1.3 Partitionen und Äquivalenzrelationen
1.3.0 Vorbemerkung

(3.0.1) Ein wichtiges Hilfsmittel wissenschaftlichen Denkens ist das **Klassifizieren** von Elementen einer Menge und die darauf basierende **Abstraktion einer Eigenschaft**, die durch eine solche Klassifikation repräsentiert wird. Die Worte deuten bereits die Art des Vorgehens an: Man hat eine (tendenziell schlecht überschaubare) Menge und sortiert deren Elemente in überschaubarere Klassen (=Teilmengen einer bestimmten Art) mit Hilfe einer unterscheidenden Eigenschaft.

(3.0.2) **Beispiele**: Im mathematischen Bereich klassifiziert man Mengen nach der *Anzahl ihrer Elemente*. In der Geometrie Teilmengen des E^3 nach *Kurven, Flächen, Körpern und sonstigen Teilmengen.* Und in diesem sonstigen Rest befinden sich die in den vergangenen Jahren immer wieder als Computerbild gezeigten Objekte, die mit Attributen wie *fraktal*, *chaotisch, seltsam* usw. versehen werden. Bei der Inspektion solcher Bilder sollte die Herausforderung einer verständnisbildenden Klassifikation auf den Studienanfanger wirken wie der Anblick eines Siebentausender auf den angehenden Bergsteiger.

Im Bereich der Chemie klassifiziert man homogene materielle Stoffe nach chemischen Verbindungen wie Wasser, NaCl usw. In der Biologie sortiert man die unüberschaubare Zahl der individuellen Lebewesen nach Arten. Dabei werden die Klassifikationen noch hierarchisch ineinander verschachtelt. Usw.

Im Alltag klassifiziert man Autos nach Herstellern oder Typen. Personen werden nach ihrem Beruf oder ihrer Nationalität klassifiziert. Usw.

Bei der Flugparabelaufgabe aus 1.2.14 haben wir (stillschweigend) die Flugparabeln in drei Klassen eingeteilt: Die erste enthielt alle durch den Ursprung gehenden, die Mauer nicht überwindenden, die zweite alle durch den Ursprung gehenden, die Mauer überwindenden Flugbahnen. Und die dritte den Rest.

Die Worte abac usw. beim Multinomialsatz wurden in (1.6.7) zu Klassen *aller Worte* zusammengefaßt, *die zu demselben alphabetischen Wort* führten.

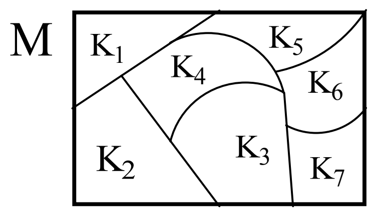
Das sollte reichen, um die enorme Spannweite zu verdeutlichen, die der Klasssifikationsfrage zukommt.

1.3.1 Partitionen

(3.1.1) Wir beginnen damit, die mengentheoretische Struktur zu formalisieren, durch die **fertige** Klassifikationen beschrieben werden. Und zwar geben wir die zugehörige Definition in drei Formen, einer verbalen kommunikationsorientierten, einer anschaulich - vorstellungsorientierten und einer operativ - formalen. Letztere ist für die eigentliche mathematische Arbeit geeignet. Auf das Problem der Eigenschaftsabstraktion gehen wir in 1.3.4 ein.

Definition (verbale Form):
Eine *Partition* einer Menge M ist eine disjunkte Zerlegung von M in nichtleere Teilmengen, die *Klassen* (der Partition) genannt werden.

Anschauliche Form



M ist in 7 Klassen K_1-K_7 zerlegt.

(3.1.2) Die Klassen bilden zusammen eine neue Menge, die Klassenmenge oder Partition. Diese neue

Menge ist es, die uns interessiert. Jetzt die **mathematische** Definition der Struktur:

> **Definition** (formale und arbeitsorientierte Form):
> Sei M $\neq \emptyset$ eine Menge. Dann heißt $\mathcal{P}$ (genau dann) eine *Partition von M,* wenn gilt
> (P.0): $\mathcal{P} = \{p, q, ...\} \subset \mathfrak{P}(M)$ ist Menge von Teilmengen von M.
> (P.1) Für alle p$\in \mathcal{P}$ gilt p$\neq \emptyset$.
> (P.2) Für p,q$\in \mathcal{P}$ und p$\neq q$ gilt p$\cap q = \emptyset$.
> (P.3) Es gilt $\cup_{p\in\mathcal{P}} p = M$.

Die Teilmengen p$\in \mathcal{P}$ nennt man die *Klassen* von P. Die Anzahl der Klassen ist beliebig, kann unendlich sein.

(3.1.3) Es dürfte offensichtlich sein, dass und wie die verbale und die anschauliche Definition den Inhalt von (P.0-3) wiedergeben. Das hierarchische Niveau der Potenzmenge machen wir in diesem Teilkapitel durch den Schrifttyp kenntlich.

(3.1.4) Einige Beispiele zum Einstieg:

- a) M={1,2,3,4}. $\mathcal{P}$ ={{1,3},{2,4}} ist eine Partition von M in zwei Klassen.

Man sieht, dass $\mathcal{P} \subset \mathfrak{P}(M)$ gilt. Oder auch $\mathcal{P} \in\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$.

Die Menge $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ hat für unser M gerade 2^{16}=65.536 Elemente. Darunter sind nur 15 Partitionen, wie man sich durch Aufzählung leicht überzeugt. D.h. nur sehr wenige Teilmengen von $\mathfrak{P}(M)$ sind Partitionen von M.

- b) Jede Menge M besitzt zwei triviale Partitionen, $\mathcal{G}$={M} und $\mathcal{A} = \{\{m\}|m \in M\}$. Die Partition $\mathcal{A}$ nennen wir auch die *atomare Partition von M.* Ihre Atome sind die kleinsten als Klassen zulässigen Teilmengen, die einelementigen Mengen. Natürlich kann man über die bijektive Abbildung $m \mapsto \{m\}$ diese Partition mit der Ausgangsmenge M identifizieren. Meist ist es besser, das **nich**t zu tun!
- c) Jede nichttriviale Teilmenge A von M erzeugt die zweielementige Partition {A,A′} von M, wobei A′ das Komplement von A in M ist. Die die Teilmenge A definierende Eigenschaft ist erfüllt (A) oder sie ist es nicht (A′).
- d) {J_k| J_k=]k,k+l], k$\in \mathbb{Z}$} ist eine Partition von $\mathbb{R}$ in Intervalle der Länge 1. Beachten Sie, wie die Intervalle aneinander grenzen, um die Disjunktheit (P.2) zu sichern.

(3.1.5) Anmerkung: Partitionen sind keineswegs die einzigen interessanten Teilmengen von $\mathfrak{P}(M)$, auch nicht unter dem Aspekt der Klassifikation. Aber sie sind zunächst die wichtigsten. Läßt man etwa (P.2) fort, erhält man etwas, das man suggestiv Überdeckung von M zu nennen pflegt. Und wenn man sagt, man klassifiziere Funktionen nach ihrer Glattheit, dann denkt man an eine andere Struktur, die man eher mit dem Stichwort "Filter" verbinden könnte.

□ Überlegen Sie selbst, was dann anstelle von (3.1.2) stehen könnte.

1.3.2 Parametrisierungen von Partitionen

(3.2.1) Partitionen werden günstig über zugehörige Parametrisierungen vorgegeben, weil man die Klassen mit Hilfe der Namensgebung meist besser handhaben und man über die Wahl der Bezeichnungen unmittelbar inhaltliche Bedeutungen einbauen kann.

> **Definition**: Sei J eine Indexmenge und $\mathcal{P}$ eine Partition von M.
> Eine *Parametrisierung von P* ist dann eine Abbildung
> $\pi_{\mathcal{P}} = (J, j \mapsto P_j, \mathfrak{P}(M))$, für die $\boxed{\mathcal{P} = Bild\pi_{\mathcal{P}}}$ gilt.

(3.2.2) Wann liefert umgekehrt eine Abbbildung π :J$\rightarrow \mathfrak{P}(M)$ eine Parametrisierung einer Partition von M?

(3.2.3) Die Definition (3.1.2) ist so formuliert, dass man nur wenig zu modifizieren hat, um eine Antwort zu erhalten. Also :

Bildπ ergibt eine Partition von M, wenn gilt:
(P.0′) : J ist nicht leer und $\pi = (J, j \mapsto P_j, \mathfrak{P}(M))$
(P.1′) : Für alle j$\in J$ gilt $P_j \neq \emptyset$
(P.2′) : Aus $P_j \neq P_k$ folgt $P_j \cap P_k = \emptyset$
Achtung: Nicht etwa aus j$\neq$k.
(P.3′) : $\cup_{j\in J} P_j = M$.

(3.2.4) In einer solchen Parametrisierung kann die Indexmenge J auf unterschiedliche Weise Bedeutung erhalten. Sie kann ein reines *Namensgebungssystem* für die Klassen liefern, sie kann aber auch die Klassen charakterisieren, indem sie das zu abstrahierende Merkmal beschreibt, oder sie kann so etwas wie ein Meßresultat wiedergeben, mit dessen Hilfe die Klassifikation bewirkt wird. Wir geben zwei Beispiele, wie man in konkreten Fällen auf natürliche Weise eine Parametrisierung einer Partition erhält.

(3.2.5) Als Beispiel für die erste Möglichkeit zerlegen wir die natürlichen Zahlen wie folgt in zwei Klassen: N_g ={0,2,4,....} und N_u ={1,3,5,...}. Inspektion der Klassen zeigt uns das die Klassen erzeugende Merkmal: *gerade* bzw. *ungerade*. Genauer sind das die beiden möglichen Werte oder Ausprägungen des Merkmales! (Das Merkmal selbst könnte man Parität nennen.) Wir führen eine Indexmenge I={g,u} ein und die zugehörige Parametrisierung (I.i$\mapsto$N$_i$, $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$) mit aussagekräftiger Indizierung.

(3.2.6) Ein Beispiel für die zweite Möglichkeit: Sei A ein Alphabet und W=W(A) eine nicht leere Menge von aus A gebildeten Worten. Wir klassifizieren die Worte nach ihrem ersten Buchstaben. Für a$\in$A sei K(a) = {w| w beginnt mit a}. Dann haben wir die Abbildung (A,a$\mapsto$K(a),$\mathfrak{P}$(W)). Unter einer kleinen Zusatzforderung ist das eine injektive Parametrisierung einer Partition von W. Der Name ist hier als erster Buchstabe der in der Klasse zusammengefaßten Worte inhaltlich bedeutsam. Man denke an ein Lexikon, das die Worte nach ihren Anfangsbuchstaben sortiert.

☐ Wie sieht die kleine erwähnte Zusatzforderung aus? Die Bedingungen aus (3.2.3) durchgehen!

(3.2.7) Zu einer Parametrisierung $\pi : J \to \mathfrak{P}(M)$ kann man natürlich auch die Restriktion J$\to \mathcal{P} =$ Bild$\pi \subset \mathfrak{P}(M)$ bilden. Auch diese Abbildung ist eine Parametrisierung von $\mathcal{P}$. Sie ist surjektiv.

1.3.3 Abgeleitete Größen einer Partition

(3.3.1) Zu jeder Partition $\mathcal{P}$ von M kann man einige weitere nützliche Größen konstruieren (so wie zu einer Abbildung die Mengen Bild und Graph konstruiert wurden) :

(3.3.2) **Die Klassenabbildung $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ von** $\mathcal{P}$. Darunter versteht man die folgende Abbildung

$\mathcal{K}_\mathcal{P}$=(M,x$\mapsto\mathcal{K}_\mathcal{P}$(x),$\mathcal{P}$) . Hierbei ist $\mathcal{K}_\mathcal{P}$(x) diejenige Klasse aus $\mathcal{P}$, in der x liegt. Wegen (P.3) muss es eine solche Klasse geben und wegen (P.1) ist sie als Klasse eindeutig bestimmt. $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ ergibt eine i.a. nicht injektive Parametrisierung von P. (Injektiv ist sie für die atomare Partition.) Anschaulich suggestiv: $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ ordnet jedem Schüler seine Klasse zu. Manchmal ist es besser, als Wertemenge $\mathfrak{P}(M)$ statt $\mathcal{P}$ zu nehmen.

(3.3.3) Ein **Vertretersystem (von** $\mathcal{P}$) : Darunter versteht man eine Teilmenge V von M mit der Eigenschaft, dass V von jeder Klasse von $\mathcal{P}$ genau ein Element enthält. Die Restriktion von $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ auf V ist daher bijektiv. Ein Vertretersystem liefert offensichtlich eine bijektive Parametrisierung von $\mathcal{P}$ nämlich (V,x$\mapsto\mathcal{K}_\mathcal{P}$(x),$\mathcal{P}$). D.h. jedem Vertreter wird seine Klasse zugeordnet. Die Umkehrabbildung nennen wir v. Also v=($\mathcal{P}$,C$\mapsto$v(C),V). v ordnet jeder Klasse den zugehörigen Vertreter ("Klassensprecher") zu. Offenbar gilt $\mathcal{K}_\mathcal{P}\circ v = id_\mathcal{P}$. Dagegen ist v$\circ\mathcal{K}_\mathcal{P}$ i.a. nicht id$_M$.

Sugesstiv: Schüler$\overset{\mathcal{K}_\mathcal{P}}{\mapsto}$ Klasse $\mapsto$Klassensprecher. Im nichtatomaren Fall gibt es viele Vertretersysteme.

(3.3.4) Die Konstruktion eines Vertretersystems bedeutet, dass man aus jeder Klasse genau ein Element - den Vertreter - auswählt und dass man diese Vertreter sodann zu einer neuen Menge zusammenfaßt. Im Gegensatz zu $\mathcal{P}$ ist V Teilmenge von M, nicht von $\mathfrak{P}(M)$. Das Vertretersystem liefert eine Art Modell der Zerlegung innerhalb von M selbst. Oder auch: v ist Abbildung vom Darstellungstyp. Jede Klasse wird durch genau ein Element aus M vertreten.

(3.3.5) Ein Beispiel: Bei unserer Diskussion des Multinomialsatzes führten wir die Wortmenge $\mathcal{W}_3(4)$ mit 27 Elementen ein. Sie zerfiel in 10 Klassen, wenn man die Worte in alphabetische Reihenfolge brachte. Geben wir diese 10 Klassen einmal an:

{aaa}, {bbb}, {ccc}, {aab, aba, baa}, {aac, aca, caa}, {abb, bab, bba}, {acc,cac, cca}, {bbc, bcb, cbb},

{bcc, cbc, ccb}, {abc, bca, cab, acb, bac, cba}.

Die Anzahl der Elemente der Klasse lieferte gerade unseren kombinatorischen Koeffizienten K. Die 10 alphabetisch geordneten Worte

aaa=a^3, bbb=b^3, ccc=c^3, aab=a^2b, ...,abc

bilden ein zugehöriges Vertretersystem. Beispiele für die Klassenabbildung in diesem Fall:
$\mathcal{K}$(aba)={aab,aba,baa} oder
$\mathcal{K}$(abc)={abc,bac,...} usw. Und für die Vertreterabbildung V({bbc, bcb, cbb})=bbc.

