
Höhere Mathematik für Physiker

Teil III

F. Krause

Kapitel 15

Traditionelle Differentialgeometrie der Kurven

Copyright F.Krause

Inhalt des Kapitels

- 15.1 Die Differentialgeometrie von Raumkurven
 - 15.1.1 Die Entwicklung
 - 15.1.2 Das begleitende Dreibein
 - 15.1.3 Die Torsion
 - 15.1.4 Die Frenet-Serreschen Gleichungen
 - 15.1.5 Die Berechnung der Größen

Kapitel 15: Traditionelle Differentialgeometrie

Wir wollen in diesem Kapitel folgende Bezeichnungen verwenden:

- Kurve = Bahnkurve, eine (glatte) Parametrisierung, die als Bewegung eines Punktes interpretiert werden kann. Eine Kurve heißt regulär, wenn ihre Ableitung stets ungleich Null ist.
- Kurvenzug = Klasse ineinander umparametrisierbarer Parametrisierungen. *Verlegter Faden*.
- Weg = Bild einer Kurve, Teilmenge des Konfigurationsraumes.

Dieses Begriffssystem ist vielfach nicht vollständig entfaltet und besonders "Kurve" wird mit unterschiedlicher Bedeutung benutzt. Insbesondere wird unser *Weg* häufig auch mit *Kurve* bezeichnet. Im Falle injektiver Parametrisierungen ist das zulässig.

"Glatt" soll hier "mehrfach differenzierbar" heißen. Wir werden das spezifizieren.

15.1 Die Differentialgeometrie von Raumkurven 15.1.1 Die Entwicklung

(1.1.1) Wir betrachten eine glatte reguläre Raumkurve \vec{s} und fragen nach geometrischen (parametrisierungsunabhängigen) Eigenschaften des Weges $\text{Bild}\vec{s}$. Und unter diesen Eigenschaften nach solchen, die nicht von der Lage des Weges abhängen, die also unter der euklidischen Gruppe invariant sind, d.h. für kongruente Kurvenzüge gleich. Bei solchen Eigenschaften - etwa der Bogenlänge - denkt man zunächst an globale, auf den gesamten Weg bezogene. Aber es gibt auch lokale geometrische Eigenschaften. Solche wollen wir mit Hilfe der Koeffizienten der Taylorentwicklung bestimmen und untersuchen, inwieweit die Kurve durch sie festgelegt wird.

(1.1.2) Allgemein können wir zwischen folgenden Typen von Eigenschaften unterscheiden:

- *Kinematischen*, also von der Wahl der Parametrisierung abhängigen,
- *relativ-geometrischen*, also nicht unter der euklidischen Gruppe invarianten, aber von der Parametrisierung unabhängigen und
- *absolut-geometrischen*, also von der Lage der Kurve unabhängigen, die gleich sind für kongruente Wege.

Die Bogenlänge ist ein Beispiel einer absoluten Größe. Dagegen hat die Richtung der Tangente relativ-geometrischen Charakter

Das für Kapitel 15.1 gehörige Szenenbild: Vorgegeben sei eine Kurve

$$\vec{s} = (\mathbb{I}, t \mapsto \vec{s}(t), V_0^3) \quad \mathbb{C}^3 \text{ und regulär (also } \dot{\vec{s}}(t) \neq \vec{0} \text{)}$$

Wir können daher die ersten drei Ableitungen bilden, wobei die Geschwindigkeit nie Null wird. Die Ableitungen und alles was daraus eindeutig konstruierbar ist, ist als durch \vec{s} gegeben anzusehen. $\gamma = \gamma_{\vec{s}} = \text{Bild}\vec{s}$ sei der zugehörige Kurvenzug. Regulär ist wichtig. Interpretiert man \vec{s} als physikalische Bahnkurve, so bedeutet dies, dass die Bewegung nie zum Stillstand kommt, also lokal injektiv ist.

Aber global können durchaus Doppelpunkte vorkommen, \vec{s} muss nicht injektiv sein. Man denke an eine Kreisbewegung mit mehreren Umläufen.

