Kap.1: Grundlegende mathematische Begriffssysteme: **Mengen, Abbildungen, Partitionen**.

1.1 Das Begriffssystem *Mengen*

1.1.0 Vorbemerkung

(1.0.1) Die Einführung des naiven Mengenbegriffs dient dazu, eindeutig und effizient festzulegen. worüber man (mathematisch) sprechen will.

> Wenn im Alltagsleben über Dinge wie Freiheit, Schönheit oder Leistung gesprochen wird, so verstehen unterschiedliche Personen darunter vielfach Unterschiedliches. Was jeweils genauer gemeint ist, wird erst bei Bedarf durch Nachfragen oder ein klärendes Wort bestimmt, oder erklärt sich durch die Situation, den Kontexf, nicht aber allein durch die sprachliche Formulierung. Im wissenschaftlichen Bereich, speziell dem mathematischen, ist eine solche Unbestimmtheit unzulässig, zumindest sehr problematisch. Ein wissenschaftlicher Text sollte aus sich heraus kontextfrei erklären, was er meint.

(1.0.2) *Interpretatorisch nicht eindeutig* sollte man nicht verwechseln mit *sachlich unbestimmt.* Im ersten Fall legt der Kontext nicht ausreichend fest, was gemeint ist. Derselbe Text wird durch verschiedene Adressaten unterschiedlich interpretiert. Im schlimmsten Fall zieht jeder diejenige Interpretation für sich heraus, die ihm gefällt. Im Gegensatz dazu, kann es sachliche Gründe geben, die bestimmten Begriffen eine gewisse Unbestimmtheit belassen. Was ein alter Mensch ist, sollte nur grob, aber nicht auf Jahr und Tag bestimmt werden. Die Atome einer Wolke sind im Randbereich mehr als unbestimmt. Usw. Aber man kann und sollte die Begriffe so formulieren, daß allen Adressaten diese Unbestimmtheit und ihr Ausmaß bewußt ist.

(1.0.3) Die elementare Mengenlehre ist eine mächtige (aber einfache) Symbolsprache mit einer Semantik, die genau das festlegt, auf das es im mathematisch naturwissenschaftlichen Bereich erfahrungsgemäß immer noch ankommt. wenn man von den konkreten Inhalten absieht. Mit ihrer Hilfe kommt man der erwünschten Kontextfreiheit mathematischer Texte ein gutes Stück näher. (Also nachprüfbare, reproduzierbare Argumentationen!) Überdies Iäßt sie sich so weiterentwickeln, daß sie auch das exakte Umgehen mit unscharfen Begriffen und das Offenlassen von Möglichkeiten erlaubt. Beseitigt wird durch sie die willkürliche Interpretierbarkeit von Exaktem oder unexakt Gemeintem.

(1.0.4) **Die elementare (oder naive) Mengenlehre**

- vermittelt einen einheitlichen, aber trotzdem nicht sehr aufwendigen Zugang zu komplexen Strukturen unterschiedlichster Art, welche dem intuitiven Verständnis nicht mehr unmittelbar zugänglich sind. Hierzu gehört insbesondere alle moderne Mathematik und alle etwas anspruchsvolleren Anwendungen derselben,

- erlaubt einen einheitlichen Einstieg in das Verstehen sowie eine einheitliche Darstellung historisch gewachsener wissenschaftlicher Themen unterschiedlichster Art. (Aristotelische Logik, Differentialgleichungen, Thermodynamik,....) Die Darstellung der Themen gewinnt durch die Sprache der Mengenlehre an Effizienz (Kompaktheit) und ganz wesentlich an Kontextfreiheit. Die historischen Formulierungen selbst erlauben keinen einheitlichen Einstieg. sondern fordern eher spezifische Einfühlung),

- erleichtert das Lernen und Verstehen komplexer Theorien. (Zumindest, wenn man diese Sprache beherrscht.) Dies geschieht. weil Analogien zu bereits Bekanntem leichter wahrgenommen werden,

- leistet eine (unbedingt erforderliche) **Präzisierung und Entwicklung umgangssprachlicher Begriffssysteme** und des zugehörigen Denkens. Man denke an das immer wieder auftauchende Problem der gedanklichen Sorgfalt beim Übergang vom Einzelfall zur Verallgemeinerung,

- bildete den Einstieg zu einer effizienten Formulierung und Behandlung der tiefsten **Grundlagenprobleme** (der Mathematik). wie sie aus den Fragen der Gültigkeit, Konsistenz und Vollständigkeit erwachsen. Dies geschieht im Rahmen der axiomatischen (nicht mehr naiven!) Mengenlehre und formalen mathematischen Logik. Worüber man überhaupt exakt reden kann, wird damit einsehbar, allerdings erst nach einiger Verständnisarbeit,
- erlaubt die Formalisierung und Verwendung unscharfer Begriffe und Berücksichtigung offener Möglichkeiten im Rahmen einer einfachen Weiterentwicklung (fuzzy-Mengentheorie). Damit kann man dann exakt auch über Unexaktes reden. Beachten Sie: Weiterentwicklung und Anwendung - nicht etwa Neuanfang oder Alternative.

1.1.1 Mengenbildung

Hier geht es um ein Problem, das aus dem kommunikativen Aspekt entstanden ist, aus dem Wunsch nach Entwicklung einer kontextfreien, eindeutigen und das allgemein Wesentliche erfassenden Symbolsprache.

(1.1.1) Wir nehmen eine (oder mehrere) Eigenschaften, die von der Art sind, dass genau feststeht, ob ein Objekt (zweifelsfrei) diese Eigenschaften hat oder nicht: Etwas ist eine ganze Zahl oder aber nicht. Etwas ist ein (gedachter) Punkt im Raum oder aber nicht. Unter diesen Umständen können und wollen wir die Menge aller Objekte mit genau diesen Eigenschaften als gedankliche Konstruktion einführen. Menge steht also für Gesamtheit ihrer Objekte, die darin zusammengefaßt werden soll. So wie eine Mannschaft die Gesamtheit der Spieler umfaßt.

(1.1.2)

> **Grundlegendes Kriterium für Mengen und Mengenbildung:**
> Ist durch eine Kombination von Bedingungen (zumindest im Prinzip) genau und eindeutig festgelegt, ob ein Objekt diese Bedingungen erfüllt oder nicht, dann bilden wir die
> **Menge aller Objekte mit dieser Eigenschaft** als geistige Konstruktion, die alle dies Objekte zusammenfaßt.
> Bezeichnet M diese Menge und a irgendein Objekt, so gilt entweder
> a$\in M$ (*a ist Element von M*) oder a$\notin M$ (*a ist nicht Element von M*).
> Stets genau eine dieser beiden Möglichkeiten, keine weitere.

Die Anwendung dieses Kriteriums auf konkrete Fälle fällt Anfängern vielfach schwer. Wir besprechen zunächst, wie man üblicherweise Mengen bildet und anschließend dabei auftretende Probleme.

☐ *Eine siebenelementige Menge von Lösungen der quadratischen Gleichung* $x^2+3x+4=0$. Das ist - wie wir wissen - sachlich Unsinn. Aber so etwas soll ja nicht durch Sachwissen, sondern über den Formalismus ausgeschlossen werden. Überdenken Sie den bisherigen Text und besonders auch den weiteren Text daraufhin, wie der Formalismus derartige schön klingende, aber unsinnige Objekte ausschließt.

(1.1.3) **Wie führt man in einer ordentlichen mathematischen Darstellung Mengen ein?** Wir nennen drei Methoden. In Kap. 1.3.12 folgt noch eine weitere, sehr wichtige Methode:

1. Die einfachste Methode besteht in derAufzählung der Elemente:

   $$L = \{1, 2, 3\} \quad \text{oder} \quad J = \{a, b, 2, 4\} \quad \text{oder} \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

   Was jeweils in den geschweiften Klammern steht, gibt die Elemente an.

2. Sehr wichtig ist die (vielfach verbale) Festlegung durch eine oder mehrere definierende Eigenschaften. Etwa: Ax=b sei ein lineares Gleichungssystem. Dann sei (bezeichne) $\mathbb{L}$=$\mathbb{L}$(A,b) die zugehörige Lösungsmenge. (Damit ist die Menge $\mathbb{L}$ eingeführt.)

3. Einfach und relativ unproblematisch ist die Rückführung der neuen Menge auf bereits im mathematischen Kontext erfaßte Mengen. Dann stehen Durchschnittsbildung Vereinigung, Differenz (von Mengen) usw. zur Verfügung. Diese einfachen Bildungen besprechen wir hier nicht genauer. Ein Beispiel einer solchen Konstruktion wäre

$$M = (]-1,0[\cup]0,1[) \cap \mathbb{Q}.$$

Hauptsächlich b), also die Einführung über eine definierende Eigenschaft, bereitet Schwierigkeiten, weil die Forderungen aus (1.1.3) erfüllt sein müssen. Wir gehen daher auf diesen Punkt genauer ein. Zunächst noch einige technische Ergänzungen und dann die Probleme.

Betrachten wir das angeführte Beispiel der Lösungsmenge. Kriterium (1.1.3) ist hier offensichtlich erfüllt: Entweder ist etwas ein n-tupel reeller Zahlen oder nicht. Und wenn ja, dann erfüllt es diese unsere Gleichung oder nicht. Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

(1.1.4) Üblicherweise stellt man eine derartige Mengenfestlegung stärker symbolisch dar:

$$\mathbb{L} = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{A}\vec{x} = \vec{b}.$$

Gelesen: Menge aller $\vec{x}$, die........ erfüllen. Vor dem senkrechten Strich | steht die gewählte Bezeichnung für das allgemeine Mengenelement, dahinter die festlegenden Bedingungen, für die man die· Eindeutigkeit zu überprüfen hat. Nochmals die Form: {x | ....}. Hierbei ist x stumme Variable und das, was unter ..... einzufügen ist, muß dem Kriterium (1.1.3) genügen.

Wird dagegen eine Spezifikation außerhalb der Klammer vorgenommen, so liegt ein äußerer Parameter vor.

$$\mathbb{L} = \{x|x^2 - ax = 0\} \qquad a \in \mathbb{R} \quad \text{mit } \mathrm{a} \geq 0$$

etwa besagt, daß man für jedes a der genannten Art **eine eigene Menge** $\mathbb{L} = \mathbb{L}_a$ hat. Der Index gibt diese Abhängigkeit an. Diese Lösungsmengen kann man im Beispiel unmittelbar durch Elementaufzählung angeben: $\mathbb{L}_a = \{0, a\}$.

☐ Geben Sie die folgenden Mengen an: T={t | t ist Teiler der Zahl 12} sowie T_t,={t}, wobei t ein Teiler der Zahl 12 sein soll. Dabei werden 1 und 12 als *triviale* Teiler mitgezählt. Interpretieren Sie schließlich die folgende Bildung :

$$M = \{X|X = \{t\}, \text{t ist Teiler von 12}\}$$

Geben Sie die Menge M durch Aufzählung an.