(3.3.6) Im Bereich der Summenzeichensymbolik ermöglicht der Partitionsbegriff die folgende Summenumformung:

Sei M endliche Menge und $\mathcal{P}$ eine Partition von M. Dann gilt
$$\Sigma_{\alpha\in M}\ \ A_\alpha = \Sigma_{c\in\mathcal{P}}\,(\Sigma_{\alpha\in c}\ A_\alpha)$$

☐ Überlegen Sie sich eine einfache Konkretisierung dieser Formel. Formulieren Sie den Inhalt der Formel verbal.

☐ In 1.1.6 haben wir diese Formel stillschweigend benutzt. Spezifizieren Sie das.

(3.3.7) Wir beschreiben jetzt eine wichtige **Konstruktionsmethode für Partitionen**. Das zugehörige Resultat liefert einem in vielen Fällen auf einfache Weise benötigte Partitionen.

Sei f:M→N eine surjektive Abbildung und $\mathcal{Q} \subset \mathfrak{P}(N)$ eine Partition der Wertemenge N. Dann ist $\mathcal{P} = \left\{p |\text{ Es gibt } q \in \mathcal{Q} \text{ mit } p = \overset{-1}{\underline{f}}(q)\right\} = \left\{\overset{-1}{\underline{f}}(q) \mid \mathrm{q} \in \mathcal{Q}\right\}$
eine Partition der Urbildmenge M. Überdies ist q$\mapsto$ $\overset{-1}{\underline{f}}(q)$ eine Parametrisierung der gebildeten Partition $\mathcal{P}$ von M durch die Klassen von $\mathcal{Q}$.

(3.3.8) Man bildet also für die Klassen q aus $\mathcal{Q}$ die Urbilder p(q)=$\overset{-1}{\underline{f}}(q) = \{x | x \in M, f(x) \in q\}$. Und diese Teilmengen von M bilden die Klassen einer Partition von M. Kurz: Hat man eine Partition der Wertemenge, dann induziert diese eine Partition der Urbildmenge. Beachten Sie den Richtungswechsel gegenüber der Zuordnung von f.

☐ Sei M={1,2,...,10} und N={a,b,c}. Für f:M→ N gelte die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	b	a	a	b	a	a	a	c	b	b

Auf N wähle man folgende zwei Partitionen $\{\{a\},\{b,c\}\}$ und $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$. Welche Partitionen entstehen auf M? (Sie müssen inspizieren, dass die Konstruktion wirklich eine Partition und nicht irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{P}(M)$ liefert) Welche weiteren Partitionen gibt es auf N?

☐ Sei s:V→ $\mathbb{R}$ ein Skalarfeld auf einem Konfigurationsraum. (Stellen Sie sich etwa ein Temperaturfeld vor.) Wählen Sie für Bild(s) die atomare Partition. Was für eine Partition von V entsteht gemäß (3.3.7)? Welche physikalisch-geometrische Interpretation haben die Klassen?

(3.3.9) **Beweis** von (3.3.7): Wir müssen (P.1-3) überprüfen.

(P.1): Sei p∈ $\mathcal{P}$ mit p=p(q)=$\overset{-1}{\underline{f}}(q)$ und q∈ $\mathcal{Q}$. q ist als Klasse nicht leer. Etwa y∈q. Da f surjektiv ist, gibt es x∈M mit f(x)=y. Laut Definition ist x∈p(q) und diese Menge ist somit **nicht leer**.

(P.2): Nehme p(q)=$\overset{-1}{\underline{f}}(q)$ und p(r)=$\overset{-1}{\underline{f}}(r) \in \mathcal{P}$. Angenommen x∈p(q)∩p(r). Laut Definition ist dann f(x)∈q und f(x)∈ r. Also f(x)∈q∩r. Da q und r Klassen der Partition $\mathcal{Q}$ sind, folgt q=r. D.h. aber p(q)=p(r) wie gewünscht.

(P.3): Sei x∈M beliebig. Bilde f(x). Das gehört zu einer Klasse q der Partition $\mathcal{Q}$. Also ist x∈p(q) und M ist die Vereinigung aller p(q).

(3.3.10) **Bemerkungen:** 1) Für q wählt man häufig die atomare Partition {{y} | y∈N} von N. Die Klassen der entstehenden Partition von M bestehen dann aus den Lösungsmengen der Gleichungen f(x)=y, wobei y freier Parameter ist. Ordnet etwa f einer Gruppe von Menschen ihr jeweiliges Alter in Jahren zu, dann entstehen Klassen von Personen gleichen Alters.

☐ Welche anderen Zerlegungen der Altersskala könnte man für dasselbe f nehmen?

2) Wir haben auch $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}(x) = \overset{-1}{\underline{f}}\left(\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}(f(x))\right)$. Die Klasse von x∈M ist das Urbild der Klasse von f(x) in N.

3) Ist f nicht surjektiv, so kann man statt f die Restriktion von f auf Bildf nehmen, also gleichsam eventuelle nicht zulässige leere Klassen fortlassen.

4) Hat man eine Partition im Urbildraum M von f:M→ N vorgegeben, so kann man dazu analog eine Partition in N **nicht** konstruieren, da die Bilder der Klassen im Gegensatz zu den Urbildern **nicht disjunkt sein müssen**. Beispiel : M={1,2,3}, N={a,b} , $\mathcal{P}$ = {{1,2},{3}} und f(l)=a, f(2)=f(3)=b. $\underline{f}$ ({1,2})={a,b} =N und $\underline{f}$ ({3})={b}. Aber {{a,b},{b}} ist natürlich keine Partition von N. Nochmals (und das ist zu merken):

Die Partitionskonstruktion aus (3.3.7) läuft entgegengesetzt zur Richtung von f.

1.3.3a Konkretisierung durch ein Beispiel: **Auswertung eines Zufallsexperimentes**

Da der nachfolgende Gedankenversuch in Statistik und Physik zahlreiche Anwendungen besitzt, ist zugehöriges Verständnis sehr nützlich. Am Ende dieses Kapitels lösen wir mit seiner Hilfe ein nicht leichtes Wahrscheinlichkeitsproblem. Im Augenblick geht es mehr um die Fähigkeit, den allgemeinen Formalismus der Partitionen mit konkret inhaltlichen Vorstellungen zu verbinden.

(3.3.11) Es geht um ein sogenanntes Zufallsexperiment. Wir denken uns einen Behälter (eine Urne), in dem sich K Kugeln befinden. Die Menge dieser Kugeln sei (=werde bezeichnet durch) K_m. Die Kugeln seien farbig mit F Farben. Die Menge der auftretenden Farben sei F_m (Der Buchstabe m steht hier immer für Menge=Anzahl).

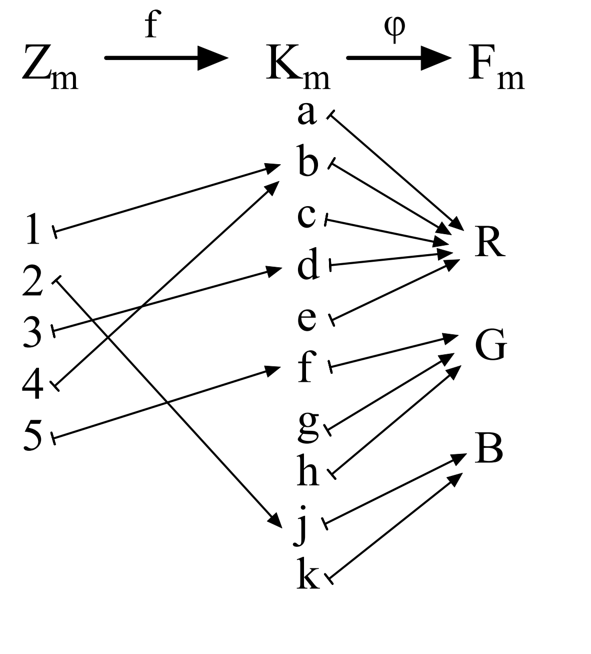
(3.3.12) Jetzt ziehen wir eine zufällig gewählte Kugel heraus, notieren sie und damit auch ihre Farbe und legen sie zurück. Diesen Vorgang wiederholen wir Z-fach. Die Züge numerieren wir und erhalten so die Zugmenge Z_m={1,2,...,Z}. Den gesamten Vorgang nennen wir ein *Experiment.* (Nicht Ziehung, um Einzelzug und Gesamtvorgang besser auseinander zu halten.)

(3.3.13) Zwischen den Elementen der drei Mengen gibt es Beziehungen, die wir durch Abbildungen formalisieren. Die Farbabbildung φ=(K_m,x↦ φ(x),F_m) gibt an, dass die Kugel x der Kugelmenge K_m die Farbe φ(x) hat. Und f=(Z_m,j↦f(j),K_m) gibt an, dass im j-ten Zug die Kugel f(j) gezogen ist. Die Abbildung f legt ein Experiment (genauer: dessen Resultat) vollständig fest. Schließlich beschreibt g=$\varphi\circ f$, welche Farbe dem jeweiligen Zug zuzuordnen ist.

(3.3.14) Für die Menge K_m haben wir eine Partition, die nach den Kugelfarben. Sie entsteht gemäß (3.3.7) aus der atomaren Partition von F_m durch φ. Ihre Klassen $\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{c\})$ bestehen aus allen Kugeln, die die Farbe c haben. Ebenso besteht $\overset{-1}{\underline{g}}(\{c\})$ aus allen Zügen, die eine Kugel der Farbe c liefern. Diese Menge kann leer sein, so dass nicht automatisch eine Partition von Z_m entsteht.

(3.3.15) Der Einschub enthält ein konkretes Beispiel mit weiteren formalen Beschreibungsgrößen und deren inhaltlicher Interpretation.

Beispiel mit F=3 Farben, K=10 Kugeln und Z=5 Zügen.



g=$\varphi \circ f$

♦ Farbpartition von K$_m$:
{{a,b,c,d,e},{f,g,h},{j,k}}

♦ Farbpartition von Z$_m$ über g:
{{1,3,4},{2},{5}}

♦ $\varphi(f) = G$ $\quad \overset{-1}{\underline{\varphi}}(\underline{\varphi}(\{f\}))=\{f,g,h\}$
alle Kugeln ders. Farbe wie f$\in K_m$.

♦ g=$\varphi \circ f$ $\quad \overset{-1}{\underline{g}}(\underline{g}(\{1\}))=\{1,3,4\}$
.....alle Züge, die ders. Farbe wie 1

♦ $\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\underline{g}(\{1\}))=\{a,b,c,d,e\}$
Alle Kugeln, die dieselbe Farbe wie die erste haben.

(3.3.16) Die Farbpartition der Kugeln besitzt die natürliche Parametrisierung durch die Farben, also (F$_m$,c$\mapsto$ $\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{c\}),\mathfrak{P}(K_m)$). Man kann aber auch die Klassenabbildung (K$_m$,x$\mapsto$ $\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{\varphi(x)\}),\mathfrak{P}(K_m)$) bilden. Ein Vertretersystem dieser Partition für das Beispiel des Einschubs ist {a,f,j}.

1.3.4 Eigenschaftsabstraktion

(3.4.1) Bisher hat der Partitionsbegriff rein beschreibenden Charakter. Es sieht so aus, als müsse man die Klassen bereits kennen, bevor man die Zerlegung bildet. **Wie kann man die Klassen selbst finden oder erzeugen?** Und wie erfaßt und beschreibt man die zu abstrahierende Eigenschaft? Hierzu führen wir den Begriff der Äquivalenzrelation ein. Damit ist es möglich, Partitionen zu konstruieren, ohne dass man die Klassen bereits kennt. Das entspricht dem, was man (in Alltag und Wissenschaft) tut, wenn man mit Hilfe geeigneter Eigenschaften Klassifikationen neu bildet und über die Arbeit mit den Klassen letztlich neue Begriffe (zur Charakterisierung der Klassen) abstrahiert. Zur Verdeutlichung der beiden Zugangsmöglichkeiten je ein Beispiel:

(3.4.2) Sie haben eine Menge von Büchern und Zeitschriften und wollen diese nach ihrer Sprache klassifizieren. Dann können Sie vorab eine Liste der potentiellen Sprachen erstellen, für jede einen Ablageplatz (=Klasse) bestimmen und anschließend der Reihe nach alle Bücher auf den zugehörigen Haufen legen. Das Ergebnis ist eine parametrisierte Partition mit der Sprachenmenge als Parametermenge. **Die Klassen waren vor der Bildung der Partition bekannt.**

(3.4.3) Oder aber Sie beginnen mit irgendeinem Buch, eröffnen damit eine Klasse, nehmen dann ein zweites Buch und vergleichen mit dem ersten. Falls dieselbe Sprache benutzt wird, tun Sie es zum ersten Haufen, andernfalls eröffnen Sie eine neue Klasse. Usw. Wichtig ist, dass Sie das nächste Buch nicht etwa mit allen vorher sortierten Büchern vergleichen müssen, sondern jeweils nur mit einem Buch jeder bereits vorhandenen Klasse - einem beliebigen Vertreter. Am Ende haben Sie die **gesuchte Klasseneinteilung ohne Vorkenntnis der Klassen** produziert.

(3.4.4) Das zuletzt beschriebene Verfahren werden wir unter dem Stichwort *Äquivalenzrelation* verallgemeinern und mathematisch fundieren.

(3.4.5) Jetzt zum zweiten Problemkreis: Welche Eigenschaft wird durch das System der Klassen repräsentiert?

(3.4.6) Versuchen Sie selbst für die folgende Klasseneinteilung von M={1,2,3,....,20} herauszufinden, nach welcher Eigenschaft sortiert ist:

p_0={1,2,3,5,7,11,13,17,19} $p_1 = \{9\}$
$p_2 = \{6, 8, 14, 15\}$ $p_3 = \{16\}$ $p_4 = \{12, 18, 20\}$

Die Partition von M ist also {p_0,p_1,p_2,p_3,p_4}. Ausreichend lange Inspektion und Beschäftigung müßten die Antwort offensichtlich machen. Unten werden wir sehen, wie der mathematische Formalismus neben der Klassifikation hier auch das klassifizierende Merkmal liefert.

□ Auch das folgende Beispiel zeigt die Problematik: Sei M endliche Menge mit n Elementen. Weiter sei $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Partitionen von M. Entwickeln Sie eine Klasseneinteilung dieser Partitionen, derart, dass jede Klasse möglichst gleichartige, verwandte Partitionen zusammenfaßt. Man benötigt wieder eine gute klassifizierende Eigenschaft. Die Antwort ist nicht leicht (und natürlich nicht eindeutig). Wir gehen in Kap3.3 darauf ein.

□ Eine (schwierige) Anschlußfrage: Wieviele Elemente enthält $\mathcal{P}(M)$, d.h. wieviele Partitionen besitzt eine n-elementige Menge?

□ Seien M und N zwei endliche Mengen. Dieselben Fragen - Klassifikation und Anzahl - für die Menge aller Abbildungen M→ N.

1.3.5 Äquivalenzrelationen

(3.5.1) Zur Einführung des benötigten Formalismus holen wir etwas aus:

> **Definition**: Sei M eine Menge.
> Dann nennt man die Teilmengen von M×M *Relationen auf M.*

(3.5.2) Für f:M→M ist der Graph von f eine Relation auf M. Hat M gerade n Elemente, so gibt es 2^{n^2} verschiedene Relationen auf M. Das sind i.a. sehr viele. Zu Herkunft und Bedeutung der Bezeichnung *Relation* vgl. Kap. 1.3.10.