(1.1.4) Wir beginnen mit der ersten Ableitung, die wir in Betrag und Richtung aufspalten. Mit naheliegenden Bezeichnungen ist:

$$\dot{\vec{s}}(t) = v(t) \vec{T}(t) \quad \begin{array}{l} v(t) \text{ skalare Geschwindigkeit} \\ \vec{T}(t) \text{ positiv orientierter Tangenteneinheitsvektor} \end{array}$$

Also $|\vec{T}(t)| = 1$. v gibt eine kinematische parametrisierungsabhängige Eigenschaft, wogegen \vec{T} vom relativ geometrischen Typ ist: $\vec{T}(t)$ gibt die Richtung der Tangente im Kurvenpunkt $\vec{s}(t)$. Bei einer (regulären) Umparametrisierung ändert sich höchstens das Vorzeichen von \vec{T} .

Beachten Sie, wie die Größen beschrieben werden: Der Weg wird über eine Parametrisierung gegeben. Diese Parametrisierung induziert eine ebensolche Parametrisierung der Beschreibungsgrößen, auch der rein geometrischen des Weges. Gleicher Parameterwert gibt gleichen Wegpunkt!

(1.1.5) Aus $\vec{T}^2=1$ folgt $(\dot{\vec{T}}(t) \cdot \vec{T}(t))=0$. D.h. die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander. Die Richtung von $\dot{\vec{T}}$ bezeichnen wir mit \vec{N} , die geometrische geometrische Bedeutung dieses Vektors ist noch zu klären. Zur Beschreibung des Betrages führen wir eine neue Größe $\kappa = \kappa(t) > 0$ ein. Und zwar setzen wir an:

$$\boxed{\dot{\vec{T}}(t) = \kappa(t) v(t) \vec{N}(t)} \quad \vec{N}^2 = 1$$

Zu erwarten ist, dass κ vom kinematischen Typ ist. Es zeigt sich jedoch, dass κ einen besseren Typ hat: **es ist eine absolut-geometrische Größe**, wie wir bald sehen werden. Daher die Abspaltung des kinematischen Faktors $v(t)$, über die κ die Dimension einer reziproken Länge erhält. Die Aufspaltung ist nur möglich, wenn $\dot{\vec{T}}(t) \neq \vec{0}$ ist, was aus regulär folgt.

(1.1.6) Beispiel: $\vec{r}(t) = R(\vec{e}_1 \cos(\omega t) + \vec{e}_2 \sin(\omega t)) = \vec{e}_r(\omega t) R$ beschreibt eine Kreisbewegung. Differenzieren gibt sofort $v(t) = R\omega$ und $\vec{T}(t) = (-\vec{e}_1 \sin(\omega t) + \vec{e}_2 \cos(\omega t)) = \vec{e}_t(\omega t)$. Erneutes Differenzieren gibt

$$\dot{\vec{T}}(t) = \frac{1}{R} (R\omega) \vec{N}(t) \quad \vec{N}(t) = -\vec{e}_r(\omega t) = -\vec{e}_1 \cos(\omega t) - \vec{e}_2 \sin(\omega t)$$

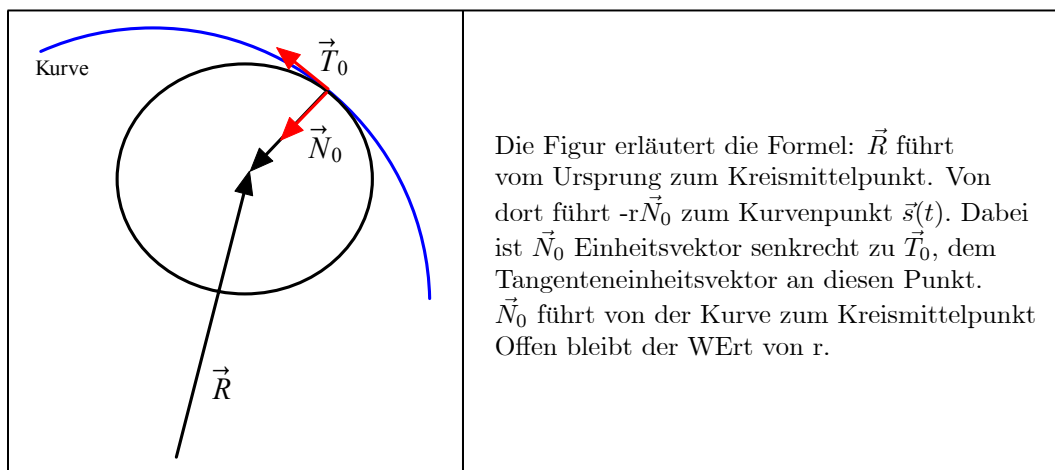
Also $\boxed{\kappa(t) = \frac{1}{R}}$, wo R der Kreisradius ist.

