4.4 Lineare Abbildungen: Allgemeine Eigenschaften und Quantifizierung.

4.4.0 Vorbemerkung und Übersicht

(4.0.1) Basen und lineare Abbildungen bilden **das** Handwerkszeug für die Arbeit mit Vektoren. Existenz und Struktur von Basen in endlichdimensionalen Vektorräumen sind im vorangegangenen Teil geklärt. Über die linearen Abbildungen brauchen wir noch weitere Kenntnisse. Insbesondere steht die Frage an: **Wie quantifiziert man lineare Abbildungen?** D.h. wie legt man eine bestimmte lineare Abbildung durch Zahlangaben fest, so wie man einen geometrischen Pfeil durch seine Koordinaten (in Form seines Koordinatenvektors) festlegt? Zumindest im endlichdimensionalen Fall. Der geistige Gehalt dieser Überlegungen ist nicht allzu groß, zumindest nicht vergleichbar mit dem der Analyse des Dimensionsbegriffs. Aber die praktische Bedeutung ist enorm.

(4.0.2) Zur Durchführung ist allerdings ein größerer formaler Aufwand erforderlich. Schreibt man nämlich die Rechnungen aus, so nehmen sie bald riesigen Umfang an. Es entsteht arbeitsaufwendige und unnötige Schreibarbeit. Man benötigt einen Formalismus, der unnötige Schreibarbeit beseitigt und zugleich das Wesentliche der Rechnungen herausarbeitet. Zwei Kalküle, die dies leisten, sind im Gebrauch. Der *Matrixkalkül* und der *Indexkalkül*. Besonders beim zweiten Kalkül sind bestimmte Konventionen und Regeln einzuhalten, damit der Indexkalkül seinen vollen Nutzen entfaltet. Das Anwendungsspektrum beider Kalküle ist breit. In vielen Fächern ist der Matrixkalkül gebräuchlich. Er ist jedoch weniger flexibel als der Indexkalkül und führt spätestens bei der Tensorrechnung zu Problemen, die der Indexkalkül problemos bewältigt.

(4.0.3) Studienanfänger haben vielfach Schwierigkeiten, sich schematisch - sagen wir ruhig **stur** - an solche Regeln und Konventionen zu halten, d.h. insbesondere sie sich zu merken. Darum sollte man sich gezielt um das Verstehen und Merken und Verwenden dieser Regeln bemühen.

(4.0.4) Vier größere Fragenkomplexe stehen im Zusammenhang mit dem genaueren Verständnis der linearen Abbildungen an:

1. Die quantitative Beschreibung linearer Abbildungen
2. Die allgemeinen Eigenschaften linearer Abbildungen, im Sinne der Eigenschaften von Räumen linearer Abbildungen
3. Die Strukturanalyse einzelner Homomorphismen
4. Die Beziehung zwischen Basiswechsel und linearen Abbildungen.

(4.0.5) Zunächst zu 1) und 2). Problem 1) beschäftigt sich mit der Frage: Wie kann man einen Homomorphismus durch Zahlangaben eindeutig festlegen, und wie viele solcher Zahlangaben braucht man? (So wie geometrische Vektoren durch Koordinatenvektoren quantifiziert wurden.) Die Beantwortung dieser Frage stellt den Zusammenhang zwischen Vektor- und Matrixrechnung her. Mit den gewonnenen Resultaten folgt dann 2). Zu Thema 3) haben wir bereits die Kenntnisse über Kern und Bild. Die zugehörige Analyse wird später in der Eigenwerttheorie in Kap. 12 fortgesetzt und vertieft. 4) folgt im Anschluß an 1) und 2). Kapitel 11 über das Transformationsverhalten physikalischer Größen wird die Behandlung vertiefen.

1) und 2) hängen eng miteinander zusammen. Die Entwicklung und Übung des Rechenkalküls koppeln wir an die Behandlung dieser beiden Fragen. Thema 4) ist für viele Anwendungen in der Physik wichtig. Das Teilkapitel 4.4.6 wird die zugehörigen Grundlagen bereitstellen.

(4.0.6) Zur Einstimmung sei nochmals an die Quantifizierung geometrischer Pfeile aus V_0^3 erinnert. Man wählt eine kartesische Basis $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Das legt ein kartesisches Koordinatensystem K fest. Die zugehörige Linearkombinationsabbildung $L_e : \mathbb{R}^3_K \to V_0^3$ ist ein Isomorphismus. Die Umkehrabbildung bezeichnen wir mit D_e. Sie stellt die geometrischen Pfeile als Zahltupel dar! Dem Ortsvektor wird der koordinatenvektor zugeordnet. Genauer: $D_e = (V_0^3, \vec{x} \mapsto \vec{x}^K, \mathbb{R}^3_K)$. **Analog dazu sollen jetzt lineare Abbildungen durch geeignete Zahltupel dargestellt werden.**

4.4.1 Der Matrixkalkül

(4.1.1) Allgemein akzeptierter Standard für quantitatives Rechnen mit vektoriellen Größen ist der Matrixkalkül. Auf ihn müssen wir unsere Quantifizierungen beziehen. **Genauer gesagt, müssen wir den Formalismus (zur Beschreibung linearer Abbildungen) so gestalten, dass die üblichen Matrixformeln für Komponententupel als Ergebnis herauskommen**. Das begründet viele Konventionen. Ausgangspunkt für beide Kalküle - Matrix- und Indexkalkül - ist die axiomatische Vektorrechnung. Der Indexkalkül erweist sich später als allgemeiner und wird vielfach in der Physik benötigt.

(4.1.2) Was ist eine Matrix? Wir setzen $\mathrm{I}_n = \{1, 2, ..., n\}$. Das ist die übliche $n-$elementige Indexmenge. Dann verstehen wir unter einer $m \times n-$Matrix mit Werten in der Menge K zunächst einmal eine Abbildung

$$M = (I_m \times I_n, (i,j) \mapsto M_{ij}, K) \quad \text{d.h.} \quad M \in \mathcal{F}(I_m \times I_n, K).$$

Beispiel einer $3 \times 4 - Matrix$ mit Werten in $\mathbb{Z}$ Beispiele für Komponenten: $M_{14} = 3,\ M_{31=-7},\quad M_{11} = 1$	$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ -7 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Die beste Veranschaulichung einer solchen Abbildung erfolgt vom Feldstandpunkt aus. Der Urbildraum repräsentiert $m \cdot n$ Feldpunkte, deren Lage von zwei unabhängigen Eigenschaften bestimmt wird. Die erste Eigenschaft wird durch den *Zeilenindex* $i \in I_m$ repräsentiert. Die zweite durch den *Spaltenindex* $j \in I_n$. Jeder Feldwert ist ein Element aus K. Und K ist im Prinzip eine beliebige Menge, im Augenblick unser Ring oder Körper. Den Feldwert an der Stelle (i, j) nennt man die $i-j-$te *Komponente von M.* **Merken Sie sich unbedingt:** Der erste (zu m gehörige) Index gibt die Zeilennummer, der zweite zu n gehörige die Spaltennummer.

> **Zusammenfassung:** Eine Matrix ist eine Familie von Elementen einer Menge X, deren Elemente durch zwei unabhängige Eigenschaften indiziert sind. Die erste Eigenschaft bestimmt die Zeilen, die zweite die Spalten der Matrix. Als Indexmenge wählt man üblich $I_m \times I_n$.
> Die Elemente selbst sind die Komponenten der Matrix
> Zutatenformel: **Eine $m \times n-$Matrix mit Werten in X**.

(4.1.4) Vektoren aus K^r sind Spezialfälle von Matrizen mit $m = r$ und $n = 1$. Aber auch ein Tupel $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_N)$ von Vektoren aus einem Vektorraum V ist als Matrix interpretierbar. Eine Basis von V ist somit eine V-wertige $1 \times n - Matrix$.

(4.1.5) Für K wählen wir jetzt den Vektorraum K^n. Dann ist nach der allgemeinen Methode der Wertemengenübertragung $\mathcal{F}(I_m \times I_n, V)$ ein Vektorraum über K. Die Verknüpfungen erfolgen komponentenweise, so als wäre eine Matrix nur ein etwas eigenartig geschriebenes Element von K^N mit $N = n \cdot m$. (Wählt man $K = R$ mit einem Ring R, liegt entsprechend ein Modul vor.) Nochmals: die Dimension dieses Raumes ist $n \cdot m$. Eine Basis erhält man bei Bedarf leicht durch die kanonische Basis des K^N . Alle Räume K^n schreiben wir als Linksräume, solange nichts Gegenteiliges gesagt wird.

(4.1.6) Ein Beispiel einer vektoriellen Rechnung mit einer Matrix:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} =$$
$$= (-4)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4.1a Die Abbildungsinterpretation einer Matrix

(4.1.7) Eine derartige Matrix definiert aber auch noch etwas anderes, nämlich eine Abbildung $K^n \to K^m$. Wir definieren den Wert - oder wenn man will das "Produkt" - $M(\vec{x}) = M\vec{x}$ nach der Regel *Zeile mal Spalte* :.

Das erzeugt eine Abbildung, die wir auch mit M bezeichnen wollen. Also

$M = (K^n, \vec{x} \mapsto M\vec{x}, K^m)$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y-1z \\ 4x+0y+1z \end{pmatrix}$

(4.1.8) Beachten Sie unbedingt die "vertauschte" Reihenfolge der beiden Zahlen m und n im Abbildungstripel. Die Urbildmenge gehört zu n!

(4.1.9) Wir werden unten zeigen, dass M **stets linear ist**. Meist identifiziert man Matrix und Matrixabbildung. Nochmals der wichtige Sachverhalt, dass eine Matrix je nach Situation in zwei Rollen auftreten kann:

- Als Abbildung $M : I_m \times I_n \to K$ vom Feldtyp, die der "Hausnummer" (i,j) den Feldwert M_{ij} zuordnet oder
- (sofern K Ring oder Körper) als als lineare Abbildung $M : K^n \to K^m$.

4.4.2 Der Indexkalkül.

(4.2.1) Für den Beweis, dass Matrixabbildungen linear sind, verbessern wir zunächst einmal unseren Formalismus durch Einführung des Indexkalküles. Diesem liegt das folgende Prinzip zugrunde:

(4.2.2)

Grundidee des Indexkalküls für Moduln und Vektorräume: ⧫ Alle Rechnungen mit Matrizen und Koordinatenvektoren sollen möglichst in Rechnungen für die Komponenten umgewandelt werden. Denn dann kommt man vollständig mit den Rechenregeln für Körper und Ringe aus. ⧫ Statt etwa mit dem Koordinatenvektor $\vec{x}^K = (x_j)$ zu rechnen, rechnet man mit der allgemeinen Koordinate x_i, wobei i als äußerer Parameter anzusehen ist. x_i ist ein reines Körper- oder Ringelement, also algebraisch ein Skalar. ⧫ Eine eigene spezifische Vektor- und Matrixrechnung wird so nicht benötigt.

(4.2.3) Das folgende Schema zeigt exemplarisch, wie man durch Umschreiben und Fortlassen von Information, die aus dem Kontext ersichtlich ist, vom allgemeinen Rechenausdruck einmal zur Matrixformulierung und einmal zur Indexformulierung gelangt. Als Ausgangspunkt wählen wir ein lineares Gleichungssgstem. Vgl. auch 4.(1.6.22).

$\vec{y} = M\vec{x}$	Matrixgleichung
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3 \\ M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + M_{23}x_3 \end{pmatrix}$
$\Longrightarrow$**Ausgangsform,** Start:	$y_1 = M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3$ $y_2 = M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + M_{23}x_3$
$(x_j)_{j=1,...n} \mapsto (y_i)_{i=1,..,m} = (\Sigma_{j=1}^n M_{ij}x_j)_{i=1,..,m}$	$n = 3$, $m = 2$, Familienschreibweise.
$y_i = \Sigma_{j=1}^n M_{ij}x_j$	**Indexschreibweise**

(4.2.4) Man sieht: Im Matrixformalismus werden die Komponenten zu neuen, hierarchisch höheren Gebilden, den Matrizen zusammengefaßt, für die man dann eigene Rechenregeln wie die der Matrixmultiplikation zu entwickeln hat, während man im Indexkalkül alles auf Körperelemente zurückführt, für die man ja bereits die Rechenregeln des Körpers hat und verwenden kann. Die Unterscheidung der Komponenten und die Zusammenfassung zu hierarchisch höheren Gebilden erfolgt über Indizes mit den Rollen von äußeren Parametern und Variablen.