(3.5.3) Wir wollen untersuchen, inwieweit auch eine Partition eine Relation bestimmt. Dazu betrachten wir wieder unser Beispiel: M={1,2,3,4} und $\mathcal{P}$={{1,2},{3,4}}.

Die mit × markierten Stellen definieren in offensichtlicher Weise eine Teilmenge von M×M, also eine Relation.	M\M	1	2	3	4
	1	×	×	·	·
	2	×	×	·	·
	3	·	·	×	×
	4	·	·	×	×

Wie erhält man die Stellen mit einem × aus der Partition? Offensichtlich sind es genau die Paare (x,y)∈ M, für die x und y **in derselben Klasse liegen**. 1 und 3 etwa liegen in verschiedenen Klassen und (1,3) hat entsprechend kein ×.

(3.5.4) Sobald man sich für einige weitere Partitionen von M das entsprechende Diagramm konstruiert hat, erkennt man gewisse gemeinsame Eigenschaften. Diese Eigenschaften kann man dann zu folgender Begriffsdefinition abstrahieren:

Definition:	Sei M$\neq \emptyset$ eine Menge und R$\subset M \times M$ eine Relation auf M. Wir schreiben xRy anstelle von (x,y)∈ R.	
Dann	heißt R eine *Äquivalenzrealtion auf M,* (genau) wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:	
(Ä.1)	aRa für alle a∈ M	(*Symmetrie)*
(Ä.2)	aRb ⟹ bRa	(*Reflexivität*)
(Ä.3)	(aRb und bRc) ⟹ aRc)	(*Transitivität*)

(3.5.5) In verbaler Formulierung: *Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf M.* Dabei bedeutet "aRb gilt", dass im Analogon zu obiger Tabelle ein × steht. "aRb gilt nicht" ergibt dagegen einen Eintrag ·.

(3.5.6) **Vorgegeben** wird eine Äquivalenzrelation meist durch eine Formulierung der folgenden Art:

M sei die Menge........ Für x,y$\in M$ gelte:
xRy $\Longleftrightarrow$ *konkrete Beziehung zwischen x und y, die gelten kann oder auch nicht.*

Die rechte Seite muß für jedes (x,y)$\in M\times M$ eindeutig festlegen, ob ein Kreuz oder ein Punkt zu machen ist, ob also die Beziehung gilt oder nicht. Im Anschluss an eine derartige Definition ist zu prüfen, ob die drei Eigenschaften *Symmetrie, Reflexivität und Transitivität* erfüllt sind oder nicht.

(3.5.7) **Ein Beispiel:**

M sei die Menge $\{1,2,3,...,20\}$. Für x,y$\in M$ sei definiert:
x$\sim$y $\Longleftrightarrow$ x und y haben dieselbe Zahl nichttrivivialer Teiler.

(3.5.8) 1,2,3 und alle weiteren Primzahlen haben null nichtriviale Teiler und damit dieselbe Zahl. Es gilt daher z.B. 2$\sim$5 (Richtung $\Longleftarrow$ von $\Longleftrightarrow$ der Definition) oder 3$\sim$13, aber nicht 3$\sim$12 ($\Longrightarrow$). Die Zahl 12 hat 2,3,4,6 als nichttriviale Teiler. Sicher gilt 12$\sim$12. Sucht man weiter, so findet man 12$\sim$18 und 12$\sim$20. Beide haben auch 4 nichttriviale Teiler. Gehen wir alle Elemente von M durch und fassen wir dabei immer die Zahlen mit gleicher Anzahl nichttrivialer Teiler zusammen, so finden wir die folgende Einteilung: $\{1,2,3,5,7,11,13,17,19\}$, $\{9\}$, $\{6,8,10,14,15\}$, $\{16\}$, $\{12,18,20\}$. Das ergibt gerade die in (3.4.6) gegebene Partition von M, deren Klassifikationsmerkmal wir suchten! Die zu findende und zu abstrahierende, die Klassen erzeugende Eigenschaft ist *Gleiche Zahl nichtrivialer Teiler* ! Beachten Sie, dass in der Definition der Äquivalenzrelation weder explizit gesagt wird, wieviele Klassen es gibt, noch wie groß sie sind. **Trotzdem erhält man damit die Partition.** Man muß nur immer paarweise prüfen, ob a$\sim$b erfüllt ist oder nicht. Und Symmetrie und Transitivität stellen sicher, dass es genügt, zu jeder Klasse nur mit einem Vertreter zu vergleichen.

□ Darf man *nichttrivial* fortlassen, also nach gleicher Teilerzahl klassifizieren?

(3.5.9) Noch ein Beispiel: Die neue Relation soll mit $\underset{k}{\equiv}$ bezeichnet werden. Dabei sei k$\in\mathbb{N}$. ($m\underset{k}{\equiv}n$ wird gelesen "m kongruent n modulo k")

Für m,n$\in\mathbb{Z}$ gelte:
$m\underset{k}{\equiv}n \iff$ Es gibt a$\in\mathbb{Z}$ mit m-n=ak .

Die Relation zwischen zwei ganzen Zahlen m und n besteht also genau dann, wenn ihre Differenz durch k teilbar ist. Differenz *linke minus rechte Seite*! Für jedes k bekommen wir eine andere Relation. Beispielsweise gilt $8\underset{4}{\equiv}12$ da (8-12)=(-1)4. Dagegen gilt $8\underset{5}{\equiv}12$ nicht, da -4 nicht durch 5 teilbar ist.

1.3.5a Der Nachweis einer Äquivalenzrelation

(3.5.10) Das erste, was nach Vorgabe einer solchen Relation (auf den Elementen von M oder wie soeben $\mathbb{Z}$) zu tun ist, ist nachzuprüfen, ob die Forderungen (Ä.l-3) aus (3.5.4) erfüllt sind oder nicht. (Im ersten Beispiel haben wir das unterlassen, aber sie gelten, wie man sich leicht überzeugt.) Beim Überprüfen ist genau darauf zu achten, welche Richtung von $\Longleftrightarrow$für die jeweilige Argumentation zu wählen ist .

Alle drei Punkte können nach der Tunnelmethode angegangen werden. Dabei liegen Anfang und Ende der Argumentation jeweils fest. Diese Teile werden wir zur Verdeutlichung unterstreichen. Die Zwischenstücke sind fallspezifisch argumentativ auszufüllen.

(3.5.11) Es liegt ein wichtiges Beispiel einer Denkfigur vor: *Nachweis einer Aquivalenzrelation.*

(3.5.12) Die konkrete Ausführung der Denkfigur für die Definition (3.5.9) sieht wie folgt aus:

$\boxed{\text{(Ä.1)}}$ <u>Sei a$\in\mathbb{Z}$ beliebig.</u> Dann gilt a-a=0k mit 0$\in\mathbb{Z}$. Anwenden der Definition ($\Longleftarrow$) liefert $a\underset{k}{\equiv}a$, also <u>die gewünschte Reflexivität</u>.

$\boxed{\text{(Ä.2)}}$ <u>Sei</u> $a\underset{k}{\equiv}b$ <u>für a,b$\in\mathbb{Z}$.</u> D.h. (laut Definition Richtung $\Longrightarrow$): Es gibt ein r$\in\mathbb{Z}$ mit a-b=rk gilt. Es folgt (b-a)=(-r)k. Da aber mit r$\in\mathbb{Z}$ auch (-r)$\in\mathbb{Z}$ ist, können wir mit $\Longleftarrow$ der Definition folgern, dass $b\underset{k}{\equiv}a$. <u>D.h. die Relation ist symmetrisch</u>.

$\boxed{(\text{Ä}.3)}$. <u>Sei</u> $a \underset{k}{\equiv} b$ <u>und</u> b$\underset{k}{\equiv}$ c . Wegen $\Longrightarrow$ gibt es r,s$\in \mathbb{Z}$, so dass a-b=rk und b-c=sk gilt. Addition der beiden Gleichungen gibt a-c = (r+s)k. Nun ist (r+s)$\in \mathbb{Z}$. Dann gibt $\Longleftarrow$ der Definition aber $a \underset{k}{\equiv} c$ <u>Die Relation ist auch transitiv</u>.

Zusammen dürfen wir schließen: **(3.5.9) definiert eine Äqivalenzrelation!**

1.3.6 Die Beziehung zwischen Partitionen und Äquivalenzrelationen

(3.6.1) Was bedeutet es nun, wenn man sicher ist, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt? Nun wir haben bereits angedeutet und im Beispiel gesehen, dass daraus eine Partition festgelegt wird.

(3.6.2) Genauer gesagt gilt der folgende **Satz:**

Es sei	M$\neq \emptyset$ eine Menge.
a) Sei	$\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M.
Dann	gibt es eine (zugehörige) eindeutig bestimmte Partition $\mathcal{P}_\sim$ von M, deren Klassen wie folgt definiert sind: $C_x = \{y \mid$ y$\in M$ und y$\sim$x$\}$ für x$\in M$ beliebig.
b) Sei	$\mathcal{P}$ eine Partition von M. Setze "x$\sim$y $\Longleftrightarrow$ x,y liegen in derselben Klasse von $\mathcal{P}$ ".
Dann	ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und es gilt für die nach a definierte Partition $\mathcal{P}_\sim$ von M : $\boxed{\mathcal{P}_\sim = \mathcal{P}}$.

(3.6.3) Die im Satz gegebenen Konstruktionen sollten nach dem Vohergehenden verständlich sein. Der Satz zeigt, dass Partitionen und Aquivalenzrelationen wirklich gleichwertig sind. Das übliche Vorgehen (in der mathematischen Arbeit) stützt sich auf a) aus (3.6.2). Man gibt eine Relation vor, weist nach, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt und darf automatisch folgern, dass es eine zugehörige Klasseneinteilung gibt, mit der man arbeiten kann. Wenn es nötig ist, kann man dann auch (über b)) die Klassen bestimmen und interpretieren.

(3.6.4) Der Satz ermöglicht es generell, eine Klasseneinteilung zu bilden, ohne dass man die Klassen bereits kennen muß. Die Klassen entstehen - werden abstrahiert - aus Beziehungen, die zwischen den Elementpaaren (x,y) bestehen. Den Paaren aus M$\times$M kommt im Sinne der Teilmengenbildung eine bestimmte klassenbildende Eigenschaft entweder zu oder nicht. Und über diese Eigenschaft läßt sich die zugehörige Klasseneinteilung konstruieren.

(3.6.5) Im zweiten Beispiel (3.5.9) liefert die Definition gerade k **verschiedene** Klassen:

$$\mathcal{C}_r = \{n \mid n = r + ks, s \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{r=0,1,...,k-1 \quad freier Parameter.}$$

Die Klasse $\mathcal{C}_r$ besteht aus allen Zahlen, die bei ganzzahliger Division durch k den Divisionsrest r aufweisen. Die gegebene formale Definition gilt auch für beliebiges r$\in \mathbb{Z}$. Die Zuordnung $(\mathbb{Z}, r \mapsto \mathcal{C}_r, \mathfrak{P}(\mathbb{Z}))$ ergibt eine nicht injektive Parametrisierung. Für die angegebenen r (also r=0,l,..,k-1) wird diese Parametrisierung injektiv. Weiter ist {0,1,2,...,k-1} ein *Vertretersystem*, das man üblicherweise als solches wählt. Die *klassenbildende Eigenschaft* lautet schließlich: *Die Differenz der beiden Zahlen ist durch k teilbar.* Oder *Die beiden Zahlen haben bei Division durch k denselben Divisionsrest***.**

(3.6.6) **Ein mathematischer Satz wie (3.6.2) muß natürlich bewiesen werden**. Dieser Beweis verlangt keine zusätzlichen Ideen. Er ist weitgehend Routine, wegen der vielen zu behandelnden Details jedoch länglich. Wir lassen ihn hier aus.

(3.6.7) Stattdessen ein weiteres Beispiel: Oben in (3.3.7) haben wir mit Hilfe einer surjektiven Abbildung f:M$\rightarrow$N aus einer Partition $\mathcal{Q}$ der Wertemenge N eine solche der Urbildmenge M gemacht. **Wie sieht die zugehörige Äquivalenzrelation aus**?

$$a \sim b \iff \text{f(a) und f(b) liegen in derselben Klasse von } \mathcal{Q}.$$

Das ergibt eine Äquivalenzrelation, wie man sich sofort überzeugt. Ist insbesondere $\mathcal{Q}$ die atomare Zerlegung von N mit ihren einelementigen Klassen, dann ist die definierende Relation einfach f(a)=f(b). Ist f nicht injektiv, dann ist die erzeugte Partition der Urbildmenge M nicht atomar.

(3.3.7) ist eine Folgerung aus (3.6.2). Der gesonderte Beweis (3.3.9) ist nicht mehr erforderlich.

1.3.6a Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen

(3.6.8) Und noch ein Beispiel als kleine Fingerübung zum Umgang mit dem Formalismus: Beliebt und interessant sind Äquivalenzrelationen in Produkträumen. Nehmen wir M=$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Unsere zu klassifizierende Menge besteht also aus Paaren natürlicher Zahlen wie (2,3) oder (4,1) oder (4,4). Für diese Paare führen wir die folgende Äquivalenzrelation ein:

$$(n, m) \sim (p, q) \iff \text{n+q=p+m} \qquad \text{für m,n,p,q} \in \mathbb{N}.$$

(3.6.9) Routinemäßig verifiziert man, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt. Dann geht es an die Konstruktion der Klassen. Da M eine Produktmenge ist, benutzt man günstig das übliche Matrixschema zur Veranschaulichung. Zwei Beispiele entstehender Klassen: {(1,0),(2,1),(3,2),.....} und {(0,4),(1,5),(2,6.),.....}. Allgemein:

m \ n	0	1	2	3	4	
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	...
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	
4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	
5	....					

(m,n) gehört zur Gleichung m+x=n.
Die Klassen sind Mengen gleicher Lösungen!
Die horizontal beginnendnen Klassen haben die Lösung x=n-m$\in \mathbb{N}$, sind in $\mathbb{N}$ lösbar.
Die vertikal beginnenden Klassen gehören zu in $\mathbb{N}$ unlösbaren Gleichungen wie x+2=1.

(3.6.10) Was ist die vereinigende inhaltliche Eigenschaft dieser Klassen? Offenbar die Differenz n-m. Sie ist innerhalb jeder Klasse konstant, kann als Index für die Klassen benutzt werden. Welche Werte durchläuft dieser Index? Er durchläuft ganz $\mathbb{Z}$. Und das ist bei genauerem Nachdenken eine Sensation! Hineingesteckt haben wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Damit haben wir die Klassen gebildet. Und diese Klassen übernehmen die Rolle der ganzen Zahlen, auch der negativen. Die in der Figur vertikal beginnenden Klassen gehören zu Gleichungen m+x=n. die in $\mathbb{N}$ **formulierbar, aber unlösbar** sind, wie 4+x=1. Sie haben eine negative Zahl als Lösung. Führt man die Analyse der Klassen genau durch, so gelangt man auf diese Weise von den natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen. Oder auch: **Man hat mit Hilfe der natürlichen Zahlen die ganzen Zahlen erschaffen**! So ist (5,1) ein Vertreter einer Klasse, die als negative Zahl -4 abstrahiert wird. (Lösung der Gleichung x+5=1.)