(1.1.5) Als weiteres Beispiel wollen wir "die Menge aller natürlichen und durch 3 teilbaren Zahlen einführen". Unser Kriterium ist erfüllt und das Einführungsschema ergibt eine Menge, die wir hier mit T_3 bezeichnen:

$$T_3 = \{n|n \text{ ist natürlich und durch 3 teilbar}\}=\{\mathrm{x}|\mathrm{x} \in \mathbb{N},\ \text{es gibt k} \in \mathbb{N} \text{ mit x=3k}\}$$

Kommentieren wir diese Bildung: Die Wahl des Symbols oder Buchstabens (n,x,a,...), der das allgemeine Element der Menge bezeichnet, ist weitgehend willkürlich, es handelt sich um eine *stumme Variable.* Zur Gedächtnishilfe wird man bei Elementen aus ℕ allerdings meist n oder ähnliches vorziehen.

(1.1.6) Enthalten zwei Mengen dieselben Elemente, so sind sie gemäß (1.1.3) gleich. Symbolisch A=B. Das erklärt das zweite Gleichheitszeichen in (1.1.5). **Dieselben Elemente können durch unterschiedliche Bedingungen oder Formulierungen bestimmt werden**. Auch dies zeigt unser Beispiel. Entsprechend folgen Gleichungen wie {a,a}={a} und {a,b}={b,a} zwischen Mengen, genauer, zwischen **Bezeichnungen für Mengen**, wobei die Bezeichnung zugleich eine Angabe der Elemente enthält.

Die Gleichung

$$[a,b] = \{x|x \in \mathbb{R} \text{ und } \mathrm{a} \leq x \text{ und } \mathrm{x} \leq b\} = \{x|x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{a} \leq x \leq b\}$$

führt die Intervallbezeichnung für die rechts erklärte Menge ein. Das logische "und" wird meist durch ein Komma ersetzt. D.h rechts steht die **mathematiküblische Schreibweise** der in der Mitte gegebenen

Menge. Computersprachen verstehen a≤x≤b meist nicht. Man muß daraus zwei Bedingungen a≤x, x≤b machen.

☐ In der Koordinatenebene sei K_R die Menge aller Koordinatenvektoren, deren Endpunkt auf einem Kreis mit Radius R um den Ursprung liegt. Also K_R={(x,y)|.....}. Geben Sie eine Bedingung, die diese Menge bestimmt. Dasselbe für den Kreis, der durch Verschiebung des Mittelpunktes nach (a,b) entsteht.

☐ Skizzieren Sie die geometrische Form der drei Punktmengen

$$T=\{(x,y)|x+2y \geq 3;x,y \in \mathbb{R}) \text{ und } \quad R=\{(x,y)|x^2\text{-}y^2 \leq 0 \quad \text{oder } y \geq 1\}$$
$$\text{und } S=\{(x,y)|x^2\text{-}y^2 \leq 0 \quad \text{und} \quad y \geq 1\}$$

☐ Stellen Sie die beiden Mengen R und S der letzten Frage als Schnitt bzw. Vereinigung einfacher gebauter Mengen dar. Welche Verallgemeinerung oder Lehre bietet sich an?

☐ Nachfolgend wird ein und dieselbe Menge auf mehrere Weisen vorgegeben:

$$\begin{aligned} M &= \{(x.y)|x^2+y^2=R^2; x,y \in \mathbb{R}\} = \{(u,v)|u=\cos t, \quad v=\sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi\} \\ &= \{(a,b)|b=\varepsilon\sqrt{R^2-a^2}, \quad -R \leq a \leq R, \varepsilon = \pm 1\} \end{aligned}$$

Das sind alles **unterschiedliche Darstellungen derselben Menge**. Welcher? Die in diesen Darstellungen auftretenden Buchstaben x, y, u, v, t, a, b, R haben in der jeweiligen Darstellung alle eine bestimmte Rolle? Geben Sie diese an.

(1.1.7) **Und jetzt zu den Problemen. die bei der Mengenbildung auftreten**. Wir besprechen nacheinander eine Reihe von Beispielen, die äußerlich ganz ähnlich wie die soeben gegebenen Beispiele aussehen, aber alle problematisch bis unbrauchbar sind.

(1.1.8) **Eine Nichtmenge:** $\mathcal{M}$= {M|M ist Menge}= "Menge aller Mengen". Diese Bildung erweist sich als unsinnig. Wir gehen auf diese Problematik im Teil über den Mächtigkeitsbegriff in Kap.1.3.9 etwas genauer ein. Für die Anwendungen. wie sie uns hier interessieren, treten solche Bildungen jedoch nicht auf, so daß wir derartige Fälle außer Betracht lassen. Vgl. (3.9.29).

(1.1.9) **Eine Problemmenge:** Sei K ein fester physikalischer Körper. etwa ein Stein. Dieser nimmt einen bestimmten Raumbereich ein. Wir bilden die Menge

$$\mathcal{V} = \{P|\text{P ist ein Körperpunkt }\}.$$

Unser Hintergrundwissen in Physik und unser Kriterium (1.1.3) geraten in Konflikt! Der Stein ist aus Atomen aufgebaut, die alle eine unscharfe Begrenzung haben und für die auch nicht immer klar ist, ob sie noch zum Stein gehören oder sich bereits von der Oberfläche gelöst haben. Für den Grenzbereich ist damit völlig unklar, ob ein (idealer geometrischer) Punkt zum Stein gehört oder nicht! Das Kriterium ist für einen Teil der Punkte nicht erfüllbar. Der übliche Ausweg ist hier **Idealisierung**. Man stellt sich den Stein als **idealen** starren Körper mit genauer räumlicher Begrenzung vor und für einen solchen ist das Kriterium erfüllbar. Und man weiß, daß solche Idealisierungen, das gedankliche Beseitigen der Problemfälle, die Resultate nicht beeinflußen. Im Beispiel, weil das Ausmaß der problematischen Oberflächenpunkte relativ zu den unproblematischen Innenpunkten einfach zu gering ist, so daß physikalischen Größen etwa die Masse innerhalb der üblichen Meßgenauigkeit unabhängig von der genauen Idealisierung bleiben. Nichtsdestoweniger muß man das Problem der Idealisierungsunabhängigkeit bei konkreten Problemen immer im Auge behalten und die Wahl der Idealisierung eventuelI rechtfertigen

(1.1.10) **Zwei Problemmengen**: Sei S die Menge *aller schönen Bilder* und V die Menge *der die Raumpunkte beschreibenden Vektoren.*

Was Iäuft hier schief? Man wird sich nicht darauf einigen können, was gemeint ist. Die Eigenschaftsbestimmung ist unzulänglich: Ist ein Bild schön oder nicht? Die Entscheidung wird von der gefragten Person, aber auch vom Zeitpunkt der Nachfrage abhängen. Und welche Vektoren beschreiben die Raumpunkte? Soll ein fester Ursprung gewählt sein und ist die Menge der zugehörigen Ortsvektoren gemeint? Oder ist ein volles Koordinatensystem gewählt mit zugehörigen

Koordinatenvektoren? Sind beliebige Koordinatensysteme zugelassen? Usw. Im Kontext einer bestimmten Situation ist häufig klar, was genauer gemeint ist, aber aus der formulierten Bedingung nicht. In all derartigen Fällen ist eine **Präzisierung der bestimmenden Eigenschaft** erforderlich, bis Eindeutigkeit erreicht ist. Die Präzisierung ist meist auf mehrere Weisen möglich, es gibt mehrere Interpretationen der Ausgangsformulierung und man muß überlegen und entscheiden, welche dieser Möglichkeiten man wählt.

Meist manifestieren sich diese unterschiedlichen denkbaren Möglichkeiten in Form von äußeren Parametern. In unseren Beispielen läßt sich die Uneindeutigkeit so

weitgehend reduzieren:

$$\begin{aligned} S_{p,a} &= \{B|\text{ das Bild B erscheint der Person P zum Zeitpunkt a schön}\} \\ V_0 &= \{\vec{x}|\ \vec{x}\text{ ist Ortsvektor zum Ursprung } 0 \in E^3\}. \end{aligned}$$

Generell ist bei derartigen unzulänglich entfalteten Festlegungen eine sorgfältige und nicht leichte Analyse des Sachverhaltes erforderlich. die manchmal beträchtliche Erfahrung und Übung verlangt.

Viele physikalische Begriffe erfordern eine entsprechende Entfaltung. Nehmen wir Geschwindigkeif eines Körpers. Genauer und für viele Zwecke erforderlich ist jedoch

Geschwindigkeit des Körpers realtiv zu.... beobachtet von.... mit der Methode.....

Wir sehen. daß auch hier eine Vielzahl zu ergänzender äußerer Parameter auftritt.

(1.1.11) **Eine unscharfe Menge**. Sei G die Menge aller schweren chemischen Elemente. Hier haben wir zunächst wieder ein Präzisierungsproblem: Bedeutet schwer hohes spezifisches Gewicht oder hohe Ordnungszahl?. Nehmen wir die zweite Möglichkeit. Die natürlichen Elemente gehen bis zur Ordnungszahl 92 Uran. Das wird man sicher als schwer ansehen. Auch noch 82. Nicht schwer ist sicher 8 oder auch 26. Aber wie steht es mit 50 oder 60 oder 70? Wo beginnt schwer. In diesem Fall kann man natürlich eine willkürliche Vereinbarung treffen und etwa vereinbaren, daß schwer bei 73 beginnt. Aber das ist eine Vereinbarung, bei der man das Gefühl hat, dass durch sie Wesentliches verloren geht, was durch *schwer* ausgedrückt werden soll. Man stelle sich entsprechendes beim menschlichen Gewicht vor: Ein Mensch von 100.5kg Gewicht ist schwer. Bei einem Kilo weniger ist er es nicht mehr. Wir sehen, dass es bestimmte Begriffe gibt, deren Charakter sich einer vollständigen Festlegung im Sinne von ja-nein widersetzt, wie sie unser Mengenbildungskriterium verlangt. Sie sind zumindest für einen gewissen Bereich - *unscharf*. Ein **alter Mensch**: hierfür eine scharfe Altersgrenze festzusetzen erscheint ebensowenig sinnvoll wie im Fall der schweren Elemente. Am Ende dieses Kapitels werden wir sehen, wie eine Mathematisierung derartiger unscharfer Begriffe möglich ist und zu einer Erweiterung der Mengendefinition führt, die auch derartige unscharfe (*fuzzy*) Fälle erfaßt.

(1.1.12) Fassen wir zusammen: Mengenbildung über Begriffsbestimmung kann aus verschiedenen Gründen Probleme bereiten. Im Anwendungsbereich der Mathematik einmal, weil die benutzte Begriffe nicht ausreichend entfaltet und präzisiert sein können und zum anderen, weil sie ihrer Natur nach unscharf sein können. Hinzu kommen die Fälle, in denen die Entscheidung an operative Grenzen stößt, sachlich nicht möglich oder sehr schwer ist. Hier hilft meist eine geeignete Idealisierung.