(4.2.5) Wenn man aus dem Kontext weiß, welche Werte die einzelnen Indizes zu durchlaufen haben - und das sollte man sich zu Beginn einer Rechnung verdeutlichen - enthält die unterste Zeile des Schemas dieselbe Information wie die Ausgangszeile. Die unterste Zeile steht wegen des äußeren Parameters i für das gesamte Gleichungssystem. Alle Terme sind reine Körperterme, während oben in $M\vec{x}$ eine neue Multiplikation zur Termbildung erforderlich ist. Eine Erhöhung der Dimensionen vergrößert den Schreibaufwand in der Ausgangsformulierung stark, wogegen Matrix- und Indexformulierung praktisch unverändert bleiben. Der Summenzeichenformalismus aus Kap-1.2.15 wird beim Indexkalkül intensiv benutzt.

Die Beziehung zwischen den beiden Kalkülen stellen wir meist durch Gleichungen des Typs $\boxed{\vec{x} = (x_i)}$ her. Rechts wird ein Komponententupel gebildet und als Matrix interpretiert, die dann abgekürzt durch $\vec{x}$ bezeichnet wird. Läßt man die Tupelklammer fort, schreibt also x_i dann ist man im Indexkalkül, sofern man i als äußeren Parameter interpretiert!

4.4.2a Die Linearität der Matrixabbildung

(4.2.5) Als Anwendungsbeispiel beweisen wir mit Hilfe des Indexkalküls, dass die oben eingeführte Matrixabbildung M stets linear ist. Zu zeigen ist

$$? \qquad M(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w}) = \alpha M\vec{u} + \beta M\vec{w} \qquad ?$$

Links führen wir die Bezeichnungen für auftretende Tupel ein, rechts führen wir die Rechnung für die Komponenten aus.

$\vec{y} = M(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w})$	$y_i = \Sigma_j M_{ij}(\alpha u_j + \beta w_j)$
mit $\vec{u} = (u_i)$ und $\vec{w} = (w_i)$	$= \Sigma_j(\alpha M_{ij}u_j + \beta M_{ij}w_j)$
$\vec{y} = M(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w})$	$= \alpha\Sigma_j M_{ij}u_j + \beta\Sigma_j M_{ij}w_j)$
$\alpha\vec{u} + \beta\vec{w} = (\alpha u_i + \beta w_i)$	$= s_i + t_i$
$\vec{s} = (s_i) = \alpha M\vec{u}$ und $\vec{t} = (t_i) = \beta M\vec{w}$	für $i = 1, .., n$

Rechts ist offensichtlich $\vec{y} = \vec{s} + \vec{t}$ bewiesen, d.h. $M(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w}) = \alpha M\vec{u} + \beta M\vec{w}$. Das ist die gewünschte Linearität.

(4.2.6) Alle Rechenschritte sind reine Rechnungen im Operatorbereich K. Alle fehlende Information über mögliche Werte der Indizes läßt sich leicht aus dem Kontext ergänzen. Die Indexformulierung gibt nur die für die Rechnung relevante Information wieder.

(4.2.7) Wer Schwierigkeiten im Nachvollziehen der Rechnung hat, sollte alles für $m = 2$ und $n = 3$ anschreiben. Er wird bereits für diesen niedrigen Fall die Ersparnis an Schreibarbeit durch den Indexkalkül würdigen können. Und falls er dann noch nicht überzeugt ist, schreibe er einmal den Fall 5×4 aus.

4.4.2b Die Konventionen des Indexkalküls

(4.2.8) Der Indexkalkül ist - sobald man ihn einmal beherrscht - sehr effizient. Die Gründe haben wir angedeutet. Wenn man mit ihm arbeitet, ist er so machtvoll, dass es durchaus vorkommt, dass die Rechnung dem Denken voraus ist.

(4.2.9) Damit der Formalismus klappt, muß man allerdings gewisse Konventionen und Vorsichtsmaßregeln einhalten, an die wir uns nachfolgend immer halten werden. Tut man das nicht, produziert man rasch Unfug oder kommt nicht weiter.

Konventionen zum Indexkalkül (Teil I):

♦ Die Koordinatenräume K^n werden als **Linksvektorräume** geschrieben, sobald sie in der Rolle von Parameterräumen auftreten, was fast immer der Fall ist. (Urbildmenge zu einer Linearkombinationsabbildung). Alle zugehörigen Tupel sind Spaltenvektoren.

Also

$$3\vec{x}^K = 3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ nicht } \vec{x}^K 3.$$

♦ **Alle anderen geometrischen Vektorräume werden als Rechtsvektorräume** geschrieben. D.h. die typische Basisdarstellung hat immer die Form:

$$\vec{x} = \Sigma\vec{b}_j x_j = \vec{b}_1 x_1 + ... + \vec{b}_n x_n \text{ , nicht mehr } 3\vec{a} - 7\vec{b}!$$

Eine Linearkombinationsabbildung führt daher immer von einem Linksraum in einen Rechtsraum: $L : K^n \to V$.

♦ Vorgabe eines Koordinatensystems S bedeutet, dass man in **allen** am Problem beteiligten Räumen eine Basis vorgibt. Wie üblich kennzeichnen wir zugehörige Koordinatengrößen durch einen Index S.

Ist also b eine zu S gehörige Basis und $\vec{x} = \Sigma\vec{b}_i x_i$, dann ist $\vec{x}^S = (x_i)$.

♦ Ein Index, der als äußerer Parameter auftritt, heißt *laufender oder freier Index.* Er läuft über die Indexmenge einer der beteiligten Basen. Ein freier Index steht immer auf beiden Seiten einer Gleichung des Indexkalküls der Gleichung (Merkmal!). In der Gleichung

$$M_{ij} = 3N_{ij} + 5x_i y_j$$

sind i nd j freie Indizes. Die Skalare 3 und 5 stehen links.

♦ Ein Index, über den summiert wird, heißt *stummer Index.* Auch er bezieht sich auf eine der beteiligten Basen. Ein stummer Index tritt - von ganz seltenen Ausnahmen abgesehen - in der Summe, zu der er gehört, immer doppelt auf. Sonst (außerhalb der Summe) kommt er nicht vor. (Das eventuelle Vorkommen am Summenzeichen wird nicht gezählt!) In der folgenden Gleichung ist k stummer Index:

$$C_{ij} = 3\Sigma_k M_{ik} N_{kj} + 5(\Sigma_k a_k a_k) x_i y_j.$$

Im Rahmen der Matrixrechnung ist es in der Regel so, dass zwischen den beiden Vorkommen eines stummen Index kein weiterer Index steht. Diese Indexstruktur spiegelt die Regel Zeile mal Spalte der Matrixrechnung wider. Also

$$\Sigma_k M_{ik} N_{kj} \quad \text{aber nicht ohne Grund } \Sigma_k N_{kj} M_{ik}.$$

♦ Von allen Rechenregeln des Körpers sollte man das Kommutativgesetz der Multiplikation so lange wie möglich meiden. Nie Faktoren vertauschen, ohne dass ein besonderer Grund vorliegt! Denn beim Vertauschen der Faktoren wird die Indexreihenfolge verändert, und das ist in der Regel nicht gut.

Die Formeln des nachfolgenden Abschnitts werden zahlreiche konkrete Beispiele für die Verwendung dieser Regeln liefern.

4.4.3 Die Fundamentalidentität einer linearen Abbildung.

(4.3.1) Wir kommen jetzt zu einer Rechnung, für die wir den Indexkalkül verwenden, ja benötigen. Diese Rechnung tritt im Zusammenhang mit linearen Abbildungen häufig auf. Mit ihrer Hilfe klärt sich das Quantifizierungsproblem im endlichdimensionalen Fall rasch. Ohne diesen Kalkül - also ausgeschrieben - nimmt die zugehörige Rechnung eine enorme Länge an. Mit dem Indexkalkül sind es knapp zwei Zeilen.

Wir nennen die entstehende Gleichung *Fundamentalidentität für lineare Abbildungen.*

(4.3.2) Achten Sie darauf, **dass jeder Rechenschritt in folgenden Rechnung irgendwie notwendig, zwangsläufig ist.** Man kommt auf eben diese und nur diese Weise weiter. Allerdings sind es bereits eine ganze Reihe von Schritten, die zusammen die Rechnung ausmachen.

(4.3.3) Szenenbild und Rechnung sehen wie folgt aus:

Das **Szenenbild**	
Seien	V, W Vektorräume über dem kommutativen Körper K.
	$\Phi : V \to W$ sei linear. $\dim V = n < \infty$, $\dim W = m < \infty$.
	b Basis von V und c Basis von W. $b = (\vec{b}_1, .., \vec{b}_n)$ und $c = (\vec{c}_1, .., \vec{c}_m)$
	$\vec{x} \in V$ und $\Phi : \vec{x} \mapsto \vec{y} = \Phi(\vec{x})$ mit $\vec{y} \in W$.
Die **Rechnung**	mit dem Ziel einer Formel für den Wert $\vec{y} = \Phi(\vec{x})$.
	$\vec{y} = \Phi(\vec{x}) \overset{(1)}{=} \Phi(\Sigma_i \vec{b}_i x_i) \overset{(2)}{=} \Sigma_i \Phi(\vec{b}_i) x_i \overset{(3)}{=} \Sigma_i (\Sigma_k \vec{c}_k M_{ki}) x_i \overset{(4)}{=}$
	$= \Sigma_{ik} \vec{c}_k M_{ki} x_i \overset{(5)}{=} \Sigma_k \vec{c}_k (\Sigma_i M_{ki} x_i) \overset{(6)}{=} \Sigma_k \vec{c}_k y_k$
Vergleich	$y_k = \Sigma_i M_{ki} x_i$

(4.3.4) Gehen wir die einzeln numerierten Schritte der Rechnung durch. Bei (1) wird die **Basisdarstellung** von $\vec{x}$ eingesetzt. (Etwas anderes kann man mit $\vec{x}$ nicht tun. Aber die eindeutige Basisdarstellung folgt sofort aus dem Szenenbild! Das Einsetzen der jeweiligen Basisdarstellung ist ein in diesem Kalkül immer zu vollziehender Schritt).

Bei (2) verwenden wir die **Linearität** von Φ. (D.h. Summenzeichen und die Skalare x_i werden aus der Von-Klammer herausgezogen. Vektoren müssen drin bleiben. Die Reihenfolge der Faktoren wird nicht geändert.)

Bei (3) müssen wir wieder auf unser Szenenbild zurückgreifen: Für jedes i ist $\Phi(\vec{b}_i)$ ein Vektor aus W. Also läßt er sich eindeutig als **Linearkombination der Basis** c schreiben! Die Komponenten hängen vom äußeren Parameter i und von Indexwert k des Basisvektors $\vec{c}_k$ ab. Wir **bezeichnen** diese Komponente mit M_{ik}, so dass die Basisdarstellung

$$\boxed{\Phi(\vec{b}_i) = \Sigma_k \vec{c}_k M_{ki} \qquad \textbf{Merken!}}$$

lautet. Beachten Sie, wie wir durch die Wahl der Bezeichnung unsere Indexkonventionen erfüllen. Über die Komponentenbezeichnung eine $m \times n-$Matrix $M = (M_{ki})$ eingeführt. Die gefundene Darstellung für $\Phi(\vec{b}_i)$ wird in Schritt (3) eingesetzt.

In (4) werden die Rechenregeln für Vektoren benutzt, um **Klammern aufzulösen und die Reihenfolge der Summanden zu ändern**. Das Ergebnis ist eine **Doppelsumme**, die man meist unmittelbar hinschreibt.

Man möchte natürlich eine Linearkombination der Basis c haben. Die Umformung (5) leistet eben dies: **Ausklammern von $\vec{c}_k$!**

Mit (6) schließlich steuert man auf Koffizientenvergleich zu: $\Phi(\vec{x})$ ist ja ein Element aus W und muß daher eine eindeutige Basisdarstellung besitzen, das im Szenenbild $\vec{y}$ genannt wurde. Dessen gesuchte Komponenten werden mit y$_k$ bezeichnet. In der letzten Zeile ist das Ergebnis des Koeffizientenvergleichs im Indexkalkül gegeben.

