\vec{N}_2) + \vec{T}(\vec{N}_3) = N_1 \vec{T}(\vec{e}^1) + N_2 \vec{T}(\vec{e}^2) + N_3 \vec{T}(\vec{e}^3)}.$$

(2.2.5) Für die drei Vektoren $\mathbf{T}(\vec{e}^i)$ setzen wir wie üblich eine Basisdarstellung an, wobei wir zur Darstellung die Ausgangsbasis verwenden:

$$\boxed{\mathbf{T}(\vec{e}^i) = \Sigma \vec{e}_k T^{ki}}$$

Einsetzen gibt:

$$\vec{T}(\vec{N}) = \Sigma \vec{e}_k T^{ki} N_i = \Sigma \vec{e}_k T^{ki} (\vec{e}_i \cdot \vec{N}) = \Sigma T^{ki} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_i (\vec{N})$$

(2.2.6) Damit haben wir eine Tensor Darstellung einer linearen Abbildung $\mathbf{T}: \vec{N} \mapsto \vec{T}(\vec{N})$ konstruiert. Beachten Sie: Urbildraum und Werteraum sind beide vom Typ V^3 . Aber wir verwenden zur Beschreibung unterschiedliche Basen: **Im Urbildraum arbeiten wir mit der reziproken Basis und im Werteraum mit der Ausgangsbasis**. Mit dieser Basiswahl erhält man für die Tensor Komponenten die günstigste Form.

(2.2.7) Die Tensor Komponenten müssen sich nach unserer Konstruktion doppelt kontravariant transformieren. Die Transformationsmatrix sei R. dann gilt in selbsterklärender Schreibweise:

$$T_{neu}^{st} = \Sigma R_{.k}^s R_{.m}^t T_{alt}^{km}.$$

(2.2.8) **Für die freigeschnittene Pyramide muß nicht nur die Summe der Kräfte verschwinden, sondern auch die der Drehmomente!** Stellen wir die zugehörige Bilanz auf. Jede Kraft wirkt konstant auf eine dreieckige Fläche. Wir können sie als Gesamtkraft auf den jeweiligen Flächenschwerpunkt angreifen lassen. Dieser ist etwa im von \vec{a} und \vec{b} erzeugten Dreieck durch $\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$ gegeben. Die zu \vec{N} gehörige Fläche hat den Schwerpunkt $\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ Die Drehimpulsbilanz besagt unter Beachtung der Vorzeichenkonvention:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{T}(\vec{N}) \\ &= \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{T}(\vec{N}_1) + \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{T}(\vec{N}_2) + \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{T}(\vec{N}_3) \end{aligned}$$

(2.2.9) Setzt man links die Kraftbilanzgleichung $\vec{T}(\vec{N}) = \vec{T}(\vec{N}_1) + \vec{T}(\vec{N}_2) + \vec{T}(\vec{N}_3)$ ein, so heben sich sechs Beiträge fort.. Es verbleibt die Bedingung:

$$\vec{a} \times \vec{T}(\vec{N}_1) + \vec{b} \times \vec{T}(\vec{N}_2) + \vec{c} \times \vec{T}(\vec{N}_3) = \vec{0}$$

(2.2.10) Nun ist $\vec{a} = a\vec{e}_1$ usw. und $\vec{T}(\vec{N}_1) = \Sigma \vec{e}_k T^{ki}$. Einsetzen gibt sofort $\boxed{T^{ik} = T^{ki}}$ für alle Indexpaare. (Nehmen wir etwa die zwei Beiträge links zu $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$. Einer kommt aus $\vec{a} \times \vec{T}(\vec{N}_2) = bcv\vec{a} \times \vec{T}(\vec{e}_1)$ nämlich $abcvT^{21}$. Dabei haben wir (1.5.5) benutzt. Der zweite kommt aus $\vec{b} \times \vec{T}(\vec{N}_1)$ und ergibt sich zu $-bacvT^{21}$. Also $T^{12} = T^{21}$.)

(2.2.11) **D.h. der Spannungstensor ist symmetrisch.**

(2.2.12) Das ist ein wichtiges Resultat. In der Eigenwerttheorie in Kap. 12 werden wir sehen, dass es dann immer eine Orthonormalbasis \vec{e}_i , gibt, in der der Trägheitstensor Diagonalform annimmt (Hauptachsensystem). Basis und reziproke Basis stimmen bei einer Orthonormalbasis überein und wir finden für **diese** Basis die einfache Formel:

$$\boxed{\vec{T}(\vec{N}) = \vec{e}_1 \sigma_1 N_1 + \vec{e}_2 \sigma_2 N_2 + \vec{e}_3 \sigma_3 N_3 \quad \sigma_i = T^{ii} \quad T^{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j}$$

Da $\vec{N} \mapsto \vec{T}(\vec{N})$ einen wichtigen physikalischen Sachverhalt erfasst, lohnt diese Formvereinfachung.

(2.2.13) Wir geben ein **Beispiel einer Folgerung**: Sofern \vec{N} bei verschiedenwertigen σ -s nicht in Richtung einer der drei Achsen zeigt, haben \vec{N} und $\vec{T}(\vec{N})$ nicht dieselbe Richtung. Wir wollen $\vec{T}(\vec{N})$ dann in eine normale und eine tangentielle Komponente zerlegen. D.h. in eine normale Druckkraft auf die Fläche und eine tangentielle Scherungskraft. Beides sind offenbar für Materialbeurteilungen wichtige Größen.

(2.2.14) Da die Kräfte im betrachteten Modell proportional zu den Flächeninhalten sind, normieren wir auf die Einheitsfläche, gehen also zu den Spannungen über. Die Normale parametrisieren wir durch die Polarwinkel, setzen also $\vec{n} = \vec{e}(\theta, \varphi)$ an und suchen nach der Abbildung $M: {}^t(\theta, \varphi) \mapsto {}^t(T_n(\theta, \varphi), T_t(\theta, \varphi))$. Die Indizes stehen für normal und tangential.

(2.2.15) Die normale Komponente zeigt in Richtung \vec{n} , ist also die zu \vec{n} parallele. Wir erhalten über die Hauptachsenformel aus (1.5.12) sofort die uns interessierende *Mohrsche Abbildung*:

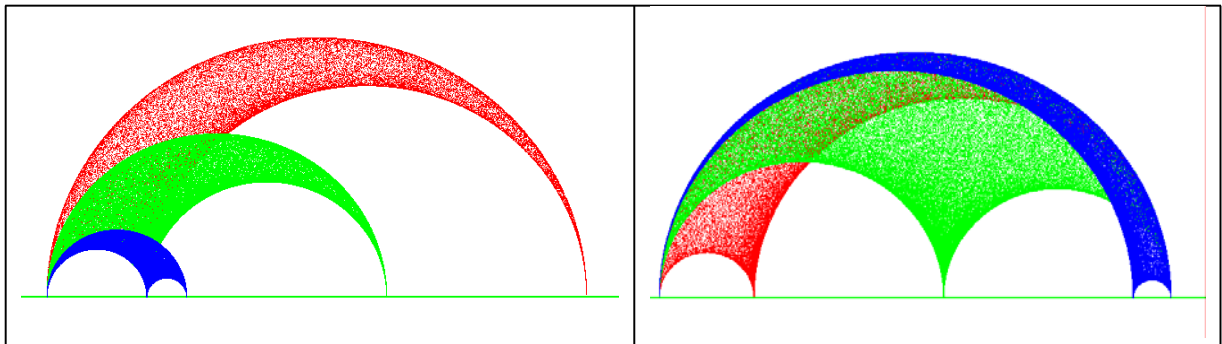
$$\begin{aligned} {}^t(\theta, \varphi) &\mapsto M(\theta, \varphi) = {}^t(T_n(\theta, \varphi), T_t(\theta, \varphi)) \\ n_1 &= \cos \varphi \sin \theta \quad n_2 = \sin \varphi \sin \theta \quad n_3 = \cos \theta \quad (\text{Polardarstellung}) \\ T_n &= (\vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n}) = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ T_t &= \sqrt{\vec{T}^2(\vec{n}) - T_n^2} = \sqrt{(\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2} \end{aligned}$$

Dies ist eine geometrisch interessante Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Insbesondere zeigt $\text{Bild}(M)$ an, welche tangentialen und normalen Spannungen an der betrachteten Stelle des Körpers überhaupt auftreten können, wie und wie stark das Substratmaterial also belastet wird.

(2.2.16) Der Deformationstensor beschreibt die Geometrie einer Deformation, gibt an, wie sich mit der Materie verbundene geometrische Größen wie Winkel und Längen unter der Deformation ändern. Der Spannungstensor beschreibt Einflüsse, die in Form von Kräften auf den Körper wirken und die Ursache der Deformation sind. Und diese Kräfte treten hier weniger als äußere Felder auf, wie wir es sonst gewöhnt sind, als in Form von Kräften, die benachbarte Teilstücke über die Grenzfläche aufeinander ausüben.

Diese Kräfte werden durch den Spannungstensor (stress) beschrieben. Offen bleibt noch die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den beiden Tensoren. In Kap. 11.3.# werden wir darauf zurückkommen.

Die Figur zeigt zwei Beispiele für das Bild der Mohrschen Abbildung. Horizontal ist T_t , vertikal T_n aufgetragen. $\sigma_1 = 1$. Im linken Bild ist $\sigma_3 = 1.5$ und $\sigma_2 = 1.7$ und 2.7 und 3.7 (rot). Im rechten Bild ist $\sigma_2 = 3.7$ und σ_3 durchläuft die drei Werte 1.5 und 2.5 und 3.5.



11.2.3 Der Gradient eines Skalarfeldes

Den Gradienten haben wir bereits kurz in Kap.6 (3.1.13) und (3.2.11) eingeführt. Zur Erinnerung:

Ist s Skalarfeld auf dem **euklidischen** V^n mit totaler Ableitung Ds , so gilt für das totale Differential

$$Ds(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x} = (\text{grad}s(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x})$$

Das legt über die Kürzungsregel den Vektor $\text{grad}s(\vec{x})$ fest.

Jetzt benutzen wir den Gradienten, um die Transformationsproblematik exemplarisch zu verdeutlichen. Ebenso ergibt das ein weiteres Beispiel, wie das Transformationsverhalten über die mathematische Struktur festgelegt wird. Die Länge dieser Ausführungen sollte eindringlich den Nutzen des gesamten Formalismus verdeutlichen. Denn die gesamten Rechnungen und Ausführungen lassen sich zu dem Satz zusammenfassen: **Die partiellen Ableitungen eines Skalarfeldes transformieren sich kovariant.**

11.2.3a Ein gerechnetes Beispiel des Transformationsproblems

(2.3.1) Wir geben ein idealisiertes Beispiel zum Szenenbild Beobachterwechsel. Alle Basen seien im Konfigurationsraum konstant. Die Rechnungen sind - besonders bei ungeschickter Schreibweise - nicht ganz kurz, aber weitgehend festgelegt.

(2.3.2) Der Beobachter A verwende ein kartesisches Koordinatensystem, das zu der Orthonormalbasis e_i gehöre, unser *altes* System. Wir kennzeichnen es durch kleine Buchstaben. B dagegen arbeitet mit schiefen Koordinaten, die zu einer Basis \vec{E}_i gehören. Die zugehörigen neuen Koordinaten kennzeichnen wir durch große Buchstaben. Beide Beobachter beschäftigen sich mit ein und derselben "Temperaturverteilung" $\vec{x} \mapsto T(\vec{x})$.

(2.3.3) Für A ist dass die Temperaturverteilung $(x,y,z) \mapsto T(x,y,z)$ (eigentlich $T_A(x,y,z)$). Auch B spricht von der Temperaturverteilung $(x,y,z) \mapsto T(x,y,z)$. Eigentlich $(X,Y,Z) \mapsto T_B(X,Y,Z)$. Solange beide getrennt arbeiten, stört die gleiche Bezeichnung nicht. Man sieht, wie die in 11.1.2 beschriebenen Konventionen entstehen.

(2.3.4) B bestimmt den Temperaturgradienten für einen Punkt experimentell und fragt an, ob sein Resultat mit einer theoretischen Vorhersage von A übereinstimmt. Er überläßt A die Transformationsarbeit und gibt nur $\boxed{\text{grad}T(1,2,2) = (20,6,22)}$ als sein Ergebnis an.

(2.3.5) Das Temperaturfeld, das A als Beschreibungsgrundlage benutzt, sei wie folgt gegeben $T(x, y, z) = 5 + 2x^2 + 3yz - 4(xy + xz)$. Wie muß A vorgehen, um die Messung von B zu interpretieren?

(2.3.6) A beschafft sich über die Basis E des B die Information: $\vec{E}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{E}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ und $\vec{E}_3 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Damit folgt R^{-1} und durch Rechnung R, wenn R die übliche Transformationsmatrix bezeichnet :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Also ist der von beiden gemeinsam betrachtete Punkt der Temperaturmessung

$$\vec{x}_0 = \vec{e}_1 5 + \vec{e}_2 (-2) + \vec{e}_3 2 = \vec{E}_1 1 + \vec{E}_2 2 + \vec{E}_3 2.$$

(2.3.7) In seiner Koordinatenbeschreibung findet A für diesen Punkt den Feldwert:

$$T(5, -2, 2) = T_A(5, -2, 2) = 5 + 50 - 12 = 43.$$

(2.3.8) Für das Tupel der partiellen Ableitungen der in (2.3.5) gegebenen Temperaturverteilung erhält er:

$$\vec{\partial}T_A(x, y, z) = (4x - 4y - 4z, 3z - 4x, 3y - 4x)$$

A benutzt seine kartesische Basis, so dass der folgende Gradientenvektor entsteht: $\text{grad}T(\vec{x}_0) = \vec{e}_0 20 + \vec{e}_2 (-14) + \vec{e}_3 (-26)$.

(2.3.9) Welche Beziehung besteht nun zu der Tupelangeabe des B aus(2.3.4)? Diese lautet $\text{grad}T(0,2,2)=(20,6,22)$? Das Resultat von B könnte sich auf dessen Basis E oder die zugehörige reziproke Basis E^* beziehen. Im ersten Fall hätte man es mit dem folgenden absoluten Vektor zu tun, der **nicht** gleich dem in (2.3.8) gefundenen Resultat ist:

$$\begin{aligned} 20\vec{E}_1 + 6\vec{E}_2 + 22\vec{E}_3 &= 20\vec{e}_1 + 6(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + 22(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \\ &= 48\vec{e}_1 - 38\vec{e}_2 + 22\vec{e}_3 \end{aligned}$$

(2.3.10) Alternativ könnte das Komponententupel sich auf die reziproke Basis des B beziehen, die wir jetzt durch obere Indizes kennzeichnen. \vec{E}^i ist unser früheres \vec{E}_i^* . Da offensichtlich $\vec{E}_1 \cdot (\vec{E}_2 \times \vec{E}_3) = 1$ gilt, folgt

$$\vec{E}^1 = \vec{E}_2 \times \vec{E}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \quad \vec{E}^2 = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \quad \vec{E}^3 = \vec{e}_3$$

Bezüglich dieser Basis des Grundraumes ergibt sich (aus dem angegebenen Gradiententupel des B) folgender absoluter Vektor:

$$20\vec{E}^1 + 6\vec{E}^2 + 22\vec{E}^3 = 20(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) + 6(\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) + 22\vec{e}_3 = 20\vec{e}_1 - 14\vec{e}_2 - 26\vec{e}_3.$$

(2.3.11) Und das stimmt allerdings voll mit dem Tupel überein, das A in (2.3.7) berechnet hat.