(1.1.13) Analysiert man (1.1.3) genauer, insbesondere auch nach den Erfahrungen unserer Beispiele, dann stellt sich die Frage: Was sind eigentlich Bedingungen? Was wird als solche zugelassen, was nicht? Die formale Mathematik liefert hierzu eine möglichst allgemeine Antwort, von der wir nachfolgend die für uns wichtigsten Bedingungskonstruktionen einführen werden. In 1.3.9(21) geben wir eine kurze Zusammenfassung dieser mathematischen Seite des Problems. Natürlich kann man noch weitere Einschränkungen für zulässige Mengen fordern. Manche Mathematiker möchten zu große, operativ nicht zugängliche Mengen ausschließen, was viele mathematische Beweise allerdings enorm erschwert.

Die Physik liefert andere Beispiele von Einschränkungen der Mengenbildung. Gewisse, uns zunächst völlig evident erscheinende Bedingungen erweisen sich als physikalisch unzulässig. So verbietet die Relativitätstheorie Mengen gleichzeitiger Ereignisse an verschiedenen Orten. Physikalisch operativ läßt sich diese Bedingung nicht realisieren. Genauer kann man nicht immer genau und eindeutig festlegen, ob zwei Ereignisse gleichzeitig sfattfinden ader nicht. Auch die Quantenmechanik macht Einschränkungen noch anderer Art.

1.1.2 Beispiele und Rollen wichtiger Mengen.

(1.2.1) Einige Mengen verwenden wir generell mit festgelegter Bedeutung und zugehöriger Bezeichnung. Zunächst einmal die üblichen Zahlmengen:

- $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,.....\}$. Die Menge der natürlichen Zahlen. Wir **vereinbaren**, daß die Null dazu gehören soll.
- $\mathbb{Z}$ = Menge aller ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q}$ = Menge aller rationalen Zahlen,
- $\mathbb{R}$ = Menge aller reellen Zahlen

Weiter benutzen wir (durch Idealisierung gewonnenene) Mengen, die sich auf den uns umgebenden geometrisch-physikalischen Raum beziehen:

- (1.2.2) E^3 Menge aller (idealen) Punkte des geometrischen Raumes
- V_0^3 = Menge aller Ortsvektoren der Punkte aus E^3 bezüglich des (festen) Ursprungs 0 (= geometrische Pfeile mit Ursprung in 0).
- $\mathbb{R}_K^3$= Menge aller Koordinatenvektoren bezüglich des Koordinatensystems K.

  (1.2.3) Anmerkung zur Bezeichnung *Raum*. Dieses Wort vetwendet man fast gleichwertig mit Menge. Der einzige Unterschied besteht darin, daß Raum immer auf eine mehr oder weniger ausgeprägte geometrische Rolle hindeutet! Raum ist ein typischer Begriff mit unscharfer Bedeutung.

□ Bestimmen Sie die folgenden Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente:

$$\begin{aligned} L &= \{n|n = 3ag; \quad a, g \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 3, g \leq 4\} \\ L_a &= \{n|n = 3ag; \ g \in \mathbb{N}, g \leq 4\} \qquad \text{a=0,1,2,3.} \end{aligned}$$

(Wieso wurde in L ; statt , benutzt?)

(1.2.4) Auch für Mengen sind vielfach **Rollenzuweisungen** bedeutsam, so wie wir es bereits für Variable in Termen und Gleichungen kennen. Dies gilt besonders auch für die Erfassung physikalischer Problemsituationen. Dann erhalt eine mathematische Menge über eine physikalische Interpretation eine bestimmte Rolle, die die Richtung der weiteren mathematischen Arbeit weist, die zeigt. was man eher versuchen sollte und was man eher lassen sollte. Erneut sei auf die enorme Bedeutung dieser Richtungsweisung hingewiesen: Zu verhindern, daß die Aktivität im Rahmen einer Problemlösung versiegt.

(1.2.5) Wir führen noch keine Beispiele physikalischer Mengen ein, nennen statt dessen einige Rollen, die besonders wichtig sind, da sie gewisse unverzichtbare Grundelemente der physikalischen Wirklichkeits beschreibung repräsentieren.

(1.2.6) Die **Konfigurationsraumrolle.**

Sie verallgemeinert die Rolle des Raumes E^3 der idealen geometrischen Punkte. Bei einem Raum mit dieser Rolle wird man versuchen, Analogien zu wichtigen geometrisch-physikalischen Eigenschaften zu finden und damit Probleme angehen. Dies Vorgehen erweist sich als ausgesprochen erfolgreich. So kann man in jedem Vektorraum problemlos Geraden einführen und mathematisch deren Eigenschaften übertragen. Was sind die wesentlichen Eigenschaften, die einen solchen Konfigurationsraum ausmachen?

Im Konfigurationsraum (=Menge mit Konfigurationsraumrolle) ♦ lassen sich geometrische Figuren beschreiben (Strecken, Kreise, Würfel...) ♦ kann man die Entwicklung und Bewegung von Figuren verfolgen und beschreiben (Bahnkurven) ♦ kann man gedanklich sich ortsabhängige physikalische und geometrische Beobachtungen und Messungen vorstellen und mathematisch beschreiben
(Felder)

All dies kann in der Realität stattfinden oder als gedankliche Vorstellung. Auch im zweiten Fall sprechen wir von Konfigurationsraum, auch wenn seine Elemente sich extrem von den Punkten des E^3 unterscheiden, wogegen die Beziehungen dazwischen analog oder ähnlich sind. Und darüber entwickeln sich dann gedankliche Analogien, die in nachfolgenden Schritten präzisiert und ausgearbeitet werden.

Neben E^3und E^2 tritt häufig die Zeitachse E^1 in der KonfigurationsraumroIle auf. Ein Zeitintervall ist eine typische Figur und die Natur Iäßt die Zeit unerbittlich ablaufen, wobei man jedoch verfolgen kann, was dabei geschieht. Weitere Konfigurationsräume werden aus diesen beiden - E^3 und E^1 - aufgebaut. In der Physik erfaßt die Konfigurationsraumrolle den Sachverhalt, daß alle physikalischen Ereignisse irgendwie in Raum und Zeit ablaufen.

Aber auch ganz andere Mengen können in dieser Rolle auftreten. In der Bevölkerungsstatistik etwa eine Gesamtheit von Menschen, für die man sich interessiert. Typische Figuren sind dort alle erwachsenen Männer über 50. Eine Beobachtung wäre wie hängt die Zahl der Ehepaare vom Alter ab ? Oder: Welche mittlere Größe haben 10 herausgegriffene Personen? Ein noch ganz anderes Beispiel besprechen wir in 1.3.11.

Im Bereich der Anwendungen der elementaren Mathematik schließlich repräsentiert die unabhängige Variable häufig ein Element einer Menge mit Konfigurationsraumrolle: Der Beobachter kann sich im Konfigurationsraum, der x-Achse, bewegen, d.h. ihren Wert beliebig vorgeben.

Im Laufe des Kurses werden wir dieser Rolle immer wieder begegnen und dabei das soeben Gesagte mit immer neuem und mehr konkretem Inhalt versehen.

(1.2.7) **Die Parameterraumrolle**

Diese Rolle liegt vor, wenn die Elemente der Menge die Funktion haben, die Elemente einer anderen Menge **zu benennen oder quantitativ zu beschreiben**. Jedes Element erhält dann einen Namen etwa in Form einer Zahl. Diese zweite Menge ist vielfach eine mit KonfigurationsraumroIle.

Zählt man die Atome eines Körpers ab, so ist P={1,2.....N} eine typische namensgebende Parametrisierungsmenge ohne rechnerische Bedeutung. Die Punkte einer Ebene lassen sich durch den $\mathbb{R}^2$ parametrisieren und mit Hilfe dieser

Parametrisierung bestimmt man dann rechnerisch Punkte mit besonderen Eigenschaften. Genauer: Deren "Namen" in Form ihrer Parameterwerte. Usw.

Die Parameterraumrolle erfaßt den Sachverhalt, daß qualitativ gedachte oder erfaßte Objekte zu **benennen** sind, um über sie sprechen zu können, und daß sie zu **quantifizieren** sind, damit man sie schließlich mit Meßresultaten in Beziehung setzen kann. Beim Einstieg in ein qualitativ gegebenes Problem besteht einer der ersten Schritte in der Einführung von Benennungen, die man sich der Regel aus Mengen mit Parameterraumrolle verschafft.

Meist kann man dieselben Objekte auf viele unterschiedliche Arten quantifizieren.

(1.2.8) **Die Ergebnisraumrolle**

Nimmt man im Konfigurationsraum Messungen und Beobachtungen vor, so liegen die Resultate. die Ergebnisse. die erfaßten Merkmale jeweils in Mengen möglicher oder denkbarer Meßergebnisse.

Typische Kandidaten für diese Rolle sind V^3 und $\mathbb{R}$.

Mißt man Kräfte, die auf einen Körper wirken mit Hilfe von Federwaagen, so beschreiben sich die Resultate durch Elemente aus V^3. Bestimmt man für eine Personengruppe Gewicht oder Einkommen, so liegen die Ergebnisse in $\mathbb{R}$.

(1.2.9) Meßergebnisse müssen vergleichbar sein und in Beziehung zueinander gesetzt werden können. Hierzu benötigt man die Ergebnisraumrolle. Wesentlich ist, daß man für alle Konfigurationsraumpunkte denselben Ergebnisraum verwendet. Das enthält die stillschweigende Annahme der Parallelverschiebarkeit der Beobachtungsresultate. Ist diese Bedingung nicht erfüllbar und sie erweist sich etwa im Bereich der allgemeinen Relativitätstheorie als sehr problematisch, so ist eine beträchtlich komplizierterer Formalismus erforderlich, den wir im Teil über die Differentialgeometrie behandeln.

1.1.3 Das mengentheoretische Begriffssystem ($\in, \subset, =$)

(1.3.1) Die Vorgabe einer Menge verlangt, dass von jedem Objekt im Prinzip (aber unabhängig vom jeweiligen subjektiven Wissensstand) feststeht, ob es zur Menge gehört oder aber nicht. Die Objekte, die zur Menge gehören, nennt man die Elemente der Menge. Bezeichnet a ein solches Element einer Menge, so schreibt man das a$\in$M. Bezeichnet a dagegen etwas, was nicht zur Menge gehört, so formalisiert man dies durch a$\notin$M . So gilt etwa 3$\in \mathbb{Z}$ und 3.124$\in \mathbb{R}$, aber 3.124 $\notin \mathbb{N}$. Beachten Sie, dass das Symbol $\in$ immer eine Hierarchie einführt, eine Art unten und oben, die nicht vertauscht werden dürfen. Die zugehörige Menge steht in der Hierarchie immer höher als das Element. 3$\in \mathbb{N}$, aber nie $\mathbb{N} \in$3. Und auch nicht 3$\in$ 3. Dagegen ist 3$\in\{3\}$ richtig und korrekt. Dabei ist $\{3\}$ nach unseren Vereinbarungen (Mengenbildung durch Aufzählung der Elemente) die Menge, deren einziges Element 3 ist.