(4.3.5) Damit man einmal die Ersparnis an Schreibarbeit durch die Indexschreibweise sieht, schreiben wir die Umformungen 3 und 4 (und nur diese!) für $n = 4$ und $m = 2$ konkret aus.

$$\begin{aligned}
\Sigma\Phi(\vec{b}_i)x_i &= \Phi(\vec{b}_1)x_1 + \Phi(\vec{b}_2)x_2 + \Phi(\vec{b}_3)x_3 + \Phi(\vec{b}_4)x_4 \\
&= (\vec{c}_1 M_{11} + \vec{c}_2 M_{21})\, x_1 + (\vec{c}_1 M_{12} + \vec{c}_2 M_{22})\, x_2 + \\
&\quad + (\vec{c}_1 M_{13} + \vec{c}_2 M_{23})\, x_3 + (\vec{c}_1 M_{14} + \vec{c}_2 M_{24})\, x_4 \\
&= \vec{c}_1 M_{11} x_1 + \vec{c}_2 M_{21} x_1 + \vec{c}_1 M_{12} x_2 + \vec{c}_2 M_{22} x_2 + \\
&\quad + \vec{c}_1 M_{13} x_3 + \vec{c}_2 M_{23} x_3 + \vec{c}_1 M_{14} x_4 + \vec{c}_2 M_{24} x_4 \\
&= \vec{c}_1 \left(M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + +M_{13}x_3 + M_{14}x_4\right) + \\
&\quad + \vec{c}_2 \left(M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + M_{23}x_3 + M_{24}x_4\right) \\
&= \vec{c}_1 y_1 + \vec{c}_2 y_2.
\end{aligned}$$

(4.3.6) Man kann sich leicht vorstellen, was die gesamte Rechnung von 1-5 für Ausmaße annimmt, sobald sich die Dimensionen erhöhen. Vergewissern Sie sich, dass Ihnen klar ist, was die die Umformungen (3) und (4) bedeuten und wie sie sich mit Hilfe der Summenzeichen schreiben.

(4.3.7) Der Koeffizientenvergleich am Ende der Rechnung kann in Matrixform gebracht werden. Das Koordinatensystem (Basen b und c) werde mit S bezeichnet. Dann folgt:

$$\boxed{\begin{array}{lll}
y_k = \Sigma M_{ki} x_i & & \vec{y}^S = M\vec{x}^S \\
y_k = \Sigma_i M_{ki} x_i & k = 1, ..., m & \begin{pmatrix} y_1 \\ : \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & .. & M_{1n} \\ : & & : \\ M_{m1} & .. & M_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}
\end{array}}$$

Links die Indexform, rechts die Matrixform des Resultates, oben in Kurzform, unten ausführlicher.

(4.3.8) Nach der gesamten Konzeption stehen M und x immer rechts von den Basisvektoren (Rechtsraum). Dagegen steht M links von den Komponenten x_i. Daher ist der zugehörige Parameterraum mit S sinnvollerweise als Linksraum angesetzt, wie in den Regeln gefordert. Die generelle Reihenfolge ist bMx.

4.4.3a Die Diagrammform der Fundamentalidentität

(4.3.9) Wir stellen die Verhältnisse jetzt in Form eines Diagramms dar. Hierdurch wird Vieles übersichtlicher. Auch zum erforderlichen Merken des Resultates kann man sich auf dieses Diagramm konzentrieren.

(4.3.10) Natürlich müssen alle Basiskonstruktionen als Abbildungen interpretiert werden. Die Vorgabe der beiden Basen b und c bedeutet, dass wir es mit den beiden Linearkombinationsabbildungen

$$L_b = (K^n, \vec{x}^S = (x_i) \mapsto \Sigma\vec{b}_i x_i, V) \quad \text{und} \quad L_c = (K^m, \vec{y}^S = (y_k) \mapsto \Sigma\vec{c}_k y_k, W)$$

zu tun haben. Da Basen vorliegen, sind sie umkehrbar, bijektiv. Die Umkehrabbildungen sind Darstellungsabbildungen, sind vom Quantifizierungstyp. Wir bezeichnen sie mit D_d und D_c. Also :

$$D_b = (V, \vec{x} = \Sigma\vec{b}_i x_i \mapsto (x_i), K^n) \quad \text{und} \quad D_c = (W, \vec{y} = \Sigma\vec{c}_k x_k \mapsto (y_k), K^m)$$

Alle Tupel aus K^n sind jetzt vereinbarungsgemäß Spaltenvektoren.

(4.3.11) Zusammen haben wir folgendes **kommutative Diagramm**, das wir von jetzt ab gerne als Szenenbild verwenden. D.h. wir gehen die einzelnen Probleme meist so an, dass wir in diesem Diagramm eine bestimmte Rollenzuteilung für die einzelnen Größen vornehmen und davon ausgehend die anstehenden Fragen behandeln.

$$\boxed{\begin{array}{lll}
\vec{x} = \Sigma\vec{b}_i x_i & \xrightarrow{\Phi} & \vec{y} = \Phi(\vec{x}) = \Sigma\vec{c}_k y_k = \Sigma\vec{c}_k M_{ki} x_i \\
\uparrow L_b \quad \downarrow D_b & & \uparrow L_c \quad \downarrow D_b \qquad \boxed{\Phi(\vec{x}) = L_c(\vec{y}^S) = L_c(M\vec{x}^S)} \\
\vec{x}^S = (x_i) & \xrightarrow{M} & M\vec{x}^S = \vec{y}^S \quad \text{mit } y_k = \Sigma M_{ki} x_i
\end{array}}$$

4.3b Die Quantifizierung einer linearen Abbildung durch eine Matrix.

(4.3.12) Die gegebene Formel für $\Phi(\vec{x})$ beschreibt präzise, wie der Funktionswert mit Hilfe der basisabhängigen Beschreibungsgrößen $M = M^S$ und $\vec{x}^S$ zu berechnen ist.

(4.3.13) Nachdem wir die Rechnung verstanden haben, fragen wir, was die Fundamentalidentität für unser Ziel, die Beziehung zwischen Matrizen und Homomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume zu klären, aussagt.

(4.3.14) Lesen wir die Identität einmal von links nach rechts. Dann sehen wir:

> Wir können den Abbildungswert $\Phi(\vec{x})$ für beliebiges Urbild $\vec{x}$ ausrechnen, sofern wir nur die Matrix M kennen. Als Formel : $\vec{x} \mapsto \Phi(\vec{x}) = \Sigma\vec{c}_k M_{ki} x_i$. D.h., wir haben ein allgemeines Berechnungsverfahren für den Wert $\Phi(\vec{x})$, wobei die Komponenten x_i als unabhängige Variable eingehen und der Rest die Rolle von Konstanten hat.

Für die Komponenten ist das gerade die Matrixformel $\vec{y}^S = M\vec{x}^S$. Wir erinnern daran, dass viele der Konventionen des Kalküls gerade so gefordert werden, dass am Ende diese durch den Matrixkalkül vorgegebene Formel herauskommt.

(4.3.15) Die für beide Formeln benötigte Matrix M bekommen wir vermittels der Bilder der Basis b. Die Matrixkomponenten waren ja definiert über $\Phi(\vec{b}_i) = \Sigma\vec{c}_k M_{ki}$. Das besagt aber für unsere Quantifizierungsfrage:

- Eine gegebene **lineare** Abbildung $\Phi : V \to W$ ist bereits vollständig bestimmt, wenn nur ihre Werte auf einer Basis des Urbildraumes bekannt sind.
- Definiert man M über $\Phi(\vec{b}_i) = \Sigma\vec{c}_k M_{ki}$, so berechnen sich die Koordinaten des Bildes $\Phi(\vec{x}) = \vec{y}$ über die Matrixgleichung
  $\vec{y}^S = M\vec{x}^S \qquad \text{oder} \qquad y_k = \Sigma M_{ki} x_i \qquad k = 1, 2, ..., m.$
- Vektoriell gechrieben:
  $\vec{x} \mapsto \Phi(\vec{x}) = \Sigma\vec{c}_k M_{ki} x_i.$

(4.3.16) Damit ist die gesamte Zuordnung von Φ, die für i.a.. unendlich viele $\vec{x}$ aus V Werte liefert, **auf die Angabe von $n{\cdot}m$ Zahlen zurückgeführt**. **Die Matrix M liefert eine quantitative Bestimmung unserer linearen Abbildung**. M ist die Koordinatendarstellung von Φ (bezüglich des Systems S).

Das ist ein bemerkenswertes Resultat, das zeigt, dass und wie man jede lineare Abbildung beherrscht, wenn man nur über die zugehörige Matrix M verfügt.

(4.3.17) Aber es geht auch umgekehrt. Jede Matrix legt eine zugehörige lineare Abbildung fest. Auch das zeigt die Fundamentalidentität. Aus dem Diagramm in (4.3.11) lesen wir nämlich folgenden Zusammenhang zwischen den beiden Größen ab:

$$\begin{aligned} \Phi &= L_c \circ M \circ D_b \\ M &= D_c \circ \Phi \circ L_b \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Beziehung $\Phi \mapsto M$ auch bijektiv ist.

> Will man also eine lineare Abbildung $V \to W$ konstruieren, so genügt es, irgendeine $m \times n-$Matrix M zu wählen und in die Fundamentalidentität einzusetzen. Das resultierende Φ - als Zusammensetzung linearer Abbildungen - ist dann linear. (Hier wird die Fundamentalidentität von rechts nach links gelesen).

(4.3.18) Wir nennen M "die den Homomorphismus Φ bezüglich S beschreibende Matrix" . Wir schreiben für M auch Φ^S, um anzudeuten, dass eine Koordinatendarstellung zu S vorliegt oder auch M_Φ, wenn wir stärker den Matrixcharakter betonen wollen.

Matrizen sind (bei gegebenen Basen) dasselbe wie lineare Abbildungen in demselben Sinne, wie Koordinatenvektoren dasselbe wie geometrische Pfeile sind.

(4.3.19) Oder genauer formuliert:

Seien	die Basen b von V und c von W **fest** gewählt.
Dann	definiert $\Phi \mapsto \Phi^S = M_\Phi$ eine bijektive Beziehung zwischen linearen Abbildungen $\Phi : V \to W$ und m×n-Matrizen über K.
Φ gegeben:	Die Matrix Φ^S erhält man, indem man die n Vektoren $\Phi(\vec{b}_j)$ in W entwickelt.
M gegeben:	Das zugehörige Φ erhält man, indem man die Fundamentalidentität vor rechts nach links liest.

(4.3.20) Der zweite Punkt (Φ gegeben, M gesucht) wird vielfach in Anwendungsituationen benötigt, führt aber allzu häufig bei Anfängern zum Versanden der Aktivität. Immer wieder die Frage:" Wie soll ich das machen?" Daher die Antwort nochmals **als** Kochrezept:

Wie findet man die beschreibende Matrix eines Homomorphismus?

- ♦ Bestimme $\Phi(\vec{b}_i)$ in W für $i = 1, 2, ..., n$.
- ♦ Stelle diese Vektoren als Linearkombinationen der Basis c dar.
- ♦ Dann liefern die Koeffizienten der $j-$ten Gleichung die $j-$te **Spalte** der beschreibenden Matrix $\boxed{M = M_\Phi = \Phi^S}$.

- **(4.3.21)** Beispiel : $\lambda = (V_0^3, \vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}, V_0^3)$ ist offensichtlich linear (Bilinearität des Vektorproduktes). Wir wählen für V_0^3 eine kartesische Basis e, sowohl in der Urbild- als auch in der Wertemengenrolle.

Damit ist S festgelegt. Nach dem Kochrezept berechnen wir $\lambda(\vec{e}_j)$. Etwa

$$\lambda(\vec{e}_1) = \vec{a} \times \vec{e}_1 = \vec{e}_1 0 + \vec{e}_2 a_3 + \vec{e}_3(-a_2) \qquad \text{Rechtsschreibweise!}$$

Das gibt die erste Spalte der beschreibenden Matrix. (Nicht horizontal, wie in der Gleichung, vertikal!) Analog für $j = 2$. Damit folgt die beschreibende Matrix

$$M = M_\lambda = \begin{pmatrix} 0, & -a_3 & .. \\ a_3 & 0 & .. \\ -a_2 & a_1 & .. \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die dritte Spalte selbst.