(2.3.12) Alternativ könnte A aber auch sein Temperaturfeld in die Koordinaten von B umrechnen und auf diese Weise dem B Vorhersagen für weitere Punkte liefern. In diesem Fall folgt unter Beachtung unserer Vereinbarung, B-s Koordinaten mit Großbuchstaben zu bezeichnen:

$$\begin{aligned} T_B(X,Y,Z) &= T_A(R^{-1}\vec{X}^B) = T_A(X + Y + Z, Y - 2Z, Z) \\ &= 5 + 2(X + Y + Z)^2 + 3(Y - 2Z)Z - 4(X + Y + Z)(Y + Z) \\ &= 5 + 2X^2 - 2Y^2 + 9XZ + 7YZ. \end{aligned}$$

Speziell $T_B(1,2,2)=5+2\cdot 8+16+28=43$. Und damit wie erwartet

$$T_A(5, -2, 2) = T_B(1, 2, 2) = 43.$$

(2.3.13) Jetzt bilden wir das Tupel der partiellen Ableitungen von T_B :

$$\partial T_B(X, Y, Z) = (4X + 8Z, -4Y + 7Z, 8X + 7Z) \quad \text{speziell} \quad \partial T_B(1, 2, 2) = (20, 6, 22)$$

(2.3.14) A teilt dem B mit, dass es sich bei seinem Tripel um die Komponenten eines kovarianten Vektors handele, sich also auf die Darstellung durch reziproke Basis beziehen. Dann weiß B, dass er es - bis auf eventuelle Isomorphie - mit dem folgenden Vektorfeld zu tun hat:

$$\begin{aligned} (X, Y, Z) &\mapsto \vec{E}^1(4X + 8Z) + \vec{E}^2(-4Y + 7Z) + \vec{E}^3(8X + 7Z). \quad \text{Speziell:} \\ (1, 2, 2) &\mapsto \vec{E}^1 20 + \vec{E}^2 6 + \vec{E}^3 22 \end{aligned}$$

(2.3.15) Das ist dasselbe Resultat, das oben mit der anderen Methode erhalten wurde. Die gesamten Betrachtungen sind konsistent, sofern wir annehmen, **dass sich das Komponententupel der partiellen Ableitungen eines Skalarfeldes kovariant transformiert.**

(2.3.16) Auch rein geometrisch ist es sinnvoll, den Gradienten mit Hilfe der reziproken Basis darzustellen.

Wir wissen: geometrisch gibt die Richtung des Gradienten die Richtung der stärksten Feldänderung und die steht senkrecht auf der Tangentialebene zum betrachteten Punkt. Sei \vec{x}_0 ein betrachter fester Punkt und $\vec{x}_0 + E$ die zugehörige Tangentialebene an die zugehörige Niveaufläche. Der Rang von $Ds(\vec{x}_0)$ sei 1. Wir wählen eine Basis \vec{e}_1, \vec{e}_2 für E. D.h. in diese Richtungen sind die beiden partiellen Ableitungen von s Null. Jetzt ergänzen wir zu einer Gesamtbasis. Die partielle Ableitung in die neue Richtung ist nicht Null. Aber der Gradient dürfte i.a. nicht in Richtung von \vec{e}_3 zeigen, denn diese Richtung muß ja nicht auf E senkrecht stehen. Dagegen hat \vec{e}^3 die gewünschte Richtung.

Die nachfolgende mathematische Analyse wird diese Überlegungen formal rechtfertigen.

11.2.3b Der mathematische Formalismus

(2.3.17) Sei s ein Skalarfeld auf V_0 . Der Wert der Feldänderung ds , also das totale Differential, hängt von zwei unterschiedlichen Einflußgrößen ab. Zum einen vom Feld selbst, zum anderen von der gewählten Änderung $\Delta\vec{x}$ der Kontrollgröße, des Urbildes. Die zugehörige Formel $ds=Ds(\vec{x})\cdot\Delta\vec{x}$ trennt die beiden Größen als Formel. Im Falle des Skalarfeldes ist $Ds(x)$ eine lineare Abbildung $V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, also ein Element des Dualraumes: $Ds(x) \in V_0^*$.

(2.3.18) Wir haben

$$ds = Ds(\vec{x})\cdot\Delta\vec{x} = \langle Ds(\vec{x}) | \Delta\vec{x} \rangle \quad \text{mit der kanonischen Bilinearform}$$

Nun ist ds eine absolute, physikalische Größe, die Feldänderung in der Werterolle!

(2.3.19) Wir geben in V_0 zum Punkte \vec{x} eine feste Basis a_i mit zugehöriger dualer Basis a^i vor, die wir mit A indizieren. Es sei $s(\vec{x})=s(\Sigma\vec{a}_i x^i)=s_A(\vec{x}^A)$ und $\Delta\vec{x}=\Sigma\vec{a}_i \Delta x^i$. Dann wissen wir aus Kapitel 6, dass gilt:

$$ds = \Sigma \frac{\partial s_A}{\partial x^i}(\vec{x}^A) \Delta x^i = \Sigma \frac{\partial s_A}{\partial x^i}(\vec{x}^A) \langle a^i | \Delta\vec{x} \rangle = \langle \Sigma \frac{\partial s_A}{\partial x^i}(\vec{x}^A) a^i | \Delta\vec{x} \rangle = Ds(\vec{x})\cdot\Delta\vec{x}$$

(2.3.20) Die Kürzungsregel gibt:

$$Ds(\vec{x}) = \Sigma a^i \frac{\partial s_A}{\partial x^i}(\vec{x}^A) = \Sigma a^i \partial_i s_A(\vec{x}^A)$$

(2.3.21) Ebenso ergibt diese Rechnung die vielfach nützliche Rechenformel

$$ds = \Sigma (\partial_i s_A(\vec{x}^A)) \Delta x^i$$

(2.3.22) Das alles ist nur Spezialisierung der allgemeinen Ableitungstheorie auf unseren Fall. Die Formeln gelten für jedes konstante Basisfeld von V_0 . Orthonormal ist nicht verlangt.

(2.3.23) Wir sehen, dass das Tupel der partiellen Ableitungen das Koordinatentupel der Linearform $Ds(x)$ ist und sich somit kovariant transformiert. Dies haben wir dadurch berücksichtigt, daß wir ∂_i (als Abkürzung für $\frac{\partial}{\partial x^i}$) einen unteren Index gegeben haben. Die folgende Regel zeigt generell, welches Transformationsverhalten bei partiellen Ableitungen zu erwarten ist: (Weitere Tensorregel ($\blacktriangledown T.16$), auch bereits in (1.4.11) hergeleitet):

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$	selbsterklärende	Unten ist oben und
$\partial^i = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}$	Eselsbrücke	oben ist unten

Leitet man nach einer kovarianten Größe ab, etwa einer Komponente einer Linearform, so entsteht eine kontravariante Größe.

Die Merkregel erweist sich als ausgesprochen nützlich.

□ Was alles ist bei dieser Formel gemäß den Konventionen aus 11.1.2 dem Kontext zu entnehmen?

(2.3.24) Was kommt hinzu, wenn V_0 euklidischer Vektorraum ist? Das Skalarprodukt sei mit $E(\vec{a}|\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}$ bezeichnet. Wir haben den kanonischen Isomorphismus $\iota: V_0 \rightarrow V_0^*$ aus Kap. 10.4.2c mit der definierenden Beziehung $\langle \lambda | \vec{x} \rangle = E(\lambda|\vec{x})$. Insbesondere gilt $\iota^{-1}(a^i) = \vec{a}^i$. Die duale Basis a^i wird auf die reziproke \vec{a}^i abgebildet. In unserem Fall ergibt das die exakte Definition des Konfigurationsraumvektors Gradient:

$$\begin{aligned} \text{grad}s(\vec{x}) &= \iota^{-1} Ds(\vec{x}) = \Sigma \vec{a}^i (\partial_i s_A(\vec{x}^A)) \\ \text{und } ds &= \text{grad}s(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x} \end{aligned}$$

(2.3.25) Beide Einflußgrößen auf ds werden jetzt durch geometrische Objekte **des Konfigurationsraums** repräsentiert. Damit kann der Gradient auch in der üblichen Weise als Pfeil gezeichnet werden. (Vgl. die Einführung des Skalarproduktes im Vorkurs!)

(2.3.26) Die beiden Formeln aus (2.3.24) enthalten alles, was wir wissen müssen, um den Gradienten zu beherrschen. $\vec{x} \mapsto \text{grads}(\vec{x})$ ist ein Vektorfeld auf V_0 , das kanonische Bild der totalen Ableitung Ds . Die partiellen Ableitungen in einer bestimmten Basisdarstellung sind gerade die Komponenten bezüglich der reziproken Basis. Das ist immer dann wichtig, wenn keine Orthonormalbasis vorliegt. Und ds wird erhalten, indem man den Gradienten und die Verschiebung $\Delta\vec{x}$ skalar multipliziert. Für viele Anwendungen ist das - wie schon häufig betont - die entscheidende Formel. Die inhaltlich geometrische Bedeutung des Vektors $\text{grads}(\vec{x})$ wurde bereits früher besprochen. Die Konstruktion gilt für jeden endlichdimensionalen euklidischen Raum.

(2.3.27) Da sich die reziproken Basen bei Basiswechsel mit ${}^tT^{-1}$ transformieren, finden wir das folgende Transformationsverhalten unter Basiswechsel:

$$\partial_k s_N(\vec{x}^N) = \sum ({}^tT^{-1})_k^m \partial_m s_A(\vec{x}^A) \quad \text{mit} \quad \vec{x}^N = T\vec{x}^A.$$

Das verifiziert man direkt, indem man $s_N(\vec{x}^N) = s_A(T^{-1}\vec{x}^N)$ per Kettenregel differenziert. Zum Merken dient die Kurzformulierung: **Die Komponenten des Gradienten transformieren sich kovariant** - unterer Index bei ∂ -. Die Rechnungen bei einem Basiswechsel können im konkreten Fall durchaus aufwendig sein. Das hat nichts mit der Einfachheit der allgemeinen Struktur zu tun.

Und fast jedes benötigte Resultat kann auf unterschiedlichen Wegen bestimmt werden. Man sollte darauf achten, jeweils einen günstigen Weg zu finden. Im anschließenden Konkretisierungsbeispiel zeigen wir mehrere Rechenwege auf.

(2.3.28) Im Fall einer kartesischen Basis ist das Schema des Vorgehens meist:

s in Koordinaten formulieren / partielle Ableitungen bilden / mit Basis bzw. $\Delta\vec{x}$ kombinieren / ergibt den Gradienten bzw. ds .

Es sollte klar sein, wie dieses Grundschemata bei nicht kartesischer Basis zu ändern ist. Später werden wir sehen, dass es sogar auf den Fall krummliniger Koordinaten ausgedehnt werden kann.

(2.3.29) **Konkretisierungsbeispiel.** Wir wählen $V_0 = V^2$ mit euklidischem Skalarprodukt. E indiziere ein kartesisches Koordinatensystem mit Basis \vec{e}, \vec{f} . Unser Beispielfeld sei

$$s(\vec{x}) = (\vec{A} \cdot \vec{x}) + \frac{(\vec{B} \cdot \vec{x})}{\vec{x}^2} \quad \vec{A} = (\vec{e} + \vec{f})A \quad \vec{B} = \vec{e}B.$$

(2.3.30) Felddiskussion: Für große \vec{x} dominiert der erste Term abgesehen von der Richtung senkrecht zu \vec{A} . Für kleine x dominiert der zweite Term bis auf die Richtung senkrecht zu \vec{B} . Im Ursprung ist das Feld undefiniert. Hier treffen sich die Feldlinien aller Werte. Durch Nullsetzen der Ableitung - siehe unten - findet man zwei kritische Punkte, die vom Sattelpunktstyp sind. Sie errechnen sich zu

$$\vec{x}_+ = -\vec{x}_- = \left(\sqrt{\sqrt{2} + 1}, \sqrt{\sqrt{2} - 1} \right).$$

Überdies gilt die Symmetrie $s(-\vec{x}) = -s(\vec{x})$. Der zweite Term beschreibt das Potential eines Dipols der zweidimensionalen Elektrodynamik. Es ist überlagert vom Potential eines konstanten Feldes \vec{A} .

(2.3.31) Für das kartesische System E hat man die Koordinatendarstellung

$$s_E(x, y) = A(x + y) + \frac{Bx}{r^2} \quad \text{mit} \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Ableiten gibt

$$\vec{\partial}s_E(x, y) = \left(A + B\frac{y^2 - x^2}{r^4}, A - B\frac{2xy}{r^4} \right) \quad \text{grads}(\vec{x}) = \vec{A} + B\frac{(y^2 - x^2)\vec{e} - 2xy\vec{f}}{r^4}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $\vec{e}^* = \vec{e}$ und $\vec{f}^* = \vec{f}$ ist. Nullsetzen des Gradienten liefert die beiden kritischen Punkte. Denken Sie daran: $\vec{\partial}s_E(x, y) \in \mathbb{R}^{2*}$ steht zunächst einmal nur für eine Zusammenfassung von Zahlen. Es bedarf einer gesonderten Interpretation, damit man eine geometrische Bedeutung erhält.

(2.3.32) Jetzt führen wir eine zweite Basis dadurch ein, dass wir die reziproken Vektoren vorgeben. Und zwar wählen wir $\vec{a}^* = \vec{A}$ und $\vec{b}^* = \vec{B}$ mit den oben eingeführten Vektoren \vec{A} und \vec{B} . Der Index sei A . Unsere

Wahl bedeutet: $x^A = \vec{a}^* \cdot \vec{x} = \vec{A} \cdot \vec{x}$ und $y^A = \vec{b}^* \cdot \vec{x} = \vec{B} \cdot \vec{x}$. (Skalarprodukte, $\vec{x} = \vec{a}^* x^A + \vec{b}^* y^A$). Diese Vorgaben legen das gesamte Transformationssystem fest.