(1.3.2) Auch hier - beim Begriffssystem"Mengen"- geht es um Rollenzuweisung: Für die einzelnen Symbole hat man situationsspezifisch zu klären, ob sie als *Element von....* oder als *Menge aller....* anzusehen sind. Für die wichtige Beziehung $\in$ (Elemenf) benutzt man auch andere - sich meist selbst erklärende - Sprechweisen. Etwa *a liegt in M* oder *a gehört zu M.*

Das Elementsymbol $\in$ regelt die hierarchische Beziehung zwischen Elementen und Mengen.

(1.3.3) Daneben gibt es in der Mengensprache aber auch **Beziehungen zwischen Mengen,**. also zwischen Objekten auf derselben hierarchischen Ebene.

- ♦ Zwei Mengen M und N sind *gleich*, wenn sie genau dieselben Elemente enthalten. Man schreibt $\boxed{M=N}$.
- ♦ Eine Menge M heißt Teilmenge der Menge N , wenn alle Elemente von M auch Elemente von N sind. Das schreibt man $\boxed{M\subset N}$ (M ist Teilmenge von N)

(1.3.4) Die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Also $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$. Sie enthält unendlich viele Elemente, aber man kennt keine Formel der üblichen Art, die alle Primzahlen liefert. Beachten Sie: **Hiernach gilt natürlich auch M$\subset$M. Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.** Dies ist eine nützliche (letztlich vereinbarte) Konsequenz unserer Defintion der $\subset$-Relation.

(1.3.5) Anfänger und Personen mit geisteswissenschaftlichem Hintergrund stoßen sich vielfach an diesem Sachverhalt, weil nach umgangssprachlichen Vorstellungen ein "Teil immer weniger sein sollte als das Ganze". Aber es gibt keinen Grund, wieso die etwas ungenauen und nicht eindeutigen umgangssprachlichen Vorstellungen bei den mathematischen Definitionen unbedingt übernommen werden sollten. Man hätte alternativ definieren müssen:

> Wenn jedes Element von M auch Element von N ist, es aber **mindestens** ein Element von N gibt, das nicht auch in M liegt.

Den hierdurch beschriebenen Fall nennt man eine ***echte*** *Teilmenge*. Formal: $\boxed{M \underset{\neq}{\subset} N}$. Dieser Fall ist praktisch **weniger wichtig** und bekommt daher das abgeleitete und aufwendigere Symbol nebst Bezeichnung. M selbst dagegen charakterisiert man als eine ***triviale*** *Teilmenge* von M. Teilweise schreibt man in der Literatur auch $\subseteq$ für unser $\subset$ und dann steht $\subset$ tatsächlich für unser $\underset{\neq}{\subset}$. Aber aus den genannten Gründen ist das nicht besonders zweckmäßig.

□ Was bedeutet es, daß soeben formuliert wurde: "eine triviale Teilmenge" und nicht "die triviale Teilmenge" ? In mathematischen Texten liefert der Artikelgebrauch vielfach wichtige Informationen.

(1.3.6) Im Bereich der Geometrie lassen sich die üblichen "**Figuren**" als Teilmengen interpretieren! Dreiecke, Kreise in der Ebene sind zunächst einmal bestimmte Teilmengen des E^2. Kugeln, Ebenen Figuren und Teilmengen des E^3 usw. Steht man vor dem Problem, Eigenschaften einer Teilmenge A einer Menge E zu analysieren, dann lohnt sich meist der Versuch einer geometrischen Interpretation. Man stellt sich A als Figur im Konfigurationstraum E vor. Diesem Vorgehen werden wir vielfach begegnen.

(1.3.7) **Zwei Beispiele für Teilmengenbildung in der Physik:**

Es sei E^3 unser üblicher Konfigurationsraum, in dem wir physikalische Beobachtungen vornehmen. Diese Beobachtungen können jedoch üblicherweise nicht im gesamten Raum stattfinden, weil dies nicht machbar ist. Den Bereich, der der Beobachtung zugänglich bzw. zur Betrachtung ausgewählt ist, nennen wir *Beobachtungsgebiet* G. Daher gilt $G \subset E^3$. Natürlich ist $G=E^3$ als Möglichkeit eingeschlossen.

Es sei E^1 der Raum aller Zeitpunkte. Auch zeitlich werden wir in der Regel nur während endlicher Zeitintervalle beobachten. $I\subset E^1$ nennen wir das *Beobachtungsintervall* (der Situation).

□ Kommentieren Sie (für den Bereich der naiven Mengenlehre) die folgenden beiden zusammengesetzten Bedingungen: "$a\in M$ und $a=M$" sowie "$a\in M$ und $\{a\}=M$". Liegen sinnvolle Bedingungen im Sinne von (1.1.3) vor?

1.1.4 Die leere Menge.

Vielfach verwendet man zur Mengenbildung Bedingungen, für die man zunächst noch nicht weiß, welche Elemente und wieviele Elemente sie erfüllen. Menge aller Zahlen, die eine bestimmte Gleichung erfüllen. Oder Menge aller chemischen (bekannten) Verbindungen, die bestimmte physikalische und chemische Eigenschaffen besitzen. Im Prinzip sollten dies wohldefinierte Mengen sein, auch wenn man (aus Informationsmangel) ihre Elemente nicht kennt. Vielmehr wird man mit solchen Mengen mathematisch arbeiten, um ihre Elemente zu bestimmen oder Eigenschaften der Menge herzuleiten. Und dabei kann es sich durchaus herausstellen, dass es überhaupt kein Objekt gibt, das alle Bedingungen erfüllt. Die Menge erweist sich - was ihren Elementinhalt anbelangt - als leer. Nun wäre es irgendwie merkwürdig, wenn unter diesen Umständen eine Menge plötzlich ihren Mengenchatakter verlöre, abhängig vom Wissenstand. Enthält eine Menge überhaupt kein Element, so nennt man sie *leere Menge*. Bezeichnung $\emptyset$ oder $\{.\}$.

Haben Sie über die Frage zu (1.1.2) nachgedacht? ("Eine Menge aus 7 verschiedenen Lösungen der Gleichung...."). Das Mengenbildungskriterium verlangt zunächst eine Bildung ganz bestimmter Form. In einem zweiten Schritt wird daraus ein Element gewählt.

- Sei S die Menge aller Mengen, die genau 7 verschiedene Lösungen der Gleichung $x^2 + 3x + 4 = 0$ enthalten.
- Sei $s\in S$ (und das ist dann die verbal beschriebene Menge!)

Aber natürlich ist S leer und damit der zweite Schritt nicht ausführbar!

Nach den oben gegebenen Bestimmungen sind alle leeren Mengen gleich. d.h. es gibt im mengentheoretischen Sinn nur eine einzige leere Menge, die leere Menge. Überdies ist $\emptyset$ Teilmenge von jeder Menge M. Denn jedes Element von $\emptyset$ liegt sicher auch in M, da es ja gar keines gibt, für das dies zu prüfen wäre. Damit kennt man für jede nichtleere Menge bereits zwei Teilmengen: Die leere Menge und die Menge selbst. Oder $\emptyset \subset M$ und $M\subset M$. Diese beiden Teilmengen heißen auch die *trivialen* Teilmengen von M, wogegen alle übrigen *nichttrivial* genannt werden. Damit entsprechen die nichttrivialen Teilmengen am ehestem dem, was man sich umgangssprachlich unter "Teilen des Ganzen" vorsteilt.

(1.4.1) Weitere **Beispiele** von Teilmengen aus geometrisch-physikalischen Bereichen:

- ⧫ Die Menge aller Geraden aus V^3 und die Teilmenge aller Ursprungsgeraden.
- ⧫ Die Menge aller Dreiecke in E^2 und die Teilmenge aller zu einem gegebenen Dreieck kongruenten Dreiecke.

(1.4.2) Die (idealisierte) Menge aller denkbaren oder vorstellbaren Bewegungen unter einem gegebenen Einfluß und die Teilmenge der physikalisch tatsächlich möglichen Bewegungen. Die erste Menge ist vielfach nur relativ vage und mit Willkür festgelegt. Das eigentliche, die Richtung des Denkens bestimmende Problem ist das Auffinden der Teilmenge der tatsächlich möglichen Bewegungen.

□

1.1.5 Die Neukonstruktion von Mengen

(1.5.1) Mathematiker haben Tendenz, möglichst intensiv auszunutzen, was sie bereits haben und Neues aus bereits Vorhandenem aufzubauen. Dahinter steckt die Erfahrung, dass die vollständige Neuschöpfung einer mathematischen Struktur meist schwer und arbeitsaufwendig ist.

Im Falle der Mengen legt das die folgende Frage nahe:

??	Wie kann ich aus bereits vorhandenen Mengen neue Mengen konstruieren?

Hierzu gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, von denen wir zwei genauer besprechen und weitere nur nennen wollen. Jede dieser Möglichkeiten ist eine formale Präzisierung von umgangssprachlich gebräuchlichen Operationen. Wir besprechen die *Potenzmenge einer Menge* und das *cartesische Produkt zweier Mengen* Als bekannt setzen wir dagegen die Begriffe *Durchschnitt, Vereinigung und Differenz von Mengen* voraus.

□ Es seien A und B Mengen. Geben Sie die mengentheoretischen Definitionen von A∩B, von A∪B und A-B=A\B. Etwa A\B={x|x∈A, x∉B}. Was für eine Konstruktion wird durch AΔB={x| x∈A oder x∈B, x∉ $A \cap B$} erfaßt? Wie kann man alle diese Konstruktionen graphisch veranschaulichen?

1.1.5a Die Potenzmenge (einer gegebenen Menge).

Sei M eine Menge. Dann können wir die zugehörigen Teilmengen (von M) betrachten. Etwas ist entweder Teilmenge von M oder nicht. Nicht aber beides. Wir können in Gedanken die Gesamtheit all dieser Teilmengen konstruieren und erhalten eine neue Menge:

(1.5. 2)

$\mathfrak{P}$(M)={A|A⊂M}=	"Menge aller Objekte A, die Teilemenge von M sind" Man nennt diese Menge **die Potenzmenge von M.**

(1.5.3) Ein Beispiel: Sei X ={a,b,c} eine Menge mit drei Elementen, die mit a,b und c bezeichnet sind.

Dann enthält $\mathfrak{P}(M)$ gerade $2^3 = 8$ Elemente, die nebenstehend in selbsterklärender Anordnung aufgeführt sind.