(4.3.22) Beispiel: V Vektorraum und a irgendeine Basis von V. Dann sind $id : \vec{x} \mapsto \vec{x}$ und $c_{\vec{0}} : \vec{x} \mapsto \vec{0}$ beides Homomomorphismen $V \to V$. Für die beschreibenden Matrizen ergibt unser Rezept zwei Matrizen, die *Einheitsmatrix* und *Nullmatrix* genannt werden.

$$id^S = \begin{pmatrix} 1 & 0... & ..0 \\ 0 & 1... & ..0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0... & 1 \end{pmatrix} \qquad c_{\vec{0}}^S = \begin{pmatrix} 0 & 0... & ..0 \\ 0 & 0... & ..0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0... & 0 \end{pmatrix}$$

(4.3.23) Beispiel: Wir betrachten die Drehung R_φ (in der Ebene $\mathbb{R}^2_K$) um den Winkel φ. Vgl. Kap.3.3.1a. Wir wissen nach 4.3.12d, dass eine lineare Abbildung vorliegt. Die Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sei kartesisch. Wir müssen gemäß Kochrezept $R_\varphi(\vec{e}_1)$ und $R_\varphi(\vec{e}_2)$ bestimmen. Eine Skizze zeigt $R_\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}\cos(\varphi) + \vec{e}_2 \sin(\varphi)$ und $R_\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_1(-\sin(\varphi) + \vec{e}_2 \cos(\varphi)$. Beachten Sie die Vorzeichenverteilung vor den Sinustermen, die ist vornehmlich über die Skizze zu merken: Für nicht zu große Winkel liegt $R_\varphi\vec{e}_1$ im ersten und $R_\varphi\vec{e}_2$ im zweiten Quadranten, was die Vorzeichen erklärt. Das Kochrezept gibt:

$$M_{R_\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(4.3.24) Ein Beispiel für die andere Richtung der Fundamentalidentität, also Punkt 3 aus (4.3.19): Wieder wählen wir $V = W = \mathbb{R}^2_K$. Wieder sei $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ die Koordinatenbasis. Wir geben jetzt 2 weitere Vektoren $\vec{E} = \vec{e}_1 2 + \vec{e}_2 1$ und $\vec{F} = \vec{e}_1 1 + \vec{e}_2 2$ vor, die eine zweite Basis N des Raumes bilden. Nur für diese beiden Vektoren legen wir die Bildwerte fest, und zwar wie folgt:

$$\lambda(\vec{E}) = \vec{E}2 = \vec{E} \cdot 2 + \vec{F} \cdot 0 \qquad \lambda(\vec{F}) = \vec{F}(\frac{1}{2}) = \vec{E} \cdot 0 + \vec{F} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

Beachten Sie die folgende Besonderheit dieser speziellen Werte: Urbilder und Bilder haben dieselbe Richtung, unterscheiden sich nur in der Länge. Normalerweise unterscheiden Sie sich in Länge und Richtung. Wir schreiben die Räume als Rechtsvektorräume.

☐ Fertigen Sie eine Skizze mit $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ und $\vec{x} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ samt allen drei Bildvektoren!

Die (von rechts nach links gelesene) Fundamentalidentität gewährleistet, dass durch die beiden gemachten Vorgaben eine lineare Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^2_K \to \mathbb{R}^2_K$ eindeutig festgelegt wird. Für die Basis $N = (\vec{E}, \vec{F})$ können wir auch sofort die beschreibende Matrix gemäß Kochrezept angeben. Es ist eine *Diagonalmatrix:*

$$\lambda^N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Die Skizze zeigt, wie man über die Linearitätseigenschaft den Wert $\lambda(\vec{x})$ für beliebiges $\vec{x}$ erhält.

Zur (kanonischen) Basis e gehört eine andere beschreibende Matrix, die man erhält, wenn man das Kochrezept auf $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ anwendet. Dazu benötigt man die folgenden Umrechnungsformeln, die man sofort verifiziert:

$\vec{E} = \vec{e}_1 2 + \vec{e}_2 1$	$\vec{e}_1 = \vec{E}\frac{2}{3} + \vec{F}\left(-\frac{1}{3}\right)$
$\vec{F} = \vec{e}_1 1 + \vec{e}_2 2$	$\vec{e}_2 = \vec{E}\left(-\frac{1}{3}\right) + \vec{F}\frac{2}{3}$

Es folgt mit Hilfe der vektoriellen Rechenregeln

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{e}_1) &= \lambda(\vec{E}\tfrac{2}{3} + \vec{F}\left(-\tfrac{1}{3}\right)) = \vec{E} \cdot 2 \cdot \tfrac{2}{3} + \vec{F} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) \\ &= (\vec{e}_1 2 + \vec{e}_2 1)\tfrac{4}{3} + (\vec{e}_1 1 + \vec{e}_2 2)\left(-\tfrac{1}{6}\right) = \vec{e}_1 \tfrac{5}{2} + \vec{e}_2 1 \\ \lambda(\vec{e}_2) &= \lambda\left(\vec{E}\left(-\tfrac{1}{3}\right) + \vec{F}\tfrac{2}{3}\right) = \vec{E} \cdot 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) + \vec{F} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \\ &= (\vec{e}_1 2 + \vec{e}_2 1)\left(-\tfrac{2}{3}\right) + (\vec{e}_1 1 + \vec{e}_2 2)\tfrac{1}{3} = \vec{e}_1(-1) + \vec{e}_2 0 \end{aligned}$$

Laut Kochrezept lesen wir hieraus die beschreibende Matrix bezüglich der kanonischen Basis e ab zu:

$$\lambda^e = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(4.3.25) Zur Übung sollten Sie jetzt einige Funktionswerte mit Hilfe dieser Matrix ausrechnen. Grundlage ist die Formel aus (4.3.7). Etwa:

$$\vec{E} = \vec{e}_1 2 + \vec{e}_2 1$$
$$\vec{E}^e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda^e \vec{E}^e = ... = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{E}^e = (\lambda(\vec{E}))^e$$

Führen Sie dasselbe für $\vec{F}$, für $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ durch. ("Dasselbe" heißt: Berechnung des Funktionswertes mit Hilfe der Matrix λ^e.)

(4.3.26) Die **geometrischen Eigenschaften** der Abbildung λ, etwa die Besonderheiten der beiden Vektoren E und F, lassen sich aus dieser Matrix λ^e nicht mehr oder nur sehr mühsam ablesen. Sie ist für Rechnungen adäquat, nicht aber für die Analyse der geometrischen Struktur von λ. Aus λ^N dagegen läßt sich die Abbildungsgeometrie ablesen.

(4.3.27) Nochmals zu den geometrischen Eigenschaften von λ. Die Konstruktion in der Figur zeigt: Für alle Vektoren $\vec{x}$, die nicht auf den beiden von $\vec{E}$ und $\vec{F}$ erzeugten Geraden liegen, ändert sich beim Übergang zum Vektor $\lambda(\vec{x})$ die Richtung. Aber nicht wie im Falle einer Drehung immer gleichsinnig, sondern immer weg von der durch $\vec{F}$ erzeugten, hin zu der durch $\vec{E}$ erzeugten Geraden. Geometrisch liegt also etwas wesentlich anderes als eine Drehtransformation vor. Was wir hier soeben für λ gemacht haben, ist ein Einstieg in den eingangs genannten Problemkreis iii): Die Strukturanalyse individueller Homomorphismen.

(□ **F.**) Im $\mathbb{R}^3$ wählt man zur Beschreibung üblich die kanonische Basis. Jede zugehörige lineare Abbildung wird dann unmittelbar durch eine $3 \times 3-$Matrix beschrieben. Ein Beispiel: Wir betrachten die durch $x + y = 0$ bestimmte Ebene, σ sei die Spiegelung an dieser Ebene. Wie sieht die beschreibende Matrix aus? (Auch hier stur (4.3.20) anwenden!).

Dasselbe für die durch $z = 0$ bestimmte Ebene.

(□ **F.**) Welche geometrische Interpretation hat umgekehrt die lineare Abbildung $\tau{:}\mathbb{R}^3_K \to \mathbb{R}^3_K$, die durch folgende Matrix beschrieben wird:

$$M_\tau = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \quad ?$$

Welcher Unterschied besteht zur Drehmatrix? Hinweis: Was sind die Spalten laut Kochrezept?

4.4.4 Der Isomorphismus zwischen Homomorphismen und Matrizen

(4.4.1) Wir sollten unsere Beziehung zwischen linearen Abbildungen und Matrizen abstrahieren und zu einer vollen Abbildung ergänzen.

(4.4.2) Dazu benötigen wir die zugehörigen Mengen sowie einige neue Bezeichnugen:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Mat}_K(m,n) & = \mathcal{F}(I_m \times I_n, K) & = \text{Menge aller } m \times n-\text{Matrizen mit Wert in } K \\ \mathrm{Hom}_K(V,W) & = \{\Phi | \Phi : V \to W \text{ linear}\} \subset \mathcal{F}(V,W) & \end{array}$$

Die erste Menge (der Raum aller $m \times n-$Matrizen) ist - wie oben besprochen - ein $m \cdot n-$dimensionaler Vektorraum über K. Die zweite Menge (der Raum aller Homomorphismen $V \to W$) ist - wie man sofort sieht - ein Teilvektorraum von $\mathcal{F}(V,W)$. Letzterer ist Vektorraum per Wertemengenübertragung.

(4.4.3) Üben Sie sich im Decodieren solcher Sgmbole, die immer viel Information enthalten. $\mathrm{Hom}_K(V_0^3, \mathbb{R}^1)$ etwa bedeutet: Der (dreidimensionale) Vektorraum aller linearen Abbildungen $V_0^3 \to \mathbb{R}^1$. Ein typisches Element daraus ist $\vec{x} \mapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$. Dem Vektor wird eine Zahl zugeordnet, hier in Form eines Skalarproduktes. Auf der Matrixseite entspricht dem der Raum $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(1,3)$, das ist der Raum reeller Zeilenvektoren wie $M = (1,3,4)$. In Kap.5.2 werden wir sehen, dass dem Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V, K^1)$ allgemein eine große Bedeutung zukommt. Man nennt diesen Raum den **Dualraum von** V, und seine Elemente Linearformen. Als Kurzbegründung kann man sagen: **Jedes seiner Elemente legt eine einzelne lineare Bedingungsgleichung für die Vektoren von** V **fest.**

Übung: Was bedeuten $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_0^3, V^3)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2,2)$ und $\mathrm{Hom}_K(K^1, V)$?

(4.4.4) Wir erwarten, dass die von $\Phi \mapsto \Phi^S$ erzeugte Abbildung ein Vektorraumisomorphismus ist. Auch dies verifiziert man problemlos.

(4.4.5) Damit folgt der **Satz**:

Es seien	V, W Vektorräume über K. Das Koordinatensystem S sei festgelegt durch je eine Basis b von V und c von W.
Dann	ist die aus der Fundamentalidentität resultierende Abbildung $(\mathrm{Hom}_K(V,W), \Phi \mapsto \Phi^S, Mat_K(m,n))$ ein Vektorraumisomorphismus. Es gilt $\Phi^S = D_c \circ \Phi \circ L_b$.

(4.4.6) Das ist die (von uns gesuchte) Quantifizierungsabbildung für lineare Abbildungen! Sie entspricht völlig der Abbildung $(V_0^3, \vec{x} \mapsto x^K, \mathbb{R}_K^3)$, mit der wir die Ortsvektoren quantifizieren. Mit Hilfe dieser Abbildung ist das Quantifizierungsproblem für die linearen Abbildungen gelöst, jedenfalls für endlichdimensionale Vektorräume und für Moduln, die endliche Basen besitzen. In extremen Fällen, wenn eine feste ausgezeichnete Basis vorliegt, kann man Matrizen und lineare Abbildungen über diese Abbildung identifizieren. Ansonsten gilt immer: Der Isomorphismus ist nicht kanonisch, sondern basisabhängig, und daher ist eine generelle Identifikation unzeckmäßig.

(4.4.7) Um den Satz nutzbringend verwenden zu können, muß der Leser natürlich wissen, wie die Vektorraumstrukturen der beiden Räume definiert sind. Bei den Matrizen ist dies die komponentenweise Verknüpfung, und bei den Homomorphismen ist es die punktweise Verknüpfung. Etwa $(\Phi + \Psi)(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}) + \Psi(\vec{x})$. Auch muß er sich klar machen, was alles an Information in der Floskel "ist ein Isomorphismus" steckt.