Man findet:

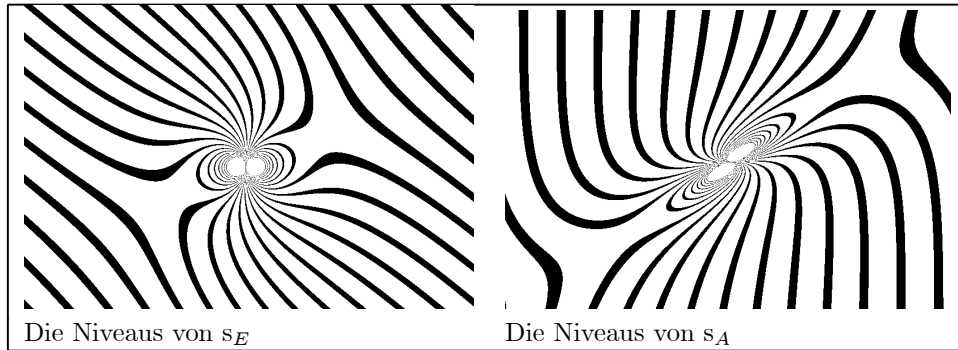
$$\begin{array}{|l} \vec{a}^* = \vec{e} + \vec{f} \\ \vec{b}^* = \vec{e} \end{array} \quad \begin{array}{|l} \vec{a} = \vec{0} + \vec{f} \\ \vec{b} = \vec{e} - \vec{f} \end{array} \quad \begin{array}{l} T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} g^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ (\vec{a}^*, \vec{b}^*) = (\vec{a}, \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \det g^A = 1$$

Man sieht, wie aufwendig das gesamte System ist, wenn man **alle** zugehörigen Beziehungen aufschreibt. Meist benötigt man jedoch nur einen Teil dieser Beziehungen bzw. kann sogar mit denen arbeiten, die unmittelbar gegeben sind. In unserem Fall ist s_A gesucht. Geht man von s_E aus, so benötigt man die neuen Koordinaten als Funktion der alten. Dies kann man auf viele Weisen bewerkstelligen. Etwa $\vec{x} = \vec{a}x' + \vec{b}y' = \vec{f}x' + (\vec{e} - \vec{f})y' = \vec{e}(-y') + \vec{f}(x' - y') = \vec{e}x + \vec{f}y$. Vergleich gibt $x = -y'$ und $y = x' - y'$. Alternativ kann man T^{-1} anwenden oder mit der reziproken Basis arbeiten: $x = \vec{e} \cdot \vec{x} = \vec{e}(\vec{a}x' + \vec{b}y') = -y'$ usw.

(2.3.33) Hat man die gewünschte Umrechnung, so gibt Einsetzen mit x für x' und y für y' :

$$s_A(x, y) = x + \frac{y}{x^2 + 2y^2 - 2xy}$$

(2.3.34) Als Felder auf dem \mathbb{R}^2 sind s_E und s_A vom Rechenausdruck aus gesehen recht verschieden. Die Figuren zeigen die Niveaulinien. Man sieht deutlich, dass es sich doch um 2 ähnliche Quantifizierungen desselben Feldes handelt.



(2.3.35) Jetzt können wir partiell differenzieren und finden

$$\partial s_A(x, y) = \left(1 - \frac{2y(x-y)}{r^4}, \frac{x^2 - 2y^2}{r^4} \right)$$

(2.3.36) Mit Hilfe der reziproken Basis gibt das den absoluten Gradienten:

$$\text{grad}s(\vec{x}) = \vec{a}^* \left(1 - \frac{2y'(x' - y')}{r'^4} \right) + \vec{b}^* \frac{x'^2 - 2y'^2}{r'^4} = \vec{A} \left(1 - \frac{2y'(x' - y')}{r'^4} \right) + \vec{B} \frac{x'^2 - 2y'^2}{r'^4}$$

(2.3.37) Drückt man \vec{a}^* und \vec{b}^* durch \vec{e} und \vec{f} aus und x' und y' über T durch x und y dann folgt der früher für E gewonnene Ausdruck des Gradienten.

(2.3.38) Hat man die Zusammenhänge einmal verstanden, so sieht man, daß der gesamte Sachverhalt sich auch durch die folgende Gleichung zusammenfassen läßt **mit der Vereinbarung, jeweils die richtigen Variablen einzusetzen:**

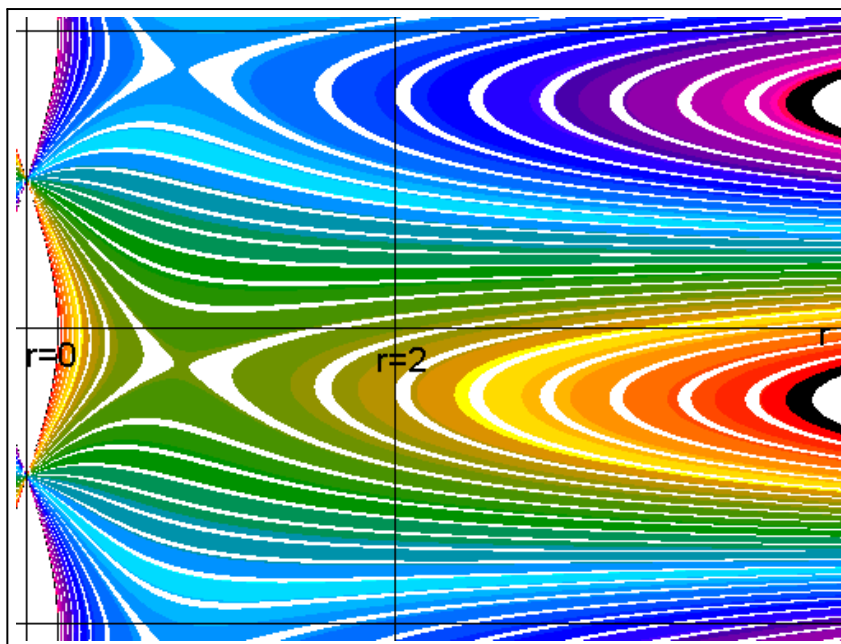
$$ds = \Sigma (\partial_i s_E) \Delta x_E^i = \Sigma (\partial_r s_E T_{ri}^{-1}) T_{is} \Delta x_E^s = \Sigma (\partial_r s_A) \Delta x_A^r$$

Vgl.(2.3.27).

Wie sieht unser Feld in Polarkoordinaten aus? Man erhält

$$s_P(r, \theta) = Ar\sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{B}{r} \cos \theta.$$

Nachfolgend sind für A=B=1 die Niveaulinien aufgezichnet. r horizontal ab r=0 und θ von $-\pi$ bis π vertikal.



11.2.3c Der Gradient bei krummlinigen Koordinaten

(1.6.41) Die Qualität eines Formalismus spiegelt sich auch darin wieder, wie gut er sich auf neuartige Situationen verallgemeinern lässt. In unserem Fall erhebt sich das Problem, den Gradienten in krummlinigen Koordinaten, sagen wir Polarkoordinaten, darzustellen. Konkret: wie kann man etwa über die Darstellung (1.6.40) den Feldgradienten finden?

(1.6.42) Sei $\vec{x}_P : G_P \rightarrow G$ eine surjektive glatte Parametrisierung von G. Auf G sei das Skalarfeld $s:G \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Parameter $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$. Wie in 6.1.7 beschrieben bilden wir die Parametrisierung von s vermöge $s_P(\vec{\alpha}) = s(\vec{x}_P(\vec{\alpha}))$. Diese Gleichung leiten wir nach α^i unter Verwendung der Kettenregel ab. Es folgt:

$$\frac{\partial s_P}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha}) = Ds(\vec{x}_P(\vec{\alpha})) \cdot \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) \quad \text{mit} \quad \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha}).$$

(1.6.42) Die Vektoren $\vec{\partial}_i = \vec{\partial}_i(\vec{\alpha})$ bilden aber ein Basisfeld. Wir können für jedes K die zugehörige reziproke Basis bilden, die wir mit $\vec{\partial}^i = \vec{\partial}^i(\vec{\alpha})$ bezeichnen. Das gibt uns ein weiteres Basisfeld, die reziproke Basis. Und $Ds(\vec{x}_P(\vec{\alpha})) \cdot \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) = \left(\text{grad}s(\vec{x}) \cdot \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) \right)$ ist gerade der zugehörige Entwicklungskoeffizient. Damit folgt sofort die Entwicklung des Gradienten nach dem reziproken Basisfeld:

$$\boxed{\text{grad}s(\vec{x}) = \sum \vec{\partial}^i(\vec{\alpha}) \frac{\partial s_P}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha})}$$

Dabei ist die 1. Konvention zur Abbildungsbezeichnung benutzt.

Damit haben wir den gesamten Formalismus für konstante Basisfelder problemlos auf den Fall der krummlinigen Koordinaten übertragen.

□ Überlegen Sie sich mindestens zwei weitere Herleitungen dieser Formel. Natürlich ist auch der Verweis auf frühere Resultate zulässig.

(1.6.43) Nehmen wir als Beispiel räumliche Polarkoordinaten. Die $\vec{\partial}_i$ sind hier orthogonal, aber nicht normiert. Man findet:

$$\vec{\partial}^r = \vec{\partial}_r \quad \vec{\partial}^\theta = \frac{1}{r} \vec{\partial}_\theta \quad \vec{\partial}^\varphi = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{\partial}_\varphi$$

Ist etwa das Skalarfeld gegeben durch $s_P(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin(\alpha r \cos \theta)$, so folgt

$$\text{grad}s(\vec{x}) = \vec{\partial}^r (2r \sin(\alpha r \cos \theta) + \alpha r^2 \cos \theta \cos(\alpha r \cos \theta)) + \vec{\partial}^\theta (-\alpha r^3 \sin \theta \cos(\alpha r \cos \theta))$$

Das läßt sich dann leicht weiter umrechnen. Eine Umrechnung in kartesische Koordinaten ist dagegen offensichtlich unangenehm.

(1.6.44) Als einfacheres Beispiel betrachten wir ebene Polarkoordinaten. Dafür gilt

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \vec{x}_P(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{\partial}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{\partial}_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Die reziproke Basis folgt per Inspektion

$$\vec{\partial}^r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{\partial}^\theta = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

(1.6.45) Nehmen wir das Feld $s(\vec{x}) = \vec{x}^2 + (\vec{e}_2 \cdot \vec{x})$ mit $\text{grad}s(\mathbf{x}) = 2\vec{x} + \vec{e}_2$. Wir haben $s_P(r, \theta) = r^2 + r \sin \theta$. Also $\partial_r s_P = 2r + \sin \theta$ und $\partial_\theta s_P = r \cos \theta$. Damit gibt unsere Formel:

$$\begin{aligned} \text{grad}s(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} (2r + \sin \theta) + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} r \cos \theta \\ &= 2r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beachten Sie, wie elegant sich alles zum korrekten Resultat zusammenfügt.

Zur expliziten Berechnung von Gradienten: Vergleiche Vorkurs

11.2.4 Invariante Teilmengen der Tensorräume

11.2.4a Aktive und passive Transformationen

(2.4.) Wir gehen genauer auf die Wirkungen der Transformationsgruppe ein. Die Transformationsgruppe operiert mathematischerseits auf einer Vielzahl von Objekten, die für die physikalische Beschreibung benötigt werden. Diese Operationen lassen sich physikalisch wieder inhaltlich interpretieren, machen dabei Vorhersagen über die Struktur unserer Welt. Insbesondere macht das Modell der linearen Algebra bestimmte Aussagen über Beziehungen, die zwischen physikalischen Systemen herrschen, die durch Transformationen miteinander verbunden sind. Und sie machen Aussagen über die Einbettung der Systeme in die Geometrie von Raum und Zeit sowie die Beziehungen zwischen den Beobachtungsdaten unterschiedlicher Beobachter.

(2.4.2) Insbesondere interessiert die Frage: **Welche Komponententupel sind für die Beobachter Kandidaten physikalischer Größen?** Welche Daten benötigt man mindestens, um die Ergebnisse anderer zugelassener Beobachter vorherzusagen? Das Beispiel der Relativitätstheorie schärfte den Blick für diese Problematik.

(2.4.3) Nochmals das allgemeine Szenenbild, von dem wir ausgehen.

- V_0 Grundraum, V ein zugehöriger Tensorraum. $\dim V_0 = n$ und $\dim V = N$
- G die Transformationsgruppe. Diese operiert auf V_0 vermöge $(g, \vec{x}) \mapsto g \star \vec{x} = T_g \cdot \vec{x}$ mit $T_g \in \text{Aut}(V_0)$. Das ist unsere (mathematische) Vorgabe.
- Weiter sei \mathcal{B} die Menge aller Basen, die (in der jeweiligen Idealisierung) zu zugelassenen Beobachtern führen. (Etwa alle kartesischen Basen von V_0^3 oder alle Sylvesterbasen von V_0^4 .) Jeder Basiswechsel wird dann durch eine Transformation aus G beschrieben und umgekehrt führt jedes $g \in G$ eine zugelassene Basis in eine solche über.
- Ist a Basis von V , dann ist $g \mapsto M_{T_g}$ eine zugehörige Matrixdarstellung der Gruppe. M_{T_g} ist beschreibende Matrix bezüglich der gewählten Basis.

(2.4.4) Die gegebene Gruppenoperation auf den Grundraumvektoren induziert - wie nach Kap. 3 zu erwarten - weitere Operationen. Alle nachfolgend beschriebenen Gruppenoperationen sind Linksoperationen. Sie sind zum Zweck der Systembeschreibung so verkoppelt, dass stets $\boxed{g \star \text{alt} = \text{neu}}$ gilt.

- Mit der Matrixdarstellung (zur Basis a) operiert G auch auf den Koordinatenvektoren (zu a), d.h. den Datentupeln:

$$(G \times \mathbb{R}_K^n, (g, \vec{x}^K)) \mapsto g \star \vec{x}^K = M_{T_g} \cdot \vec{x}^K, \mathbb{R}_K^n$$

Es gilt: $g \star \vec{x} = T_g \cdot \vec{x} = \sum a_i (M_{T_g})_{ik} x_k^K$.

Physikalisch führt diese Operation zum unten zu beschreibenden *aktiven Standpunkt*. Die Operation ist ausdehnbar auf die Figuren, also Teilmengen von V_0 . Beschreibt g etwa eine Translation und ist F eine Figur, dann beschreibt $g \star F$ die translatierte Figur als zweites System.