(1.1.7) Und das ist verallgemeinerbar: Der Krümmungskreis zu einem Punkt des Weges Bild \vec{s} ist sicher eine absolut-geometrische Größe und der zugehörige Radius wird lokal bestimmt. Wir wollen diesen Kreis jetzt bestimmen. Dazu müssen wir den Kurvenzug $\gamma = \text{Bild}\vec{s}$ lokal optimal durch einen Kreis approximieren.

Wir setzen eine allgemeine Kreisbewegung wie folgt an:

$$\vec{K}(t) = \vec{R} + r(-\vec{N}_0 \cos \omega(t) + \vec{T}_0 \sin \omega(t))$$

mit $\omega(t) = \omega_1(t - t_0) + \frac{1}{2}\omega_2(t - t_0)^2 + \dots$



Wir legen den Wert von r dadurch fest, dass wir die Taylorentwicklungen von \vec{s} und \vec{K} in 2. Ordnung gleichsetzen.

(1.1.8) Dazu schreiben wir beide Entwicklungen einmal untereinander, wobei wir (1.1.4-5) beachten:

$$\begin{aligned} \vec{s}(t_0 + \Delta t) &= \vec{s}(t_0) + v(t_0)\vec{T}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2} \left[\dot{v}(t_0)\vec{T}(t_0) + v(t_0) \overbrace{\left(\kappa(t_0)v(t_0)\vec{N}(t_0) \right)}^{\ddot{\vec{T}}(t_0)} \right] \Delta t^2 + \dots \\ \vec{K}(t_0 + \Delta t) &= (\vec{R} - r\vec{N}_0) + r\omega_1\Delta t + \frac{1}{2} \left[r\omega_1^2\vec{N}_0 + r\omega_2\vec{T}_0 \right] \Delta t^2 \end{aligned}$$

(1.1.9) Koeffizientenvergleich in Δt und anschließendes Gleichsetzen von Betrag und Richtung der Vektoren legt alle Kreisparameter fest! Beachten Sie: Bei dieser Wahl der Kreisparameter stimmen Kreisbewegung und durch \vec{s} beschriebene Bewegung um $t=t_0$ bis einschließlich der Ordnung Δt^2 überein. Wir finden:

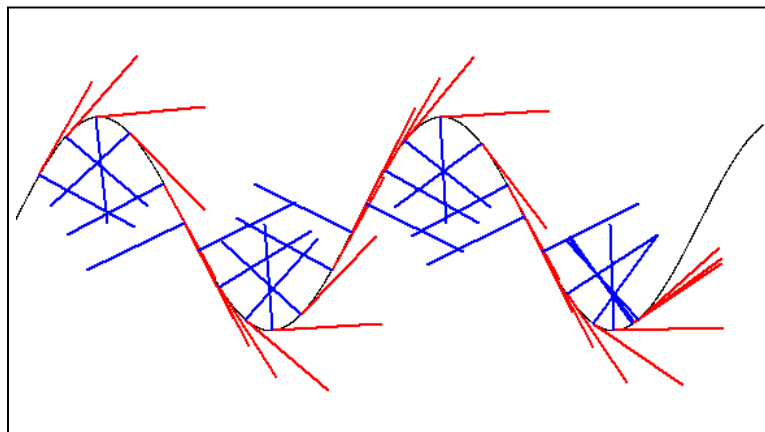
$\vec{R} = \vec{s}(t_0) + r\vec{N}(t_0)$	Ortsvektor des Kreismittelpunktes
$\vec{T}_0 = \vec{T}(t_0) \quad \vec{N}_0 = \vec{N}(t_0)$	\vec{T}_0 tangential, $r\vec{N}_0$ normal
$\omega_1 = \frac{1}{r}v(t_0) = \kappa(t_0)v(t_0)$ $\omega_2 = \frac{1}{r}\dot{v}(t_0) = \kappa(t_0)\dot{v}(t_0)$	Beachte: $\vec{T} = \omega_1\vec{N}$ wie nach elementarer Kinematik zu erwarten.
$\kappa(t_0) = \frac{1}{r} = \frac{ \ddot{\vec{T}}(t_0) }{v(t_0)}$	Die gesuchte Beziehung.