(4.4.8) Wie formuliert sich die komponentenweise Matrixaddition im Indexkalkül? Die Antwort ist in den nachfolgenden Formeln enthalten. Dadurch, dass die Indizes zu äußerem Parametern werden:

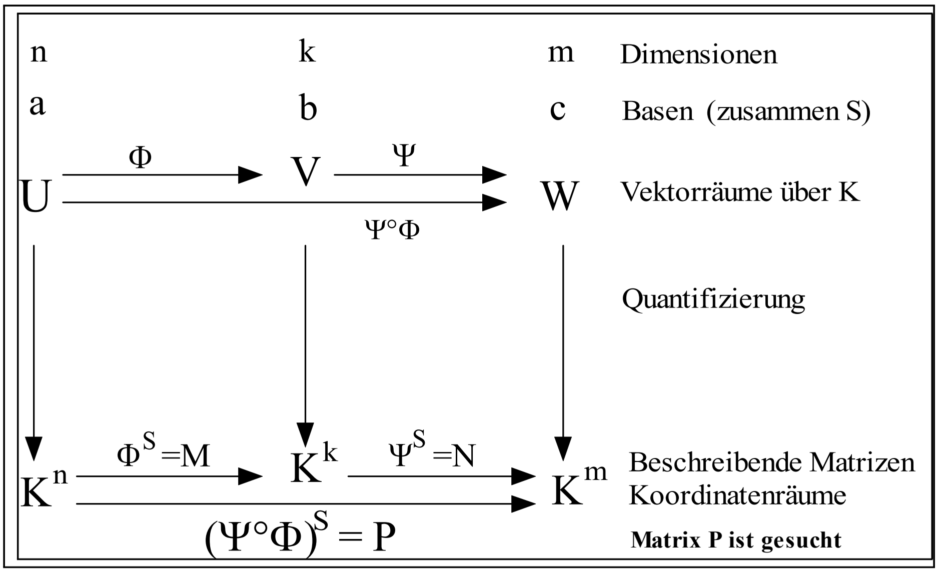
Summe	$(M+N)_{ij} = M_{ij} + M_{ij}$
Multiplikation mit Skalar	$(\alpha M)_{ij} = \alpha M_{ij}$

Die erste Regel etwa ist zu lesen: "Die $i-j$-te Komponente der Matrix $M+N$ ist gleich..."

4.4.5 Die Matrixmultiplikation.

(4.5.1) Nun gibt es für lineare Abbildungen neben den beiden durch die Vektorraumstruktur erfaßten Verknüpfungen in gewissen Fällen (Werteraum der ersten Abbildung = Urbildraum der zweiten Abbildung) noch die **Zusammensetzung**. Wir wissen, die Zusammensetzung zweier linearer Abbildungen ist erneut linear. Was bedeutet das nun für die zugehörigen Matrizen?

(4.5.2) Erneut müssen wir zuerst unser Szenenbild aufbauen, das jetzt schon recht umfangreich (obwohl weitgehend trivial) ist! Wir geben es sogleich in Diagrammform:



Alles in diesem Diagramm ist durch die Vorabüberlegungen festgelegt. Oben ist die koordinatenfreie, absolute Darstellung, unten die isomorphe basisabhängige Quantifizierung. Für die drei Matrizen, die im

Diagramm auftauchen und die beispielsweise über das Kochrezept (4.3.20) bestimmt werden können, haben wir (im Diagramm) vereinfachende Bezeichnungen eingeführt: P, M und N

(4.5.3) Das Problem, das wir uns stellen, ist das folgende: **Wie kann man die Matrix P direkt aus den beiden anderen Matrizen M und N erhalten ?** Wir suchen also eine Verknüpfung, ein *Matrixprodukt*, das die Zusammensetzung der Abbildungen im quantitativen Bereich repräsentiert. Denn selbstverständlich muß es möglich sein, die Matrix P durch die beiden Matrizen M und N auszudrücken.

(4.5.4) Sobald das Problem als solches verstanden ist und man sich das Szenenbild eingeprägt hat, ist die Lösung Routine. Wieder läuft alles zwanghaft mechanisch ab. Der Leser darf sich diesbezüglich auf keinen Fall durch die Kompliziertheit vortäuschende Länge der Rechnung in die Irre leiten lassen.

(4.5.5) Das Kochrezept (4.3.20) sagt genau, was zu tun ist: Für jeden Basisvektor $\vec{a}_i$ von V ist der Vektor $\Psi\circ\Phi(\vec{a}_i)$ als Linearkombination der Basis c von W darzustellen. Das ergibt die Spalten von P. Die Rechnung, die das leistet, sieht so aus:

$$\begin{aligned}&\Psi\circ\Phi(\vec{a}_i) \overset{(1)}{=} \Psi(\Phi(\vec{a}_i)) \overset{(2)}{=} \Psi(\Sigma\vec{b}_r M_{ri}) \overset{(3)}{=} \Sigma\Psi(\vec{b}_r)M_{ri} \overset{(4)}{=} \Sigma\,(\Sigma\vec{c}_s N_{sr})\,M_{ri}\\ &\overset{(5)}{=} \Sigma\vec{c}_s N_{sr}M_{ri} \overset{(6)}{=} \Sigma_s\vec{c}_s(\Sigma_r N_{sr}M_{ri}) \overset{(7)}{=} \Sigma_s\vec{c}_s P_{si}\end{aligned}$$

Koeeffizientenvergleich über (7) liefert:

$$\boxed{P_{si} = \sum_{r=1}^{k} N_{sr}M_{ri}}$$

(4.5.6) Gehen wir die Rechenschritte durch:

- Bei (1) verwendet man die Definition der Zusammensetzung $g\circ f(x) = g(f(x))$. Bei (2) und (4) werden die definierenden Gleichungen für M bzw. N eingesetzt. Das sind die Stellen, an denen die beiden Eingabegrößen unseres Produktes - also M und N eingespeist werden. (3) - völlig klar - verwendet die Linearität der Abbildungen. (5) und (6) sind Umformungen der Summe, die erforderlich sind, um die Endform zu erreichen. Wir sind diesen Umformungen bereits bei der Fundamentalidentität begegnet.

(4.5.7) Schauen Sie sich die Indexstruktur (der gesamten Rechnung) genau an: Wir haben einen freien Index i, der überall ganz rechts als letzter Index auftritt. Alle anderen Indizes sind stumm und tauchen daher doppelt auf. Die Reihenfolge der Faktoren ändert sich nie. Am Ende wird durch den Koeffizientenvergleich ein neuer freier Index s erzeugt. Dies geht, da der zweite Faktor mit dem Index s gerade der Basisvektor $\vec{c}_s$, ist. Überzeugen Sie sich davon, dass man für jedes Summenzeichen erkennt, worüber zu summieren ist.

(4.5.8) Und jetzt zum Resultat unserer Rechnung. Die Formel liefert die Matrixelemente von P, indem sie sie -wie gewünscht- durch die Matrixelemente von M und N ausdrückt. Und zwar wieder nach der Regel *Zeile mal Spalte.* Man nimmt die s-te Zeile des linken Faktors N, also (N_{si} N_{s2}...N_{sk}) und multipliziert komponentenweise mit der i-ten Spalte des rechten Faktors M . Anschließend werden die Produkte summiert:

$$P_{si} = N_{\mathbf{s}1}M_{1\mathbf{i}} + N_{\mathbf{s}2}M_{2\mathbf{i}} + N_{\mathbf{s}3}M_{3\mathbf{i}} + ...N_{\mathbf{s}k}M_{k\mathbf{i}}. \qquad \begin{array}{l}\text{s und i frei}\\ \text{k stumm}\end{array}$$

Unser Szenenbild zeigt, welche Werte die beiden freien Indizes s und i annehmen können : s läuft von 1 bis m (zu W gehörig) und i von 1 bis n (zu U gehörig).

(4.5.9) Die so eingeführte Multiplikation zweier Matrizen nennt man *Matrixprodukt.* Das Matrixprodukt zweier Matrizen ist genau dann bildbar, wenn die Anzahl der Spalten des linken Faktors mit der Zeilenzahl des rechten übereinstimmt. Also: $m\times k$ mal $k\times n$ gibt $m\times n$ - Matrix. Das Produkt der beiden Matrizen N und M bezeichnen wir einfach mit NM statt N$\circ M$.

(4.5.10) Damit liefert unser Szenenbild die folgende grundlegende Formel:

$$\boxed{(\Psi\circ\Phi)^S{=}\Psi^S\circ\Phi^S{=}\Psi^S\Phi^S.}$$

Die darstellende Matrix der zusammengesetzten Abbildung $\Psi\circ\Phi$ ist gleich dem rechts stehenden Matrixprodukt, das sich schematisch über"Zeile×Spalte" berechnen läßt.

(4.5.11) Man sieht: **Die Matrixmultiplikation ist nichts anderes als eine Quantifizierung der Zusammensetzung linearer Abbildungen.**

(4.5.12) Und damit übertragen sich die algebraischen Eigenschaften:

Die Matrixmultiplikation ist assoziativ, aber nicht kommutativ.

(4.5.13) Und jetzt einige konkrete **Rechenbeispiele**, wobei wir die Komponentenbezeichnungen so wählen, dass die Regel "Zeile mal Spalte" verdeutlicht wird.

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ r & s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & X \\ B & Y \\ C & Z \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} aA+bB+cC & aX+bY+cZ \\ iA+jB+kC & iX+jY+kZ \\ rA+sB+tC & rX+sY+tZ \end{pmatrix}$
$(abc) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (aX+bY+cZ)$	$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} (abc) = \begin{pmatrix} Xa & Xb & Xc \\ Ya & Yb & Yc \\ Za & Zb & Zc \end{pmatrix}$

Die Beispiele unbedingt eigenständig rechnen und die Struktur verstehen. Wieso darf man im ersten Produkt die Reihenfolge der Faktoren nicht vertauschen?

(☐ F.) R_φ sei die Drehmatrix aus (4.3.23). Verifizieren und interpretieren Sie $R_\varphi R_\psi = R_{\varphi+\psi}$. Rechnen Sie selbst weitere Konkretisierungsbeipiele, bis Sie den Umgang mit der Matrixmultiplikation konsolidiert haben.

(☐ F.) Die übliche Matrixschreibweise linearer Gleichungen $M\vec{x} = \vec{b}$ läßt sich als einfacher Spezialfall des Matrixprodukte interpretieren. Nämlich?

(☐ F.) Schreiben sie den folgenden Ausruck als Matrixprodukt aus drei Faktoren. Er enthält keinen freien Parameter, ist also eine Zahl, ein Körperelement. Die obere Zeile gibt ihn ausgeschrieben, die untere in Indexform:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 M_{11} y_1 + x_1 M_{12} y_2 + x_2 M_{21} y_1 + x_2 M_{22} y_2 \\ \Sigma_{ik} x_i M_{ik} y_k \end{array}}$$

Welche Verallgemeinerungen hinsichtlich der Dimension bieten sich an?

(☐ F.) Die Computeralgebrasysteme nehmen einem hinsichtlich des Matrixproduktes lange Rechnungen ab. Es sei M eine quadratische Matrix. Wir schreiben M^2 für MM und M^3 für MMM usw. Wähle

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Berechne } M^2, M^3, M^4 \text{ und } M^5.$$

Anschließend dasselbe mit einem Computeralgebrasystem.

4.4.5a Der Endomorphismenring

(4.5.14) Welche algebraischen Strukturen entstehen durch die neue Multiplikation? Damit überhaupt eine innere Verknüpfung entsteht, muß V=W gelten: Die Zusammensetzung zweier linearer Abbildungen V→V ist erneut eine lineare Abbildung V→V. Das Produkt zweier quadratischer n×n Matrizen ist wieder eine Matrix dieses Typs.

(4.5.15) Wir definieren

Sei	V Vektorraum über K.
Dann	ist der *Endomorphismenring* von V definiert durch
	$\mathrm{End}_K(V) = Hom_K(V,V) = \{\Phi \mid \Phi : V \to V, \text{ linear}\}$

(4.5.16) Bezüglich + und der Zusammensetzung **ist das ein Ring,** Es ist eine Teilmenge von $\mathcal{F}(V,V)$ mit Ringstruktur. Insbesondere besteht $\mathrm{End}_K(\ K^n) = \mathrm{Mat}_K(\mathrm{n,n}))$ aus allen quadratischen n×n- Matrizen und hat ebenfalls Ringstruktur bezüglich Matrixaddition und Matrixmultiplikation. Neutrales Element ist die Einheitsmatrix, die wir mit $\mathbb{I}$ oder $\mathbb{I}_n$ bezeichnen wollen, und Nullelement ist die Nullmatrix.

(☐ F.) $\mathcal{F}(V,V)$ selbst ist kein Ring, weil ein Distributivgesetz nicht gilt! Zeigen Sie, dass die Linearität gerade das fehlende Distributivgesetz sichert. Wieso gilt das andere Distributivgesetz?

(4.5.17) Schließlich gibt es noch die **invertierbaren Endomorphismen bzw. die invertierbaren Matrizen**. Wir wissen, dass die invertierbaren Elemente eines Ringe stets eine Gruppe bilden. Im Falle unseres Endomorphismenringes erweisen sich die so entstehenden Gruppen als sehr nützlich.