- G operiert auch auf V_0^* per $(g, \lambda) \mapsto {}^t T_{g^{-1}} \cdot \lambda$. Für die zugehörige Matrixdarstellung heißt das

$$(G \times \mathbb{R}_K^{*n}, (g, \vec{\lambda}^K)) \mapsto g \star \vec{\lambda}^K = {}^t M_{T_{g^{-1}}} \cdot \vec{\lambda}^K, \mathbb{R}_K^{*n}$$

Nach den Regeln der Transformationstheorie ist $\vec{\lambda}^K$ als Spaltenvektor anzusetzen. Es gilt

$$\langle g \star \lambda | g \star \vec{x} \rangle = \langle \lambda | \vec{x} \rangle$$

Intuitiv beschreiben die Dualraumelemente Messoperationen an geometrischen Figuren. Vgl. die Interpretation der k -Formen der äußeren Algebra. Unsere Gleichung besagt dann: **Verschiebt man Figur und Messgerät gekoppelt, dann ändert sich das Messresultat nicht.** Und tatsächlich lassen sich Abweichungen von diesem Ergebnis erfahrungsgemäß darauf zurückführen, dass man irgendwelche Systemteile nicht mit transformiert hat. Abweichungen werden also nicht durch Eigenschaften von V_0 bewirkt. Das ergibt den unten zu beschreibenden *Kopplungsstandpunkt*.

- **Basisoperationen:** Sei \mathcal{B} die Menge aller Basen, die zu G -zugelassenen Beobachtern gehören. Dann haben wir die Operation (neue Basis als Funktion der alten, daher g^{-1} . Das ergibt ein Linksoperation!):

$$(G \times \mathcal{B}, (g, a) \mapsto g \star a = \Sigma a M_{T_{g^{-1}}}, \mathcal{B})$$

Das ist der bisher vorrangig besprochene Basiswechsel, der zum *passiven Standpunkt* führt. Was kurz besagt: Ein und dieselbe Figur wird durch zwei Beobachter beschrieben!

- Mit den Operationen auf V_0 und V_0^* erhalten wir kanonisch eine Operation auf allen Tensorräumen. Etwa $g \star (\vec{x} \otimes \vec{y}) = T_g \vec{x} \otimes T_g \vec{y}$ oder $g \star (\vec{x} \otimes \lambda) = (T_g \vec{x}) \otimes ({}^t T_{g^{-1}} \lambda)$.

Damit hat man **automatisch** die formale Ausdehnung aller drei Standpunkte auf allgemein zu Tensoren gehörige Datentupel.

(2.4.5) Das ist die mathematische Seite, die Ausdehnung der ursprünglichen Gruppenoperation auf weitere, zur physikalischen Sachverhaltsbeschreibung benötigte mathematische Objekte. Jetzt gehen wir auf die andere Seite über **und interpretieren diese Konstruktionen inhaltlich physikalisch**. Die so vorhergesagten Resultate werden von der Erfahrung weitgehend bestätigt. Ernsthaftige Abweichungen würden eine Änderung des eingangs beschriebenen Szenenbildes verlangen, wobei man meist zunächst an eine Änderung von V_0 denkt. Aber natürlich sind auch viel schwerwiegendere Strukturänderungen denkbar.

(2.4.6) Wir beschreiben drei inhaltliche Interpretationen des Transformationsformalismus. Alle machen gewisse Vorhersagen über das Verhalten physikalischer Systeme und die Übersetzungsabbildungen bei Beobachterwechsel.

(2.4.7) ■ **Aktiver Standpunkt.** Er beruht auf der folgenden physikalischen Ausgestaltung des allgemeinen Szenenbildes:

Ein (und derselbe) Beobachter vermisst zwei Systeme, die durch durch eine Konfigurationsraumtransformation auseinander hervorgehen. (Lageveränderung, Zeitverschiebung usw.) Transformiert werden sämtliche Systemgrößen. Zwischen den Messresultaten zu den beiden Systemen bestehen bestimmte Beziehungen. Wir beschränken uns auf Transformationen der Transformationsgruppe. Dann werden diese Beziehungen durch die entsprechenden Gruppenoperationen festgelegt.

Aktiv heißt: Das physikalische System selbst wird transformiert. Die Übersetzung der Beobachtungsdaten erfolgt durch die Matrixabbildung der Koordinatenvektoren $\vec{Y}^N = \vec{T} \cdot \vec{Y}^A$. Koordinatenfrei geht es um die Zuordnung

$$Y = \Sigma a_J Y_A^J \mapsto g \star Y = \Sigma a_J Y_N^J.$$

Beispiel: $g \in SO(3)$ beschreibt eine Drehung. Das System sei ein starrer Körper. Das zweite System entsteht durch Drehung des ersten um den Ursprung gemäß g . Die Ortsvektoren der Punkte transformieren sich gemäß $\vec{x} \mapsto g \star \vec{x}$. Das wird auf den gesamten Körper ausgedehnt. Abstände von Punkten bleiben fest. usw. In der Relativitätstheorie beobachtet ein Beobachter einmal einen ruhende Massenpunkt und dann einen derselben Art, der sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit gegenüber dem Beobachter bewegt.

(2.4.8) ■ **Passiver Standpunkt.** Die Ausgestaltung des Szenenbildes sieht jetzt wie folgt aus: Ein und dasselbe System wird von 2 Beobachtern beobachtet, deren Koordinaten durch ein Element der Transformationsgruppe auseinander hervorgehen. Es werden also Ereignisse an **einem** System vermessen, aber durch **zwei** Beobachter. Nach unserem üblichen Schema gehört dazu ein Basiswechsel in V_0 , beschrieben durch ein Element der Transformationsgruppe G . Ist a die alte und b die neue Basis, so haben wir $b = g \star a = a \vec{T}_{g^{-1}}$. In diesem Fall sind die Koordinatenvektoren der beiden Beobachter die relevanten Größen. (Man fragt ja nach der Übersetzungsabbildung!) Und für diese gilt erneut $\vec{Y}^N = T_g \vec{Y}^A$. Die Gleichung

$$\boxed{Y = \Sigma a_J Y_J^A = \Sigma b_J Y_J^N}$$

der Vektorrechnung bezieht sich vornehmlich auf diesem Standpunkt.

(2.4.9) ■ **Kopplungsstandpunkt.** Man kann beide Szenenbilder koppeln und dazu macht die Vektorrechnung ganz bestimmte Aussagen: **Zwei verschiedene Beobachter vermessen je ein zugehöriges System.** Aber die Systeme gehen durch dieselbe Transformation auseinander hervor, die auch die Beobachter verbindet. Und das heißt: Der alte Beobachter hat die Vektorbeschreibung $Y^1 = \Sigma a_J Y_{A1}^J$ für das erste System. Und $Y^2 = \Sigma a_J Y_{A2}^J = \Sigma a_J T_{.K}^J Y_{A1}^K$ für das zweite. Das gibt aber wegen $b_K = \Sigma a_J T_{.K}^J$ auch $Y^2 = \Sigma b_K Y_{A1}^K$. Oder: **Der zweite Beobachter erhält für das zweite System genau dieselben Zahlbeschreibungen wie der erste für das erste,**

$$\vec{Y}^{2N} = \vec{Y}^{1A}.$$

Das ist offensichtlich eine starke Isotropieaussage über unsere Welt, vornehmlich deren Raum-Zeit-Struktur, die automatisch in das Vektorraumtransformationsverhalten eingebaut ist. Sie ist keineswegs denknotwendig, entspricht aber weitgehend der Erfahrung.

(2.4.10) Wir stellen jetzt das folgende Problem: Das Szenenbild sei wie eben beschrieben. Wir wählen einen festen Tensorraum V , den wir als Kandidaten zur Beschreibung einer physikalischen Größe ansehen. Ist $Y \in V$ und $Y = \Sigma a_J Y^J$, dann sollte (Y^J) die einschlägigen Beobachtungsdaten des zu a gehörigen Beobachters enthalten. **Aber braucht man immer alle Komponenten Y^J ?**

Zur Verdeutlichung Die Ortsbeschreibung im V_0^3 erfolgt durch Zahltripel, die Koordinatenvektoren aus \mathbb{R}_K^3 . Also $\vec{x}^K = {}^t(x, y, z)$. Angenommen ein Querulant erscheint und behauptet, man müsse die Lage von Massepunkten durch 5-Tupel beschreiben. Sagen wir durch $\vec{x}^Q = (x, y, z, y - x, z - y)$. Diese Beschreibung würde man als *redundant* charakterisieren. Denn die letzten beiden Koordinaten sind überflüssig und die ersten drei für sich genommen spannen einen invarianten Teilraum des \mathbb{R}^5 auf. Sie reichen bereits aus, um mit Hilfe der Übersetzungsabbildung die Koordinaten eines neuen Beobachters vorherzusagen. In Analogie dazu fragen wir: Kann es ein, dass man in Tensorräumen unter bestimmten Umständen vielleicht mit weniger Koordinaten auskommt, als denen, die aus einer vollständigen Basisbeschreibung $\Sigma a_J Y^J$ hervorgehen?

(2.4.11) Tatsächlich ist das vielfach der Fall. Wieso? Nun, die Gruppe operiert auf V und dieser Raum zerfällt dabei in Bahnen. Vereinigungen solcher Bahnen sind unter G *invariante Teilmengen*. D.h. mit $Y \in F$ gilt auch immer $g \star Y \in F$, wenn F eine solche invariante Teilmenge ist. Beachten Sie übrigens: **Menge**, nicht etwa Teilraum!

Was bedeutet das zunächst für den aktiven Standpunkt? Dann ist $Y = \Sigma a_J Y^J$ und $g \star Y = \Sigma a_K T_{.J}^K Y^J = \Sigma a_K Y^{NK}$ mit Y und $g \star Y \in F$.

Und was bedeutet das für den passiven Standpunkt? Sei $Y \in F$ mit altem Beobachter a . Also $Y = \Sigma a_J Y^{AJ}$. Für den neuen Beobachter mit Basis b gilt $Y = \Sigma b_K T_{.J}^K Y^{AJ} = \Sigma b_K Y^{NK}$ Oder $Y^{NK} = \Sigma T_{.J}^K Y^{AJ}$ Zusammen sieht man: Die Übersetzungsabbildung $\beta_{NA} : (Y^{AJ}) \mapsto (Y^{NK})$ macht aus einem Tensor $T \in F$ stets wieder einen Tensor $T \in F$. Die Komponenten, die die Elemente von F festlegen, genügen daher zur Ausführung der Übersetzungsabbildung und werden zu Kandidaten zur Beschreibung einer physikalischen Größe. Formal: Sei a eine Basis und $\bar{L}_a : \mathbb{R}^N \rightarrow V$ die zugehörige Linearkombinationsabbildung. Weiter sei $F^a \subset \mathbb{R}^N$ das Urbild von F unter L_a . Dann ist auch F^a unter G invariant. Ist b weitere zulässige Basis, dann gilt $F^a = F^b$.

(2.4.12) Zur Erinnerung: Wie beschreibt man üblicherweise **Teilmengen** eines Vektorraums? Durch zusätzliche Bedingungen an die Koordinaten, wodurch die Zahl der freien Parameter, die Zahl der Freiheitsgrade, reduziert wird. Eine affine Ebene im Raum in der Dreipunkteform führt auf die Nebenbedingung $x+y+z=1$. Ein Ursprungskreis in der Ebene wird durch $x^2 + y^2 = r^2$ festgelegt usw. Ebenso wird man jetzt die Tensorkoordinaten (Y^J) des allgemeinen Tensors durch zusätzliche Bedingungen einschränken, die die Zugehörigkeit zu F sichern. Und dabei haben wir gesehen: Ist F invariant und erfüllt $\vec{Y} = (Y^J)$ diese Einschränkung, dann tut das auch $g \star \vec{Y} = (\Sigma T_{.K}^J Y^K)$. Zur Verdeutlichung ein konkretes Beispiel, das wir nachfolgend genauer behandeln:

Ist $\vec{Y} = (Y_{ij})$ eine **symmetrische** (doppelt kovariante) Matrix, dann ist $g \star \vec{Y}$ auch eine symmetrische Matrix. Nie wird daraus im neuen System eine nicht symmetrische. Zur Bestimmung

einer symmetrischen $n \times n$ -Matrix benötigt man aber nur $\frac{1}{2}n(n+1)$, nicht aber n^2 Zahlangaben bzw. Komponenten. Der direkte Beweis: Sei $Y_{ik}^A = Y_{ki}^A$. Also ${}^t Y^A = Y^A$. Dann folgt wegen $Y^N = {}^t T^{-1} Y^A T^{-1}$ und mit den Rechenregeln der Transposition

$${}^t Y^N = {}^t ({}^t T^{-1} Y^A T^{-1}) = {}^t T^{-1} {}^t Y^A {}^t T^{-1} = Y^N.$$

□ Ist $\vec{Y} = (Y_{.k}^i)$, dann stimmt das nicht. Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel. Wie steht es mit $\vec{Y} = (Y^{ik})$?

(2.4.13) **Zusammenfassung:** Ist $F \subset V$ invariante Teilmenge, dann sind die Koordinatentupel \vec{Y} der Elemente aus F **Kandidaten für die Beschreibung physikalischer Größen**. Zur Ausführung der zugehörigen Übersetzungsabbildung benötigt man nur die F bestimmenden Parameter.

Oder: Werden die Elemente von F durch $k \leq N$ freie Parameter bestimmt, dann sind die zugehörigen k -Tupel der Koordinatenvektoren Kandidaten für die Beschreibung einer physikalischen Größe, da die F festlegenden Nebenbedingungen auch nach der Transformation erfüllt sind.

Ist F dagegen nicht invariant, dann genügt das k -Tupel eines Beobachters nicht immer, um das entsprechende Tupel eines anderen vorherzusagen. Und in diesem Sinne kann keine Quantifizierung einer beobachterunabhängigen physikalischen Größe vorliegen.

(2.4.14) **Wir suchen hier nicht systematisch nach invarianten Teilmengen von V , sondern geben nur einige wichtige Beispiele mit zugehörigen Anwendungen!**

11.2.4b Symmetrische und antisymmetrische Tensoren

Das jetzt zu besprechende Beispiel invarianter Teilräume ist von großer Bedeutung, kommt immer wieder vor und ist auch stark verallgemeinerbar. Wir nutzen es sowohl bei der nachfolgend vorgenommenen Analyse der totalen Ableitung eines Vektorfeldes als auch bei der Diskussion des Hookschen Gesetzes der Elastizitätstheorie.

(2.4.15) Sei $V = V_0 \otimes V_0$. Dieser Raum erweist sich als direkte Summe zweier invarianter Teilräume:

$$\boxed{V_0 \otimes V_0 = (V_0 \otimes_S V_0) \oplus (V_0 \otimes_A V_0)}$$

Wir führen den **Beweis** dieser Behauptung über die Angabe einer die Zerlegung liefernden Basis. Die resultierende Zerlegung ist dann basisunabhängig.