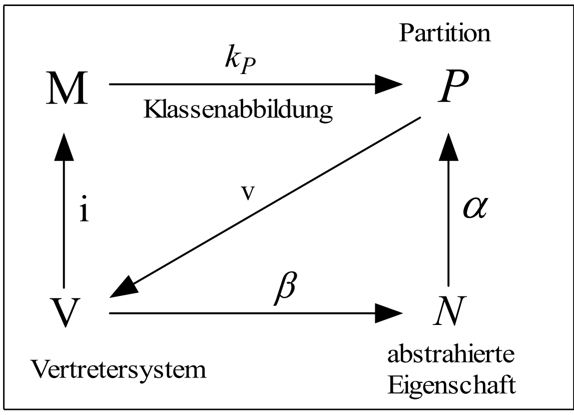
> (3.6.11) Zusammenfassung: Man beginnt mit einer Äquivalenzrelation, bei der immer nur Individuen paarweise miteinander verglichen werden (Im Beispiel: "m+x= n und p+x=q haben dieselbe Lösung".). Ist man sicher, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt (Nachweis!), entsteht eine Partition (Im Beispiel: Klassen von Gleichungen a+x=b mit gleicher Lösung). Über Inspektion der Relation bzw. durch ausreichend lange Arbeit mit diesen Klassen abstrahiert man den durch sie repräsentierten Begriff (im Beispiel den der *ganzen Zahl*) und führt für jede Klasse eine eigene Bezeichnung ein. Das gibt eine neue Parametermenge $\mathcal{N}$, deren Elemente die möglichen Werte der abstrahierten Eigenschaft benennen. Schließlich hat man die bijektive Parametrisierung $\mathcal{N} \to \mathcal{P}$, mit deren Hilfe man die Klassen und ihre abstrahierten Bezeichnungen bei Bedarf identifizieren kann. Im Beispiel ist $\mathcal{N} = \mathbb{Z}$.

□ Entwickeln Sie eine Idee, wie man jetzt analog die rationalen Zahlen aus den ganzen erschaffen kann!
□ Wie steht es mit der Addition der ganzen Zahlen. Überelgen Sie sich ein Programm dafür, was mathematisch auszuführen ist.

Beachten Sie: Die Menschheit brauchte einige Jahrtausende, um das zu klären, was uns soeben als kleine Fingerübung für den Umgang mit Äquivalenzrelationen begegnete.

1.3.7 Übersicht über den Formalismus

(3.7.1) Inzwischen dürften viele Leser ob der Vielzahl der eingeführten Abbildungen ein gewisses (durchaus gesundes) Unbehagen verspüren. Um an einer solche Stelle wieder Übersicht zu erhalten, sollte man den Automatenstandpunkt der Abbildungsveranschaulichung einnehmen, also alle Mengen und vermittelnde Abbildungen in ein Diagramm eintragen. Das zu tun. sollte man sich angewöhnen!



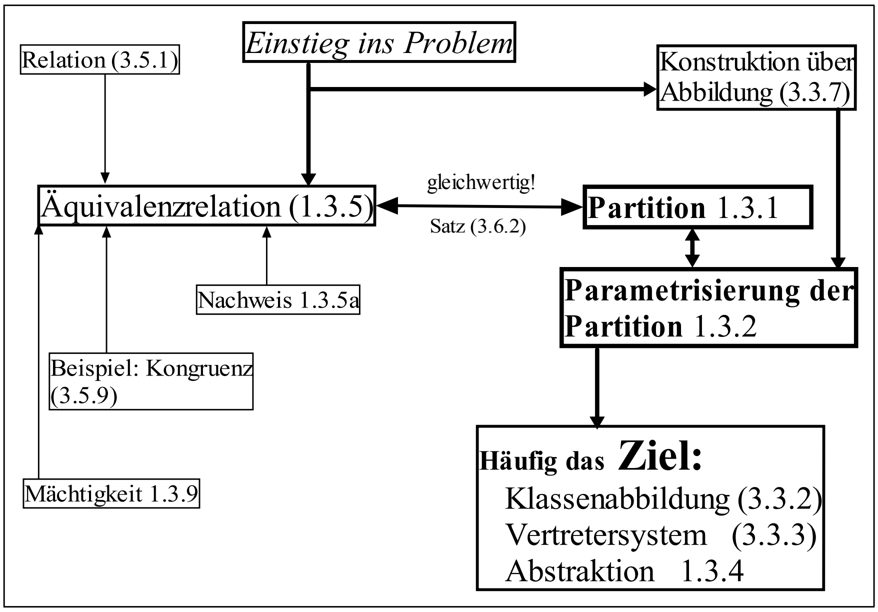
k_p die Klassenabbildung
v die Vertreterabbildung
V Vertretersystem
N Abstrahierte Eigenschaft
i Injektion der Vertreter in M

$\beta : V \to N$ ordnet jedem Vertreter seinen Eigenschaftswert zu und $\alpha : N \to P$ ordnet dem Eigenschaftswert die Klasse aller Objekte zu, die gerade diesen Wert haben. (Wir unterscheiden: Die abstrahierte Eigenschaft und die einzelnen Werte, die diese Eigenschaft annehmen kann. So wie wir den Begriff *Länge* haben und davon die *möglichen Längenwerte* einzelner Objekte trennen.)

Die beiden Abbildungen v und β sind beide bijektiv. Man hat: $\alpha \circ \beta = v^{-1}$.

(3.7.2) Der üblichen Angabe einer abstrahierten Eigenschaft ("John hat rote Haare" , d.h. John$\in M$, "rote Haare"$\in N$) entspricht jetzt die Abbildung $\alpha^{-1} \circ k_P$. D.h.: John gehört hinsichtlich des Haarfarbevergleichs einer Klasse an, die den Gebrauchsnamen "rot"$\in N$ erhält. Das Diagramm hilft einem, derartige Zusammenhänge zu überschauen.

(3.7.3) Jetzt fassen wir den eingeführten Begriffsapparat auf etwas andere Weise zusammen. Diese Zusammenfassung entspricht vielfach dem gedanklichen Ablauf, der auftritt, wenn man den Begriffsapperat zur Problemlösung verwendet. Der Verlauf ist andererseits ziemlich parallel zu unserer bisherigen Darstellung. Schließlich bildet er ein erstes gutes Beispiel dafür, wie man mit mathematischen Methoden komplexe Situationen erfasst.



(3.7.4) **Der übliche Weg zusammengefasst**: Man beginnt mit einer Relation, die sich als Idee oder Stichwort aus der Problemsituation ergibt. Hat man nachgewiesen, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt, wendet man das allgemeine Resultat (3.6.2) an. Der Übergang zur Partition ist dann nicht mehr gesondert zu beweisen. Auch die Klassenabbildung liegt fest. Die beiden weiteren Teile - die Konstruktion eines Vertretetsystems und die Eigenschaftsabstraktion - müssen dagegen noch für den jeweiligen Fall ausgeführt werden. Alternativ kann man mit einer Anwendung des Satzes (3.3.7) beginnen, die einen sofort zu der klassifizierenden Partition führt.

☐ Es sei M eine Menge von Atomen, möglichst in Richtung "Menge aller Atome". Dann liefern die Stichworte "Element" und "Isotop" je eine Partition von M. Wie sehen die zugehörigen Äquivalenzrelationen aus?

☐ Ein Beispiel einer Partition mit geometrischer Bedeutung: Gegeben die Ebene V_0^2 und zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ daraus, die nicht auf einer Geraden liegen sollen. Ergänzen Sie die beiden geometrischen Pfeile zu einem Parallogramm und verlängern Sie alle 4 Seiten dieses Parallelogrammes. Das ergibt in naheliegender Weise eine Partition der Menge aller Punkte der Ebene (mit einigen kleinen Nichteindeutigkeiten). Beschreiben Sie diese Partition. Denken Sie sich dann alle Vektoren aus V_0^2 in der Form $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ dargestellt. Betrachten Sie die durch $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \mapsto (\alpha, \beta)$ festgelegte Abbildung. Welche Anwendung von (3.3.7) liegt nahe?

Bisher haben wir vornehmlich den Formalismus, die mengentheoretische Symbolsrache, eingeführt. Der Rest dieses Kapitels soll diese Grundlage etwas konsolidieren. In 1.3.9 geben wir eine anspruchsvolle und interessante Anwendung: Wir klären den Begriff der ***unendlichen Anzahl****. In 1.3.11 und 1.3.12 folgen zwei weitere grundlegende Anwendungen. In 1.3.10 gehen wir auf die uns sehr wichtige Verbindung von alltäglichem Denken und Sprechen und unserer Symbolsprache am Beispiel des Relationsbegriffes ein.*

1.3.8 Erholungspause: **Ein Beispiel für den Formalismus.**

(3.8.1) Beim Einarbeiten in Formalismen wie dem eingeführten ist das Durchgehen eines konkreten Falles nützlich. Man sollte es sich angewöhnen, das eigenständig parallel zur Bearbeitung des abstrakten mathematischen Textes zu tun. Hier stellen wir ein solches Konkretisieren durch Weiterführung eines früheren Beispiels vor. Im Gegensatz zum Urnenbeispiel 1.3.3a ist das eine Konkretisierung ohne Inhaltsbezug, rein mengentheoretisch.

(3.8.2) Als Menge wählen wir M={1,2,3,4}. Also ein vierelementiges M. Dann hat $\mathfrak{P}(M)$ gerade 2^4= 16 Elemente. Welche Partitionen kann man bilden? Wir organisieren - klassifizieren - die Partitionen von M nach *Anzahl der Klassen je Partition* wie folgt:

$P=\{\{1234\}\} = \{M\}$ mit $\{1234\}$ statt $\{1,2,3,4\}$.	Eine Klasse
$Q_1 = \{\{1\},\{234\}\}$, $Q_2 = \{\{2\},\{134\}\}$, $Q_3 = \{\{3\},\{124\}\}$, $Q_4 = \{\{4\},\{123\}\}$ $Q'_1 = \{\{12\},\{34\}\}$, $Q'_2 = \{\{13\},\{24\}\}$ $Q'_1 = \{\{14\},\{23\}\}$	Zwei Klassen
$R_1=\{\{1\},\{2\},\{34\}\}$, $R_2=\{\{1\}\{3\}\{24\}\}$, $R_3=\{\{1\}\{4\}\{23\}\}$ $R_4=\{\{2\},\{3\},\{14\}\}$, $R_5=\{\{2\}\{4\}\{13\}\}$, $R_6=\{\{3\}\{4\}\{12\}\}$	Drei Klassen
$A=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$	Vier Klassen

(3.8.3) Man überzeugt sich leicht durch Inspektion, dass etwa durch die 6 Klassen R_i **alle** dreielementigen Partitionen erfasst werden! Dort, wo in einer Menge Elemente vertauschbar sind, wählen wir die Reihenfolge alphabetisch. Wir sehen, dass es insgesamt 15 Partitionen von $\{1,2,3,4\}$ gibt. Da die Menge $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\{1,2,3,4\}))$ insgesamt 2^{16}=65536 Elemente enthält, kann man die Partitionen als recht selten bezeichnen.

(3.8.4) Jede dieser Partitionen läßt sich aber auch als Relation, also als Teilmenge von M×M darstellen. Bei vier Elementen hat $\mathfrak{P}(M \times M)$ zufälligerweise auch 2^{16} Elemente.

Wie stellen wir Teilmengen von M×M, also Relationen, dar? Wir bilden das Matrixschema für M×M und tragen (anstelle von $*$ und $\cdot$) eine 1 ein, wenn das zugehörige Element in der Teilmenge liegt, eine 0, falls nicht. Nehmen wir R_1. Dann liegen 3 und 4 in derselben Klasse, also kommt eine 1 an die Stelle

(3,4). Dagegen liegen 1 und 2 in verschiedenen Klassen, also kommt eine 0 an die Stelle (1,2). Einige sich so ergebende Beispiele:

Q_1	1	2	3	4
1	1	o	o	o
2	o	1	1	1
3	o	1	1	1
4	o	1	1	1

R_1	1	2	3	4
1	1	o	o	o
2	o	1	o	o
3	o	o	1	1
4	o	o	1	1

P	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1

(3.8.5) Das sollte ausreichen, um zu zeigen, wie die zugehörigen Aquivalenzrelationen aussehen und wie man sie darstellt.

(3.8.6) Kann man die Relation, die jeweils die Klassen produziert, auch noch inhaltlich beschreiben? Nehmen wir als Beispiel $Q_1 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$. Eine zugehörige Relation kann wie folgt festgelegt werden :

$$\text{Für a,b} \in M \qquad \text{a}\sim\text{b} \iff (\text{a,b} \leq 2 \quad \text{oder a,b} \geq 2).$$

Das produziert genau die richtigen Klassen

Wie sieht hier die **Klassenabbildung** k_{Q_1}:M$\to \mathfrak{P}(M)$ aus? Offensichtlich ist $k_{Q_1}(1)$=$k_{Q_1}(2)$=$\{1,2\}$ und $k_{Q_1}(3)$=$k_{Q_1}(4)$=$\{3,4\}$. Ein mögliches **Vertretersystem** ist V=$\{1,3\}$.

(3.8.7) Schließlich kann man in der Hierarchie noch einen Schritt höher gehen und Mengcn von Partitionen bilden. Etwa die Menge $\mathfrak{Q}_2$ aller Partitionen von M mit genau 2 Elementen. Nach unserer Liste gilt

$$\mathfrak{Q}_2 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_1', Q_2', Q_3'\} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M)))$$

Natürlich sollte man das nicht ausschreiben!

Wie kommt die Mengenangabe zustande? Es liegt eine Menge von Elementen aus $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ vor, also ein Element der zugehörigen Potenzmenge. Ebenso könnte man die Menge aller Partitionen von M bilden, die nach obiger Liste ja 15 Elemente enthält. Die auftretende Menge $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M)))$ ist schon recht groß. Sie enthält $2^{65536} \approx 10^{20000}$ Elemente. Das sind weitaus mehr Elemente, als es Atome im Universum gibt, was erneut zeigt, dass sich die Mathematik in gewisser Weise mit sehr seltenen Objekten beschäftigt.

In obiger Aufzählung haben wir bereits eine strukturgerechte Partition der Partitionsmenge selbst angedeutet. (Klassifikation der Partitionen). Vgl. die Frage nach (3.4.6). In Kapitel 3.3.4a werden wir diese Frage allgemein behandeln und eine allgemeine Klassifikation geben.

1.3.9 Ein kleiner Ausflug in die Mengenlehre. **Der Mächtigkeitsbegriff.**

1.3.9a Die Äquivalenzrelation gleichmächtig.

> (3.9.1) Sei jetzt $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen. Für gewisse dieser Mengen bietet die **Anzahl ihrer Elemente** ein wichtiges Merkmal. Die Aussage "M$\in \mathcal{M}$ hat 13 Elemente" ist offensichtlich eine bedeutsame Information über die Menge M. Aber wie steht es mit Mengen, die man üblicherweise als *nicht endlich* bezeichnen würde. Was bedeutet *unendlich* hier überhaupt? Gibt es verschiedene Arten unendlicher Anzahlen oder nicht? Usw.

Zunächst: **Offenbar gehört zum Anzahlbegriff stets eine Klasseneinteilung von $\mathcal{M}$.** Klassen mit Mengen gleicher Elementzahl!.