Sei	V Vektorraum über K
Dann	bildet die Menge der invertierbaren Endomorphismen von V eine Gruppe, die Automorphismengruppe von V, die man mit Aut_K(V) bezeichnet.
♦	Im Falle der quadratischen Matrizen nennt man die Gruppe $\mathrm{Aut}_K(\mathrm{K}^n)$ auch "die lineare Gruppe von K^n" und bezeichnet sie mit GL_K(n). Wie üblich bezeichnen wir inverse Elemente mit λ^{-1} oder M^{-1}.

(4.5.18) Beispiel: Sei V=$\mathbb{R}^2$. Dann besteht der Endomorphismenring aus allen quadratischen 2×2-Matrizen.

M=$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ beispielsweise ist ein Endomorphismus, aber kein Automorphismus. Diese Matrix ist nicht invertierbar, weil sie einen eindimensionalen Kern hat. Anders sieht es mit N=$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ aus. Hierfür ist X=$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ inverse Matrix, wie man unmittelbar überprüft. Oder $N^{-1} = X$.

Insbesondere sind die Drehmatrizen aus Beispiel (4.3.23) Automorphismen. Denn eine Drehung um φ läßt sich durch Drehung um -φ rückgängig machen:

$$\boxed{\mathrm{R}_{-\varphi}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}=\mathrm{R}_\varphi^{-1} \qquad \text{für} \quad \mathrm{R}_\varphi=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}$$

Dies prüft man leicht nach.

(☐ F.) Es sei A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit D=ad-bc$\neq$ 0. Beweisen Sie, dass A invertierbar ist mit $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Es ist nützlich, sich diese Formel zu merken und damit 2×2-Matrizen zu invertieren. A ist genau dann invertierbar, wenn D$\neq$ 0 ist.

(4.5.19) Die Gruppe Aut_K(V) operiert kanonisch von links auf V vermöge $\varphi \star \vec{x} = \varphi(\vec{x})$, wie man sofort verifiziert, ($\varphi(\vec{x})$ ist der Wert der Abbildung φ im Punkte $\vec{x}$.) Die geometrische Bedeutung dieser Operation ist, dass sie Geraden in Geraden, Ebenen in Ebenen usw überführt. Kurz: **Alles Lineare bleibt linear mit derselben Dimension**.(Aut, nicht End!) Ist K=$\mathbb{R}$, also der Streckenbegriff verfügbar, geht n-Eck in n-Eck über usw. Daher auch die Bezeichnung "lineare Gruppe". Die Bahn eines Dreiecks besteht aus sämtlichen Dreiecken. Und der Stabilisator eines gleichseitigen Dreiecks im V_0^3 enthält 6 Elemente und ist isomorph zur Dreiecksgruppe, wie man sich leicht überlegt.

(4.5.20) Das alles folgt unmittelbar aus unserer geometrischen Charakterisierung der linearen Abbildungen in 4.3 und der zusätzlichen Bedingung, dass die Elemente von Aut(V) als Isomorphismen trivialen Kern haben.

(4.5.21) Interessant sind weiter die Untergruppen, die von einzelnen Elementen aus Aut(V) erzeugt werden, also die zugehörigen diskreten Evolutionsgruppen und die von ihnen erzeugten Bahnen. Vgl. Kap.3.3.5a. Diese Bahnen geben vielfach gut Aufschluß über die geometrischen Eigenschaften der Abbildung. (Zur Erinnerung: Wähle $\vec{x}$, wende φ an, auf das Ergebnis erneut φ usw. Die entstehende Punktfolge ergibt die eine Hälfte der Bahn! Dasselbe mit φ^{-1} liefert die andere Hälfte.)

Nehmen wir V=$\mathbb{R}^2$ und darin die Drehung R_φ um φ. Die Bahn eines Punktes $\vec{x}$ liegt dann ganz auf dem Kreis mit Radius r=$|\vec{x}|$!. Nimmt man dagegen

$$\lambda = \begin{pmatrix} s\cos\varphi & -s\sin\varphi \\ s\sin\varphi & s\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{mit s=0.95}$$

so erhält man Bahnen, die auf nach innen laufenden Spiralen liegen.

(☐ F.) Zur Übung sollten Sie sich für λ aus Beispiel (...) die qualitative Form der entstehenden Bahnen überlegen.

(☐ F.) Wie sehen die Bahnen einer "Scherung" (in der Ebene) aus, sagen wir für

$$\vec{x} = \vec{e}_1 x + \vec{e}_2 y \mapsto \vec{x} + \vec{e}_1 2y$$

(4.5.22) Fassen wir alles zusammen, so haben wir die folgende Hierarchie algebraischer Strukturen samt ihren zugehörigen Quantifizierungen durch Matrizen (links das allgemeine Objekt, rechts die Matrixdarstellung, in der Mitte die Bezeichnung und Angabe der zugehörigen algebraischen Struktur):

V	Vektorraum. Dimension n	K^n
$\mathrm{Hom}_K(V,W)$	Vektorraum der linearen Abbildungen, Dimension n$\cdot m$	$\mathrm{Mat}_K(m,n)$
$\mathrm{End}_K(V)$	Endomorphismenring	$\mathrm{Mat}_K(n,n)$
$\mathrm{Aut}_K(V)$	Automorphismengruppe oder lineare Gruppe	$\mathrm{Gl}_k(n)$

(4.5.23) Sobald man mit einer dieser Mengen arbeitet oder einer Teilmenge davon, kann man die zugehörige algebraische Struktur verwenden. Alle zugehörigen Rechenregeln gelten. So ist es beispielsweise überflüssig, das Distributivgesetz für eine Menge quadratischer Matrizen nachzuweisen. Es ist infolge der Ringstruktur automatisch erfüllt.

(4.5.24) Nichtsdestoweniger führen wir diesen Beweis jetzt als Fingerübung zum Indexkalkül vor.

Seien M,N,X$\in\mathrm{Mat}_K$(n,n). Wir wollen für die Matrixmultiplikation (M+N)X=MX+NX zeigen. Wir haben wie üblich M=(M_{ij}) usw. und rechnen wie folgt:

$$\Sigma(M+N)_{ir}X_{rj} \overset{(1)}{=} \Sigma(M_{ir}+N_{ir})X_{rj} \overset{(2)}{=} \Sigma(M_{ir}X_{rj}+N_{ir}X_{rj}) \overset{(3)}{=} \Sigma M_{ir}X_{rj}+\Sigma N_{ir}X_{rj}$$

Damit ist das Gesetz bewiesen (Gezeigt: Es gilt für alle Komponenten und daher für die Matrizen). Beachten Sie, dass bei den entscheidenden Umformungen (2) und (3) die Rechenregeln für den Körper benötigt und benutzt werden. Diese Stellen illustrieren das Grundprinzip des Indexkalküls, alles auf Rechnungen für Körperelemente zurückzuführen. Der Rest der Rechnung besteht im Explizieren von Definitionen.

4.4.5b Nichtlineare Gleichungen für Matrizen

(4.5.25) Wir wollen auf eine weitere Konsequenz unseres Resultates "Aut(V) ist Ring" hinweisen. Man kann jetzt für quadratische Matrizen alle Gleichungen oder Rechenausdrücke formulieren, die in einer Ringstruktur sinnvoll sind. Und das sind sehr viele. Grob gesagt alles, was man auch als Zahlgleichung hinschreiben kann. **Nur mit der Lösbarkeit sieht es anders aus, da wir ja keine Körperstruktur haben.** Und das bedeutet:

Die Lösungen (von Bestimmungsgleichungen) sind in der Regel fallspezifisch zu bestimmen. Etwas Vergleichbares etwa für die p-q-Formel für quadratische Gleichungen ist nicht zu erwarten.

Zusätzlich ist zu beachten, dass die Multiplikation nicht kommutativ ist und man daher in Produkten sorgfältig auf die Reihenfolge zu achten hat.

(4.5.26) Beispiel: M=$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$. Dann kann man Gleichungen folgender Art formulieren

$$X^2=XX=M \quad \text{oder} \quad 3X^2-2MX+2id=0 \quad \text{oder} \quad (X+M)^{-1}MX=1$$

Gesucht ist jeweils eine reelle 2x2-Matrix X, die die formulierte Gleichung erfüllt.

(4.5.27) Versuchen wir zur Illustration einmal die erste Gleichung zu lösen. **D.h wir suchen nach Wurzeln der (gegebenen) Matrix M.**

X$\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ bedeutet, dass X die folgende Form haben muß:

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mit a,b,c,d} \in \mathbb{R} \quad \text{gesucht.}}$$

(Sind diese 4 Zahlen bekannt, so ist auch X bekannt!) Zunächst berechnen wir X^2 per Matrixmultiplikation. $X^2=\begin{pmatrix} aa+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+dd \end{pmatrix}$. Die beiden Matrizen XX und M sind genau dann gleich, wenn ihre 4 Komponenten übereinstimmen. Das gibt uns folgende 4 Bestimmungsgleichungen für a,b,c,d:

$a^2 + bc = 4$ ab+bd=3 ac+cd=5 $bc+d^2 = 4$	Die weitere Rechnung erfolgt wieder in $\mathbb{R}$. Allerdings liegt ein nichtlineares Gleichungssystem vor.

Da bc zweimal auftritt, subtrahieren wir (1) und (4). Das ergibt $a^2 - d^2 = 0$. Hieraus folgt: (a+d=0 oder a-d=0). Oder d=εa mit $\varepsilon = \pm 1$. Jetzt eliminieren wir d:

$a^2 + bc = 4$ ab+$\varepsilon ba = 3$ ac+$\varepsilon ca = 5$	oder	$a^2 + bc = 4$ ab(1+ε) = 3 ac(1+ε) = 5	$\varepsilon = -1$ entfällt! $\boxed{d=a}$ Also:	$a^2 + bc = 4$ 2ab= 3 2ac= 5

Die letzten beiden Gleichungen ergeben 5b=3c. Elimination von c gibt

$a^2 + \frac{5}{3}b^2 = 4$ 2ab=3	oder $a^4 - 4a^2 + \frac{15}{16} = 0$	$a^2 = \frac{15}{4}$ oder $a^2 = \frac{1}{4}$

Das gibt 4 zulässige Werte für a. Durch Rückeinsetzen erhält man die übrigen Komponenten. Insgesamt sind daher 4 Lösungen X, also Wurzeln der Matrix M, zu erwarten. Wir erhalten folgende 4 Matrizen:

$$\boxed{X_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}}$$

Durch Ausmultiplizieren verifiziert man unmittelbar, dass dies wirklich Lösungen von X^2 =M sind. Beachten Sie: Es gibt hier 4, nicht wie in dem Zahlkörper $\mathbb{C}$ genau 2 Quadratwurzeln.

(4.5.28) Der Lösungsweg, den wir in unserem Beispiel gegegangen sind, ist typisch. Über einen geeigneten Ansatz wandelt man die Matrixgleichung in ein Gleichungssystem für die Komponenten um. Damit ist man im Rechenbereich des Körpers und kann wie üblich rechnen. Die Wurzel aus einer 3×3 Matrix ergibt natürlich ein rechnerisch bereits recht hartes Problem: 9 nichtlineare Gleichungen für 9 Unbestimmte! (Man sieht, dass es sinnvoll ist, nach weiteren, besser handhabbaren Methoden Ausschau zu halten. Hier erweist sich besonders die Eigenwerttheorie aus Kap. 12 als nützlich.)

Auch das gefundene Resultat ist typisch: Die Struktur der Lösungsmenge (einer Matrixgleichung) kann sich deutlich von dem unterscheiden, was man aus dem Bereich der Körper gewohnt ist. Man hat ja nur einen Ring.

(4.5.29) Hierzu - Ringstrukur! - noch ein Beispiel: Die Matrixringe können Nullteiler enthalten. Aus MX=0 muß keineswegs folgen, dass einer der beiden Faktoren Null ist. Etwas genauer:

Angenommen M ist invertierbar. D.h. es gibt die zugehörige inverse Matrixabbildung M^{-1}. Dann können wir die Gleichung wie üblich von links damit multiplizieren und finden

$$M^{-1}(MX) = (M^{-1}M)X = \mathbb{I}X = X = 0 \qquad \text{Da } M^{-1}0 = 0.$$

Dabei soll $\mathbb{I}$ die Einheitsmatrix bezeichnen. Ergebnis: Ist M invertierbar (formal M$\in Gl(n)$), dann folgt aus MX=0 automatisch X=0.

Aber was ist, wenn M nicht invertierbar, kein Automorphismus ist?

(4.5.30) Das folgende Beispiel ist leicht zu rechnen und zeigt eine Vielzahl illustrativer Phänomene.