(2.4.16) Sei f Basis von V_0 . Setze

$$e_i \otimes e_k = \frac{1}{2}(e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) + \frac{1}{2}(e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) = e_i \otimes_S e_k + e_i \otimes_A e_k$$

Dann sollen die $e_i \otimes_S e_k$ mit $i \geq k$ Basis von $V_0 \otimes_S V_0$ und die $e_i \otimes_A e_k$ mit $i > k$ Basis von $V_0 \otimes_A V_0$ sein. Laut Definitionsgleichung liegt ein Erzeugendensystem (aus nicht zerlegbaren Tensoren) vor. Die Anzahl ist $n^2 = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n-1)$. Das beweist die behaupteten Basiseigenschaften.

(2.4.17) Bei Summation über **alle** i, k liegen nur Erzeugendensysteme vor. Im Rahmen der Summenschreibweise wird gerne mit diesen Erzeugendensystemen gearbeitet.

(2.4.18) **Sind die beiden Teilräume invariant?** Ja, die zugehörigen Komponentenmatrizen sind in Bezug auf jede Basis und daher nach jeder Transformation symmetrisch bzw antisymmetrisch. Das rechnet man direkt nach oder entnimmt es der folgenden Rechnung, die zugleich die Komponenten konstruiert.

(2.4.19) Zunächst eine **Hilfsbetrachtung**: Sei $A = \sum_{ik} M_{ik}$. Dabei sollen i und k dieselbe Indexmenge durchlaufen. Das ist eine wichtige Bedingung. Dann rechnen wir wie folgt:

$$A = \sum_{ik} M_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ik} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{ik} (M_{ik} + M_{ki})$$

Im zweiten entscheidenden Schritt haben wir die Indexbezeichnungen einfach vertauscht (i wird zu k und k zu i). Das geht natürlich nur bei gleicher Indexmenge!

(2.4.20) Für einen allgemeinen Tensor $Y \in V_0 \otimes V_0$ rechnen wir zunächst:

$$Y = \sum e_i \otimes e_k Y^{ik} = \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) Y^{ik} + \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) Y^{ik}$$

Auf jede dieser Summen wenden wir obige Hilfsbetrachtung an und finden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) Y^{ik} &= \frac{1}{4} \sum (e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) (Y^{ik} + Y^{ki}) = \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) Y_S^{ik} \\ \text{mit } Y_S^{ik} &= \frac{1}{2} (Y^{ik} + Y^{ki}) \end{aligned}$$

und (da $e_k \otimes e_i - e_i \otimes e_k = -(e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i)$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) Y^{ik} &= \frac{1}{4} \sum (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) (Y^{ik} - Y^{ki}) = \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) Y_A^{ik} \\ \text{mit } Y_A^{ik} &= \frac{1}{2} (Y^{ik} - Y^{ki}) \end{aligned}$$

(2.4.21) Insgesamt erhalten wir damit folgende eindeutige Zerlegung eines Tensors aus $V_0 \otimes V_0$, wobei wir den gesamten benötigten Formelapparat angeben:

$Y = \sum e_i \otimes_S e_k Y_S^{ik} + \sum e_i \otimes_A e_k Y_A^{ik}$	mit
$e_i \otimes_S e_k = \frac{1}{2} (e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) = e_k \otimes_S e_i$	und $Y_S^{ik} = \frac{1}{2} (Y^{ik} + Y^{ki}) = Y_S^{ki}$
$e_i \otimes_A e_k = \frac{1}{2} (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) = -e_k \otimes_A e_i$	und $Y_A^{ik} = \frac{1}{2} (Y^{ik} - Y^{ki}) = -Y_A^{ki}$

Beachten Sie, dass die doppelt auftretenden Faktoren $\frac{1}{2}$ korrekt sind. Die Summe geht über alle Paare (i,k) , so dass für $i \neq k$ jeder Summand doppelt auftritt. Das Paar (i,k) liefert denselben Beitrag wie (k,i) . Zwar ist $e_i \otimes_A e_k = -e_k \otimes_A e_i$, aber für den Kofaktor Y_A^{ik} gilt dasselbe: $Y_A^{ki} = -Y_A^{ik}$. Im Produkt $e_i \otimes_A e_k Y_A^{ik}$ heben sich die beiden Vorzeichen heraus.

(2.4.22) Bei der Summe über alle i,k handelt es sich **nicht mehr um eine Basisdarstellung** des Tensors, sondern um eine durch ein Erzeugendensystem. Dafür sind die zugehörigen Komponenten nicht mehr unabhängig: $Y_S^{ik} = Y_S^{ki}$ und $Y_A^{ik} = -Y_A^{ki}$.

- Beweisen Sie: Sei $Y = \sum_{ik} (a_i \otimes b_k + b_k \otimes a_i) Y^{ik}$. Dann gilt $Y = \sum_{ik} (a_i \otimes b_k + b_k \otimes a_i) Y_S^{ik}$ und $\sum_{ik} (a_i \otimes b_k + b_k \otimes a_i) Y_A^{ik} = 0$. Folgern Sie, dass die Zerlegung aus (15) unabhängig von der Wahl der Basis ist.
- Wieso ist eine entsprechende Zerlegung für den Tensorraum $V \otimes W$ bei $W \neq V$ nicht möglich, dagegen für $V_0^* \otimes V_0^*$ wieder problemlos?
- Verallgemeinern Sie die Konstruktion auf $V_0 \otimes V_0 \otimes V_0$. Zeigen Sie, dass die beiden entstehenden Teilräume noch nicht den gesamten Tensorraum aufspannen.

(2.4.23) Der Raum der Zweivektoren $V \wedge V$ hat dieselbe Dimension wie der Raum der antisymmetrischen Tensoren $V \otimes_A V$. Besteht da ein Zusammenhang? Es liegt nahe, den basisbezogenen Isomorphismus $e_i \wedge e_k \mapsto e_i \otimes_A e_k = \frac{1}{2} (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i)$ zu betrachten. Die übliche Rechnung zeigt, dass er unabhängig von der Basiswahl ist. Bei Rechnungen muss man nur immer sorgfältig darauf achten, ob man über die Basis $e_i \wedge e_k$ mit $k < i$ oder über das Erzeugendensystem aller $e_i \wedge e_k$ summiert. Also: Antisymmetrische Tensoren etwa aus $V_0 \otimes V_0$ lassen sich bei Bedarf als Elemente von $V_0 \wedge V_0$ interpretieren und umgekehrt.

11.2.4c Anwendung der Zerlegung auf die totale Ableitung eines glatten Vektorfeldes

Die Rotation (1)

(2.4.24) Ein glattes Vektorfeld $\vec{F} : V_0 \rightarrow V_0$ sei gegeben. Zunächst darf $\dim V_0 = n$ sein. Für das totale Differential haben wir bei **konstantem** Basisfeld e die Formel

$$d\vec{F} = D\vec{F}(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x} = \sum_{ik} \vec{e}_i \frac{\partial F^i}{\partial x^k} \Delta x^k.$$

Das gibt für die totale Ableitung folgende tensorielle Form:

$$D\vec{F}(\vec{x}) = \sum_{ik} \vec{e}_i \frac{\partial F^i}{\partial x^k} \otimes \vec{e}^k = \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^k \frac{\partial F^i}{\partial x^k}$$

$$D\vec{F}(\vec{x}) = \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^k J_{.k}^i \quad \text{mit} \quad J_{.k}^i = \frac{\partial F^i}{\partial x^k} = \partial_k F^i$$

Wandelt man in die Darstellung bezüglich der Basis $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_k$ um, können wir das in einen invarianten symmetrischen und einen invarianten antisymmetrischen Teil zerlegen:

$$\begin{aligned} DF(\vec{x}) &= \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k J^{ik} = \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes_S \vec{e}_k J_S^{ik} + \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes_A \vec{e}_k J_A^{ik} \\ &= DF_S(\vec{x}) + DF_A(\vec{x}) \end{aligned}$$

□ Wieviel Komponenten hat der antisymmetrische Teil? Insbesondere in den Fällen $n=2,3,4$?

(2.4.25) **Uns interessiert der antisymmetrische Teil** $DF_A(\vec{x})$. Welche geometrisch inhaltliche Interpretation hat $DF_A(\vec{x}) = \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes_A \vec{e}_k J_A^{ik}$? Die Größe ist ja invariant und sollte daher eine physikalisch geometrische Interpretation besitzen.

(2.4.26) Das diskutieren wir nur für den Fall $n=3$, also $V_0 = V_0^3$. Dann gilt

$$DF_A(\vec{x}) = 2 \sum_{i < k} \vec{e}_i \otimes_A \vec{e}_k J_A^{ik} = 2(\vec{e}_1 \otimes_A \vec{e}_2) J_A^{12} + \vec{e}_1 \otimes_A \vec{e}_3 J_A^{13} + \vec{e}_2 \otimes_A \vec{e}_3 J_A^{23}$$

$$\begin{aligned} dF_A &= DF(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x} = \vec{e}_1 J_A^{12} \Delta x_2 - \vec{e}_2 J_A^{12} \Delta x_1 + \vec{e}_1 J_A^{13} \Delta x_3 - \vec{e}_3 J_A^{13} \Delta x_1 + \vec{e}_2 J_A^{23} \Delta x_3 - \vec{e}_3 J_A^{23} \Delta x_2 \\ &= \vec{e}_1 (J_A^{12} \Delta x_2 + J_A^{13} \Delta x_3) + \vec{e}_2 (J_A^{23} \Delta x_3 - J_A^{12} \Delta x_1) + \vec{e}_3 (-J_A^{13} \Delta x_1 - J_A^{23} \Delta x_2) \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir eine kartesische Basis (so dass die übliche Komponentendarstellung des Vektorproduktes gilt) und setzen

$$\boxed{J^1 = -J_A^{23} = \frac{1}{2}(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)} \quad \boxed{J^2 = -J_A^{31} = J_A^{13} = \frac{1}{2}(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)} \quad \boxed{J^3 = -J_A^{12} = \frac{1}{2}(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)}.$$

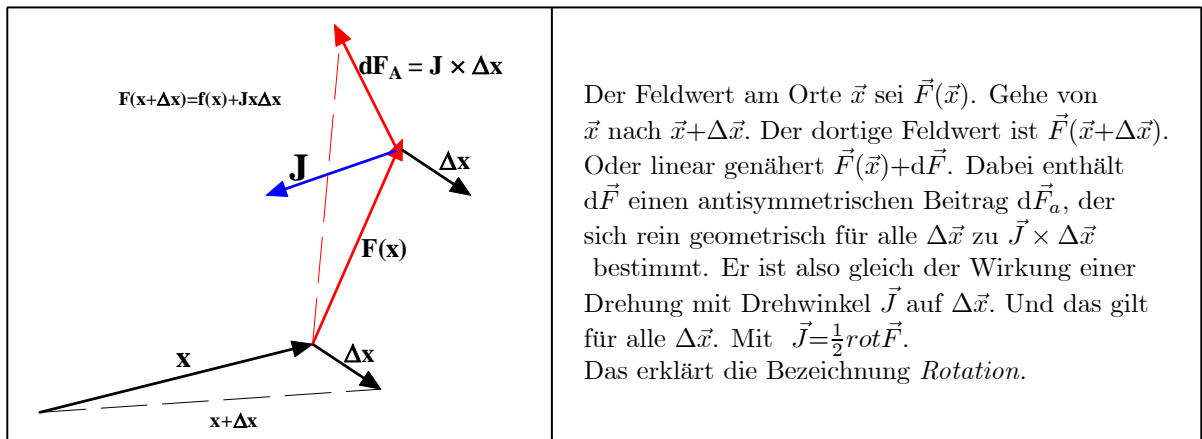
Also

$$dF_A = \vec{e}_1 (J^3 \Delta x_2 - J^2 \Delta x_3) + \vec{e}_2 (J^1 \Delta x_3 - J^3 \Delta x_1) + \vec{e}_3 (J^2 \Delta x_1 - J^1 \Delta x_2) = \vec{J} \times \Delta\vec{x}.$$

Einsetzen der Definition von J_A^{ik} gibt

$$\begin{aligned} -\vec{J} &= \vec{e}_1 J_A^{23} + \vec{e}_2 (-J_A^{13}) + \vec{e}_3 J_A^{12} \\ -\vec{J} &= \frac{1}{2} \vec{e}_1 (\partial_3 F_2 - \partial_2 F_3) - \frac{1}{2} \vec{e}_2 (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \frac{1}{2} \vec{e}_3 (\partial_2 F_1 - \partial_1 F_2) \\ &= -\frac{1}{2} \sum \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \partial_k F_l = -\frac{1}{2} \text{rot} \vec{F} \quad \boxed{\text{rot} \vec{F} = 2\vec{J}} \end{aligned}$$

Fassen wir zusammen: Der antisymmetrische Teil der totalen Ableitung eines glatten Vektorfeldes $\vec{F} : V_0^3 \rightarrow V^3$ läßt sich tensoriell schreiben $\boxed{DF_A = \sum \vec{a}_i \otimes \vec{a}_k J_A^{ki}}$ und ist nach der vorangegangenen Analyse invariant mit nur drei Freiheitsgraden. Der Beitrag dF_A dieses Teiles der totalen Ableitung zum totalen Differential ist gleich dem Beitrag einer Drehung zu $d\vec{F}$, nämlich gleich $\vec{J} \times \Delta\vec{x}$ mit $\vec{J} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{F}$. D.h. die zugehörige Änderung des Feldes hat eine einfache geometrische Interpretation, wie in der Figur dargestellt.



Die Konstruktion wandelt das " $..+\Delta\vec{x}$ " in der von-Klammer von \vec{F} um in eine geometrische elementare geometrische Bildung, für deren Ausführung man nur den in $\Delta\vec{x}$ festen Vektor $\text{rot}\vec{F}(\vec{x})$ und $\Delta\vec{x}$ selbst benötigt.

In Kap 14 geben wir eine weitere inhaltlich Interpretation der Rotation mit Hilfe von Integralen.

(2.4.27) **Die Berechnung der Rotation** (mit Hilfe partieller Ableitungen) erfolgte hier für konstante Basisfelder. Die Ausdehnung auf nicht konstante besprechen wir weiter unten. Mit Hilfe der Eigenwerttheorie aus Kapitel 12 ist es leicht, auch dem symmetrischen Teil der Feldänderung eine geometrische Bedeutung zu geben.

Zusammenfassung: Der antisymmetrische Teil von $D\vec{F}$ ordnet dem gegebenen Vektorfeld \vec{F} ein weiteres Vektorfeld $\text{rot}\vec{F}$ zu, das wir in einem beliebigen kartesischen Rechtssystem mit Hilfe der partiellen Ableitungen bestimmen können.

Wie steht es mit den Argumenten in diesen Feldern? Es liegt ein Feld auf dem Konfigurationsraum vor, wir arbeiten ja noch nicht mit einer allgemeinen Parametrisierung. Überdies handelt es sich um einen Ableitungsoperator, so dass $(\text{rot}\vec{F})(\vec{x})$ korrekt ist. Vielfach wird daraus das bequeme, aber u.U. formal problematische $\text{rot}(\vec{F}(\vec{x}))$. So benutzen wir unten die verbreitete, obwohl problematische Schreibweise $\text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{x})$.