(3.9.2) Die Menge $\mathcal{M}$ sollte in Klassen von Mengen zerfallen mit gleicher Anzahl (von Elementen). Dem Anzahlbegriff würde eine Abbildung #:$\mathcal{M} \to \mathcal{A}$ vom Maßtyp (Kap. 1.2.6k) entsprechen, wobei $\mathcal{A}$ die Menge möglicher auftretender Anzahlen ist. Diese Anzahlen sind nach unserem Konzept aus den Klassen zu abstrahieren. Zunächst gibt es Klassen mit den uns vertrauten Anzahlen. Jede wird durch eine natürliche Zahl n$\in \mathbb{N}$ beschrieben. Etwa die Klasse aller M$\in \mathcal{M}$ mit 13 Elementen. Die Frage ist: Gibt es weitere Klassen, wie finden wir sie, wie können wir mit ihnen vertraut werden? Formal: Was sollte $\mathcal{A}$ außer $\mathbb{N}$ noch enthalten? Die übliche Erfahrung gibt uns hierauf keine Antwort außer dem vagen Stichwort *unendlich.*

(3.9.3) Im Falle von $\mathbb{N}$ ist man bereits dazu übergegangen, Bezeichnung und Klasse zu identifizieren. D.h. man wird eine Aussage des Typs "M gehört zur Klasse, die u.a. die Menge {a,b,c,d,e,f,g} enthält", ersetzen durch Aussage "die Anzahl von M ist 7" , kurz #(M)=7.

(3.9.4) **Um das gestellte Problem zu lösen, benötigen wir nach unserer Konzeption eine Äquivalenzrelation, die uns die gesuchte Klasseneinteilung und damit alles weitere liefert.** Denn damit können wir ja die Einteilung bilden, ohne die Klassen vorher zu kennen! Genauer benötigen wir eine *Beziehung (Relation) zwischen zwei beliebigen Mengen*, die darüber entscheidet, ob die beiden Mengen gleichviele Elemente haben oder nicht.

(3.9.5) Für **endliche Mengen** findet man eine solche Beziehung leicht, eine Beziehung, die überdies ganz und gar unsere operativen Erfahrungen mit dem Zählen wiedergibt:

$$\boxed{\mathrm{M}\sim\mathrm{N} \iff \text{Es gibt (mindestens eine) bijektive Abbildung } \beta\text{:M}\to\text{N.}}$$

Das ist eine Äquivalenzrelation, da id_M und β^{-1} beide bijektiv sind. Und mit β und γ ist auch $\beta\circ\gamma$ bijektiv. Zusammen sichert das Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

(3.9.6) **Nun ist es naheliegend, diese Relation auch für nicht endliche Mengen als Kriterium für "gleiche Anzahl" zu nehmen.** (Unsere erste und entscheidende Idee!)

(3.9.7) Das tun wir. D.h. wir befinden uns am Ausgangspunkt von (3.7.3) mit einer vorgegebenen Äquivalenzrelation. Was ergibt die weitere Analyse? Zunächst können wir wegen Satz (3.6.2) sicher sein, dass eine konsistente Klasseneinteilung herauszukommt, auch für große unendliche Mengen, für die wir noch keinerlei Vorerfahrung haben. Diese Erfahrung können wir uns jetzt über mathematische Arbeit verschaffen.

(3.9.8) Die eingeführte Äquivalenzrelation bezeichnet man als *Gleichmächtigkeit (von Mengen).* Nochmals: **M und N sind definitionsgemäß gleichmächtig, genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung M→N gibt**.

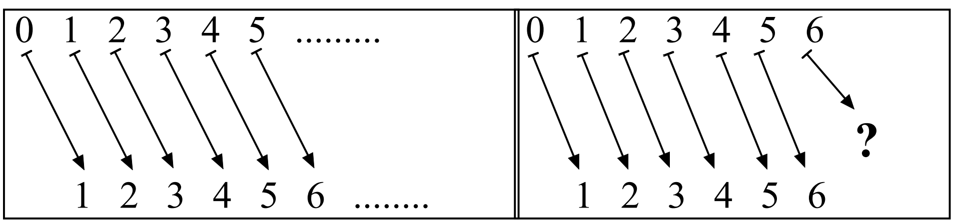
1.3.9b Endliche und unendliche Mengen

(3.9.9) Bemerkenswerterweise können wir als erstes genauer klären, woran endliche und damit auch unendliche Mengen erkennbar sind.

(3.9.10) Endliche Mengen haben nämlich die folgende Eigenschaft:

Nimmt man aus einer endlichen Menge (mindestens) ein Element fort, so ändert sich die Mächtigkeitsklasse. Oder: Es ist bei einer endlichen Menge nicht möglich, eine bijektive Abbildung zwischen der Menge und einer echten Teilmenge zu konstruieren.

(3.9.11) Ganz anders steht es mit den Mengen, die man üblicherweise als unendlich charakterisiert. Nehmen wir etwa $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}-\{0\}$. Die Abbildung $(\mathbb{N}, n\mapsto n+1, \mathbb{N}-\{0\})$ ist offensichtlich bijektiv. Und es ist eine Abbildung zwischen der Menge und einer echten Teilmenge. Eine Skizze vom Zuordnungstyp verdeutlicht das, verdeutlicht auch, wieso Entsprechendes bei endlichen, also "rechts" abbrechenden Mengen nicht funktioniert.



☐ Was halten Sie von der folgenden Aussage: "M und N seien zwei Mengen. M hat eine echt geringere Anzahl von Elementen als N, wenn es eine injektive, aber nicht surjektive Abbildung M→ N gibt."

(3.9.12) Man abstrahiert die folgende

> **Definition**: Eine *unendliche Menge* ist eine Menge, die gleichmächtig ist zu einer echten Teilmenge von sich selbst ist.

(3.9.13) Damit entstehen zwei zu klärende Fragen:

- a) Fallen alle endlichen Mengen in eine der durch ℕ bestimmten Mächtigkeitsklassen?
- b) Was für Mächtigkeitsklassen gibt es im Bereich der unendlichen Mengen? Nur eine oder mehrere?

  Zu b) lautet die Antwort: **Viele. Insbesondere haben die beiden uns vertrautesten unendlichen Mengen ℕ und ℝ unterschiedliche Mächtigkeit.**

(3.9.14) Bemerkenswert ist, dass wir mit diesen beiden Fragen den Bereich der *naiven Mengenlehre*, die wir einleitend als ideale Symbolsprache charakterisierten, verlassen und zu den Resultaten der im mathematischen Sinne eigentlichen Mengenlehre übergehen müssen. Was die zugehörigen Beweise und Argumentationen angeht, so bedeutet das einen riesigen Sprung in der Komplexität, so als käme man aus der Technik des Mittelalters plötzlich in den Bereich der heutigen Hochtechnologie. Wir können daher hier auch nur einige wenige Resultate skizzieren, die in geistig philosophischer Hinsicht jedoch enorme Tragweite haben.

(3.9.15) Beginnen wir mit der ersten **Frage nach allen endlichen Mengen.** Über das Prinzip der vollständigen Induktion findet man zunächst, dass jede Menge, die zu einem Anfangsstück von ℕ (also einer Menge der Form {0,1,2,...,n-1} mit n∈ ℕ) gleichmächtig ist, auch in dem obigen Sinne endlich ist, dass sie keine Bijektion auf eine echte Teilmenge erlaubt. Jetzt schliest sich die Frage an: Gibt es eventuell noch weitere nach (3.7.12) nicht unendliche Mengen? Also mit der Eigenschaft, dass sie zu keiner echten Teilmenge von sich selbst gleichmächtig sind?

1.3.9c Denkbar und tatsächlich.

Zur Behandlung dieser Frage müssen wir weit ausholen. Im Bereich des philosophischen Denkens gab es bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts eine ausgeprägte Grundvorstellung, die wir als "Eine-denkbare-Welt-Konzeption" bezeichnen wollen. Man stellte sich vor, dass es möglich sein müsse, die gesamte reale Welt irgendwie durch reines Denken zu verstehen und nachzuvollziehen. D.h. aber, dass es nur eine einzige konsistent denkbare Welt geben und dass diese dann natürlich gleich der tatsächlichen sein müsse. Also "denkbar= tatsächlich". Man konnte, besser wollte sich einfach nicht vorstellen, dass es etwas gäbe, was man nicht durch reines Denken herausbekommen könne.

Die Erfahrungen, die die Mathematik des 19. Jahrhunderts bei der Analyse des Parallelenaxioms von Euklid machte, zwangen dazu, dies Konzept aufzugeben: Man versuchte nachzuweisen, dass nur eine geometrische Struktur unserer Welt möglich, also konsistent denkbar sei. Hierzu benötigte man insbesondere die Aussage, dass es zu einem Punkt und einer Geraden im Raum immer genau eine parallele Gerade gibt, die durch den gegebenen Punkt geht. Das ist ein Sachverhalt, der im Rahmen unserer physikalisch-geometrischen Alltagserfahrung völlig evident erscheint.

Nach jahrhundertelangen Bemühungen fand die Mathematik aber heraus, dass es mehrere vom reinen Denken her völlig gleichwertige geometrische Welten (Modelle) gibt, die sich hinsichtlich der Anzahl der möglichen Parallelen unterschiedlich verhalten: Keine, genau eine oder viele Parallelen. Welche Geometrie dann in der tatsächlichen Welt vorliegt, läßt sich vermutlich nicht auschließlich durch denkerische Spekulation, sondern nur durch experimentelle Analyse herausfinden. Also:

"**Konsistent denkbar" muß keineswegs gleich "tatsächlich" sein**!

(3.9.16) Was ist der tiefere Grund dieser Diskrepanz? Will man die denkbaren Welten analysieren, dann ist man immer gezwungen, über den Bereich der unmittelbaren Erfahrungswelt hinauszugehen. Im Falle der Geometrie über die unmittelbaren geometrischen Erfahrungen und allgemeiner hinsichtlich der Zahl der beteiligten Operationen.

Alle unsere Erfahrung basiert immer auf endlich vielen meist noch ungenauen Operationen. Was aber geschieht, wenn man diese Einschränkung fallen läßt? Gibt es dann nur eine Möglichkeit der Extrapolation, wie es unsere Vorstellung es uns gerne vorgaukelt oder sind mehrere möglich?

1.3.9d Das Auswahlaxiom

(3.9.17) Im Bereich der Mengenlehre bildet das Auswahlaxiom das Paradebeispiel der skizzierten Problematik. Es geht um das Problem der Rechtfertigung der folgenden Grundannahme:

Das Auswahlaxiom:
Sei $\mathcal{M}$ eine nicht leere Menge von nicht leeren Mengen.
Dann gibt es eine zweite Menge $\mathcal{V}$, die ein Vertretersystem für $\mathcal{M}$ bildet. D.h. für jedes M$\in \mathcal{M}$ gibt es genau ein a=a(M)$\in \mathcal{M}$ mit a$\in \mathcal{V}$.
Oder auch: Es gibt eine Abbildung a=$(\mathcal{M}, M \mapsto a(M), \mathcal{V})$ mit der Eigenschaft a(M)$\in M$ für alle M$\in \mathcal{M}$.

(3.9.18) Unsere Erfahrung bezieht sich auf den Umgang mit kleinen endlichen Mengen. Und für diesen Bereich ist die Aussage des Axioms immer wieder bestätigt worden. Man geht die Mengen nacheinander durch, wählt aus jeder Menge genau ein Element aus, sammelt diese Vertreter sukzessive ein, vereinigt sie zu einer neuen Menge und fertig.

(3.9.19) Aber darf man diese Erfahrungen auf große, unendliche Systeme von Mengen ausdehnen, für die wir keinerlei operative Erfahrung haben? Wie soll dort das Auswählen, Einsammeln und Vereinigen stattfinden? Man hat versucht diese Möglichkeit, also das Auswahlaxiom, zu beweisen, aber das ist nicht gelungen. Das Ergebnis ist vielmehr: Man kann obiges Axiom fordern oder auch nicht. Und beide Möglichkeiten liefern konsistente Welten mit recht unterschiedlichen Eigenschaften.

Weiter kam bei diesen Beweisversuchen heraus: Es gibt eine Vielzahl zum Auswahlaxiom gleichwertiger aber völlig anders aussehender Aussagen. Gilt die eine, so auch alle anderen.

(3.9.20) Für unsere **Suche nach allen endlichen Mengen** folgt: Nur wenn man das Auswahlaxiom fordert, kann man ausschließen, dass alle im Sinne von (3.9.10) nicht unendlichen Mengen bereits durch die Anfangsstücke von $\mathbb{N}$ erfaßt werden, also gleichmächtig zu einer Menge der Form {0,1,...,n-1} sind.

Man kann auf folgende Weise sehen, dass man wirklich an ein unendliches Auswahlproblem gerät:

> Nehmen wir eine im Sinne von (3.9.10) **endliche** Menge A, die zu keiner der Mengen $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0,1\}$, ... , $\{0,1,2,...,n\}$,...... mit $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig ist. Dann können wir eine Injektion f:$\mathbb{N} \to A$ bilden, falls wir folgende unendliche Reihe von Operationen ausführen dürfen: Zunächst wähle $a_0 \in A$ und setzen f(0)=a_0. Dann wähle $a_1 \in A$, $a_1 \neq a_0$ und setze f(l)=a_1. Und so immer fort. Jeder einzelne Schritt ist zu machen: Für $a_0, a_1,...,a_n \in A$ gibt es stets ein "neues" weiteres Element a_{n+1}, da A sonst zu {0,...,n} gleichmächtig wäre. **Das Problem besteht einzig darin, all diese neuen Elemente simultan eindeutig auszuwählen.**

(3.9.21) Haben wir erst einmal f wie beschrieben, so können wir sofort folgende Bijektion g von A auf A-$\{a_0\}$ bilden: Setze g(f(i))=f(i+l), i$\in \mathbb{N}$, und setze g(a)=a für a$\notin$Bildf. **Und damit wären A und A-$\{a_0\}$ gleichmächtig und A entgegen der Annahme doch unendlich.**

Und das bedeutet insgesamt, dass alle endlichen Mengen, in die durch die Anfänge von $\mathbb{N}$ bestimmten Mächtigkeitsklassen fallen. Vgl. mit (3.9.11).

(3.9.22) Läßt man das Auswahlaxiom dagegen **nicht** zu, so gibt es Modelle der Mengenlehre mit folgender Eigenschaft: $\mathbb{N}$ enthält dann Teilmengen, die einerseits endlich sind, also nicht gleichmächtig zu einer echten Teilmenge, die aber andererseits nicht gleichmächtig sind zu einem der Anfänge von $\mathbb{N}$, also einer der üblichen natürlichen Zahlen! Kurz: Es gibt endliche Mengen, die sich nicht durch eine Anzahl aus $\mathbb{N}$ beschreiben lassen.

1.3.9e Unterschiedliche unendliche Anzahlen.

> *Wie steht es mit der zweiten Frage, ob es **verschiedene** Mächtigkeitsklassen für unendliche Mengen gibt? Diese Frage läßt sich bereits im Bereich der elementaren Mengenlehre beantworten: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind beides unendliche Mengen, aber sie sind nicht gleichmächtig.*

(3.9.23) Der Beweis läuft unter dem Namen *Cantorsches Diagonalverfahren.* Cantor war der Begründer der Symbolsprache der Mengenlehre und initiierte durch seine Arbeit Anfang des 20. Jahrhunderts auch die weitergehenden Untersuchungen.