	X={a,b,c}	
{a,b}	{a,c}	{b,c}
{a}	{b}	{c}
	∅	

Wir haben hier 6=8-2 nichttriviale Teilmengen.

Sie sollten unbedingt a und {a} auseinander halten . Die zugehörigen korrekten formalen Beziehungen sind a∈ {a} und {a}⊂ {a} . Dagegen ist a∈a Unfug.

□ Weiter sollten Sie jetzt zur Übung für eine vierelementige Menge die Potenzmenge (in analoger Anordnung) konstruieren. Es müssen 2^4=16 Elemente herauskommen.

Noch eine kleine formale Spielerei: Sei $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Dies ist eine Menge mit zwei Elementen. In diesem Fall gilt $\emptyset \in M$, aber auch ∅ ⊂M. Ebenso gilt $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, also nur **eine** triviale Teilmenge. (Vergleichen Sie mit der Frage nach (1.2.6)!)

□ Welche Relationen kann man mit der Menge {a,{a}} bilden? Was ist $\mathfrak{P}$({a,{a}})?

Fassen wir zusammen:

(1.5.4) **Zu jeder Menge M kann man eine zweite Menge konstruieren, die zugehörige Potrenzmenge $\mathfrak{P}(M)$.**

(1.5.5) Beachten Sie: Die hierarchischen Eigenschaften *Element sein* und *Menge sein* sind nicht absolut, sodern nur relativ. Ein Element aus $\mathfrak{P}(M)$ ist **einerseits** Element, **andererseits** aber auch Menge, nämlich Teilmenge von M. Einmal A$\in$ $\mathfrak{P}(M)$ zum anderen A$\subset$ M. Nur die hierarchische Beziehung **zwischen 2 Objekten** ist eindeutig festgelegt. Oder auch: Man benötigt immer 2 Zutaten für

.....ist Element von .... und *.....ist Teilmenge von....*

Im Alltagsbereich : Eine Person ist Spieler in einer Mannschaft (Menge). Aber diese Mannschaft kann wieder Mitglied (Element) in einer Liga sein.

(1.5.6) **Beispiele für Potenzmengenbildung im physikalisch geometrischen Bereich**.

1. Sei E^2 die geometrische Ebene. Dann ist die Menge aller Geraden in E^2 eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(E^2)$. Eine andere Teilmenge ist die Menge aller Dreiecke (nach geeigneter Spezifikation der Sonderfälle). Allgemeiner ist alles, was wir als *Figur in der Ebene* interpretieren, ein Element aus $\mathfrak{P}(E^2)$.
   ☐ Welche Unklarheit besteht hier noch hinschtlich der Interpretation des Wortes *Dreieck* ?

2. Die Menge aller Intervalle von $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

☐ Es sei M ={a,b,c}. Was ist $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$? Anzahl der Elemente? Einige typische Beispiele.

(1.5.7) Gegeben ein Würfel mit k Augen. Wird dieser geworfen, so kann man jeweils das Resultat beobachten, und angeben, welche Zahl herauskommt. Die möglichen Ergebnisse bilden die Menge E={1,2,...,k}. Oder man beobachtet gröber, ob eine gerade Zahl entsteht, eine oberhalb von 4 usw. Jede solche Fragestellung beschreibt ein denkbares *Ereignis* . Dann können wir die Menge aller Ereignisse bilden, den *Ereignisraum.* Wie sieht der der unserem Fall aus? Nun, zunächst haben wir die Menge P={{1},{2},.....,{k}} der *atomaren* Ereignisse, aus denen alles andere aufgebaut wird. Dann bilden wir $\mathfrak{P}(E)$ mit P$\subset$ $\mathfrak{P}(E)$. Das ist für das Würfelsystem der zugehörige Ereignisraum, da er alle überhaupt denkbaren Fragestellungen zum Ausgang des Wurfes enthält. Die leere Menge sollte man mitnehmen, auch wenn man zunächst daran zweifeln könnte. Die atomaren Ereignisse bilden die Teilmenge der einelementigen Teilmengen.

Ereignisräume sind immer mit einem bestimmten Typ von Beobachtungen an einem System gekoppelt. Es kann sich bei ihnen um ziemlich komplizierte Teilmengen von Potenzmengen handeln.

1.1.5b Die Produktmenge (zweier Mengen)

(1.5.8) Es seien A und B zwei Mengen und a$\in$A und b$\in$B. Dann kann man aus den beiden Elementen a und b ein neues Objekt - *das* ***geordnete Paar*** (a,b) - bilden. Es enthält als Information die beiden unveränderten Eingabeobjekte und zusätzlich noch eine Reihenfolge. Wir müssen dieses geordnete Paar (a,b) sehr gut von der zweielementigen Menge {a,b} unterscheiden. Für diese gibt es keine Reihenfolge der Elemente. Man hat {a,b}={b,a} . Denn beide Mengen enthalten dieselben Elemente. Ebenso ist (a,a) strikt von a zu unterscheiden, wogegen {a,a}= {a} gilt. Erneut enthalten beide Mengen ja dieselben Elemente, nämlich nur a. Die Bildung geordneter Paare ist eine wichtige, die bisherige Mengenlehre ergänzende Konstruktion. Ohne sie ist Naturbeschreibung schwerlich möglich. Und mit ihrer Hilfe bilden wir jetzt aus 2 Mengen jeweils eine neue Menge, nämlich

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A,\ b\in B\}$$ Menge aller geordneten Paare mit erster Komponente aus A und zweiter Komponente ausB.

Die so eingeführte Menge A×B nennt man **das *kartesische Produkt* der Mengen A und B .**

(1.5.10) Beachten Sie : Das Komma zwischen den beiden Bedingungen in (1.5.9) steht für ein "und". D.h. beide Bedingungen müssen erfüllt sein. Dies ist eine übliche Konvention. Vgl. (1.1.6).

Wenn man sagt, A und B seien zwei beliebige Mengen, dann darf man insbesondere A=B wählen, d.h. für beide Faktoren dieselbe Menge nehmen. Will man das ausschließen, so muss man die Verschiedenheit ausdrücklich fordern. Etwa : Seien P und Q zwei verschiedene Punkte ausE^3. D.h. bedeutet hier, dass A×A eine durchaus zulässige Konstruktion ist ebenso wie (a,a).

Speziell besteht die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aus allen geordneten Zahlenpaaren. (Mit Hilfe dieser Zahlenpaare hat R. Descartes die Geometrie der Ebene quantifiziert, d.h. den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ eingeführt. Daher der Name "kartesisch". Der lateinische Name von Descartes war Cartesius.)

(1.5.11) Wenn A gerade n Elemente und B genau m Elemente hat, dann hat A×B gerad n·m Elemente. (Bezeichnung "Produkt".)

Das sieht man am besten, wenn man diese Paare, die Elemente von $A \times B$, in einem rechteckigen Matrixschema anordnet. Die beiden unabhängigen Eigenschaften sind hier die Elemente der Faktormengen in irgendeiner Reihenfolge.

A={a,b,c,d} B={1,2,3} Produktmenge A×B		
(a,1)	(a,2)	(a,3)
(b,1)	(b,2)	(b,3)
(c,1)	(c,2)	(c,3)
(d,1)	(d,2)	(d,3)

(1.5.12) Entsprechend kann man auch Produkte mit mehr als zwei Faktoren bilden: A×B×C usw. Hierauf gehen wir nicht weiter ein. Etwa $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $(1,2,0) \in \mathbb{R}^3$.

(1.5.13) Es folgen Beispiele aus dem **physikalisch geometrischen Bereich**.

(1.5.14) Wie beschreibt man die Lage eines Punktes im Raum? Durch Angabe seines Ortsvektors, also eines Elementes aus V_0^3. Wie die Lage eines Systems aus zwei oder drei Punkten? Durch Angabe des geordneten Paares oder Tripels der zugehörigen Ortsvektoren. Dabei kommt es auf die Reihenfolge an, wenn man die Punkte unterscheiden will. Die *Mengen möglicher räumlicher Lagen solcher Systeme* werden dann durch Mengen wie $V_0^3 \times V_0^3$ oder $V_0^3 \times V_0^3 \times V_0^3$ beschrieben. Derartige Mengen, die Lage von Systemen oder Figuren beschreiben, nennen wir auch **Konfigurationsräume.** Genauer: Sie bekommen unter den genannten Umständen die Konfigurationsraumrolle. Führt man Koordinaten ein, so kann es günstig sein, für jeden Punkt ein individuelles Koordinatensystem zu wählen.

Haben die beiden Punkte (im Falle von zwei Punkten) immer einen festen Abstand L voneinander, dann ist der Konfigurationsraum eine Teilmenge von $V_0^3 \times V_0^3$:

$$K = \{(\vec{x}, \vec{y}) | \vec{x}, \vec{y} \in V_0^3, |\vec{x} - \vec{y}| = L\}.$$

(1.5.15) Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge von (physikalischen) Maßeinheiten. Sagen wir $\mathcal{M}$={m,s,kg, m/s^2,....}. Wir bilden die Produktmenge $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$. Die Elemente sind geordnete Paare aus einer Zahl (Zahlwert) und einer Einheit. Wie (3,s) oder (5,m/s). Diese Paare schreiben wir jetzt in der Form 3s oder 5m/s. Hierdurch geht natürlich keinerlei Information verloren. Weil man beide Teile besitzt und ihre Reihenfolge über die jeweilige Art immer unterscheiden kann, selbst wenn man s3 statt 3s schriebe. Wählt man $\mathcal{M}$ einelementig, sagen wir $\mathcal{M} = \{m/s^2\}$, so schreibt man anstelle von $\mathbb{R} \times \mathcal{M} = \mathbb{R} \times \{m/s^2\}$ traditionellerweise $\mathbb{R}[m/s^2]$. Das ist nur eine andere Bezeichnung - Schreibweise - für dieselbe Sache: Ein cartesisches Produkt zweier Mengen. Jedes Element $x \in \mathbb{R}[m/s^2]$ hat daher einen Zahlenwert, den man gerne mit $(x) \in \mathbb{R}$ bezeichnet und eine Einheit, die man mit [x] bezeichnet. $[x] \in \mathcal{M}$ und x=(x)[x].

(1.5.16) Wodurch wird eine räumliche Flugparabel vollständig festgelegt? Durch Angabe von Ort und Geschwindigkeit zu einem festen Zeitpunkt t_0. Also durch das Paar $(\vec{x}_0, \vec{v}_0) \in V_0^3 \times V^3$. Das ist wieder ein cartesisches Produkt. Eine Menge mit dieser (physikalischen) Rolle, dass also ihre Elemente alle denkbaren Bewegungszustande eindeutig festlegen, nennt man auch gerne einen Phasenraum. Im Zusammenhang mit den Differentialgleichungen werden wir dieser Rolle begegnen und ihre große Bedeutung verstehen. Bemerkenswerterweise wird dieser Phasenraum im Rahmen der Quantenmechanik infolge der Unschärferelation problematisch. Seine Elemente sind dann nicht mehr unmittelbar operativ zugänglich, weil es nicht möglich ist, für einen Massepunkt Ort und Geschwindigkeit gemeinsam zu messen.