Was ist, wenn \vec{F} mit Hilfe einer Parametrisierung gegeben ist? $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}^P(\vec{\alpha}))$. Dann schreibt man im Sinne der Konventionen für Abbildungen gerne $\text{rot}\vec{F}(\vec{\alpha})$ anstelle des gemeinten, aber umständlichen $\text{rot}\vec{F}(\vec{x}^P(\vec{\alpha}))$.

(2.4.28) Zunächst ein **Beispiel einer direkten Berechnung einer Rotation:**

Sei $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\omega} \times \vec{x}$ das Geschwindigkeitsfeld einer Starrkörperdrehung. Wir führen kartesische Koordinaten ein und finden

$$\left(\vec{f}(\vec{x})\right)^K = \vec{\omega}^K \times \vec{x}^K = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 z - w_3 y \\ w_3 x - w_1 z \\ w_1 y - w_2 x \end{pmatrix}$$

Das gibt eine (konstante) Funktionalmatrix, die bereits antisymmetrisch ist:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} = J_A$$

Mit den obigen Definitionen folgt für \vec{J} und für das totale Differential

$$\vec{J}^K = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad dF_A = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \begin{pmatrix} -w_3 \Delta x_2 + w_2 \Delta x_3 \\ w_3 \Delta x_1 - w_1 \Delta x_3 \\ -w_2 \Delta x_1 + w_1 \Delta x_3 \end{pmatrix} = \vec{J} \times \Delta \vec{x}.$$

Oder auch

$$\text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{x}) = 2\vec{\omega}.$$

(2.4.29) Es ist günstig und üblich, die Berechnung der Rotation in kartesischen Koordinaten mit Hilfe des in **kartesischen** Koordinaten invarianten Differentialoperators $\vec{\nabla} = \Sigma \vec{e}_i \partial_i$ zu schreiben. (Gesprochen "Nabla", nach einem phönizischen Saiteninstrument.) Offensichtlich lassen sich die für konstante kartesische Rechtsbasen geltenden Formeln für \vec{J} wie folgt darstellen:

$$\text{rot} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \partial_k F_l(\vec{x}^K)$$

(2.4.30) Die Rotation ist eine Konstruktion, die aus einem gegebenem Vektorfeld ein weiteres Vektorfeld macht, das sich für jedes kartesische Rechtssystem in der hergeleiteten Weise mit Hilfe des Differentialoperators $\vec{\nabla}$ berechnet.

$$\text{Vektorfeld } \vec{F} \quad \xrightarrow{\text{rot}} \quad \text{Vektorfeld } \text{rot} \vec{F}$$

(2.4.31) Für eine **Bestimmung der Rotation eines Feldes** haben wir wie üblich mehrere Optionen:

- Direkt über die äußere Ableitung und deren Antisymmetrisierung und das heißt letztlich über die Formel aus (2.4.29).
- Durch Anwendung zur Rotation gehöriger Ableitungsregeln auf das jeweilige Feld
- Mit Hilfe des Indexkalküls

Der Beweis der Ableitungsregeln erfolgt günstig mit Hilfe des Indexkalküls. Sie finden sich in den üblichen Formelsammlungen.

□ Sei s Skalarfeld und \vec{F} ein Vektorfeld. Welche Ableitungsregel erwarten Sie für $\text{rot}(s\vec{F})$?

Nochmals eine **Bemerkung zur Bezeichnung**: Im Zusammenhang mit den drei Operatoren der Vektoranalysis Gradient, Rotation und Divergenz sind die Konventionen aus Kap. 11.1.2 zur Abbildungsbezeichnung nützlich und ihre Anwendung verbreitet. Der jeweilige Kontext entscheidet, was mit $\text{rot} \vec{F}(\vec{x})$ gemeint ist: (\vec{x}) oder (\vec{x}^K) oder oder gar $(\vec{x}^P(\vec{\alpha}))$.

(2.4.32) Mit Hilfe des $\vec{\nabla}$ -Operators und des Indexkalküls lassen sich die Ableitungsregeln für die Rotation routinemäßig herleiten. Rechnen wir zunächst obiges Beispiel (mit konstantem $\vec{\omega}$)

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{x}) &= \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \partial_k (\vec{\omega} \times \vec{x})_l = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{lrs} \partial_k \omega_r x_s = \Sigma \vec{e}_i (\delta_{ir} \delta_{ks} - \delta_{is} \delta_{rk}) \omega_r \partial_k x_s \\ &= \Sigma \vec{e}_i (\delta_{ir} \delta_{ks} - \delta_{is} \delta_{rk}) \omega_r \delta_{ks} = \Sigma \vec{e}_i \omega_i \mathbf{3} - \Sigma \vec{e}_i \omega_i = 2\vec{\omega}. \end{aligned}$$

Also das alte Resultat. (Benutzt wurde $\Sigma_l \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{lrs} = \delta_{ir} \delta_{ks} - \delta_{is} \delta_{rk}$ und $\Sigma_k \delta_{kk} = 3$ sowie die übliche Regel $\Sigma_j \delta_{rj} M_{js} = M_{rs}$.)

(2.4.32a) Und jetzt einige Beispiele für die Herleitung von Ableitungsregeln. Dabei sei e immer kartesische Rechtsbasis!

- s Skalarfeld und \vec{F} Vektorfeld. Zu berechnen ist $\text{rot}(s\vec{F})$.

$$\begin{aligned} \text{rot}(s\vec{F}) &= \vec{\nabla} \times (s\vec{F}) = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \partial_k (sF_l) = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} ((\partial_k s)F_l + s\partial_k F_l) \\ &\quad \text{(Produktregel!)} \\ &= \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} (\partial_k s)F_l + s \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \partial_k F_l = (\text{grad}s) \times \vec{F} + s \text{rot} \vec{F} \end{aligned}$$

$$\text{rot}(s\vec{F})(\vec{x}) = (\text{grad}s)(\vec{x}) \times \vec{F}(\vec{x}) + s(\vec{x}) (\text{rot} \vec{F})(\vec{x})$$

Haben Sie das oben so erraten?

- \vec{F} und \vec{G} zwei Vektorfelder. Zu berechnen $\text{rot}(\vec{F} \times \vec{G})(\vec{x})$.

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) &= \vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ijkl} \partial_k (\vec{F} \times \vec{G})_l = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ijkl} \partial_k \varepsilon_{lrst} F_r G_s \\
&= \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{lrst} ((\partial_k F_r) G_s + F_r (\partial_k G_s)) = \Sigma \vec{e}_i (\delta_{ir} \delta_{ks} - \delta_{is} \delta_{kr}) ((\partial_k F_r) G_s + F_r (\partial_k G_s)) \\
&= \Sigma \vec{e}_i ((\partial_k F_i) G_k + F_i (\partial_k G_k)) - \Sigma \vec{e}_i ((\partial_k F_k) G_i - F_k (\partial_k G_i)) \\
&= (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} + \vec{F} (\text{div} \vec{G}) - \vec{G} (\text{div} \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}
\end{aligned}$$

- Gehen Sie in einer Formelsammlung die Ableitungsregeln für rot durch. Können Sie die gezielt "erraten"? Beweisen Sie einige weitere oder alle.

11.2.4d Die äußere Ableitung in der äußeren Algebra Rotation (2)

(2.4.33) Wir gehen jetzt der Frage nach, wie man die Rotation erhält, wenn das Basisfeld nicht konstant ist. Und allgemeiner, wie der antisymmetrische Teil der totalen Ableitung für $\dim V_0 \neq 3$ zu interpretieren ist. Bei der Definition der Rotation über das Kreuzprodukt ging die Dreidimensionalität ja entscheidend ein.

(2.4.34) Oben haben wir gesehen, dass man allgemein die antisymmetrischen Tensoren aus $V \otimes V$ mit dem Raum der Zweivektoren identifizieren kann: $a \wedge b \mapsto a \otimes_A b$. Für den antisymmetrischen Teil der äußeren Ableitung gibt das die Darstellung

$$\begin{aligned}
DF_A(x) &= \Sigma_{ik} a^i \otimes_A a^k J_{ik}^A = 2 \Sigma_{i < k} a_i \otimes_A a_k J_{ik}^A \\
\text{wobei } J_{ik}^A &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \alpha^k} - \frac{\partial F_k}{\partial \alpha^i} \right) = \frac{1}{2} (\partial_k F_i - \partial_i F_k)
\end{aligned}$$

Das Feld muss hier bezüglich der reziproken Basis dargestellt werden - $\boxed{F = \Sigma a^i F_i}$ - um die für unsere Konstruktion erforderlichen (dopelt kovarianten) Matrixelemente J_{ik} zu erhalten. ($V_0 \otimes V_0^*$ läßt sich nicht antisymmetrisieren!) Die partiellen Ableitungen ∂ verlangen einen unteren Index, nach dem sich der Rest zu richten hat. Denken Sie daran, dass A hier als Index für *antisymmetrisch* steht, nicht für *alt*.

(2.4.35) Übergang zur äußeren Algebra gibt die Darstellung

$$DF_A(\vec{x}) = 2 \Sigma_{i < k} a^i \wedge a^k J_{ik}^A = \Sigma_{i,k} a^i \wedge a^k J_{ik}^A.$$

(14) Das ist das, was wir oben für konstante Basisfelder behandelt haben. Jetzt sei $\vec{\alpha} \mapsto \vec{x}_P(\vec{\alpha})$ eine Konfigurationsraumparametrisierung und $\vec{\partial}$ das zugehörige Koordinatenbasisfeld. Die Basisdarstellungen laufen über dieses Feld.

(2.4.36) Dazu bilden wir den (auf den ersten Blick sonderbar wirkenden) Differentialoperator

$$\boxed{\vec{\nabla} = \Sigma \vec{\partial}^i \partial_i = \Sigma \vec{\partial}^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i}},$$

den wir im Sinne der äußeren Algebra als formales **1-Vektorfeld** interpretieren. $\dim V_0 = n$ ist nicht auf 3 beschränkt. Die Ableitung soll wie üblich auf alles wirken, das rechts von diesem Operator steht, es sei denn, das würde durch Beklammerung unterbunden.

- Was ergibt sich im Falle eines kartesischen Basisfeldes für $\vec{\nabla}$?

(2.4.37) Sei s ein glattes Skalarfeld, also im Sinne der äußeren Algebra ein Nullvektorfeld. Dann ist $\vec{\nabla} \wedge s$ ein 1-Vektorfeld mit $\vec{\nabla} \wedge s = \Sigma \vec{\partial}^i (\partial_i s)$, d.h. wir erhalten den Gradienten gleich in seiner allgemeinsten Darstellung (1.6.42).

(2.4.38) Weiter sei $\vec{F} = \Sigma \vec{\partial}^r F_r$ ein 1-Vektorfeld erneut in der Basisdarstellung mit **kovarianten** Komponenten. Jetzt bilden wir das Dachprodukt

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge \vec{F} &= \left(\Sigma \vec{\partial}^i \partial_i \right) \wedge \Sigma \vec{\partial}^r F_r = \Sigma \vec{\partial}^i \wedge (\partial_i \vec{\partial}^r) F_r + \Sigma \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r (\partial_i F_r) \\
&= \Sigma \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^m \Gamma_{im}^r F_r + \Sigma \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r (\partial_i F_r) \\
&= 0 + \Sigma_{r > i} \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r (\partial_i F_r - \partial_r F_i) = 2 \Sigma_{r > i} \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r \frac{1}{2} (\partial_i F_r - \partial_r F_i) \\
&= -\Sigma_{ir} \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r J_{ir}^A = -D\vec{F}_A \quad \text{wie oben eingeführt.}
\end{aligned}$$

Der über die Produktregel folgende Beitrag nach (1.4.18)

$$\Sigma \vec{\partial}^i \wedge (\partial_i \vec{\partial}^r) = \Sigma \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^m \Gamma_{im}^r = \Sigma_{m>i} \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^m (\Gamma_{im}^r - \Gamma_{mi}^r)$$

ergibt Null wegen der in (1.4.15) bewiesenen Symmetrie der Γ -s.

(2.4.39) Und das heißt, dass die **hergeleiteten Formeln für den antisymmetrischen Teil des totalen Differentials auch für nicht konstante Koordinatenbasisfelder gelten**, sofern nur die angegebene Indexstellung eingehalten wird. Und überdies gilt das alles für jede endliche Dimension. Anwenden von $\vec{\nabla}$ auf ein 1-Vektorfeld ergibt ein Zweivektorfeld, das in der beschriebenen Weise den antisymmetrischen Teil des totalen Differentials bestimmt. Aber bereits für $n=4$ läßt sich $\vec{\nabla} \wedge F$ nicht wieder als Vektorfeld interpretieren!

(2.4.40) Was ergibt sich im Falle $n=\dim V_0 = 3$? In diesem Fall können wir wie folgt weiterrechnen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} &= \Sigma_{r>i} \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r (\partial_i F_r - \partial_r F_i) \\ &= \vec{\partial}^1 \wedge \vec{\partial}^2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial \alpha^1} - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha^2} \right) + \vec{\partial}^1 \wedge \vec{\partial}^3 \left(\frac{\partial F_3}{\partial \alpha^1} - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha^3} \right) + \vec{\partial}^2 \wedge \vec{\partial}^3 \left(\frac{\partial F_3}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial F_2}{\partial \alpha^3} \right) \end{aligned}$$

Mit Hilfe des *-Operators aus Kap. 9.2.11 wird daraus wieder ein 1-Vektorfeld, das unsere oben in (2.4.26) für kartesische Koordinaten eingeführte Rotation ist!

$$\boxed{* \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F} \right) (\vec{\alpha}) = \text{rot}(\vec{F}(\vec{x}))(\vec{\alpha})}$$

Jetzt allerdings haben wir die Koordinatendarstellung für beliebige Koordinatenbasisfelder.