(3.9.24) Der **Beweis** (von "$\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht gleichmächtig") verläuft indirekt. Es lohnt sich, diesen Beweis unter dem Gesichtspunkt anzuschauen, wie eine derartige auf der Annahme des Gegenteiles basierende mathematische Argumentation zwangsläufig zu einem bestimmten unumgehbaren Ergebnis führt. Hinzu kommt, dass man für ein solches Resultat eine gute - hier recht einfache - Idee benötigt.

♦ Angenommen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ wären gleichmächtig. Dann muß es eine bijektive Abbildung $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ geben. Demnach ist β surjektiv und jede reelle Zahl muss in Bild(β) liegen. Andererseits ist β nach unserer Typisierung der Abbildungen eine Folge. Wir setzen $b_n = \beta(n)$ und dann ist Bild(ß)=$\{b_0,b_1,b_2,....\}$. Diese Folge muß also **alle** reellen Zahlen enthalten.

Konstruiert man jetzt andererseits eine reelle Zahl c, die nicht in dieser Folge vorkommt, ist man fertig: Denn dann wäre β einerseits surjektiv, andererseits aber nicht. Eine solche Zahl c läßt sich wie folgt konstruieren:

♦ Jede reelle Zahl, insbesondere $\beta(n)=b_n$, läßt sich als unendlicher Dezimalbruch schreiben. Bei abbrechenden Brüchen verwenden wir die Neunerfolgenform. Für 1 etwa schreiben wir 0.999999... Wir wissen: Wenn zwei derart geschriebene Zahlern sich in mindestens einer Dezimalstelle unterscheiden, sind sie voneinander verschieden.

♦ Jetzt konstruieren wir c wie folgt durch Angabe ihrer Dezimalbruchdarstellung: c=0,$y_0y_1y_2y_3$...... . Dabei soll y_i eine Ziffer (von 1 bis 9) sein, die ungleich z_i sein soll, wobei z_i die (i+1)-te Nachkommaziffer der Dezimalbruchentwicklung von b_i sein soll. **Das ist das** *Diagonalverfahren!* Dann ist c eine Zahl aus $\mathbb{R}$ und sie kommt in der Folge b nicht vor. Denn sie unterscheidet sich von jedem Folgenglied in wenigsten einer Nachkommastelle! Und sie ist auch kein abbrechender Dezimalbruch, da $y_i = 0$ nicht zulässig. Ein illustrierendes Beispiel:

$b_0 =$	0.**3**79999.....	Die Diagonalstellen sind fett geschrieben
$b_1 =$	12.4**3**257.....	Wir wählen beispielsweise
$b_2 =$	0.00**0**123...	$y_0 = 2 \neq 3$, $y_1 \neq 2 \neq 3$, $y_3 = 1 \neq 0$
$b_3 =$	3.313**1**31...	usw. Das gibt c=0.2212.......
.....	usw.	Also c$\neq b_0, b_1, b_2, b_3, ...$

(3.9.25) Also haben $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ tatsächlich unterschiedliche Mächtigkeit. Man kann die Idee des Diagonalverfahrens benutzen, um allgemeiner zu zeigen, dass **für jede unendliche Menge die zugehörige Potenzmenge eine andere Mächtigkeit hat**. Auf diese Weise erhält man immer neue Mengen mit immer größerer unendlicher Mächtigkeit.

☐ Machen Sie sich Gedanken darüber, wie man im unendlichen Fall "größere Mächtigkeit" präzisieren bzw. definieren wird.

(3.9.28) Damit haben wir für unsere Anzahlmenge zwei weitere Elemente, nämlich $\#(\mathbb{N})$ und $\#(\mathbb{R})$. Für beide gibt es eine größere Zahl historisch entstandener Bezeichnungen. Wir sagen meist *Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ bzw. von $\mathbb{R}$*. Alternativ für "Mächtigkeit von $\mathbb{N}$" sagt man "abzählbar unendlich". Und unendliche Mengen mit größerer Mächtigkeit nennt man "überabzählbar".

(3.9.27) Eine weitere Frage liegt jetzt nahe: Gibt es zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ noch andere Klassen unendlicher Mengen? Genauer, kann man eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ finden, die weder zu $\mathbb{R}$ noch zu $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist? Das ist das sog. *Kontinuumsproblem.* Seine Behandlung erwies sich als unerhört schwierig. Erst 1966 kam heraus, dass auch hier sehr verschiedene Welten (Zahlenwelten) konsistent denkbar sind: In einer dieser Welten gibt es keine weitere Mächtigkeit zwischen der von $\mathbb{N}$ und der von $\mathbb{R}$, in einer anderen deren unendlich viele. (Dies Resultat gilt, obwohl für beide Welten das Auswahlaxiom zugelassen wird). Es ist gegenwärtig nicht absehbar, ob es jemals Argumente dafür geben wird, die eine dieser Welten hinsichtlich unserer realen Welt vor der anderen auszeichnen. Allerdings hat die erstgenannte Welt (ohne Mächtigkeiten "dazwischen") den Vorzug, gewisse theoretische Vereinfachungen mit sich zu bringen. Ebenso ist die Welt mit Auswahlaxiom mathematisch viel besser handhabbar als die ohne.

1.3.9f Formal zulässige Mengenbildungen

Ja, das Problem *denkbar- tatsächlich* stellt sich für diese Zahlwelten noch radikaler: Man hat praktisch keine Chance, die Konsistenz auch nur einer der besagten Mengenwelten zu beweisen. Bewiesen hat man vielmehr: **Wenn eine einzige von ihnen konsistent ist, dann sind es auch die anderen**. Aber es ist beruhigend, zu wissen, dass eine immer ausgefeiltere Mathematik mit diesen Begriffssystemen außerordentlich erfolgreich gearbeitet hat, fruchtbar und ohne Widersprüche.

(3.9.28) Insofern kann man das ursprüngliche Grundlagenproblem der Mathematik als in praktischer Hinsicht gelöst betrachten. Dies Problem erwuchs aus der naiven Mengenrehre durch die Frage nach zulässigen Mengenbildungen, so wie wir sie *naiv* in Kap.1.1.1 benutzt haben und beschwor zu Beginn des 20. Jahrhunderts eine schwere Grundlagenkrise der Mathematik herauf: Das gesamte System der (naiven) Mengenlehre, Cantors schöne Grundidee, erschien plötzlich widersprüchlich, problematisch und damit für die Mathematik unbrauchbar.

(3.9.29) Man sieht den Grund dieser Krise schnell ein etwa über **Russells Paradox:**

> Es sei N "die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten". In der üblichen Formalschreibweise: N={A|A ist Menge, A∉A}. Das klingt nach einer sinnvollen Bildung. Wie steht es nun mit N selbst? N ist Menge. Gilt N∉N, dann erfüllt N die definierende Bedingung für N - enthält sich nicht selbst als Element - und es müßte N∈N sein. Ist umgekehrt N∈N , dann besagt die definierende Eigenschaft dieser Menge - also die Explikation - N∉N.
>
> Das sind offensichtliche Inkonsistenzen, **diese** Mengenbildung ist unsinnig. Und damit steht zu fürchten, dass auch weitere, wenn nicht alle derartige Bildungen unsinnig sind.

(3.9.30) Die tiefergehende Analyse hat jedoch gezeigt:

Solche "Mengen" muß man in der Mathematik und ihren Anwendungen gar nicht bilden. Es genügen vielmehr als wirklich "gewagte" Mengenbildungen:

- Eine unendliche Menge $\mathbb{N}$,
- zu jeder Menge die Potenzmenge,
- die Menge der Abbildungen zwischen zwei Mengen,
- und als äußerstes schließlich: Bildung von Auswahlmengen gemäß Auswahlaxiom.

Mit Hilfe der axiomatischen Mengenlehre ist es dann gelungen, eine scharfe Grenze zu ziehen zwischen unsinnigen Mengenbildungen wie in Russells Paradoxon und den mathematisch erwünschten und benötigten. Insbesondere liegen Begriffsbildungen wie "Menge der denkbaren Zustände eines physikalischen Systems" immer auf der sicheren Seite. Oder auch: Sicher ist "**eine** Menge von Mengen", die man mit den angegebenen Verfahren konstruiert hat. Problematisch und unzulässig "**die** Menge U **aller** Mengen". Und damit sehen Sie, wieso wir bei der Einführung der Mächtigkeiten in (3.9.1) geschrieben haben "...**eine** Menge von Mengen", nicht aber "...**die** Menge aller Mengen". Gemeint sind immer Bildungen, die mit obigen Konstruktionen entstehen.

☐ Wir haben aus $\mathbb{N}$ bereits $\mathbb{Z}$ konstruiert, dann gefragt, wie man weiter zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gelangt. Jetzt erhebt sich die anspruchsvolle Frage: Wie erhält man $\mathbb{R}$?

☐ Zeigen Sie: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig.

1.3.10 Die umgangssprachliche Herkunft des Relationsbegriffs.

(3. 10.1) Wir wollen am Beispiel des Relationsbegriffs exemplarisch vorführen, wie mathematische und umgangssprachliche Begriffe zusammenhängen. Herkömmliche mathematische Darstellungen, die weitgehend kommentarlos definieren: "Eine Relation auf R ist eine Teilmenge von R×R" wirken vielfach irritierend, verstärken Vorstellungen, abstrakte Mathematik sei irrelevant, von der praktischen Wirklichkeit abgehoben, ja letztlich nur erfunden, um in der Ausbildung als Prüfungs- und Diskriminierungsmechanismus zu fungieren.

(3.10.2) Man muß es sich angewöhnen, wichtige mathematische Definitionen nach Art des vorliegenden Beispiels möglichst selbst zu durchdenken und zu verstehen, um in der Lage zu sein, die zugehörige Mathematik als Unterstützung des eigenen Denkens adäquat zu nutzen. Sachlich vertiefen wir hier Überlegungen aus Kap.l.l.l. zur Mengenbildung.

(3.10.3) Umgangssprachlich benutzt man Aussagen wie "Müller und Strauß kommen aus derselben Stadt" . Für einen wisssenschaftlichen Text ist eine solche Aussage (in der Regel) nicht brauchbar, da das Wort *kommen* zu unpräzise ist. Wir geben drei mögliche Präzisierungen (Begriffsentfaltungen) für *kommen*:

- sind geboren in...
- wohnen (besser haben ersten Wohnsitz) in ...
- sind auf einer Reise, die in der Stadt begann oder darüber führte.

(3.10.4) Im Alltag ist in der Regel aus dem Kontext klar, welche dieser (oder weiterer) Interpretationen gemeint ist. Im wissenschaftlichen Beteich sollte die Bedeutung aus dem Text selbst hervorgehen, und im mathematischen Bereich ist Kontextfreiheit erklärtes Ziel.

(3.10.5) Wir wählen eine der Präzisierungen - *sind geboren* - und arbeiten damit weiter.

(3.10.6) Auch umgangssprachlich hat man bestimmte Typvorstellungen, was man alles in die Leerstellen unseres Satzgerüstes " ..... und ..... sind in derselben Stadt geboren" einsetzen darf, was als Zutaten zulässig ist. Sicherlich die Bezeichnung zweier Menschen, nicht aber "Dies Auto und die Nordsee sind in derselben Stadt geboren". Auf Gegenstände derartigen Typs ist der Begriff "geboren" nicht anwendbar. Oder "Bier und Weißwurst sind in derselben Stadt geboren." Das setzt erneut eine Präzisierung der gemeinten Bedeutung von *geboren* voraus. Unter Umständen erscheint der Satz sinnvoll.

Wie steht es mit "Valentin und Valentin sind in derselben Stadt geboren". Wobei wirklich beide Male dieselbe Person, nicht einmal Carl V. und einmal Barbara V. gemeint sein soll. Umgangssprachlich schätzt man eine solche Einsetzung nicht. Allerdings nicht, weil sie typmäßig unzulässig wäre ("C.V und B.V. sind.. " ist ja inOrdnung), sondern weil dieser Satz keine Information übermittelt. Er erscheint irgendwie aus inhaltlichen Gründen trivialerweise wahr und wird daher vermieden. Im Bereich der Mathematik geht es dagegen neben der Informationsvermittlung auch um die Gültigkeit einer Argumentation. Und dabei ist es meist der Sache dienlich, wenn man trivialerweise zulässige Einsetzungen erlaubt.

(3.10.7) Sei dem, wie es sei: Will man Kontextfreiheit erlangen, so muß irgendwie festgelegt sein, was man alles in "W1 und W2 sind in derselben Stadt geboren" für W1 und W2 einsetzen darf. D.h. aber, man muß zwei zugehörige Mengen M1 und M2 bestimmen, deren Elemente eingesetzt werden dürfen. Umgangssprachlich gibt es Beziehungen, bei denen es zur Natur der Sache gehört, dass M1=M2 gewählt werden sollte und andere, bei denen das nicht der Fall ist. Die Verbindung "und" deutet auf den ersten Fall hin. Zwei weitere Beispiele: "Fahrer und Wagen kommen aus derselben Stadt" und "Valentin aß die Weißwurst, und beide kamen aus derselben Stadt". In beiden Fällen sollte man die Mengen verrschieden wählen. Einwand: -Aber im ersten Fall darf man doch sagen "Wagen und Fahrer kamen aus derselben Stadt." Richtig, aber das ist eine andere Beziehung, die umgangssprachlich auch eine etwas andere Betonung ausdrückt. Zu dieser zweiten Beziehung gehören dieselben unterschiedenen Mengen, nur mit vertauschter Reihenfolge.

(3.10.8) Damit hat unsere Beziehung durch Präzisierung folgende Form angenommen:

> " W_1 und W_2 kommen(i) aus derselben Stadt" mit $W_1 \in M_1$ und $W_2 \in M_2$..
> Der Index i gibt die gemeinte Bedeutung von "kommen" an, etwa
> kommen(l) = geboren . Usw.

(3.10.9) Wir erwähnten bereits, dass man umgangssprachlich die Sätze in der Regel eher zur Informationsübermittlung verwendet, nur manchmal - seltener - allerdings auch zum Argumentieren. Auch das ist kontextabhängig. Stellen wir uns unseren Satz im Kontext eines Kriminalromanes vor: "Valentin und Strauß kommen beide aus derselben Stadt. Sie haben beide eine Vorliebe für Weißwürste und kein Alibi. Aber was könnte das Motiv sein?" Klar, hier wird versucht, einen Täter argumentativ zu finden.

(3.10.10) Wieder werden in der Wissenschaft beide Aspekte - Informationsvermittlung und Argumentation - deutlich getrennt, und das sollte kontextunabhängig erkennbar sein. Und für die Mathematik ist korrekte Argumentation besonders wichtig.

(3.10.11) Für beide Zwecke ist es weiter sinnvoll und wichtig, zwischen Bildbarkeit und Wahrheitsgehalt einer Aussage zu unterscheiden. Bisher haben wir nur das Problem der Bildbarkeit diskutiert. Unser Resultat war:

> Für alle (W_1,W_2)$\in M_1 \times M_2$ ist die Aussage "W_1 und W_2 kommen(i) aus derselben Stadt" zulässig und bildbar. Insgesamt ergibt das $n_1 \cdot n_2$ Bildungsmöglichkeiten, wenn $n_1 = \#(M_1)$ und $n_2 = \#(M_2)$ die Elementzahlen der entsprechenden endlichen Mengen sind.