(1.1.10) $\kappa = \frac{1}{r}$ ist wie behauptet ein absolut geometrischer Parameter, der reziproke Radius des Krümmungskreises. \vec{N}_0 gibt die Richtung zum Mittelpunkt des Krümmungskreises und \vec{N} und \vec{T} zusammen spannen die Ebene auf, in der dieser Krümmungskreis liegt. Beide Größen haben relativ geometrischen Charakter. \vec{N} und \vec{T} bilden eine ortsabhängige Orthonormalbasis dieser Ebene, genauer ein Basisfeld entlang des von \vec{s} erzeugten Weges.

□ Wieso nicht ein Basisfeld entlang der Kurve $\text{Bild}\vec{s}$?

ω_1 und ω_2 schließlich sind kinematische Größen. Die höheren Ordnungen in der Entwicklung von $\omega(t)$ sind noch nicht bestimmt. ω_1 gibt eine gleichförmige Kreisbewegung und ω_2 eine konstante Kreisbeschleunigung.

(1.1.11) Besonders einfache Verhältnisse liegen im Fall einer ebenen Kurve vor, d.h. wenn der Weg $\text{Bild}\vec{s}$ ganz in einer Ebene liegt. Dann bildet \vec{T}, \vec{N} für jeden Punkt des Weges eine Basis der Ebene. Mit Ausnahme eventueller Wendepunkte, für die κ divergiert. An einem solchen Wendepunkt springt die Richtung von \vec{N} .



Der Sinusgraph ist in der Figur durch $t \mapsto \vec{s}(t) = (t, \sin(t))$ parametrisiert. Für eine Reihe von t -Werten sind die beiden Vektoren $\vec{T}(t)$ und $\vec{N}(t)$ mit eingezeichnet. Man nennt dieses Basisfeld entlang der Kurve suggestiv das "begleitende Zweibein". An den Wendepunkten springt die Richtung von \vec{N} .

15.1.2 Das begleitende Dreibein

(1.2.1) Es liegt nahe, \vec{T} und \vec{N} zu einer Orthonormalbasis des gesamten V_0^3 zu ergänzen. Wir setzen

$$\boxed{\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)}$$

\vec{T} Tangenteneinheitsvektor
 \vec{N} Normaleneinheitsvektor
 \vec{B} Binormale (Einheitsvektor)

(1.2.2) Damit haben wir zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ eine Basis des V_0^3 , welche die Geometrie der Kurve um den Punkt $\vec{s}(t_0)$ widerspiegelt! Man nennt diese Basiskurve

$$t \mapsto (\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)) \quad \text{das begleitende Dreibein der Kurve}$$

Eine sehr suggestive Bezeichnung. In der Figur sahen wir das entsprechende begleitende Zweibein für eine ebene Kurve. (Vgl. auch Kap 6.1.6a). Eigentlich liegt ein begleitendes Dreibein des Weges vor, gegeben durch eine Parametrisierung.

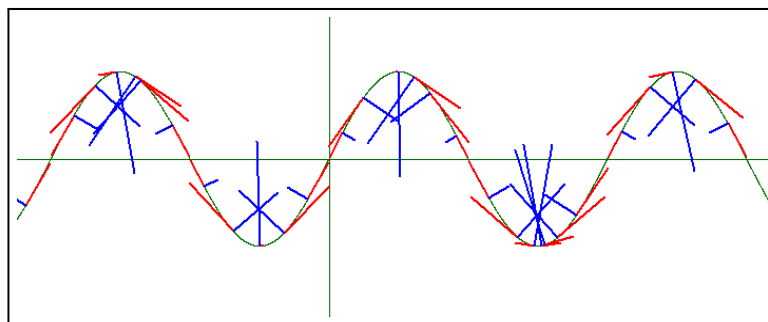
(1.2.3) Es ist günstig, sich vorzustellen, man sei an einen Körper fixiert, der sich gemäß der Bahnkurve $t \mapsto \vec{s}(t)$ bewegt. Prosaisch: Sie fahren Achterbahn. Was beobachten Sie? \vec{T} gibt Ihnen Ihre jeweilige momentane Bewegungsrichtung. Außerdem wirkt auf Sie in jedem Zeitpunkt eine momentane Kraft. Da diese nach Newton proportional zur Beschleunigung $\ddot{\vec{s}}(t)$ ist, liegt diese Kraft stets in der von \vec{N} und \vec{T} aufgespannten Ebene.