☐ Sei a∈A und b∈B. In welcher Menge liegt dann die folgende Konstruktion: {a,{a,b}}? Uberlegen Sie sich, ob man mit Hilfe dieser Konstruktion die Paarbildung auf die Mengenbildung allein zurückführen kann? Was ist mit A=B?

☐ Welcher Unterschied besteht zwischen den beiden Mengen $\mathfrak{P}$(A×B) und $\mathfrak{P}$(A)×$\mathfrak{P}$(B), wo A und B zwei Mengen sind? (Anzahl der Elemente im endlichen Fall? Geometrische Veranschaulichung?)

1.1.6 Denken mit Mengen. Das Beispiel des Multinomialsatzes.

(1.6.1) Man arbeitet vielfach mit dem Mengenbegriff, ohne es zu merken und ohne die zugehörige Symbolik zu verwenden.Dabei nähern sich die Resultate des Denkens dem an, was eine mengentheoretische Beschreibung fordert. Und umgekehrt: Gezielte Verwendung der mengentheoretischen Sprache kann die Qualität des Denkens fördern, bis hin zu einer Problemkomplexität, die anderweitig nicht mehr zugänglich ist. Schwieriges erscheint einfacher. Um das zu verdeutlichen, stellen wir uns die Aufgabe:

(1.6.2) **Versteh und beweise den folgenden Multinomialsatz (Trinomialsatz):**

$$\boxed{\text{Für n=1,2,3,... und a,b,c} \in \mathbb{R} \text{ gilt :} \quad (a+b+c)^n = \sum_{\substack{k,\ell,m=0\\ k+\ell+m=n}}^{n} \frac{n!}{k!\ell!m!} a^k b^\ell c^m}$$

Zum Summenzeichen siehe Kap. 1.2.15.

Etwas anders formuliert lautet die Aufgabe:

(1.6.3) Leite für $(a+b+c)^n$ eine zum Binomialsatz analoge Formel her.

Wie wird man ein derartiges Problem angehen?

Zunächst sollte man einige Fälle für kleines n explizit rechnen und nach verallgemeinerbaren Eigenschaften suchen. Inspizieren wir die untersten Fälle:

n=2:	$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$	$=aa+ab+ac+ba+bb+bc+ca+cb+cc$	*9 Terme*
		$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$	*6 Terme*
		$=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+ac+bc)$	*2 Terme*

n=3:	$(a+b+c)^3$	$=(a+b+c)^2(a+b+c)=$
		$=aaa+aab+aac+baa+bab+bac+aca+acb+acc+baa+bab+bac+bba+bbb+bbc$
27 Terme		$+bca+bcb+bcc+caa+cab+cac+cba+cbb+cbc+cca+ccb+ccc$
10 Terme		$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$
3 Terme		$=(a^3+b^3+c^3)+3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc$

Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Schritte genau, möglichst in eigener unabhängiger Rechnung!

(1.6.4) Für n=4 entstehen zunächst 9^4=81 Terme. Diese lassen sich zu 21 Termen des zweiten Typs zusammenfassen und diese wieder zu 4 des dritten Typs. Das Problem ist: Wie kann man die Terme der rechten Seite allgemein schreiben, sie als Rechenausdruck formulieren, der auf beliebiges n verallgemeinerbar ist? Dazu interpretieren wir die rechts stehenden Summanden einfach **als Elemente einer für alle n formulierbaren Menge**.

(1.6.5) Wir sagen, {a.b,c} sei unser Alphabet und nennen jeden Ausdruck aba oder abca usw. ein (mit unserem Alphabet bildbares) **Wort**. Die Anzahl der Buchstaben eines solchen Wortes nennen wir die Länge dieses Wortes. Dann treten in obiger Rechnung bei n=2 alle Worte der Länge 2, bei n=3 in der Formel alle Worte der Länge 3 auf usw. Insgesamt gibt es immer 3^n Worte der Länge n und die erste Form unseres Rechnung ist damit gefunden:

$$(a+b+c)^n = \text{Summe aller Worte aus a,b und c der Länge 3.}$$

Da wir hier die **Gesamtheit aller Worte** betrachten, haben wir eine Menge eingeführt. Formal:

$$\boxed{\mathcal{W}_3(n)=\{x_1x_2....x_n | x_i=a \text{ oder } =b \text{ oder } =c \text{ für } i=1,2,..,n\}.}$$

(1.6.6) Das ist eine Menge von Termen, denn in mathematischer Hinsicht ist jedes unserer Worte natürlich ein Term. Jetzt können wir die übliche Summensymbolik verwenden und schreiben:

$$(a+b+c)^n = \sum_{w\in\mathcal{W}_3(n)} w = \text{Summe aller Worte aus } \mathcal{W}_3(n).$$

(1.6.7) In unseren Beispielen gelangten wir zur zweiten Form, indem wir Terme wie aba und aab und baa zusammenfaßten. Da die Zahlmultiplikation kommutativ ist, haben sie alle denselben Wert. Übrig blieben nur noch Terme, in denen die Reihenfolge der drei Buchstaben a,b,c alphabetisch war. a^2bc, nicht aber baca usw.. D.h.. dass wir eine weitere Wortmenge betrachten, nämlich

$$\boxed{\mathcal{A}_3(n)=\{a^r b^s c^t | r,s,t \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad r+s+t=n\}=\text{Menge der alphabetisch geordneten Worte der Länge n.}}$$

$\mathcal{A}_3(n)$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{W}_3(n)$, wozu wir natürlich vereinbaren, dass a^3 für aaa stehen soll usw. Für n=3 haben wir z.B. $\mathcal{A}_3(n)=\{a^3,b^3,c^3,a^2b,a^2c,ab^2,ac^2,b^2c,bc^2\}$. Vergleichen wir das mit der oben gegebenen zweiten Form, so sehen wir, dass dort über alle alphabetischen Worte summiert wird, wobei jeweils noch ein Zahlfaktor hinzuzufügen ist. **Wie wollen wir diesen allgemein bezeichnen und dann berechnen?** Hierzu beobachten wir zunächst. dass wir die alphabetischen Worte in naheliegender Weise parametrisieren können, also durch Zahlangaben festlegen. Dazu führen wir die folgende Exponentenmenge ein:

$$\boxed{\mathcal{E}_3(n)=\{(r,s,t)|r,s,t\in \mathbb{N}, \quad r+s+t=n\}.}$$

Das ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}^3$.

Für $E=(r,s,t)\in \mathcal{E}_3(n)$ setzen wir $w(E)=a^r b^s c^t \in \mathcal{A}_3(n)$. Die Zuordnung $E\mapsto w(E)$ bildet eine Parametrisierung der Worte von $\mathcal{A}_3(n)$, so wie sonst die Punkte einer geometrischen Figur parametrisiert wurden. Insbesondere hat $\mathcal{E}_3(n)$ ebensoviele Elemente wie $\mathcal{A}_3(n)$.

(1.6.8) Unsere Summe läuft jetzt über alle Exponententripel und die Kenntnis der drei Exponenten reicht aus - wie wir unten zeigen werden - um die Zahlfaktoren zu berechnen. Wir bezeichnen die zugehörigen Zahlfaktoren mit K(E)=K(r,s,t). Unten werden wir zeigen, dass $K(r,s,t)=\frac{n!}{r!s!t!}$ ist. Mit dieser Formel sind die Zahlfaktoren dann bekannte oder besser berechenbare Größen und wir bekommen die übliche und eingangs gegebene Form unseres Trinomialsatzes:

$$\boxed{(a+b+c)^n=\sum_{(r,s,t)\in\mathcal{E}_3(n)} K(r,s,t)a^r b^s c^t \qquad \text{mit} \quad K(r,s,t)=\frac{n!}{r!s!t!}}$$

Schreibt man die Elementbeziehung $(r.s,t)\in \mathcal{E}_3(n)$ aus, so erhält man die in der Fragestellung behauptete Form des Trinomialsatzes. Für den Fall n=5 ergeben sich über diese Formel beispielsweise die folgenden typischen Terme:

$$(a+b+c)^n=\frac{5!}{5!0!0!}a^5+\frac{5!}{4!1!0!}a^4b+...+\frac{5!}{2!1!2!}a^2bc^2+...=a^5+5a^4b+....30a^2bc^2+...$$

Beachten Sie: 0!=1. Insgesamt hat die Summe in diesem Fall 21 Terme, wie man durch Ausschreiben der Menge $\mathcal{E}_3(5)$ sieht.

Fassen wir die benutzten Mengenbildung noch einmal zusammen:

$\mathcal{W}_3(n)$	abaacb		n=6	Wort
$\mathcal{A}_3(n)$	$a^3b^2c^1$			alphab. Wort
$\mathcal{E}_3(n)\subset \mathbb{N}^3$	(3,2,1)		3+2+1=6	Parameter
Summand:	(r,s,t):	$K(r,s,t)a^r b^s c^t$		Wert K ???

(1.6.10) **Welchen Wert haben die Zahlfaktoren** K(r,s,t)? Zur Beantwortung dieser Frage führen wir eine graphische Codierung unserer Rechnung ein. Wie entsteht beispielsweise in

$$(a+b+c)^5=(a+b+c)(a+b+c)....(a+b+c)$$

ein Beitrag wie abbac? Nun man wählt im ersten Faktor (a+b+c) den Buchstaben a, im zweiten den Buchstaben b usw.. Alphabetisch entsteht ein Beitrag a^2b^2c. Wir nehmen jetzt 3 Kästen, einen für a mit zwei Plätzen, einen für b mit 2 Plätzen und einen für c mit 1 Platz. Nun codieren wir das Wort abbac wie folgt: 1. Faktor a, also eine 1 in den a-Kasten. 2.Faktor b, also 2 in den b-Kasten. Die Figur zeigt das Ergebnis. Die Plätze der einzelnen Kästen **füllen wir sukzessive von links nach rechts**, so dass die Zahlen in jedem Kasten notwendig wachsen.

◇◇ | ◇◇ | ◇	1 4 | 2 3 | 5	2 1 | 3 4 | 5
a b c	a a b b c	2 vor 1 im Kasten
Die	zulässig	unzulässig!