(3.10.12) Wenn wir weiter argumentieren, ist es mühsam, diese Beziehung - den gesamten Satz mit allen Erläuterungen - immer wieder hinzuschreiben. Umgangssprachlich löst man das durch unpräzise, aber kurze Ausdrucksweise mit der stillschweigenden Erwartung, dass - über den Kontext! - doch klar wird, was gemeint ist. In der Mathematik dagegen löst man es mit Hilfe geeigneter Abkürzungen und Definitionen, einer geeigneten Symbolsprache, die für den weiteren Text vereinbart wird. Wir vereinbaren etwa:

> Für W,V$\in M$ soll nachfolgend
> "W(k1)V" stets bedeuten W und V sind in derselben Stadt geboren".
> Stärker formalisiert: Für W,V$\in M$: W(k1)V $\Longleftrightarrow$ W und V sind in derselben Stadt geboren

(3.10.13) Sind W und V nicht beide aus M, so ist für sie nichts gesagt hinsichtlich der Beziehung (k1). Bei Bedarf kann man dieser Frage unabhängig nachgehen und (k1) allgemeiner - für größere Mengen - formalisieren.

(3.10.14) Damit können wir die **Frage des Wahrheitsgehaltes** unserer bildbaren Aussagen - es sind $n_1 \cdot n_2$ Stück! - angehen. Manche von ihnen sind wahr, andere nicht. Die zulässigen Einsetzungen, die zu einer wahren Aussage führen, fassen wir wie inzwischen üblich zu einer Menge zusammen:

> $R_1 = \{(W,V)|$ W(k1)V ist wahr$\}$
> Ist diese Menge bekannt, können wir damit sowohl argumentieren als auch Information übermitteln, mit geklärter Bedeutung!

(3.10.15) Liegt die Grundmenge M fest, so ist es üblich und nützlich, die Relation (k1) mit dieser Menge R, zu identifizieren. Vergleichen sie jetzt mit der mathematischen Definition des Relationsbegriffs in (3.5.1)!

Bei der Behandlung konkreter Probleme kann die Situation jedoch eine andere sein: Die Relation ist als Beziehung zwischen zwei Objekten operativ gegeben, man weiß jedoch nicht, auf welche Mengen sie genau anwendbar ist. Dann sollte man unterscheiden zwischen Relation wie (k1) und einer Relationsmenge wie R_1. Übrigens wird auch diese Situatian von der (axiomatischen - nicht der naiven) Mengenlehre formal erfaßt (Stichwort: Klassenbegriff als Verallgemeinerung des Mengenbegriffs - nicht zu verwechseln mit den Klassen einer Partition).

(3.10.16) Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung der Relationsmenge. Durch die Vorgabe einer solchen sind unsere beiden Forderungen offensichtlich formalisiert und erfüllt:

Die **Informationsübermittlung** ist klar: (Valentin,Strauß)$\in R_1$ steht für "V und S sind (tatsächlich) in derselben Stadt geboren". Alternativ: (Valentin,Kennedy)$\notin R_1$. Usw. Ebenso könnte man ar**gumentieren**: "W stammt aus München und U aus B., wie wir vom Amt erfahren haben. Weiter gilt (W,V)$\in R_1$ wie wir aus dem gefundenen Briefstück wissen. Der Mörder X aber stammt aus B., wie es im Bekennerbrief steht, und weil alle Indizien auf (X,U)$\in$R deuten...." So etwa könnten Überlegungen in einem Kriminalroman aussehen, wobei allerdings alle Einzelaussagen als entweder voll gesichert (100%) oder sicher falsch (0%) behandelt werden, was natürlich unrealistisch ist.

(3.10.17) Fassen wir unsere Überlegungen zusammen, so erhalten wir insgesamt eine rechtfertigende Erläuterung der "trockenen mathematischen" Relationsdefinition (3.5.1):

> Präzisierung und Entfaltung umgangssprachlicher Beziehungsn zwischen zwei Objekten gleichen Typs erfolgt durch Bestimmung einer Menge M (zulässiger Objekte) und einer Teilmenge R von M×M , der Relationsmenge. Deren Elemente legen fest, für welche Objektpaare die Beziehung wahr ist und für welche nicht, (aber im Prinzip wahr sein könnte).

(3.10.18) Und jetzt weiter in Richtung auf das genauere Verständnis von (3.5.4), der Definition von Äquivalenzrrelation. Beim (alltäglichen) Argumentieren benutzt man bestimmte allgemeine Gesetze, von deren Gültigkeit man überzeugt ist. Wieder weiß man vom Kontext her, in welchen Fällen so eine Regel anwendbar ist und wann nicht. Hat man beispielsweise a(kl)b und b(kl)c, so wird man üblicherweise a(kl)c folgern. Alle drei haben denselben Geburtsort. Das ist die Transitivität aus der Äquivalenzrelation.

(3.10.19) Aber wie steht es mit a(v)b $\Longleftrightarrow$ (a und b gehören demselben Verein an) ? Wieder ist die Bedeutung nicht ganz präzis. Ist nur ein einziger Verein (Bayern München) gemeint oder aber, dass es irgendeinen Verein gibt, dem beide gemeinsam angehören? Oder

a(v1)b $\Longleftrightarrow$ (a und b gehören dem Verein V an)
a(v2)b $\Longleftrightarrow$ Es gibt einen Verein, dem a und b gemeinsam angehören.

Bei (vl) ist der Verein V äußerer Parameter. D.h. jedes V gibt seine eigene Relation! Im Falle von (v1) gilt wieder unsere Transitivitätsregel: Falls a(vl)b und b(vl)c, dann auch a(vl)c. Im zweiten Fall dürfen wir sie offensichtlich **nicht** verwenden.

Wie steht es mit den anderen Forderungen der Äquivalenzrelation? Etwa der Reflexivität? A(V1)A bzw. A(V2)A können beide gelten oder auch nicht. Je nachdem, ob, A dem Verein V bzw. irgendeinem Verein angehört oder aber, ob dies nicht der Fall ist. Insbesondere weist NICHT(A(V2)A) die Person A als Vereinsmuffel aus.

(3.10.20) **Lösen vom Kontext** verlangt wieder, dass man Regeln, die gelten können oder auch nicht, abstrahiert. Die drei für die Äquivalenzrelation eingeführten Regeln erweisen sich als besonders nützlich. Das ist eine Erfahrungstatsache, wobei wir die dahinter stehenden Erfahrungen hier nur sehr unzureichend wiedergeben können. Die Mathematik untersucht dann, was diese Regeln allein, kontextfrei leisten. Es ist insbesondere der Satz (3.6.2), der zeigte, wie man klassifizieren kann, ohne die Klassen vorher zu kennen.

Ein Beispiel aus dem Alltagsbereich, das mit der Wirkung der Transitivität spielt, ist folgende Inschrift auf einem Becher: "Nobody is perfect. I'm nobody!")

(3.10.21) Schauen wir uns einige Beispiele von Relationsmengen an, die zu (kl), (vl) bzw (v2) gehören könnten.

	A	B	C	D
A	$\star$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
B	$\cdot$	$\star$	$\cdot$	$\cdot$
C	$\cdot$	$\cdot$	$\star$	$\star$
D	$\cdot$	$\cdot$	$\star$	$\star$

$\star$ deutet jeweils an, dass das zugehörige Paar die Relation erfüllt. Das Beispiel könnte zu (k1) gehören. Dann hat man es mit drei Geburtsstädten zu tun. C und D stammen aus derselben Stadt.
Die Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Das nächste Beispiel gehört nicht zu einer Äquivalenzrelation, da die Reflexivität verletzt ist.

	A	B	C	D
A	$\star$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
B	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
C	$\cdot$	$\cdot$	$\star$	$\star$
D	$\cdot$	$\cdot$	$\star$	$\star$

Dies könnte zu (v2) gehören! B ist Vereinsmuffel
A gehört einem Verein an, dem aus der betrachteten Personengruppe niemand sonst angehört. C und D gehören einem anderen Verein an.

Auch das nächste Beispiel gehört nicht zu einer Äquivalenzrelation. Hier ist sogar die Transitivität verletzt.

	A	B	C	D
A	$\star$	$\star$	$\cdot$	$\cdot$
B	$\star$	$\star$	$\star$	$\cdot$
C	$\cdot$	$\star$	$\star$	$\cdot$
D	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Erneut ist (v2) möglich. A und B gehören einem ersten, B und C einem zweiten Verein an. D ist Vereinsmuffel. Es gilt A(v2)B und B(V2)C, aber keineswegs A(v2)C! A und C gehören keinem gemeinsamen Verein an.

Jetzt formalisieren wir eine ganz andere Beziehung (Relation). Und zwar:

$$a(v3)b \quad \Longleftrightarrow \quad \text{"Es gibt einen Verein, dem a echt länger als b angehört".}$$

Die Reflexivität ist immer verletzt. Offensichtlich kann die Symmetrie verletzt werden. Kann, muß nicht. Eine mögliche Realisierung sieht wie folgt aus:

	A	B	C	D
A	$\cdot$	$\star$	$\cdot$	$\cdot$
B	$\star$	$\cdot$	$\star$	$\star$
C	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\star$
D	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

A gehört einem ersten Verein echt länger als B an. B dagegen ist in einem anderen Verein länger Mitglied. In einem dritten Verein ist B länger als C und dieser länger als D. (Ist noch eine andere Interpretation möglich?)

(3.10.22) Damit beenden wir die Diskussion der Frage, wie umganssprachlicher und mathematischer Realtionsbegriff zusammenhängen. Es sollte klar geworden sein, dass es sich beim mathematischen Begriff um eine sinnvolle Präzisierung des umgangssprachlichwen handelt, der insbeondere Kontextunabhängigkeit sichert. Und dass es sich generell lohnt, über derartige Zusammenhänge gezielt nachzudenken.

(3.10.23) Als wichtige geistige Fingerübung zur Konsolidierung dieses Abschnittes sollten Sie nun die folgende Struktur eigenständig analysieren und sich mit ihrer Bedeutung vertraut machen:

Sei ω eine Relation auf der Menge M.
Dann heißt ω *Ordnungsrelation auf M* , wenn ω
wie eine Äquivalenzrelation **symmetrisch** und **transitiv** ist,
aber statt der Reflexivität die folgende Eigenschaft besitzt:
$(x(\omega)y$ und $y(\omega)x) \Rightarrow$ x=y. (für x,y$\in M$).

□ Sei M Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die zugehörige Potenzmenge. Zeigen Sie, dass die Teilmengeninklusion $\subset$ eine solche Ordnungsrelation ergibt.
□ In $\mathbb{R}$ ist $\leq$ eine Ordnungsrelation.
□ Sei M Menge und P(M) die Menge aller Partitionen von M. Wie kann man auf P(M) eine solche Ordnungsrelation einführen? Welche inhaltliche Bedeutung hat diese Relation?

1.3.11 Das einfachste mathematische Modell des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

(3.11.1) Die historisch erste und klassische Methode, den Wahrscheinlichkeitsbegriff mathematisch zu fassen und zu modellieren, besteht im Auszählen endlicher Mengen. Genauer gesagt, geht man von einer endlichen Menge gleichwertiger Fälle aus, unter denen man einen bestimmten Typ - also eine Teilmenge (der Fallmenge) - aussondert. Als Wahrscheinlichkeit für einen Fall des ausgesonderten Typs nimmt man die relative Häufigkeit (=Zahl der ausgesonderten Fälle geteilt durch die Zahl der überhaupt möglichen Fälle). Das Bestimmen derartiger Wahrscheinlichkeiten besteht somit vornehmlich in der Bestimmung der Anzahlen der beiden beteiligten endlichen Mengen.

(3.11.2) Beim trivialen Fall eines Würfels sind 6 gleichwertige Fälle (=Ergebnisse) möglich. Drei davon ergeben einen ungeraden Wert. Die Wahrscheinlichkeit, einen ungeraden Wert zu würfeln, ist danach $\frac{3}{6}$=0.5.

(3.11.13) **Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit:**

> Sei F eine endliche Menge (von als gleichwertig angesehenen Fällen).
> Sei T$\subset$F Teilmenge daraus ausgesonderter Fälle. Die Anzahlen seien #F und #T.
> Dann wird w=w$_T$=$\frac{\#T}{\#F}$ als Wahrscheinlichchkeit, einen in F Fall aus T zu finden, interpretiert. Laut Konstruktion gilt stets 0$\leq w \leq$ 1.

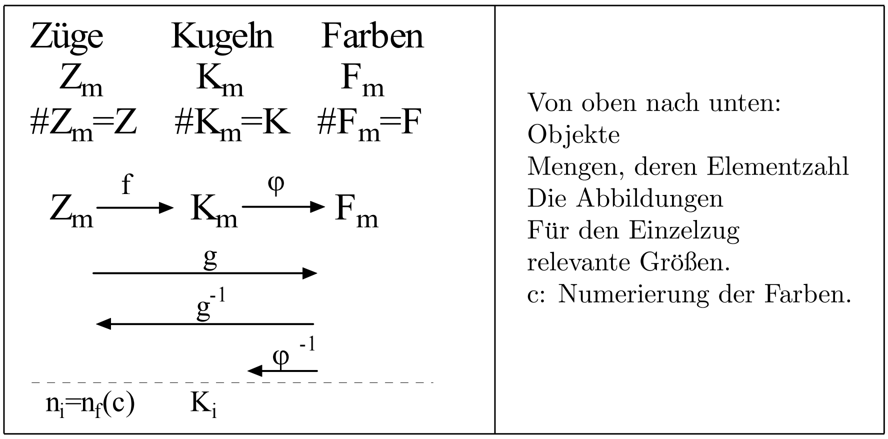
(3.11.4) Beachten Sie, dass die Anwendung dieses Modelles zwei wesentliche Voraussetzungen verlangt: Die Fälle sollen alle gleichwertig -hinsichtlich ihres Auftretens symmetrisch - sein und die Menge aller denkbaren Fälle muss endlich sein. Ist die zweite Bedingung nicht erfüllt, ergeben sich beim Versuch, das Modell auszudehnen, beträchtliche Schwierigkeiten. Im Kapitel 14 werden wir daher einen allgemeineren Zugang zur Wahrscheinlichkeit suchen.

(3.11.5) Meist ist es günstig, die Fälle mathematisch als Abbildungen zu repräsentieren und dann die entsprechenden Abbildungsmengen auszuzählen. Als Beispiel betrachten wir das in 1.3.3a eingeführte Urnenmodelll

(3.11.6) Nochmals kurz das Modell:

> Wir stellen uns eine Urne vor, in der sich eine Menge K$_m$ von K Kugeln befindet. Jede Kugel hat eine Farbe. Die auftretenden Farben bilden die Farbmenge F$_m$ der Anzahl F. Die Farbabbildung φ: K$_m$ $\rightarrow F_m$ ordnet der Kugel x ihre Farbe φ(x) zu. K$_m$ zerfällt in Farbklassen von Kugeln gleicher Farbe. Die Zuordnung c$\mapsto$ $\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{c\})$ parametrisiert diese Klassen. $\#\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{c\})$ ist die Anzahl der Kugeln der Farbe c$\in F_m$.
> **Jetzt wird eine Kugel gezogen, notiert und zurückgelegt**. Z-fache Wiederholung dieses Vorganges ergibt ein Experiment. Die einzelnen Züge indizieren wir durch Z$_m$={1,2,...,Z} Das Ergebnis des Experimentes wird beschrieben durch eine Abbildung f: Z$_m$ $\rightarrow K_m$, wobei f(j) gleich der im j-ten Zug gezogenen Kugel ist. Wir setzen noch g=$\varphi\circ$f, so daß g(j) gleich der im j-ten Zug erhaltenen Farbe ist. c$\mapsto$ $\overset{-1}{\underline{g}}(\{c\}) \subset Z_m$ enthält alle Züge, die eine Kugel der Farbe c ergeben. Und n$_f$(c)=$\#\overset{-1}{\underline{g}}(\{c\})$ ist die Anzahl der Züge des Experimentes, die die Farbe c ergeben.