(1.2.4) Die Kraft bzw. die Beschleunigung \vec{b} baut sich aus einer Normalkomponente und einer Tangentialkomponente auf, die durch (1.1.8) gegeben werden. Diese Zerlegung wird in der elementaren Physik vielfach benötigt:

$$\boxed{\vec{b} = \dot{v}\vec{T} + \kappa v^2 \vec{N}} \quad \text{Beachte} \quad \kappa v^2 = \frac{v^2}{R} = \omega_1^2 R.$$

Das zeigt, wie die übliche Formel zur "Zentrifugalbeschleunigung" im Rahmen unseres Formalismus herauskommt. Die Binormale \vec{B} gibt die momentane Richtung, die jeweils senkrecht zur Bewegung und zur Kraft ist. Etwas später als zum Zeitpunkt t_0 kann die Kraft durchaus eine Komponente in Richtung des vorausgegangenen B haben. Formal: $\vec{b}(t_0 + \Delta t)$ kann eine Komponente $\neq 0$ in Richtung $\vec{B}(t_0)$ haben. Legt man in unserem Achterbahnmodell die Angriffspunkte der Kräfte in der Kabine geeignet, so kann man erreichen, daß eine Kabinenachse immer in Richtung von \vec{N} zeigt. Das begleitende Dreibein ist dann fest mit der Kabine verbunden. Ausnahme ist $\kappa=0$. Dann liegt \vec{N} nicht fest.

(1.2.5) Das Dreibein selbst bewegt sich relativ zu den festen Richtungen des einbettenden Raumes. Da die Längen und Winkel erhalten bleiben, muss das eine Drehbewegung sein, also durch eine momentane Winkelgeschwindigkeit $t \mapsto \vec{\omega}(t)$ beschrieben werden. Für jeden starr mit dem Massenpunkt verbundenen Vektor gilt dann die Differentialgleichung $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{\omega} \times \vec{x}(t)$. Diese Winkelgeschwindigkeit, die sich für den Achterbahnfahrer durch die Art der scheinbaren Bewegung seiner Umwelt bemerkbar macht, werden wir unten bestimmen. Wir erwarten, dass $\vec{\omega}$ keine Komponente in Richtung von \vec{N} hat, denn das würde ein Kraft **senkrecht** zur Kreisebene voraussetzen. Also ist zu jedem Zeitpunkt $\vec{\omega} = \vec{T}\alpha + \vec{B}\beta$. Dabei gibt β an, wie die Fahrtrichtung sich ändert und α beschreibt eine Drehung der Kreisebene um die Fahrtrichtung. Bei einer ebenen Bewegung wie im nachfolgenden Beispiel ist $\alpha = 0$.



Betrachtet wird erneut die Kurve $t \mapsto (t, \sin t)$. Für eine Reihe von t -Werten sind die beiden Beschleunigungen gezeichnet. In den Extrempunkten liegt eine rein normale Beschleunigung vor. Vor diesen Punkten bremst die tangential Beschleunigung, danach erhöht sie die Geschwindigkeit. In den Wendepunkten ist die Beschleunigung rein tangential.

Die konkrete Berechnung dieser Größen verläuft in diesem Fall problemlos:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (t, \sin t) & \dot{\vec{r}}(t) &= (1, \cos t) & \ddot{\vec{r}}(t) &= (0, -\sin t) \\ v(t) &= \sqrt{1 + \cos^2 t} & \vec{T}(t) &= \frac{(1, \cos t)}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} = \frac{(1, \cos t)}{v(t)} & \vec{N}_k(t) &= \frac{(-\cos t, 1)}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} = \frac{(-\cos t, 1)}{v(t)} \\ \dot{v}(t) &= \frac{\sin(2t)}{2v(t)} \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (0, -\sin t) = \vec{T}(t)\alpha + \vec{N}(t)\beta\end{aligned}$$