(1.6.11) Wieviel derartige zulässige Füllungen des Kastens sind möglich? Genau 30 Stück! Begründung: Insgesamt kann man die 5 Zahlen auf 5!=120 Weisen auf die 5 Plätze in den Kästen verteilen. Aber in zu jeder zulässigen Verteilung gibt es weitere unzulässige. So ist (12)(34)(5) zulässig. Dazu -Zahlaufteilung auf die Kästen- gehören die drei unzulässigen Belegungen (21)(34)(5) und (12)(43)(5) und (21)(43)(5). **Auf 4 Belegungen entfällt im Beispiel genau eine zulässige**. Ist x die Zahl der zulässigen, so folgt 4x=120, also x=30 wie behauptet. Diese 30 kann man auch leicht direkt konstruieren. Man klassifiziert nach der Nummer im c–Kasten, das gibt 5 Möglichkeiten. Die restlichen 4 Zahlen lassen sich auf 6 verschiedene Weisen auf die beiden anderen Kästen verteilen.

(12)(34)(5)	(12)(35)(4)	(12)(45)(3)	(13)(45)(2)	(23)(45)(1)
(13)(24)(5)	(13)(25)(4)	(14)(25)(3)	*	*
(14)(23)(5)	(15)(23)(4)	*	*	*
(34)(12)(5)	(35)(12)(4)	*	*	*
(24)(13)(5)	*	*	*	*
(23)(14)(5)	*	*	*	(34)(25)(1)

Habenn Sie die Konstruktion veratanden?

Allgemein erhält der a-Kasten r Plätze, der b-Kasten s und der c-Kasten t. Jede zulässige Belegung der Kästen gehört zu einer Gruppe von r!s!t! Belegungen, bei denen die Zahlen in denselben Kästen verbleiben: Man muß innerhalb der Kästen die Zahlen auf alle möglichen Weisen vertauschen. Bis auf eine haben aber alle Belegungen mindestens eine falsche Reihenfolge, eine größere Zahl kommt vor einer kleineren.

Bezeichnet x wieder die Anzahl der korrekten Belegungen, so folgt n!=x·1!2!3!. Das ist aber die behauptete Formel.

> (1.6.13) Bemerkung: Verstehen eines Satzes und seines Beweises bedeutet hier u.a., dass man in der Lage ist, die Überlegung auf beliebiges n zu verallgemeinern und dann auch auf andere Anzahlen von Summanden. Hierzu gehört der übliche Binomiallehrsatz (mit 2 Summanden) und die entsprechende Formel für $(a_1 + a_2 + ...a_k)^n$. Unten folgt ein derartiges Anschlußproblem.

Selbstverständlich kann man die gesamte Überlegung auch **ohne die Mengensymbolik** formulieren. Nur ist sie dann weitaus schwieriger nachzuvollziehen und zu beschreiben. Man erkennt das auch gut, wenn man jemandem, der mit der Mengensymbolik nicht vertraut ist, die Aufgabe stellt, den Multinomialsatz zu finden, eventuell auch nur dessen Form anzugeben. (In der Eingangsformel die rechte Seite durch ein ? ersetzen.) Dabei treten große Probleme auf, die bei Kenntnis der mengentheoretischen Beschreibung entfallen oder zumindest erleichtert werden.

(1.6. 15) **Ein kombinatorisches Anschlußproblem:**

> Gegeben sei eine Menge mit n Elementen. Wieviele Teilmengen mit genau k Elementen existieren dazu? ($0 \leq k \leq n$)
>
> Antwort: Das sind $\boxed{\text{K(n,n-k)}=\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$ Stück.

Beweis:

Wir numerieren die n Elemente von M durch. Jetzt sei K irgendeine Teilmenge der gewünschten Art. Wir gehen die n Elemente nacheinander durch und notieren jeweils ein J, wenn das entsprechende Element zu K gehört. ein N. wenn es nicht zu K gehört. Das gibt Worte des Typs JJNJNN aus der Entwicklung von $(\text{J+N})^n$. Verschiedene Worte gehören zu verschiedenen Teilmengen, denn dann gibt es mindestens ein Element, das in einem Wort zu J, im anderen zu N führt. Wieviele dieser Worte haben die gewünschte Zahl von k J-s?

Die beschriebene kombinatorische Methode gibt sofort den behaupteten Wert

$$K(k, n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

☐ Was für eine kombinatorische Größe bzw. Konstruktion wird durch die folgende Zahlgröße beschrieben: Für n∈ ℝ und k∈ ℕ sei $[\text{n}]_k = n(n-1)....(n-k+1)$ für k>0 und $[\text{n}]_0 = 1$? Wie hängt diese Größe (das "Pochhammersymbol") für n∈ ℕ mit den Binomialkoeffizienten zusammen?

1.1.7 Mit dem Mengenbegriff verbundene Denkfiguren

(1.7.1) In Beweisen und mathematischen Texten kommen im Zusammenhang mit dem Mengenbegriff bestimmte Problemsituationen so häufig vor, dass man in der Lage sein sollte, sie routinemäßig nach einem bestimmten Schema zu bearbeiten. Wir nennen solche Schemata *Denk- oder Argumentationsfiguren* und werden sie für einige wichtige mathematische Leistungen wie hier für den Mengenbegriff ausdrücklich formulieren. Diese Denkfiguren tauchen bausteinartig - modular - in größeren Argumentationen auf und müssen dann routinemäßig ausgeführt werden.

Eingangs wurde gesagt, dass das Alltagsdenken an gewissen Stellen zu präzisieren ist. Hierzu gehört einerseits das Verhältnis Beispiel - allgemeiner Fall - andererseits das Arbeiten mit hierarchischen Begriffssystemen. **Ein großer Teil dieser Probleme sammelt sich in den hier behandelten Denkfiguren.** Und überdies ist dieser Präzisierungsbedarf unabhängig davon vorhanden, ob man den mengentheoretischen Formalismus verwendet oder nicht. Analysiert man Schwierigkeiten und Fehler mit der Mathematik beim Studieneinstieg, dann stößt man überwältigend häufig auf Probleme mit diesen Denkfiguren.

Das was wir jetzt beschreiben, wird üblicherweise in den mathematischen Texten nicht behandelt. Es gehört nicht zur "eigentlichen Mathematik", es ist etwas was man beherrscht, worüber man aber kaum spricht.

1.1.7a Nachweis und Explikation einer Elementbeziehung

Im Zusammenhang mit dem Elementsymbol haben wir es vornehmlich mit zwei Denkfiguren zu tun, die wir *Nachweis und Explikation der Elementbeziehung* nennen. Ist M eine Menge, deren Elemente durch bestimmte Bedingungen festgelegt sind, dann geht es um die folgenden Leistungen, bei denen jeweils ein immer wiederkehrender allgemeinerer Rahmen fallspezifisch auszufüllen ist:

(1.7.2)	a bezeichne etwas, das als Element der Menge M={x|......}in Frage kommt.	
	Es ist zu prüfen, ob a$\in M$ gilt. (Nachweis einer Elementrelation)	
	Im Text:	Da........, gilt a$\in M$.

(1.7.3) Z.B hatten wir in (1.6.7) die Menge $\mathcal{A}_3$(n)={a$^r b^s c^t$\| r+s+t=n} eingeführt. Liegen a^3b^2c und $a^3c^2b^3$ in $\mathcal{A}_3(6)$? Für den ersten Term ist das der Fall, denn die Reihenfolge ist alphabetisch und es ist 3+2+1=6. Für den zweiten Term dagegen gilt $a^3c^2b^3 \notin \mathcal{A}_3(6)$. Beide Forderungen sind verletzt. Im ersten Fall schreibt man: "Da die Ordnung in a^3b^2c alphabetisch ist und 3+2+1=6 gilt, ist $a^3b^2c\in \mathcal{A}_3(6)$."

Oder: Sei N die Menge aller reellen Nullstellen der Gleichung $x^4+x^3+x+1=0$. Man vermutet $-1 \in N$. Dann muss man prüfen, ob eine Lösung vorliegt. Das ist der Fall. Man wird formulieren: "Da -1 die Gleichung erfüllt, gilt $-1 \in N$."

So etwas kann sehr schwierig auszuführen sein. Sei etwa $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ die Menge aller irrationalen Zahlen. Zeige, dass die Kreiszahl π in $\mathbb{I}$ liegt.

(1.7.4) Jetzt die zweite Denkfigur:

Man weiß, dass a$\in$M gilt. Was lässt sich dann über a aussagen?		
Im mathematischen Text zeigt sich das typischerweise durch		
Formulierungen der folgenden Art:		
Es ist a$\in$M. Also...........	oder	a$\in$M. D.h.......

Dies nennen wir Explikation einer Elementrelation.

(1.7.5) Nehmen wir a$\in \mathbb{Q}$. Dann geht der Text typischerweise wie folgt weiter: "D.h. es gibt p,q$\in$ $\mathbb{Z}$ mit q$\neq$ 0, derart, dass a=$\frac{p}{q}$ gilt." Oder auch " r ist Flugparabel. D.h. es gibt $\vec{r}_0,\vec{v}_0 \in V_0^3$ mit $\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$."

(1.7.6) Das zweite Beispiel zeigt, dass eine Explikation nicht immer eindeutig ist. Man hätte auch eine andere Darstellung für $\vec{r}$ wählen können. Worauf es ankommt, ist dass man eine angibt, sie anschließend eventuell korrigiert und an die spezifische Problemsituation anpasst. (Nicht aber in die "Was soll ich denn nun tun?" - Falle tappt.)

(1.7.9) Betrachten wir für ein weiteres Beispiel noch beide Leistungen zusammen: Sei V={n|2n = Summe aller Teiler von n}. Gilt 8$\in V$? (Nachweis.) Wir müssen prüfen, ob 8 die definierende Eigenschaft besitzt. Wir suchen alle Teiler von 8, also 1,2,4 und 8 und bilden die Summe. Das gibt die Argumentation: "Da 1+2+4+8=15$\neq 2\cdot 8$ ist, gilt 8$\notin V$." Ist V vielleicht leer? Nein, denn für 6 hat man: 1+2+3+6=12=2·6. D.h. 6$\in V$.

Bei Nachweis ist meist konkret zu prüfen, ob die definierenden Eigenschaften erfüllt sind oder nicht. Und in mathematischen Texten wird vielfach stillschweigend angenommen, **dass dem Leser klar ist, dass es um die Überprüfung geht.**

(1.7.10) Jetzt umgekehrt die Explikation. Man wisse a$\in$V. Dann darf man gültig folgern, dass die Summe aller Teiler gleich 2a ist. Weiss man beispielsweise irgendwoher, dass 28$\in$V gilt, so kann man ohne Rechnung folgern, dass die Summe aller Teiler gleich 56 sein muss. Allgemein folgt weiter für jedes a$\in$V, dass die Summe aller nichttrivialen Teiler gleich a-l sein muss. Als Text:

> Sei a$\in$V. Also ist 2a=Summe der Teiler von a. Da 1 und a immer Teiler sind, ist die Summe der nichtrivialen Teiler von a gleich a-l.
>
> Oder: Sei a Lösung der Gleichung x^5-3x^3+2x-7=0. Dann ist a^5=3a^3-2a+7 eine wahre Gleichung, mit der man weiterarbeiten darf. (Das ist eine Denkfigur, deren Nutzung manchem Anfänger unglaublich schwer fällt!)