(2.4.41) **Beispiel in Zylinderkoordinaten.** Wir haben $\vec{\partial}_\varphi = r \vec{e}_\varphi$. Also $\vec{\partial}^\varphi = \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r^2} \vec{\partial}_\varphi$. Sei nun $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{\omega} \times \vec{x} = \vec{\partial}_\varphi(r, \varphi, z) \omega = \vec{\partial}^\varphi(r, \varphi, z) r^2 \omega$. Also ist $\vec{F}^Z(r, \varphi, z) = \vec{\partial}^r 0 + \vec{\partial}^\varphi(r^2 \omega) + \vec{\partial}^z 0$ die benötigte Basisdarstellung. Das gibt nur eine nicht verschwindende partielle Ableitung $\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} = 2r\omega$. Somit folgt erwartungsgemäß

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F}(r, \varphi, z) = \vec{\partial}^r \wedge \vec{\partial}^\varphi (2r\omega) = +\vec{e}_r \wedge \left(\frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \right) 2r\omega = 2\vec{\omega} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi.$$

$$\boxed{\text{rot} \vec{F}(\vec{x}) = 2\vec{\omega}}$$

11.2.4e Die Divergenz

(2.4.42) Sei jetzt H ein $(n-1)$ -Vektorfeld. Also $H = \Sigma_{k=1}^n \vec{\partial}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\vec{\partial}^k} \wedge \dots \wedge \vec{\partial}^n H_k$. Erneut bilden wir $\vec{\nabla} \wedge H$. Das ist dann ein n -Vektorfeld, proportional zu $\vec{\partial}^n \wedge \dots \wedge \vec{\partial}^n$. Hierfür finden wir sofort:

$$\vec{\nabla} \wedge H = \vec{\partial}^n \wedge \dots \wedge \vec{\partial}^n \left(\Sigma_{k=1}^n (-1)^{k+1} \partial_k H_k \right).$$

Wie in (2.4.38) fallen alle Beiträge aus Ableitungen der $\vec{\partial}^i$ heraus.

(2.4.42) Wir beschränken uns auf den Fall $n=3$. Dann folgt mit $H = \vec{\partial}_1 \wedge \vec{\partial}_2 H_{12} + \vec{\partial}_1 \wedge \vec{\partial}_3 H_{13} + \vec{\partial}_2 \wedge \vec{\partial}_3 H_{23}$ sofort

$$\vec{\nabla} \wedge H = \vec{\partial}^1 \wedge \vec{\partial}^2 \wedge \vec{\partial}^3 (\partial_3 H_{12} - \partial_2 H_{13} + \partial_1 H_{23})$$

(2.4.43) Ist die Basis ein konstantes kartesisches Basisfeld, dann setzen wir wie üblich

$$H_1 = H_{23} \quad H_2 = -H_{13} \quad \text{und} \quad H_3 = H_{12}.$$

$$\boxed{\vec{H} = *H}$$

Also

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge H &= \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 (\Sigma \partial_i H_i) = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \cdot \text{div} \vec{H}. \\ \text{div} \vec{H} &= \Sigma \partial_i H_i \end{aligned}$$

Oder auch

$$\operatorname{div} \vec{H} = * \vec{\nabla} \wedge (* \vec{H}).$$

So konstruiert ist die Divergenz ein Operator, der aus dem Vektorfeld \vec{H} ein Skalarfeld $\operatorname{div} \vec{v}$ macht.

$$\vec{v} \xrightarrow{\operatorname{div}} \operatorname{div} \vec{v}$$

(2.4.44) Auf die Frage nach der Berechnung der Divergenz in allgemeinen Koordinaten werden wir später in Kap 14 zurückkommen. Im Augenblick behandeln wir unten die Frage der inhaltlichen Interpretation der Divergenz.

- Wir haben die Formel $\operatorname{div} \vec{H} = \sum \partial_i H_i$ für eine kartesische Darstellung $\vec{H} = \sum \vec{e}_i H_i$ hergeleitet. Also in tensorieller Schreibweise $\vec{H} = \sum \vec{e}_i H^i$. Jetzt sei \vec{a} ein konstantes, aber sonst beliebiges Basisfeld mit $\vec{H} = \sum \vec{a}_i H_a^i$. Zeigen Sie, dass dann immer noch gilt $\operatorname{div} \vec{H} = \sum \partial_i H_a^i$. Was ist dabei unter ∂_i zu verstehen?
- Leiten Sie durch Berechnung von $\vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b})$ eine Formel für $\sum \vec{e}_i a_k \partial_i b_k$ her. und bestimmen Sie damit wiederum eine Ableitungsformel für $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(2.4.45) Beispiel: Wir berechnen die Divergenz von $\vec{F}(x) = \vec{x} r^{-3-\alpha}$ einmal kartesisch und einmal polar (für den V_0^3).

- Beweisen Sie mit Indexrechnung die Ableitungsregel $\operatorname{div}(s\vec{v}) = s \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{grad} s \cdot \vec{v}$ und $\operatorname{div}(\vec{x}) = 3$.
Mit den Resultaten der Frage folgt die Divergenz auf die übliche Weise zu:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) &= 3r^{-3-\alpha} + \vec{x} \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r} (-3-\alpha) r^{-4-\alpha} \right) = r^{-3-\alpha} [3 - 3 - \alpha] = -\alpha r^{-3-\alpha} \\ \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) &= -\alpha r^{-3-\alpha} \quad \text{für } \vec{x} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Insbesondere verschwindet für $\alpha = 0$ die Divergenz außerhalb des Ursprungs.

Polar haben wir die Basen

$$\vec{\partial}_r = \vec{e}_r = \vec{\partial}^r \quad \vec{\partial}_\theta = r \vec{e}_\theta \quad \vec{\partial}^\theta = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \quad \vec{\partial}_\varphi = r \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad \vec{\partial}^\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi$$

Damit folgt für das Feld und dann die Divergenz

$$\begin{aligned} \vec{F}^P(r, \theta, \varphi) &= \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi r^{-2-\alpha} = \vec{\partial}^\theta \wedge \vec{\partial}^\varphi (r^2 \sin \theta) \frac{1}{r^{2+\alpha}} = \vec{\partial}^\theta \wedge \vec{\partial}^\varphi r^{-\alpha} \sin \theta. \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{F}^P &= \vec{\partial}^r \wedge \vec{\partial}^\theta \wedge \vec{\partial}^\varphi (-\alpha) r^{-\alpha-1} \sin \theta = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi \frac{1}{r^2 \sin \theta} (-\alpha) r^{-\alpha-1} \sin \theta \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{F}^P &= \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi \boxed{(-\alpha) r^{-\alpha-3}} \end{aligned}$$

Man kann hier nicht sagen, dass eine Rechnung deutlich kürzer als die andere wäre. In der Regel wird man die kartesische Rechnung bevorzugen. Aber das Beispiel zeigt, wie man dasselbe Resultat für ein beliebiges Koordinatenbasisfeld erhält.

- Was bedeutet das Resultat $\operatorname{div}(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^{3+\alpha}}) = (-\alpha) |\vec{x}|^{-\alpha-3}$ im Rahmen der Maxwell'schen Gleichungen für die Elektrodynamik? Einheitenkontrolle!

Beachten Sie: Für $\alpha = 0$ erhält man außerhalb des Ursprungs eine verschwindende Divergenz! Vergleichen Sie das mit der in Kap.6.1.1c diskutierten Eigenschaft des Coulombfeldes! Was bedeutet eine nicht verschwindende Divergenz ($\alpha \neq 0$) für das dort besprochene Modell? (Das α aus Kap.6,1,1c hat nichts mit unserem jetzigen α zu tun!)

Die inhaltliche Interpretation der Divergenz

(2.4.46) Sei dazu $(V, \vec{x} \mapsto \vec{v}(\vec{x}), V)$ ein Vektorfeld, das wir als momentanes (stationäres) **Geschwindigkeitsfeld** interpretieren. Also wieder das Modell aus Kap.6.1.1c. Darin spezifizieren wir zur Zeit $t=0$ einen kleinen Spat mit Eckpunkten $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$. Diese Punkte sollen von der Strömung mitgenommen werden. Die Kantenvektoren sind $\vec{k}_i = \vec{x}_i - \vec{x}_0$. Nach einer Zeit Δt haben die Eckpunkte die Lage $\vec{x}_i(0 + \Delta t)$, wenn $t \mapsto \vec{x}_i(t)$ die

Lösung der Differentialgleichung $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}(\vec{x}(t))$ mit Anfangswert $\vec{x}_i(0) = \vec{x}_i$ ist. In Tangentenapproximation erhalten wir für die neuen, von der Strömung mitgeführten Kantenvektoren $\vec{k}_i(0 + \Delta t)$:

$$\begin{aligned} \vec{k}_i(\Delta t) &= \vec{x}_i(\Delta t) - \vec{x}_0(\Delta t) \\ &= (\vec{x}_i - \vec{x}_0) + (\vec{v}(\vec{x}_i) - \vec{v}(\vec{x}_0))\Delta t + \dots \\ &= \vec{k}_i + (\vec{v}(\vec{x}_0 + \vec{k}_i) - \vec{v}(\vec{x}_0))\Delta t + \dots \\ &= \vec{k}_i + D\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \vec{k}_i \Delta t + \dots \\ &= \vec{k}_i + \sum \vec{k}_j (\vec{k}^j \cdot D\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \vec{k}_i) \Delta t \end{aligned}$$

(2.4.47) Der Spat besitzt ein zeitabhängiges Volumen $\text{Vol}(\Delta t)$. Uns interessiert die Volumenänderung mit der Zeit, also $\text{Vol}(\Delta t) - \text{Vol}(0)$. Eine zur Beschreibung geeignete Größe ist die Volumenänderungsgeschwindigkeit, also die Größe $\frac{\text{Vol}(\Delta t) - \text{Vol}(0)}{\Delta t}$. Und schließlich, um die Volumengröße zu eliminieren, bilden wir ($\text{Vol}(0) \neq 0$) die relative momentane Volumensänderungsgeschwindigkeit, also $\boxed{\frac{\text{Vol}(\Delta t) - \text{Vol}(0)}{\text{Vol}(0) \cdot \Delta t}}$. Diese Größe möchten wir bestimmen.

(2.4.48) Dazu berechnen wir das Dachprodukt der Kantenvektoren $\vec{k}_1(\Delta t) \wedge \dots \wedge \vec{k}_n(\Delta t)$ und entwickeln nach Potenzen von Δt .

$$\vec{k}_1(\Delta t) \wedge \vec{k}_2(\Delta t) \wedge \dots \wedge \vec{k}_n(\Delta t) = \vec{k}_1 \wedge \dots \wedge \vec{k}_n + \Delta t \vec{k}_1 \wedge \dots \wedge \vec{k}_n \left(\sum_{j=1}^n \vec{k}^j \cdot D\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \vec{k}_j \right) + \dots$$

Nach den Regeln der äußeren Algebra ist $\vec{k}_1(\Delta t) \wedge \dots \wedge \vec{k}_n(\Delta t) = \text{vol}(\Delta t) \vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{e}_n$ wobei e eine euklidische Basis ist. Das gibt

$$\frac{\text{Vol}(\Delta t) - \text{Vol}(0)}{\Delta t \cdot \text{Vol}(0)} = \sum_{j=1}^n \vec{k}^j \cdot D\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \vec{k}_j + \dots$$

Nun ist für ein konstantes Basisfeld \vec{k}_i aber $D\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{k}_j = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x^i} \cdot \vec{k}_j = \sum \vec{k}_j \frac{\partial v^j}{\partial x^i}$ und daher $\vec{k}^j \cdot D\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \vec{k}_j = \frac{\partial v^j}{\partial x^j}$. Damit folgt:

$$\boxed{\frac{\text{Vol}(\Delta t) - \text{Vol}(0)}{\Delta t \cdot \text{Vol}(0)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v^j}{\partial x^j} = \sum J^j_j = \text{Spur}(D\vec{v}) = \text{div}(\vec{v})}$$

(2.4.49) Ergebnis: Die Divergenz eines Vektorfeldes ist gleich der *relativen Änderungsgeschwindigkeit des Volumens von kleinen von der Strömung mitgenommenen Körpern*. Das ist eine charakteristische Größe des Feldes, die in Tangentenapproximation nicht vom Spat abhängt, sondern eine Funktion des Ortes \vec{x} ist.

Auch für die Divergenz geben wir in Kap. 14 eine weitere inhaltliche Interpretation mit Hilfe eines Integralsatzes.

(2.4.49) **Beispiel:** Wir betrachten die lineare Differentialgleichung $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ und schreiben sie in der Phasenraumform:

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(x) \\ -p(x)v(x) - q(x)y(x) \end{pmatrix} \quad \text{Feld:} \quad \vec{F}(y, v) = \begin{pmatrix} v \\ -p(x)v - q(x)y \end{pmatrix}$$

Das ergibt die Divergenz $\text{div} \vec{F}(x, v) = -p(x)$. Und damit $\frac{d}{dt} \frac{\text{Vol}(x(t))}{\text{Vol}(x(t))} = -p(x(t))$. Das ist eine einfache separable Differentialgleichung mit der Lösung

$$\text{Vol}(t) = \text{Vol}(0) e^{-\int_0^t ds p(s)}$$

Nimmt man andererseits an, man hätte zwei unabhängige Lösungen y_1 und y_2 , dann kann man die zugehörigen Phasenraumkurven $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$ bilden. Jetzt beschreibt $t \mapsto \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = W(t)$ den Flächeninhalt $F(t)$ des von den beiden Vektoren im Phasenraum aufgespannten Parallelogramms in zeitlicher Abhängigkeit! Man zeigt leicht, dass $W(t)$ die Differentialgleichung $\dot{W}(t) = -p(t)W(t)$ erfüllt, also dieselbe Differentialgleichung, die aus der Divergenz folgte. Oder auch: $-p(t)$ ist in diesem Fall gleich der relativen Flächenänderungsgeschwindigkeit von im Phasenraum (auf den Phasenraumkurven) mitbewegten Figuren.

Zur Herleitung der Formel: $W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$. Bilde $\frac{d}{dt}W(t)$ und beachte, dass y_1 und y_2 Lösungen der Differentialgleichung sind. Damit die 2. Ableitungen in $\frac{d}{dt}W(t)$ eliminieren.

□ Was liefert das hergeleitete allgemeine REsultat für den Spezialfall des harmonischen Oszillators?

11.2.5 Isotrope Tensoren und Hooksches Gesetz

(2.5.1) Auf unserer Suche nach invarianten Teilmengen tensorieller Räume kommen wir zu einem besonders einfachem Fall:

Tensoren, die unter den Operationen der Transformationsgruppe stationär sind, also eine **einelementige Bahn** haben, heißen *isotrope Tensoren*. Sie sind für den Bau von Formeln, mit deren Hilfe man Gesetzmäßigkeiten beschreiben will, dann von besonderer Bedeutung, wenn man Argumente dafür hat, dass Beschreibungsgrößen nicht von der Wahl des Beobachters abhängen dürfen. **Bei isotropen Tensoren kann man die neuen Komponenten nicht nur wie sonst mit Hilfe der alten ausrechnen, sondern die neuen sind einfach gleich den alten!**

(2.5.2) Oder vom aktiven Standpunkt aus: Man transformiert das System und hat Argumente, dass gewisse Beobachtungsergebnisse sich unter dieser Transformation nicht ändern sollten. Für einkomponentige Resultate, also für Skalare im Sinne des Physikers, ist das klar. Aber wie steht es, wenn die Beobachtungsergebnisse zu einem mehrkomponentigen Tupel gehören? Sagen wir, wenn es um die Komponentenbeschreibung einer linearen Abbildung geht?