$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	Welche X erfüllen $MX=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$??	Ansatz $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$MX=\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$ *Es* folgt:	a+2c =0 b+2d= =0 2a+4c =0 2b+4d =0	Ein **lineares** 3×4 − *System.* (3) und (4) sind abhängig,
c und d sind frei wählbar. Dann folgt a=-2c und b=-2d. **Das gibt die Lösungsschar:**		

$$\boxed{X=X(c,d)=\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}}$$

Man verifiziert sofort, dass für all diese X tatsächlich MX=0 gilt.
Aber was ist dann XM? Man findet

$$XM = (c+2d)\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

Und das ist ungleich Null, es sei denn c+2d=0. In diesem speziellen Fall hat man

$$X = X(-2d,d) = d\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und XM=MX=0.}$$

Was bleibt offen? Bestimmen Sie alle Y mit YM=0.

(☐ F.) Bestimmen Sie alle 2×2-Matrizen X, die eine der folgenden Gleichungen erfüllen ($\mathbb{I}_2$ Einheitsmatrix, $\mathbb{I}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) :

$$X^2 = 0 \quad , \quad X^2 = \mathbb{I} \quad , \quad X^2 = X$$

Was ist anders als im Zahlfall?

(☐ F.) Bestimmen Sie eine 3×3 Matrix X mit $X^3=0$, aber $X^2 \neq 0$.

4.4.5c Matrizen als Entwicklungsoperatoren

(4.5.31) Die Automorphismengruppe Aut(V) operiert im Sinne von Kapitel 3.3 von links auf dem Vektorraum V. Entsprechendes gilt von Gl(n). Wählt man jetzt ein festes Element $\lambda \in$Aut(V) und betrachtet die davon erzeugte Untergruppe E(λ)=$\{\lambda^n|n \in \mathbb{Z}\}$, dann erhält man die Beschreibung eines Entwicklungsprozesses in V, wie sie in Kap. 3.3.5c eingeführt wurde.

(4.5.32) Also: Die Operation wird auf E(λ) eingeschränkt, was eine Darstellung der Gruppe $\mathbb{Z}$ mit ihrer Vorgänger-Nachfolger-Strukur in den Automorphismen (als winzige Teilmenge aller bijektiven Abbildungen von V) ergibt:

$$(\mathbb{Z}, n \mapsto \lambda^n, Aut(V))$$

Interessant sind die hiervon erzeugten Bahnen B($\vec{x}_0$)=$\{\vec{x}_n|\vec{x}_n = \lambda^n\vec{x}_0\}$ Diese Bahnen lassen sich auch rekursiv über $\vec{x}_{n+1} = \lambda(\vec{x}_n)$ und $\vec{x}_{n-1} = \lambda^{-1}(\vec{x}_n)$ erzeugen. Die Bahnen sind meist als geometrische Figuren in V gut interpretierbar. Jede Bahn ist eine Folge diskreter Punkte. Natürlich kann man die Operation auch auf Figuren ausdehnen.

(4.5.33) Das Besondere an den hier vorliegenden Entwicklungsgesetzen ist einmal, dass die Fortentwicklung über einen linearen Operator erfolgt, der zum anderen unabhängig von n ist.

(4.5.34) Neben den Bahnen sind die Stabilisatoren (von Punkten) von Interesse. Das sind jeweils Untergruppen von $\mathbb{Z}$ und die sind uns alle bekannt. Wir sollten drei Fälle unterscheiden:

a) Der Stabilisator ist ganz $\mathbb{Z}$, dann ist die Bahn einpunktig und stationär. Der Ursprung von V ist stets ein Beispiel hierfür, er bleibt immer stabil.

b) Der Stabilisator ist gleich der zweiten trivialen Untergruppe, nämlich $\{0\}$. Dann sind alle Punkte der Bahn verschieden, sie entwickelt sich geometrisch von $-\infty$ nach $+\infty$. Oder schließlich

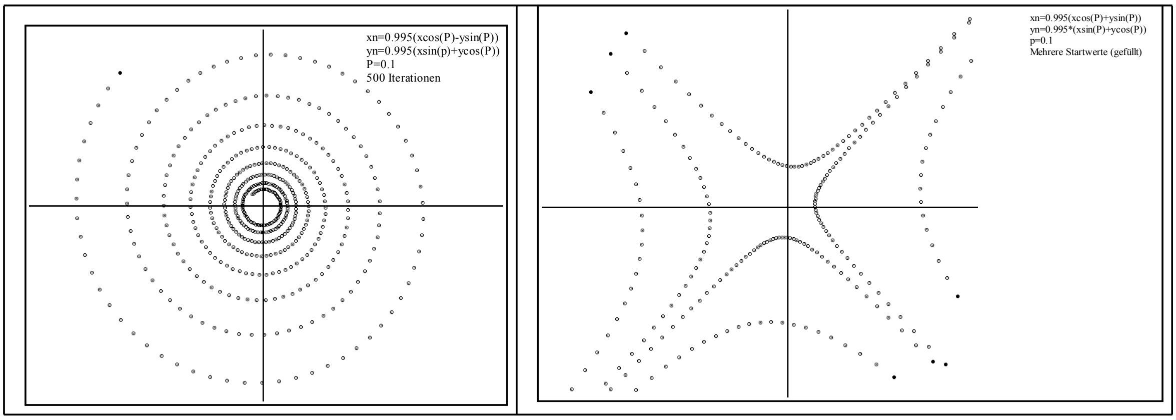
c): Die Bahn ist gleich einer (additiven) zyklischen Untergruppe ($\mathbb{Z}$/(k),+) mit k=2,3,.... Dann ist $\lambda^k(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$ Hieraus folgt sofort, dass die Bahn aus genau k Elementen besteht, auf denen der Entwicklungsprozeß periodisch abläuft. (Man sagt auch gerne zyklisch!) Beispiel: Drehung in der Ebene um $2\pi/n$ für n=2,3,4,....

Weitere Möglichkeiten sind unter den gegebenen Umständen nicht vorhanden.

(4.5.35) Für Konkretisierungen des Gesagten arbeitet man günstig mit V=$\mathbb{R}^2$ so dass λ eine 2×2-Matrix bildet.

(☐ F.) Führen Sie derartige Konkretisierungen durch. Wählen Sie zunächst eine Drehmatrix R(α) mit geeignet gewähltem α. Unterscheiden Sie: α klein, etwa 0.01, und α groß, vielleicht $\alpha = 1$. Dann $\alpha = \frac{\pi}{5}$ und $\alpha = \frac{\pi}{100}$.

Schreiben Sie ein kleines Computerprogramm, das ihnen die Entwicklung der Bahnen optisch zeigt. Den Anfangswert $\vec{x}_0$ sollte man möglichst mit der Maus vorgeben können. Die nachfolgenden Bilder zeigen, wie die Ergebnisse aussehen können. Sie zeigen zwei charakteristische Fälle. Das erste Bild zeigt einen Teil einer Bahn, wogegen das zweite Teile von 7 Bahnen gibt.



Variieren Sie jetzt ihre Matrix. Wählen Sie etwa $\lambda = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, dann weitere Matrizen.

Überzeugen Sie sich, dass es insgesamt nur ganz wenige Typen von so erzeugbaren Entwicklungsabläufen (in $\mathbb{R}^2_K$) gibt. Versuchen Sie, dafür eine sinnvolle Klassifikation zu entwickeln. In Kap.12 wird das Problem vollständig und systematisch gelöst werden.

(☐ F.) Sei M invertierbare n×n-Matrix, also aus Gl(n). Was läßt sich dann allgemein über Lösbarkeit und Lösung der linearen Gleichung $M\vec{x} = \vec{b}$ sagen?

4.5 Basiswechsel

4.5.1 Das allgemeine Szenenbild

(5.1.1) Wir kommen zum vierten und letzten der einführend genannten Themen. **Wie beschreibt man Basiswechsel in einem Vektorraum?** Im Beispiel (oo) sind wir ja bereits auf dieses Problem gestoßen.

(5.1.2) Im Bereich physikalischer und geometrischer Anwendungen bedeutet Basiswechsel, dass man ein und dieselbe Größe, die durch einen geometrischen Pfeil dargestellt wird, von zwei Bezugssystemen aus beobachtet und die Meßdaten, also die Koordinatenvektoren, zwischen den beiden Beobachtern ausgetauscht und ineinander umgerechnet werden. Das sieht zunächst wie ein anderes Problem aus als die quantitative Beschreibung linearer Abbildungen. Aber wir werden sehen, dass sich auch hier eine Matrixdarstellung ergibt.

(5.1.3) Wir haben es mit folgendem **Szenenbild** zu tun:

	Gegeben:
♦	Ein fester Rechtsvektorraum V über K mit dimV=n<∞.
♦	Zu V zwei Basen a und b, als die **alte** und die **neue** Basis bezeichnet. Die zugehörigen Koordinaten werden durch die Indizes A und N charakterisiert.
♦	Ein beliebiger Vektor $\vec{x}$ aus V mit Koordinatenvektoren $\vec{x}^A$ und $\vec{x}^N$.

Wie imer ist es wichtig, sich dieses Szenenbild einzuprägen und in späteren Problemsituationen zu erkennen, dass es vorliegt. Im Rahmen physikalischer Argumentationen tritt es sehr häufig auf. Und jetzt das zugehörige entstehende **Problem:**

♦	$\vec{x}$ hat bezüglich jeder Basis eine Darstellung. Also: $\vec{x} = \Sigma \vec{a}_i x_i^A = \Sigma \vec{b}_k x_k^N$
♦	Die Darstellungsabbildungen ergeben die Koordinatenvektoren $\vec{x}^A$ und $\vec{x}^N$. Beides sind n-Tupel, genauer Spaltenbvektoren.
♦	**Gesucht: Eine Formel, die $\vec{x}^N$ duch $\vec{x}^A$ ausdrückt.**

(5.1.4) Die angegebene Formel für $\vec{x}$ legt es nahe, **Koeffiziententervergleich** anzustreben. Da wir eine Formel für die neuen Koordinaten N wollen, müssen wir den rechten Term mit der neuen Basis b, also $\Sigma \vec{b}_k x_k^N$ unverändert lassen.

(5.1.5) Da b eine Basis ist, können wir damit jeden Vektor - insbesondere die Vektoren $\vec{a}_i$ der "alten" Basis eindeutig darstellen. Es gibt also n Gleichungen

$$\boxed{\vec{a}_i = \Sigma \vec{b}_k \mathrm{T}_{ki} = \vec{b}_1 \mathrm{T}_{1i} + \vec{b}_2 \mathrm{T}_{2i} + ... + \vec{b}_n \mathrm{T}_{ki} \qquad \text{für i=1,2,...,n}}$$

die man sich verschaffen muß. Die so eingeführte Koeffizientenmatrix T ist hierdurch eindeutig bestimmt. Jetzt können wir die Rechnung ausführen. Oben geben wir die Indexform, unten die Matrixform der Rechnung. Im Matrixfall sind die Basen als **Zeilenvektoren** zu interpretieren!

$$\begin{array}{lllll} \vec{x} = \Sigma \vec{a}_i x_i^A = \Sigma_i \left(\Sigma_k \vec{b}_k T_{ki} \right) x_i^A & = \Sigma_{ik} \vec{b}_k T_{ki} x_i^A & = \Sigma_k \vec{b}_k \Sigma_i T_{ki} x_i^A) & = \Sigma_k \vec{b}_k x_k^N \\ \vec{x} = a\vec{x}^A \quad = (bT)\vec{x}^A & = bT\vec{x}^A & = b(T\vec{x}^A) & = \mathrm{b}\vec{x}^N \end{array}$$

(5.1.6) Koeffizientenvergleich gibt die gewünschte Formel, die die alten in die neuen Komponenten umrechnet:

$$\boxed{\boxed{\vec{x}^N = T\vec{x}^A.}}$$

Erneut ist der Grund vieler Konventionen, dass am Ende eben diese Matrixformel herauskommem soll.

(5.1.7) Das ist **e**in wichtiges Resultat, so wichtig, dass wir den Sachverhalt erneut als **Kochrezept** präsentieren.

♦	Der Koordinatenvektor $\vec{x}^N$ zum neuen System wird durch Anwenden der Matrix T auf den Koordinatenvektors $\vec{x}^A$ erhalten. (Neu durch alt)
♦	Die "Transformationsmatrix" T erhält man, indem man die Vektoren der alten Basis durch die neue ausdrückt. (Alt durch Neu!)