α und β erhält man durch Skalarproduktbildung

$$\begin{aligned}\alpha &= \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{T}(t) = \frac{-\sin t \cos t}{v} \\ \beta &= \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{N}_k(t) = \frac{-\sin t}{v(t)} = \varepsilon(t) \frac{|\sin t|}{v(t)} \quad \text{wobei} \quad \varepsilon(t) \quad \text{Vorzeichen von} \quad \frac{-\sin t}{v(t)} \\ \dot{\vec{T}}(t) &= -\vec{T}(t) \frac{\sin(2t)}{2v} - \vec{N}_k(t) \frac{\sin(t)}{v} = -\vec{T}(t) \frac{\sin(2t)}{2v} - (\varepsilon(t)) \vec{N}(t) v^2 \left(\frac{|\sin(2t)|}{v^3(t)} \right) \\ \kappa(t) &= \frac{|\sin(2t)|}{v^3(t)}\end{aligned}$$

□ Vergleichen Sie Formel und Figur!

15.1.3 Die Torsion

(1.3.1) Ein Kreis kann immer nur **ebene** Bewegungen erfassen. Liegt die Raumkurve \vec{s} nicht in einer Ebene, so kann das durch unsere bisherige Approximation nicht analysiert werden. Die einfachste nicht ebene Bewegung ist eine Spiralbewegung. Da der Kreis in der Entwicklung um t_0 bereits die Terme bis Δt^2 festlegt, wird sich das Herausgehen aus der Ebene erst bei Δt^3 bemerkbar machen.

(1.3.2) Wir setzen an:

$$\boxed{\vec{\Sigma}(t) = \vec{K}(t) + \vec{B}(t_0)\beta(t) \quad \text{mit} \quad \beta(t) = \frac{1}{3!}(t-t_0)^3 + \dots}$$

Nun kann auch in der \vec{T} - \vec{N} -Ebene selbst eine Spiralförmigkeit entstehen. Das würde Änderung des Parameters r mit t bedeuten. Wir setzen zusätzlich an:

$$r(t) = r + \frac{r_3}{3!}(t-t_0)^3 + \dots \quad r_0 = r$$

(1.3.3) β_3 sollte dann ein Maß dafür darstellen, wie stark Bild \vec{s} sich lokal (bei t_0) aus der Ebene des Krümmungskreises herausbewegt. Welche absolut geometrische Invariante könnte in β_3 enthalten sein? Die Einheit ist $\text{Länge}^1 \times (\text{Zeit})^{-3}$. Also ist v^3 als kinematischer Faktor zu erwarten. Damit der verbleibende geometrische Teil die Einheit einer Länge bekommt, sollte man noch ein κ^{-1} abspalten. Wir erwarten, dass $\frac{\beta_3}{\kappa v^3}$ die geometrische Bedeutung einer die Kurve charakterisierenden reziproken Länge hat.

(1.3.4) Nun können wir bis zum nächsten Term entwickeln und $\vec{\Sigma}$ und \vec{s} erneut vergleichen. Dazu benötigen wir $\dot{\vec{B}}$ und $\dot{\vec{N}}$. Da $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ ist, und $\dot{\vec{T}}$ die Richtung von \vec{N} hat, hat $\dot{\vec{B}}$ notwendig die Richtung von \vec{N} . (Alternativ: $\vec{B} \cdot \vec{T} = 0$ nach t differenzieren!). Wir setzen:

$$\boxed{\dot{\vec{B}}(t) = -\tau(t)v(t)\vec{N}(t)}$$

Den so eingeführten Parameter τ nennt man *Torsion (der Kurve)*. Wie die Krümmung κ hat er die Dimension einer reziproken Länge.

(1.3.5) Wir benötigen zusätzlich $\dot{\vec{N}}$. Dieser Vektor liegt in der von \vec{B} und \vec{T} aufgespannten Ebene. Differenziert man $\vec{N} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{N} \cdot \vec{T} = 0$, so erhält man die Koeffizienten der Linearkombination

$$\dot{\vec{N}}(t) = \vec{T}(t)[- \kappa(t)v(t)] + \vec{B}(t)[\tau(t)v(t)]$$

(1.3.6) Jetzt können wir \vec{s} sowie $\dot{\vec{\Sigma}}$ aus (1.3.2) bis zu dritten Ordnung entwickeln. Wir finden (mit Auslassen des Argumentes t_0 in der zweiten Zeile):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\Sigma}}(t_0) &= (r\omega_3 - r\omega_1^3) \vec{T}_0 + (3r\omega_1\omega_2 - r_3) \vec{N}_0 + \beta_3 \vec{B}_0 \\ \ddot{\vec{s}}(t_0) &= (\ddot{v} - \kappa^2 v^3) \vec{T} + (3\kappa v \dot{v} + \dot{\kappa} v^2) \vec{N} + \kappa \tau v^3 \vec{B} \end{aligned}$$