Konkret: Wir betrachten einen elastischen Körper im deformierten Zustand an einem bestimmten Punkt x . Wir beschreiben den Zustand mit Hilfe der Komponenten zweier Tensoren, des Spannungstensors $\sigma(x)$ und des Deformationstensors $\varepsilon(x)$. Zur Beschreibung wählen wir eine Orthonormalbasis e_i des V_0^3 . Dann bilden die Komponenten je eine symmetrische Matrix und (σ_e^{ik}) und (ε_e^{ik}) . Diese Matrizen repräsentieren die (etwas aufwendig codierten) Beobachtungsdaten des Systemzustandes. Zwischen diesen Daten sollte (bei ausreichender Idealisierung) eine deterministische Beziehung bestehen: Die Spannungen legen die Deformationen fest oder umgekehrt. Für kleine Deformationen sollte Tangentenapproximation ausreichen. Der konstante Term ist Null, da für die üblichen Systeme ohne Spannung keine Deformation vorhanden ist. Also sollte σ linear von ε abhängen. **Das ist das Hooksche Gesetz!** Erfahrungsgemäß ist diese Approximation über einen größeren praktisch relevanten Bereich gültig.

(2.5.3) Für die Komponenten bedeutet das $\sigma_e^{ik}(x) = \sum H_{e..rs}^{ik} \varepsilon_e^{rs}(x)$. Dabei ist H die beschreibende Matrix (bezüglich der gewählten Basis e). Die Indexmenge besteht aus den Paaren (ik) . e erinnert an die gewählte kartesische Basis. Mit Hilfe der Tensorrechnung erhalten wir für H sofort die folgende absolute Darstellung

$$H = \sum e_i \otimes e_k H_{e..rs}^{ik} \otimes e^{*r} \otimes e^{*s}.$$

Dabei haben wir die Komponenten an die Stelle gebracht, die die zu kontrahierenden Basisvektoren von den nicht zu kontrahierenden trennt.

(2.5.4) Die Anzahl der Komponenten von H ist 36. Denn es gibt $3^4 = 81$ mögliche Indexkombinationen. Aber ε und σ sind beide symmetrisch. Beachtet man das, bleiben 36 unabhängig Komponenten. (Eine 6×6 -Matrix)

(2.5.5) **Und jetzt das entscheidenden Argument:** Im undeforinierten elastischen Material gebe es keine Vorzugsrichtung. Alle Richtungen seien gleichwertig, der Physiker sagt dazu gerne *isotrop*. Beachten Sie: in einem Kristall ist das sicher nicht der Fall. Wenn wir jetzt einen Basiswechsel vornehmen und aktiv oder passiv transformieren, dann sollten sich die Komponenten von H nicht ändern, zumindest nicht so, dass man die beiden Systeme physikalisch unterscheiden könnte. Könnte man das doch, könnte man darüber besonders ausgezeichnete Richtungen konstruieren.

Also sollte H bezüglich der neuen Basis f dieselben Komponenten haben wie bezüglich der alten Basis e ! Oder $H_{e..rs}^{ik} = H_{f..rs}^{ik}$. Und das heißt, dass H im beschriebenen Sinne ein (für orthogonale Transformationen) isotroper Tensor sein sollte! Wir lassen daher den Index e fort.

(2.5.6) Damit stehen wir vor einem mathematischen Problem: Welche $SO(3)$ -isotrope Tensoren gibt es überhaupt? Die Antwort darauf wird eine bemerkenswerte Vereinfachung unserer Beschreibung bringen: Die Komponenten von H beschreiben offensichtlich die Materialeigenschaften des betrachteten Körpers (in Hinblick auf die Elastizität): Welche Deformation gehört zu einer gegebenen Spannung? Nach obiger Auszählung könnte es 36 derartige Konstanten (für jedes Material) geben. Das Isotropieargument reduziert diese Zahl auf 2. Und das Vorkommen von zwei Materialkonstanten beobachtet man tatsächlich, ebenso dass diese zur Beschreibung ausreichen. .

11.2.5a Die Konstruktion $SO(3)$ -isotroper Tensoren

(2.5.7) Wir betrachten nur $G = SO(3)$. Dann ist kovariant=kontravariant. Alle zulässigen Basen sind Orthonormalbasen. Wir verwenden Multiindexschreibweise. Sei T unser Tensor. von e nach f und $R = R_g$ die zugehörige Transformationsmatrix. Ist T isotrop, dann hat man $T = g \star T = \Sigma f_J T_J$ mit denselben Komponenten $RT = T$. Daraus folgt aber $T = \frac{1}{2}(T + g \star T)$.

(2.5.8) Das muss für jedes $g \in SO(3)$ gelten. Sei e alte Basis von V_0 . Ersetzen wir jetzt eine gerade Zahl der e_i durch ihr Negatives und lassen den Rest fest, so ergibt das eine spezielle orthogonale Transformation h . Diese Transformation können wir leicht auf jedes Tensorbasiselement e_J ausdehnen. Man erhält immer nur einen Vorfaktor $\varepsilon(h)$. Also $h \star e_J = \varepsilon(h)e_J$. Enthält e_J nun eine ungerade Zahl der invertierten Achsen, ist $\varepsilon_J(h) = -1$, sonst $+1$. Damit gehen wir in die Basisdarstellung der Gleichung $T = \frac{1}{2}(T + h \star T)$ ein und finden für unseren angenommenen isotropen Tensor T gerade $\Sigma e_J T_J = \frac{1}{2} \Sigma e_J (1 + \varepsilon_J(h)) T_J$. Koeffizientenvergleich gibt: **Für alle J mit $\varepsilon_J = -1$ ist notwendig $T_J = 0$.** Dabei darf h geeignet gewählt werden: Suche ein h , das dies leistet!

(2.5.9) Die Ausführung ist einfach. Angenommen wir betrachten $e_J = e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_2$. Invertiert werden sollen beispielsweise e_1 und e_2 . Also $f_1 = -e_1$ und $f_2 = -e_2$. Damit folgt $f_j = (-1)^3 e_J$. Und das heißt $T_J = 0$ für einen isotropen Tensor.

Das Argument ist offenbar sogar unabhängig von $\dim V_0 = n$, so dass wir folgern dürfen:

Folgerung. Es sei $T = \Sigma e_J T_J$ ein $SO(n)$ -isotroper Tensor, wobei e Orthonormalbasis ist. Sei h ein Gruppenelement, das eine gerade Zahl der e_i invertiert, den Rest festläßt. Dann sind alle Komponenten T_J Null, für die e_J eine ungerade Zahl der invertierten Basisvektoren enthält.

Ersetzt man $SO(n)$ durch $O(n)$, dann darf man auch eine ungerade Zahl von Basisvektoren invertieren

(2.5.10) 1. Beispiel: Sei $T \in V_0 \otimes V_0$ und $n > 2$. Dann ist $T_{ij} = 0$ für alle T_{ij} mit $i \neq j$. Denn zu i, j gibt es immer noch einen dritten Indexwert k mit $k \neq i, j$. Invertiere e_i und e_k . **Ungleich Null können höchstens noch die Diagonalelemente T_{ii} sein.**

2. Beispiel: $T \in V_0 \otimes V_0 \otimes V_0$ und wieder $n > 2$. Dann folgt sofort analog $T_{iii} = 0$ und ebenso $T_{iik} = 0$. Ungleich Null sind höchstens T_{ijk} mit drei verschiedenen Indizes.

3. Beispiel: $T \in V_0 \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V_0$ und $n = 3$. Der Tensor H des Hookschen Gesetzes fällt hierunter. Welche Komponenten verschwinden? Falls J drei verschiedene Indexwerte enthält, sagen wir $ijkk$, dann invertieren wir i und k . Wenn J zwei verschiedene Werte enthält davon einen nur einmal, etwa $ikkk$, dann invertiert man i und j . Es bleiben nur die Fälle, in denen **mindestens zwei Indexpaare denselben Wert haben**. Also für T_{ijkl} die Kombinationen $\delta_{ij}\delta_{kl}$ und $\delta_{ik}\delta_{jl}$ und $\delta_{il}\delta_{jk}$.

(2.5.11) Jetzt benötigen wir weitere Einschränkungen, die die nicht verschwindenden Komponenten miteinander verbinden. Der nächstefache Kandidat sind Drehungen von Koordinatenebenen um $\frac{\pi}{2}$. D.h. wir betrachten für $i \neq j$ Basiswechsel des Typs $f_i = e_j$ und $f_j = -e_i$. Die übrigen Basisvektoren von V_0 sollen fest bleiben. Hiermit gehen wir erneut in unsere Gleichung $T = \frac{1}{2}(T + h \star T)$ ein und nehmen Koeffizientenvergleich vor.

(2.5.12) Was folgt für unsere drei Beispiele?

1. Beispiel: Das gibt $T_{ii} = \frac{1}{2}(T_{ii} + (-1)^2 T_{jj})$. Also $T_{ii} = T_{jj}$. Die $SO(3)$ -isotropen Tensoren aus $V_0 \otimes V_0$ sind genau die Vielfachen der Einheit $\sum e_i \otimes e_i$.

2. Beispiel: Hier folgt $T_{ijk} = \frac{1}{2}(T_{ijk} - T_{jik})$. Also $T_{ijk} = -T_{jik}$. Entsprechend für alle weiteren Indexpaare. Ergebnis für $n = 3$ und $T \in V_0 \otimes V_0 \otimes V_0$ ist: $T_{ijk} = C \varepsilon_{ijk}$. Die Vielfachen des ε - *Tensors* sind die einzigen isotropen Tensoren dieses Typs. Die Isotropie dieses Tensors geht entscheidend in die Komponentendefinition des Kreuzproduktes ein. Läßt man $O(3)$ als Gruppe zu, gibt es keinen isotropen Tensor dieses Typs.

3. Beispiel: Hier folgt $T_{iikk} = \frac{1}{2} (T_{iikk} + (-1)^2 T_{kkii})$. Also $T_{iikk} = T_{kkii}$. Das liefert die Form $T_{ijkl} = C\delta_{ij}\delta_{kl}$. Die Isotropie dieses Tensors verifiziert man sofort. Analog die beiden anderen oben gefundenen Typen. Damit hat der allgemeinste SO(3)-isotrope Tensor aus $V_0 \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V_0$ die Form

$$T_{ijkl} = C\delta_{ij}\delta_{kl} + D\delta_{ik}\delta_{jl} + E\delta_{il}\delta_{jk}$$

Verlangt man zusätzlich, dass $T_{ijkl} = T_{jikl}$ gilt, dann folgt $D=E$ und man erhält einen Tensor mit nur zwei freien Konstanten

$$T_{ijkl} = C\delta_{ij}\delta_{kl} + D(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

(2.5.13) Damit sind wir in der Lage, die oben begonnene Argumentation zum elastischen Körper abzuschließen. Nochmals:

Das Material befinde sich am Orte x in dem durch $\varepsilon(x)$ beschriebenen Deformationszustand und dem durch $\sigma(x)$ beschriebenen Spannungszustand. Zwischen beiden besteht ein Zusammenhang, der in Tangentenapproximation linear ist. $\varepsilon(x) \mapsto H.\varepsilon(x) = \sigma(x)$. Diese lineare Abbildung darf im Raum keinerlei Richtung gegenüber den anderen auszeichnen und solange das Material (im entspannten Zustand) homogen ist, auch nicht vom Orte abhängen. Überdies sind ε und σ symmetrisch, woraus $H_{ijkl} = H_{jikl}$ folgt. Dann ist nach der vorangegangenen Analyse notwendig

$$H_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Dabei sind λ und μ zwei Materialkonstanten, die Lamé'sche Konstanten genannt werden. Damit ist die Zahl der zur Beschreibung der elementaren elastischen Eigenschaften eines Stoffes erforderlichen Konstanten von 36 auf zwei reduziert. Das entspricht voll der Erfahrung.

(2.5.14) Als Basis des Raumes der symmetrischen Tensoren wählen wir (in dieser Reihenfolge)

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{13}, a_{13}, a_{23} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = a_i \otimes_S a_j = \frac{1}{2} (a_i \otimes a_j + a_j \otimes a_i).$$

Wie sieht dann die beschreibende Matrix von H aus? Wir benötigen $H(e_K) = \sum a_J H_{J,K}$. Obige Formel für die H_{ijkl} liefert in selbsterklärender Notation

	11	22	33	12	13	23
11	$\lambda + 2\mu$	λ	λ	0	0	0
22	λ	$\lambda + 2\mu$	λ	0	0	0
33	λ	λ	$\lambda + 2\mu$	0	0	0
12	0	0	0	2μ		
13	0	0	0		2μ	
23	0	0	0			2μ

(2.5.15) Beispielsweise ist $H(e_{11}) = e_{11}\lambda + e_{22}\lambda + e_{33}\lambda + e_{11}\mu + e_{11}\nu$. Und für den allgemeinen Fall

$$\begin{aligned} H(e_{12}) &= \frac{1}{2}H(e_1 \otimes e_2) + \frac{1}{2}H(e_2 \otimes e_1) \\ &= \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2\mu + e_2 \otimes e_1\nu) + \frac{1}{2}(e_2 \otimes e_1\mu + e_1 \otimes e_2\nu) \\ &= e_1 \otimes_S e_2 (\mu + \nu) = e_{12}(\mu + \nu). \end{aligned}$$

Die angegebene Matrix hat folgende inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda} & -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & \frac{1}{\mu} \frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda} & -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & \frac{1}{\mu} \frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} \end{pmatrix}$$

Da nun $\boxed{-\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} + \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda}}$ gilt, existiert die zu H inverse Abbildung $H^{-1} : \sigma(x) \mapsto \varepsilon(x) = H^{-1} \cdot \sigma(x)$. Der zugehörige Tensor ist erwartungsgemäß erneut isotrop und hat die Form

$$H_{ijkl}^{-1} = \left(-\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \left(\frac{1}{4\mu} \right) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

(2.5.16) H^{-1} bestimmt daher zu einem gegebenen Spannungszustand die zugehörigen Deformation. Angenommen wir üben (nur) einen Druck σ_3 in 3-Richtung aus. Was resultiert? Zunächst einmal eine entsprechende Verzerrung der Größe $\varepsilon_3 = \frac{1}{\mu} \frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda} \sigma_3 = \frac{1}{E} \sigma_3$ in z-Richtung. Das drückt den Youngschen Elastizitätsmodul durch die beiden Laméschen Konstanten aus. $\boxed{E = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda}}$. Hinzu kommen Längenänderungen in den beiden dazu senkrechten Achsenrichtungen von der Größe $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} \sigma_3 = -\frac{q}{E} \sigma_3$. Oder $\boxed{q = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu+\lambda}}$. Umgekehrt hat man $\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{q+1}$ und $\lambda = \frac{Eq}{(q+1)(1-2q)}$.