Zum Überschauen all dieser Beiehungen sollte man häufig und sorgfältig die Abildungskette $Z_m \xrightarrow{f} K_m \xrightarrow{\varphi} F_m$ vom Automatenstandpunkt aus betrachten. Dieser Standpunkt gibt ja an, wie sich komplexe Beziehungen aus elementaren Abbildungen aufbauen.



Der Beweis, den wir gleich führen werden, ist komplizierter, als die meisten unserer sonstigen Argumentationen. Entsprechend nimmt die Bedeutung derartiger übersichtsbildender Hilfen zu.

(3.11.7) **Was interessiert am Urnenmodell**? Die Ergebnisse der Experimente unterscheiden sich durch die jeweilige Abbildung f. Die Menge $\mathfrak{F}$(Z$_m$,K$_m$) all dieser Abbildungen bildet die Menge aller möglichen und zueinander gleichwertigen Fälle. Das ist die Fallmenge F aus (3.11.3). Die Elementzahl von F ist K^Z. Oder $\#\mathfrak{F}(Z_m,K_m)=K^Z$. (Für jeden Zug sind unabhängig K Werte möglich!). Welche Fälle sollen nun ausgesondert werden und die Teilmenge T aus (3.11.3) bilden? **Man verlangt, daß die Anzahl der gezogenen Kugeln mit bestimmter Farbe festliegt, wogegen man offenläßt, bei welchen Zügen des Experimentes die Farben entstehen.** Also : Welche f führen auf dieselbe Farbverteilung? (Bei Z=6 wäre 3 rote, 2 grüne und eine blaue Kugel eine Möglichkeit unabhängig davon, wann welche Farbe gezogen wird.) Oben wurden die Farbzahlen bereits eingeführt, so dass wir jetzt bilden können:

$$T = T(\vec{n}) = \{f \mid \text{ f:}Z_m \to K_m,\ n_f(c_i) = n_i,\ \text{ i=1,2,..,F}\}$$

Hierbei soll $i \mapsto c_i$ eine fest gegebene Durchnumerierung der Farbmenge F_m sein: c_i die i-te Farbe. Und n_i soll die vorgebbare Zahl von Kugeln der Farbe c_i sein. Gesucht ist die Anzahl der f, die auf die durch $\vec{n}=(n_1,n_2,...,n_F)$ festgelegte Farbverteilung führen. (Im obigen Beispiel mit Z=6 wäre $\vec{n}=(3,2,1)$).

(3.11.8) Die Durchnumerierung der Farben gibt auch eine Durchnumerierung der Farbklassen der Kugeln. Wir setzen $K_i=\#\overset{-1}{\varphi}(\{c_i\})$ = Zahl der Kugeln in K_m mit Farbe c_i. Natürlich ist $\Sigma K_i=K$, der Gesamtzahl der Kugeln. Die Zahlen K_i hängen im Gegensatz zu den $n_f(c_i)$ nicht vom Experiment ab!

(3.11.9) Unter diesen Umständen gilt das folgende Resultat, mit dessen Hilfe wir die Wahrscheinlichkeiten gemäß (3.11.3) sofort erhalten:

Sei $\vec{n}=(n_1,...,n_F)$ mit $\Sigma n_i=Z=\#Z_m$ gegeben. Dann ist die Anzahl der Abbildungen f: $Z_m \to K_m$ mit $n_f(c_i) = n_i$ für jedes i gegeben durch

$$\boxed{A(\vec{n}) = \frac{Z!}{n_1!n_2!.....n_F!}K_1^{n_1}K_2^{n_2}.......K_F^{n_F}.}$$

(3.11.10) **Beweis**: (Nochmals: Dieser Beweis bildet ein Beispiel einer komplexeren Argumentation. Gehen Sie zum Verständnis immer wieder auf das Diagramm aus (3.11.6) zurück. Der Beweis zerfällt in zwei Teile a) und b). Elementare Rechnungen und Konkretisierungen selbst ergänzen!

- a) Wir konstruieren ein f der gewünschten Art. Dazu müssen wir n_1 Elemente aus den Z Elementen der Zugmenge Z_m für die erste Farbe auswählen, also alle Indizes, bei denen die Farbe 1 gezogen wird. Das gibt $W_1 = \binom{Z}{n_1}$ Möglichkeiten. n_1=0 ist mit (genau einer Möglichkeit) eingeschlossen. Die gewählten n_1 Elemente nehmen wir aus Z heraus. Es verbleibt eine Teilmenge von (Z-n_1) Elementen. Aus dieser wählen wir jetzt die n_2 Elemente (=Züge) aus, die zur Farbe 2 führen sollen. Das gibt $W_2=\binom{N-n_1}{n_2}$ Möglichkeiten. Wieder mit W_2=l falls $n_2 = 0$ ist. Zusammen sind das bereits $W_1 \cdot W_2$ Möglichkeiten (Produkt, da unabhängig). Usw.
  Setzt man in das endgültige Produkt $W_1W_2....W_F$ die Formel für die einzelnen Binomialkoeffizienten ein, so kürzen sich systematisch zahlreiche Faktoren fort und man erhält den kombinatorischen Faktor K(n) der behaupteten Formel. Das ist der kombinatorische Faktor, den wir bereits aus dem Multinomialsatz kennen.

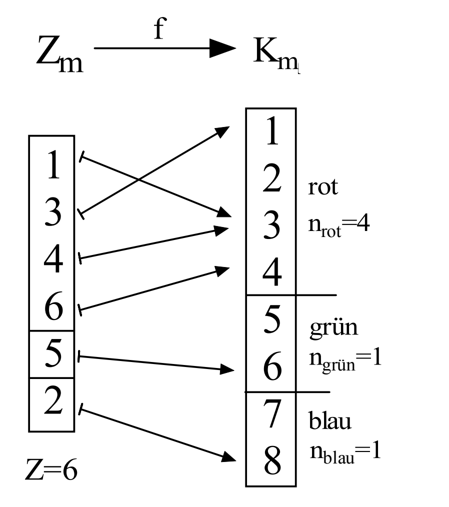
- b) Nun wissen wir, welche n_i Indizes aus der Zugmenge Z_m zur Farbe i führen, aber wir wissen noch nicht, welche Kugel dieser Farbe vom einzelnen Index konkret ausgewählt wird. Zur Farbe c_i soll es ja $K_i =\#\overset{-1}{\varphi}(\{c_i\})$ Kugeln dieser Farbe in der Urne geben. Oder auch : Sei $Z_i \subset Z$ die Teilmenge der n_i gewählten Indizes aus Z und J(i)=$\overset{-1}{\varphi}(\{c_i\})$ die Klasse der Kugelindizes, die zur Farbe i führen. Wieviel Abbildungen K(i)→J(i) gibt es? Nun wieder $(K_i)^{n_i}$ Stück! Kombiniert man alle Farben unabhängig, so gibt das gerade $(K_1)^{n_1}(K_2)^{n_2}.....(K^{n_F})^{n_F}$ Möglichkeiten (= Abbildungen $Z_m \to K_m$, die zu der betrachteten Farbpartition der Zugmenge Z_m gehören.). Da es K(n) solche Partitionen gibt - alle mit **derselben Zahl** zugehöriger Abbildungen $Z_m \to K_m$, erhalten wir insgesamt für die Zahl gesuchter Abbildungen: $K(n)(K_1)^{n_1}(K_2)^{n_2}.....(K_F)^{n_F}$. **Damit ist der Beweis geführt.**

(3.11.11) Nach unserer eingangs in (3.11.3) formulierten Regel zur Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit müssen wir die gefundene Zahl einschlägiger Fälle noch durch die Gesamtzahl aller möglichen Abbildungen aus $\mathfrak{F}(Z_m,K_m)$ (=Anzahl aller möglichen Fälle) teilen. Das war aber $K^Z=K^{n_1}K^{n_2}.....K^{n_F}$. Beim Ausführen der Division gehen alle absoluten Häufigkeiten K_i (=Zahl der Kugeln in der Urne mit Farbe i) in die zugehörigen relativen Häufigkeiten $h_i=\frac{K_i}{K}$ über. D.h., die absoluten Häufigkeiten der Farben sind für die Wahrscheinlichkeiten bedeutungslos, sofern nur die relativen Häufigkeiten übereinstimmen.

(3.11.12) Man erhält als Resultat:

Satz: Die Urne enthalte Kugeln mit F Farben in den relativen Häufigkeiten h_i. Es werden Z (gleichwertige) Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Weiter sei $\vec{n}=(n_1,n_2,...,n_F)$ eine mögliche vorgegebene Farbverteilung der Zugfolge. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, eben diese Farbverteilung zu finden, gleich $K(n)(h_1)^{n_1}(h_2)^{n_2}.......(h_F)^{n_F}$ mit $K(\vec{n})=\frac{Z!}{n_1!n_2!.....n_F!}$ $0!=1$

(3.11.13) Illustrierendes Beispiel: In der Urne seien 3 Farben mit Häufigkeiten $h_2= h_3=0.25$ und $h_1=0.5$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit N=6 Zügen je eine Kugel der Farben 2 und 3 und 4 der Farbe 1 zu ziehen? Es ist K(4,1,1)=30, also $w=30\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=20\cdot 2^{-8}\approx 0.12$. Unter 8 Fällen ist also etwa eine Farbverteilung der gewünschten Art.



Die Figur zeigt eine mögliche Partition der Zugmenge Z_m={1,2,...,6} und eine Abbildung f, die über diese Partition zur gewünschten Farbverteilung führt.
Da die Kugel jeweils zurückgelegt wird, kann dieselbe Kugel mehrfach gezogen werden. Im Beispiel f(1)=f(4)=3. Beim ersten und beim dritten Zug wird die (rote) Kugel Nr. 3 gezogen.
Andere Kugeln wie 2 oder 5 wurden im Experiment f nie gezogen.

Zur betrachteten Partition von Z_m gehören insgesamt $4^4\cdot2\cdot2 = 1024$ Abbildungen mit der gewünschten Farbverteilung. Und es gibt - wie berechnet - 30 Partitionen von I, die vom gewünschten Typ (4,1,1) sind, jede mit 1024 zugehörigen Abbildungen. Die Zahl der Abbildungen $Z_m \to K_m$ ist $K^Z = 8^6 = 8^4\cdot 8\cdot 8$. Das gibt den Quotienten $\frac{4^4\cdot2\cdot2}{8^4\cdot8\cdot8} = 2^{-8}$ wie oben.

☐ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit im Modell bei zwölf Zügen 6 mit der Farbe 1 und je 3 mit den beiden anderen Farben zu erhalten, also genau die Farbverteilung in der Urne?

☐ Testen Sie Ihr Beweisverständnis, indem Sie folgende Verallgemeinerung behandeln: **Was ist, wenn man ohne Zurücklegen zieht?** Offenbar ändern sich nur die zulässigen Abbildungen f. Welche f sind noch zulässig? Was ändert sich in a), was in b)? Zeigen sie, dass man in (3.11.9) einfach K^n durch $[K]_n$=K(K-1)....(K-n+1) zu ersetzen hat. $[K]_n$ ist das in früheren Fragen bereits eingeführte Pochhammersymbol. Wieso kann man ein zu (3.11.12) analoges Ergebnis nicht erwarten? Spezialisieren Sie auf den Fall F=2, also zwei Farben.

1.3.11a Ein exotischer Konfigurationsraum

(3.11.14) Wir wollen die Resultate zum Urnenmodell benutzen, um die Bedeutung des Konfigurationsraumbegriffes zu verdeutlichen. Dazu betrachten wir den Fall einer Urne mit drei Farben, die wir suggestiv mit r,g und b bezeichnen wollen. Wir ziehen N Kugeln und erhalten die absolute Farbhäufigkeit $\vec{n}=(n_r,n_g,n_b)$ mit $n_r+n_g+n_b$=N. Übergang zu relativen Häufigkeiten ergibt $h=\frac{\vec{n}}{N}=(h_r,h_g,h_b)$. Wegen $h_r+h_g+h_b$=l genügt die Angabe von 2 dieser Komponenten, etwa von h_r und h_b zur Festlegung. Die Menge aller möglichen Häufigkeiten beschreibt für festes N ein Gitter von $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ Elementen. Variiert man N, so liegen alle Häufigkeiten im Dreieck K_3={(r,b)| 0≤r,b≤ 1 und r+b≤l} der r-b-Ebene.

(3.11.15) Für viele Problemsituationen ist es hilfreich, diesem Dreieck der r-b-Ebene die Rolle eines Konfigurationsraumes zu geben, sich also vorzustellen, es handele sich um einen physikalisch-geometrischen Lebensraum. Diese Vorstellung hilft einem, die Art und Richtung einer benötigten Argumentation festzulegen und zu verstehen. Und der Fall mit den 3 Farben läßt sich problemlos auf den der f Farben verallgemeinern.

(3.11.16) Wählt man N fest, so erhält man eine Teilmenge von K_3 in der anschaulich-geometrischen Form eines Gitters. Auch dieses Gitter können wir als Konfigurationsraum interpretieren, was wir jetzt tun wollen. $K_{3,N}$ sei nachfolgend ein solcher Gitterraum. Jedem Gitterpunkt kann man nach (3.11.12)) das zugehörige $h(\vec{n})$ zuordnen, was ein Feld auf dem Gitter $K_{3,N}$ ergibt. Ebenso kann man für fest vorgegebene Farbhäufigkeiten $\vec{h}$, die oben berechneten Wahrscheinlichkeiten als Wahrscheinlichkeitsfeld (Typ Skalarfeld) auf dem Gitter auffassen.

(3.11.17) Nehmen wir an, wir hätten ein festes derartiges Feld, das jedem Gitterpunkt seine zugehörige Wahrscheinlichkeit w zuordnet. Dann sehen typische Konfigurationsraumvorstellungen, die man entwickeln kann, so aus:

> Man gibt sich einen Wahrscheinlichkeitswert vor. sagen wir $p_0 = 0.1$. Dann zerlegt das Feld den gesamten Raum in drei Teile G, H und P, je nachdem ob der dortige Feldwert kleiner (G) gleich (H) ader größer (P) als p, ist. Eine Landkarte wird entsprechend durch ein bestimmtes Höhenniveau zerlegt. Typische von der Konfigurationsraumvorstellung induzierte Fragen sind jetzt: Wie groß sind die drei Teilmengen? Wenn man einen bestimmten Gitterpunkt vorgibt, wo liegt er? In G,H oder in P? Wenn er in P liegt, auf welchem Weg gelange ich zur Grenze H? Gibt es einen möglichst kurzen Weg? Eine Folge von Gitterpunkten wird als Bahnkurve im Konfigurationsraum interpretiert Usw.

All diese anschaulichen Vorstellungen lassen sich in jedem unserer Gitterkonfigurationsräume mathematisch ausführen und behandeln. Und umgekehrt sind viele mathematische Strukturen gerade so entwickelt, dass sie der Anschauung entsprungene Vorstellungen präzisieren und durchführbar machen.