Die Bezeichnungen "alt" und "neu" sind vornehmlich eingeführt, um als gedächtnistechnische Hilfen zum Merken dieses Sachverhaltes zu dienen

(5.1.8) Nochmals das Ganze in Diagrammform (L sind wieder die Linearkombinationsabbildungen):

$$\begin{tikzcd} & \begin{array}{c} \text{V mit Basen a und b} \\ \vec{x} = \Sigma_i \vec{a}_i x_i^A = \Sigma_i \vec{b}_i x_i^N \end{array} & \\ \vec{x}^A \arrow[ur, "L_a"] \arrow[rr, dashed, "T"] & & \vec{x}^N = \mathrm{T}\vec{x}^A \arrow[ul, "L_b"'] \end{tikzcd}$$

(5.1.9) Damit kann man T alternativ auch als lineare Abbildung $\mathrm{V} \to V$ darstellen oder interpretieren:

$$\boxed{\mathrm{T} = \mathrm{L}_b^{-1} \circ \mathrm{L}_a}$$

(5.1.10) Man nennt T die Transformationsmatrix des Basiswechsels. Man erhält T entweder über (4.6.5) oder über (4.6.9). Ist T einmal bekannt, so folgt damit alles Weitere. Insbesondere kann man mit Hilfe von $\vec{x}^N = \mathrm{T}\vec{x}^A$ alle neuen Koordinatenvektoren aus den alten ausrechnen. Anders ausgedrückt: Der zu "Neu" gehörige Beobachter kann mit Hilfe von T die Meßergebnisse von "Alt" mit seinen eigenen vergleichen, sie in seine Beschreibungsform übersetzen. Beachten Sie auch hier wieder: Jede der "horizontalen" Gleichungen liefert eine Spalte von T, keine Zeile!

(5.1.11) Die Transformationmatrix ist stets invertierbar, wie (4.6.9) zeigt. Oder gleichwertig: Natürlich kann man umgekehrt die neue Basis durch die alte ausdrücken. (Das ist übrigens nicht selten eine nützliches Verfahren, sich eine inverse Matrix T^{-1} konkret zu verschaffenl b=aT^{-1})

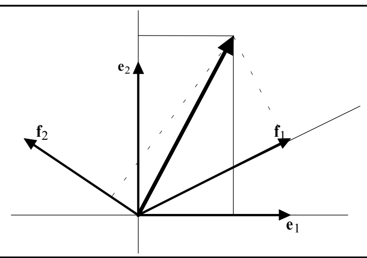
☐ () Beweisen Sie mit Hilfe des Indexkalküls, dass aus a=bT tatsächlich b=Ta folgt.

(5.1.12) Nochmals: Die Gleichung $\vec{x}^N = T\vec{x}^A$ ist als Endergebnis erwünscht: Die Transformationsmatrix T soll diese Gleichung erfüllen (neue Koordinaten aus den alten ausrechnen). Damit das der Fall ist, muß man bei der Definition von T gerade die umgekehrte Richtung (alte Basis durch neue) wählen. Erneut muß man sich daher etwas merken. Vgl. das Kochrezept aus (4.6.7): T erhält man, indem man die alte Basis durch die neue ausdrückt.

(5.1.13) Die Gleichung $\vec{x} = \Sigma\vec{a}_i x_i^A = \Sigma\vec{b}_k x_k^N$ schließlich liefert den inhaltlich-physikalischen Gehalt des Basiswechselkonzeptes: Ein und dieselbe absolute Größe $\vec{x}$ wird mit Hilfe von 2 Basen dargestellt, auf zwei Weisen quantifiziert. Die jeweilige Rollenverteilung bestimmt, was durch was auszudrücken ist. Oder welche Koordinante unabhängig und welche abhängig sein sollen.

(5.1.14) Bitte beachten Sie den großen konzeptionellen Unterschied zwischen den beiden äußerlich nicht zu unterscheidenden Gleichungen (4.3.7) und der jetzigen Gleichung (4.6.6). Im ersten Fall wird ein Vektor $\vec{x}$ in einen zweiten Vektor $\vec{y}$ transformiert, umgewandelt und dieser Sachverhalt wird durch Zahlen beschrieben. Jetzt wird ein und derselbe Vektor $\vec{x}$ auf zwei Weisen quantifiziert und die Gleichung (4.6.6) rechnet die eine Quantifizierung in die andere um. Die Bezeichnung Transformationsmatrix für T ist daher etwas irreführend, prägnanter wäre Beschreibungswechselmatrix .

(5.1.15) Noch ein einfaches Beispiel, das die Zusammenhänge zeigt. In der figur ist ein und derselbe Vektor $\vec{x}$ in zwei Koordinatensystemen dargestellt. eines ist nicht kartesisch.



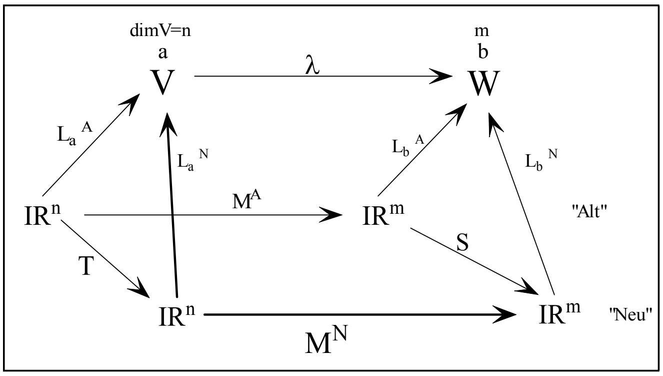
Man schätzt:
$\vec{x} \approx \vec{e}_1 0.7 + \vec{e}_2 1.2$
$\approx \vec{f}_1 1 + \vec{f}_2 0.2$
Bestimmen Sie T
über eine Schätzung.
Damit $\vec{x}^N$ bestimmen.

4.5.2 Die Transformation der beschreibenden Matrix

(5.2.1) Man kann den Umfang des soeben behandelten Problems noch ausdehnen. Angenommen, wir haben eine lineare Abbildung $\lambda : V \to W$ und nehmen in **beiden Räumen** einen Basiswechsel vor. Was geschieht dann mit der beschreibenden Matrix? Später wird sich zeigen, dass dies eine häufig auftauchende Problemsituatiuon darstellt.

(5.2.2) Erneut erweist sich die Nützlichkeit der Verlaufsdiagramme: Wir haben es hier mit vielen zusammenwirkenden strukturerhaltenden Abbildungen zu tun und uns interessieren Formeln zwischen diesen Abbildungen. Arbeitet man mit einem Verlaufsdiagramm, so stehen die gesuchten Zusammenhnge gleichsam von allein da, sind nur noch abzulesen.

(5.2.3) Wir zeichnen das Szenenbild daher sofort in der Diagrammform auf. Überzeugen Sie sich, davon, dass nichts Zusätzliches zu sagen ist. Das Diagramm erklärt alles und erfaßt das Problem vollständig.



(5.2.4) Auch die Aufgabe ist klar: Die *neue* beschreibende Matrix M^N ist durch die alte M^A auszudrücken.

(5.2.5) Beachten Sie noch: In dem Diagramm findet sich oben die koordinatenfreie "absolute" Beschreibung, unten finden sich die beobachterabhängigen Quantifizierungen. Oben Rechtsräume, unten Linksräume.

(5.2.6) Alle eingezeichneten Diagramme sind kommutativ. Daher lesen wir das Resultat unmittelbar ab, wobei wir vollständig in der unteren Ebene verbleiben.

> Die **allgemeine Tansformationsformel** für die beschreibende Matrix einer linearen Abbildung lautet:
> $$M^N = SM^AT^{-1}$$
> T Transformationsmatrix für V und S die für W.

(5.2.7) D.h. mit Hilfe der Transformationsmatrizen für die beiden Räume und einer Matrixproduktbildung können wir unmittelbar die beschreibende Matrix M^N bestimmen, die der neuen Beobachter verwenden muß.

(5.2.8) Vielfach ist V=W. Dann wählt man in der Regel in beiden Räumen dieselben Basen, also S=T. In diesem Fall lautet die Formel $M^N = TM^AT^{-1}$.

(□ **F.**) Sei V=$\mathbb{R}^2$ und $\lambda = R(\varphi)$ eine Drehung um den Winkel φ. Die alte Basis sei die kanonische Basis e. Als neue Basis f nehmen wir eine um δ gegen e gedrehte kartesische Basis. Wie sieht $R^N(\varphi)$ aus? Einmal rechnerisch und einmal unmittelbar durch Verständnis.

(5.2.9) Da manche Autoren unser T mit T^{-1} bezeichnen, sollte man immer sehr genau auf die jeweiligen Rollen achten: Welche Basis wird durch welche ausgedrückt? Ist es die hier gewählte Konvention, die von der Mehrheit der modernen Physikbücher benutzt wird, oder eine andere?

(5.2.10) Man kann die Formel $M^N = SM^AT^{-1}$ auch auf weitere - und wenn man will rechenaufwendige - Weisen herleiten, etwa mit Hilfe der Basisvektoren. Aber stets handelt es sich um irgendwelche weitgehend festgelegte Manipulationen im oben gegebenem Diagramm.

(□ F.) Beweisen Sie (4.6.21) über das Kochrezept (4.3.20)

(5.2.11) In physikalischen Problemen taucht die Transformationsaufgabe auch in der folgenden Einkleidung auf:

> Man hat eine Problemsituation, wählt ein seinem Wissensstand gemäßes Koordinatensystem und arbeitet damit. Dann überlegt man sich, dass es ein geeigneteres Koordinatensystem geben muß, das man aber noch nicht kennt. Dieses neue Koordinatensystem bestimmt man mit Hilfe des gewählten "alten" Koordinatensystems. Hat man das bessere System (= neue Basis) gefunden, so muß man alle bisherigen Beschreibungsgrößen in die neue Form bringen, sie transformieren, was mit Hilfe unserer Formeln für alle geometrischen Pfeile und alle Homomorphismen bereits leicht möglich ist.

(5.2.12) Für die spezielle Relativitätstheorie ist die beschriebene Beobachterwechselproblematik grundlegend. Wir gehen darauf in Kap 10 genauer ein. Ebenso liegt dieses Konzept der eigenwerttheorie zugrunde.

(□ F.) **Beherrschen Sie den Formalismus?** Dann sollten sie die folgenden Fragen beantworten können :

> ⋆ Was für Objekte werden durch Hom_K(V,K) beschrieben? Welche Dimension hat dieser Vektorraum? Wie sehen die zugehörigen beschreibenden Matrizen aus? Wie transformieren sich diese Matrizen unter Basiswechsel (neu durch alt)? Wie schreibt sich die Basiwechseltransformation im Indexkalkül? Gesucht sind die formalen Antworten ohne irgendwelche Identifikationen.

Antwort: Die beschreibenden Matrizen sind Zeilenvektoren. Da W=K^1 ist mit fester Basis, folgt S=$\mathbb{I}_1$ = (1)=Einheitsmatrix. Und das gibt das Transformationsgesetz $\lambda^N = \lambda T^{-1}$. Diesem Gesetz, das Zeilenvektoren transformiert, werden wir in Kap.5 erneut begegnen. Im Indexkalkül schreibt sich das Transformationsgesetz

$$\lambda_i^N = \Sigma_k \lambda_k^A T_{ki}^{-1} = \Sigma_k T_{ki}^{-1} \lambda_k^A$$

In der letzten vorletzten Form ist die Reihenfolge der Faktoren "falsch": Die Matrix sollte links von den Koordinaten stehen. Da der Körper kommutativ sein soll, können wir die beiden Faktoren vertauschen und erhalten die letzte Form Aber jetzt ist die Indexreihenfolge ist gestört. Zwischen den beiden k-s steht jetzt der laufende Index i. Wir werden bald sehen, wie man das korrigiert. Schreiben sie die letzten Summen ruhig einmal aus.

(5.2.13) Unser Hauptresultat b=aT läßt sich auch wie folgt interpretieren: T ist invertierbar, also aus der linearen Gruppe $\mathrm{Gl}_K(\mathrm{n})$. Weiter Sei $\mathcal{B}$=$\mathcal{B}$(V) die Menge aller Basen von V.

Dann operiert $\mathrm{Gl}_K(\mathrm{n})$ von rechts auf der Basismenge $\mathcal{B}$. Aus einem Gruppenelement, also der Transformationsmatrix und einer Basis wird eine neue Basis! Dass eine Rechtsoperation vorliegt, sieht man sofort, wenn man das zugehörige Verlaufsdiagramm hinschreibt. Meist benutzt man in der Physik Einschränkungen dieser Operation auf geeignete Untergruppen, speziell auf die Drehgruppe.

☐ Erstellen Sie selbst das Übersichtsschema für Kapitel 4