(1.3.7) Vergleich liefert uns die gewünschten Beziehungen, die die neuen Parameter in der Modelkurve $\vec{\Sigma}$ festlegen.

$$\boxed{\begin{array}{l} \beta_3 = \kappa(t_0)\tau(t_0)v^3(t_0) \\ \omega_3 = \kappa(t_0)\dot{v}(t_0) \end{array}} \quad \text{wie durch die Einheitenüberlegung vorhergesagt} \quad \boxed{r_3 = -\dot{\kappa}(t_0)v^2(t_0)}$$

(1.3.8) τ beschreibt geometrisch, wie stark der Weg sich lokal aus der Ebene des Krümmungskreises zur Zeit t_0 herauskrümmt, zu einer nicht ebenen Spirale wird.

Näherungsweise gilt: Geht man in der Ebene mit $\omega = \omega_1$ auf dem Krümmungskreis um den Winkel φ weiter, so entfernt sich der Punkt von der Ebene. Der Abstand von der Ebene ist näherungsweise $\Delta a = \varphi \frac{(\varphi r)^2}{3!} \cdot \tau$. Das verdeutlicht den absolut-geometrischen Charakter von τ

ω_3 ist erneut eine kinematische Größe ebenso wie r_3 .

(1.3.9) Hat die Torsion tatsächlich absolute geometrische Bedeutung? Letzte Zweifel daran kann man wie folgt ausräumen: Man nimmt eine Umparametrisierung des Weges $\text{Bild}\vec{s}$ vor. Führt also $\vec{g}(t) = \vec{s}(f(t))$ mit glattem monoton wachsendem f ein. Dann bestimmt man alle Größen für die neue Darstellung erneut. Für κ und τ findet man so $\boxed{\underline{\kappa}(t) = \kappa(f(t))}$ und $\boxed{\underline{\tau}(t) = \tau(f(t))}$ wie gewünscht. D.h. beide Größen hängen nicht von der Kinematik ab. Dass sie gegen euklidische Transformationen invariant sind, ist über ihre geometrische Interpretation unmittelbar klar.08

(1.3.10) Beachten Sie:

$$\kappa = (I, t \mapsto \kappa(t), \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \tau = (I, t \mapsto \tau(t), \mathbb{R})$$

sind beides reelle Funktionen. Dies sind Parametrisierungen von zwei Funktionen der Kurvenpunkte. Überdies gilt $\kappa(t) \geq 0$. An einzelnen Punkten können diese Kurven undefiniert sein. Eigentlich wäre $P \mapsto \kappa(P)$ zu betrachten, nur ist damit schwerer zu rechnen.

(1.3.11) Fassen wir zusammen: **In geometrischer Hinsicht wird unsere Kurve durch das begleitende Dreibein und die beiden Funktionen κ und τ beschrieben.**

15.1.4 Die Frenet-Serreschen Gleichungen

(1.4.1) Wenn man die definierenden Gleichungen der eingeführten Größen inspiziert, stellt man fest, dass sie zusammen ein geschlossenes System von Differentialgleichungen bilden. (1.1.5) und (1.3.4-5) geben:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{\vec{T}}(t) = \kappa(t)v(t)\vec{N}(t) \\ \dot{\vec{N}}(t) = -\kappa(t)v(t)\vec{T}(t) + \tau(t)v(t)\vec{B}(t) \\ \dot{\vec{B}}(t) = -\tau(t)v(t)\vec{N}(t) \end{array}}$$

$$\text{Kurz} \quad \boxed{\dot{\vec{E}}(t) = \Omega(t)\vec{E}(t)}$$

Die **Frenet-Serreschen Formeln**

(1.4.2) Gibt man κ , τ und v vor, so entsteht ein lineares Differentialgleichungssystem für die Vektoren des begleitenden Dreibeins mit variablen Koeffizienten. (I.a. nicht autonom!) Die Dimension ist $N=9$. Sind die Koeffizientenfunktionen ausreichend glatt, so existieren globale Lösungen. Und - das ist zusätzlich zu

zeigen - bilden die Anfangswerte ($t=t_0$) ein Dreibein, **dann ist die Lösung zu jedem Zeitpunkt eine Orthonormalbasis.**