☐ Explizieren Sie zu gegebener Menge Y die folgenden Elementrelationen:

$$X \in \{(U,V)|U \subset V \subset Y\} \qquad Z \in \mathfrak{P}(Y \times Y).$$

1.1.7b Denkfiguren zur Inklusion und Gleichheit

Im Zusammenhang mit der Inklusionsbeziehung gibt es zwei Denkfiguren, wobei die zweite noch auf die erste zurückgeführt wird.

(1.7.11) Das zugehörige Problem - wobei A und B typischerweise zwei unterschiedlich eingeführte Mengen sind - lautet:

A und B Mengen.	Beweise, dass
a) A$\subset$B gilt	b) A=B gilt.

Das Vorgehen bei a): Wie zeigt man, dass A eine Teilmenge von B ist? Man geht vielfach über die Elemente: Jedes Element v$\in$A muss auch Element von B sein: v$\in$B. Zu beweisen ist die Aussage:

Wenn x$\in$A gilt, dann gilt auch x$\in$B.	Oder symbolisch:	$\boxed{(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)}$.

(1.7.13) Ein Nachweis bzw. Nachweisversuch einer solchen Aussage läuft nach dem folgenden Schema ab, wobei die Figuren Nachweis und Explikation benutzt werden:

I

> Sei x$\in$A. Explikation dieser Relation. Fallspezifische Überlegungen, die zeigen, dass die Bedingungen für B erfüllt sind (Nachweis). ...
> Also gilt x$\in$B.

x ist dabei ein ein beliebig gewähltes Element aus A, ausgedrückt durch die Einleitung: "Sei x$\in A$".

(1.7.14) Nun das Schema für das zweite Problem, der Gleichheit der beiden Mengen:

> A=B wird bewiesen, indem man in der skizzierten Weise nacheinander $A \subset B$ und $B \subset A$ nachweist.

(1.7.15) Wenn eine rein definitorische Gleichung vorliegt, wie etwa die Einführung der üblichen Bezeichnungen für Intervalle, dann ist natürlich nichts zu beweisen. Das zugehörige Rollenbewußtsein darf nie fehlen. Beispiel [3,4]= {x|x$\in \mathbb{R}$, 3$\leq x \leq 4$}. Hier ist die linke Seite eine abkürzende und verdeutlichende Bezeichnung der rechten.

1.1.7c Übungsbeispiel

Wegen der Bedeutung der Denkfiguren zur Inklusion geben wir ein ausführliches Beispiel in Form einer möglichen Übungsaufgabe, bei der die erforderlichen Zwischenschritte bei der Ausführung von (7.1.13) eine Idee erfordern. Wir fügen zugleich einige Hinweise dazu ein, wie man eine solche Aufgabe bearbeiten sollte. Die eigentliche Lösung - wie sie in einem mathematischen Text stehen könnte - ist als solche gekennzeichnet.

Die Aufgabe selbst:

Es sei	A=$\{z\in \mathbb{R} \mid z=a+b\sqrt{2}$; a,b$\in \mathbb{Q}\}$ und
	B=$\{z\in \mathbb{R} \mid z=\frac{m+n\sqrt{2}}{p+q\sqrt{2}}$; m,n,p,q$\in \mathbb{Q}$; $p^2+q^2 \neq 0\}$
Beweisen Sie:	A=B

Nach Lektüre der Aufgabe **muss** man zugehörige Verständnisfragen beantworten können. Etwa: Wie sieht ein typisches Element von A bzw. B aus? Antwort:

$$a=\frac{2}{7}+\frac{3}{5}\sqrt{2} \qquad \text{bzw.} \quad b=\frac{1-3\sqrt{2}}{2+1\sqrt{2}} \qquad \text{wegen} \quad 2^2+1^2>0.$$

Oder: Wieso wird $p^2+q^2 \neq 0$ verlangt? Antwort: Offenbar, um zu verhindern, dass durch Null geteilt wird. Denn hierdurch wird ja gerade der Fall p=q=0 ausgeschlossen. **Solche Fragen sollte man sich nach der Aufgabenlektüre möglichst selbst stellen und beantworten.** Danach kann man sich an den Beweis machen. Das Vorgehensschema - der Rahmen - ist durch (1.7.13-14) weitgehend vorgegeben und nur noch fallspezifisch auszufüllen.

	$\boxed{\text{Sei } a\in A. \text{ D.h.:}}$ Es gibt zwei rationale Zahlen p=$\frac{c}{d}$ und q=$\frac{r}{s}$ mit d,s$\neq 0$
Explikation	und c,d,r,s$\in \mathbb{Z}$ derart, dass a=p+q$\sqrt{2}$ gilt. Einsetzen gibt a=$\frac{c}{d}+\frac{r}{s}\sqrt{2}$.
	Hauptennerbildung: a=$\frac{cs+rd\sqrt{2}}{ds}=\frac{(cs)+(rd)\sqrt{2}}{(ds)+0\sqrt{2}}$. Da cs,rd und ds$\in \mathbb{Z}$
Nachweis	und $(ds)^2+0^2>0$, $\boxed{\text{folgt} \quad a\in B}$.
Explikation	$\boxed{\text{Sei jetzt umgekehrt } b\in B.}$ D.h. es gibt m,n,p,q$\in \mathbb{Z}$ und p,q nicht beide Null,
Idee	so dass b=$\frac{m+n\sqrt{2}}{p+q\sqrt{2}}$. Wir erweitern den Bruch mit (p-q$\sqrt{2}$) $\neq 0$. Das gibt
	nach kurzer Rechnung b=$\frac{(mp-2nq)+(np-mq)\sqrt{2}}{p^2+2q^2}$. Oder b=r+s$\sqrt{2}$ mit rationalem
Nachweis	r=$\frac{mp-2nq}{p^2+2q^2}$ und s=$\frac{mp-2nq}{p^2+2q^2}$. $\boxed{\text{Also wie gefordert } b\in A.}$

Wir sehen, dass sich der größte Teil dieser Antwort schematisch aus unseren Denkfiguren zusammensetzt. Nur an einer Stelle im zweiten Teil wird eine zusätzliche **Idee** verlangt, die hier im Erweitern mit dem "richtig zu wissenden Faktor" besteht. Der Rest ist reines Handwerk.

☐ Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\{(t^2,t^3)|\text{t} \in \mathbb{R}\}=\{(x^{\frac{2}{3}},x)|\text{x}\in \mathbb{R}\}$$
$$\{(x,y)|\text{x,y} \in \mathbb{R},\ x^2+y^2=1\}=\{(u,v)|\text{t}\in \mathbb{R},\ \text{u=cost, v=sint}\ \}$$
$$\{(x,y)|\text{x,y} \in \mathbb{R},\ x^2+y^2=1\}=\{(x,y)|\text{x}\in \mathbb{R}, -1\le x\le 1, y=\pm\sqrt{1-x^2}\}$$

Wieso darf man bei der ersten Gleichung nicht alternativ (x,$x^{\frac{3}{2}}$) schreiben?? Welche anschauliche Bedeutung haben diese Gleichungen?

☐ Was ist in der zweiten Mengendefinition zu ergänzen:

$$\{(x,y)|x,y\in \mathbb{R}, 0\le x\le 2, 0\le y\le x^2\}=\{(x,y)|x,y\in \mathbb{R}, 0\le y\le 1, ...\} \quad ?$$

1.1.7d Endform

(1.7.16) Eine Abart der letzten Denkfigur "Gleichheit zweier Mengen" sieht wie folgt aus:

> Eine Menge ist durch eine definierende Relation vorgegeben, aber diese stellt keine optimale Endform dar. Man kann sie noch weiter vereinfachen, eine möglichst **gute Endform** anstreben.

Ein triviales Beispiel: Ist M={2,4,3,2,1,3,4} vorgegeben, so ist i.a. M={1,2,3,4} als Endform vorzuziehen. (Beide Mengen sind ja gleich, da sie dieselben Elemente enthalten.) Bei etwas komplizierteren Definitionen haben Anfänger eine starke Tendenz, solche Vereinfachungen nicht vorzunehmen, was Inspektion und Weiterarbeit erschwert.

(1.7.17) **Weitere illustrierende Beispiele**:

a) Die Lösungsmenge von $z^7=1$ in $\mathbb{C}$ sollte man von $\mathbb{L} = \{z|z = e^{\frac{2\pi in}{7}}, n \in \mathbb{Z}\}$ vereinfachen zu $\mathbb{L} = \{z|z = e^{\frac{2\pi in}{7}}, n = 0,1,2,..,6\}$. In der zweiten Form sieht man sofort, dass es genau 7 verschiedene Lösungen gibt und für diese hat man eine einfache Formel.

b) Im Rahmen einer studentischen Aufgabe wurde eine Menge bestimmt zu $M_\varepsilon=\{n|n\in \mathbb{N}, \frac{1}{1+n^2} < \varepsilon\}$. Fast jeder Student behielt das als Endform bei. Vorzuziehen ist jedoch-es war $0<\varepsilon<1$ - die Endform $M_\varepsilon=\{n|n\in \mathbb{N}, n>\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\}$. Hierbei sieht man sofort, dass die Menge alle natürlichen Zahlen oberhalb einer festen Grenze enthält und dass diese Grenze wächst, wenn ε gegen Null geht. Für ε=0.01 etwa kann man noch weiter zu $M_\varepsilon=\{n|n\in \mathbb{N}, n>10\}$ konkretisieren.

c) Oder ganz einfach (und ohne Mengenschreibweise): Als Ergebnis einer Überlegung erwiesen sich alle Zahlen a mit 4-2a>0 als zulässig. Fast nie wurde das spontan zu a<2 vereinfacht.

d) Noch allgemeiner taucht das Endformproblem auf, wenn man eine Mengendefinition mit äußeren Parametern oder freien Variablen an einen konkreten Fall anzupassen hat. Nehmen wir irgendeine Polynomgleichung p(x)=0. Die zugehörige Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\{x|x\in \mathbb{R}, p(x)=0\}$ und als solche **allgemein** definiert. Jetzt heißt es: Bestimmen Sie $\mathbb{L}$ für p(x)= x^3-6x^2+11x-6. Dann widerspricht die Antwort $\mathbb{L}=\{x|x\in \mathbb{R}, x^3-6x^2+11x-6 =0\}$ dem Geist der Aufgabe. Erwartet wird möglichst $\mathbb{L}$={1.2,3}, eine Umformung, die etwas Arbeit erfordert.Nur wenn man überhaupt nicht weiterkommt, wird man eine Antwort des ersten Typs geben. Man muss unterscheiden, ob man einfach die Definition für den speziellen Fall hinzuschreiben hat oder ob das inhaltlich auszuführen ist.

1.7.8 Übersicht über den Aufbau des bisherigen Textes.