- Setzen Sie ${}^t\vec{Y}=(\vec{T}^2, \vec{N}^2, \vec{B}^2, \vec{T} \cdot \vec{N}, \vec{T} \cdot \vec{B}, \vec{B} \cdot \vec{N})$. Leiten Sie aus (1.4.1) eine Differentialgleichung der Form $\dot{\vec{Y}}(t)=M(t)\vec{Y}(t)$ her, wobei M eine 6×6 -Matrix ist. Zeigen Sie mit Hilfe der Eindeutigkeit (der Lösung der Differentialgleichung), dass eine Orthonormalbasis (zur Zeit t_0) eine solche bleibt.

(1.4.3) Was bedeutet das? Nun jede Lösung wird bestimmt durch κ, τ und v und durch eine Anfangslage des Dreibeins. v beschreibt die Kinematik. Interessiert diese nicht, so können wir $v=1$ setzen. Die Anfangswerte beschreiben die relative Lage des Weges im Raum. Denn wenn man die Differentialgleichung einer euklidischen Transformation unterwirft, bleibt der Differentialoperator invariant, wie man überprüft.

Übrig bleibt also nur die Abhängigkeit von κ und τ . Und das heißt: Jede Vorgabe dieser beiden Funktionen liefert uns eine Klasse kongruenter Kurvenzüge im Raum. Die absolute geometrische Struktur einer Raumkurve ist völlig durch ihre Krümmungsfunktion und ihre Torsionsfunktion festgelegt.

Beispiel: $\kappa(t)=K>0$ und $\tau(t)=0$ führt immer auf einen Kreis. $\kappa(t)=K$ und $\tau(t)=h$ führt auf eine räumliche Spirale usw.

(1.4.4) Wir haben in (1.2.5) überlegt, dass das begleitende Dreibein entlang der Bahn eine Drehbewegung ausführt.

Geht man mit unserem Ansatz $\vec{\omega}=\vec{T}\alpha+\vec{B}\beta$ in die Frenetschen Formeln ein, so findet man leicht:

$$\vec{\omega}=-\kappa v \vec{B} + \tau v \vec{T} \quad \text{mit} \quad \dot{\vec{T}}=\vec{\omega} \times \vec{T} \quad \dot{\vec{N}}=\vec{\omega} \times \vec{N} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{B}}=\vec{\omega} \times \vec{B}$$

- Leiten Sie diese Gleichungen her und zeigen sie mit ihrer Hilfe erneut (und leichter), dass die Orthonormalbasiseigenschaft bei der zeitlichen Entwicklung bewahrt bleibt!

(1.4.5) Nun wird auch die Bezeichnung *Torsion* für τ verständlich. Sie beschreibt die Drehung der Kabine um die Tangentenrichtung. Insbesondere erhält man für $\kappa=0$ eine Bewegung auf einer Geraden mit zusätzlicher spiralförmiger Drehung der Kabine um diese Gerade. Auf der Geraden ist also (κ, τ) durch die Kurve nicht eindeutig bestimmt. Das ist aber klar, da für $\kappa=0$ bereits \vec{B} nicht bestimmt werden kann.

15.1.5 Die Berechnung der Größen

(1.5.1) Die rechnerische Bestimmung der eingeführten Beschreibungsgrößen für eine gegebene Bahnkurve ist zwar im Prinzip durch Nachvollziehen der Definitionen problemlos durchführbar, kann aber konkret recht aufwendig werden. Sofern man keine fallspezifische Erleichterung sieht, sollte man stattdessen nach folgendem Schema vorgehen:

(1.5.2) Vorgehensschema zur Bestimmung von Krümmung und Torsion:

- | | |
|------|---|
| (1) | Bilde $\dot{\vec{s}}(t)$. Daraus folgt $v(t)$ und $\vec{T}(t)$ |
| (2) | Bilde $\ddot{\vec{s}}(t)$
Falls v konstant ist, folgen κ und \vec{N} unmittelbar. |
| (3a) | Denn dann gilt nach (1.1.4-5) $\ddot{\vec{s}}(t) = \kappa(t)v^2\vec{N}(t)$
Und \vec{B} folgt über $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$. |
| (3b) | Andernfalls - \dot{v} nicht Null - bilde man $\dot{\vec{s}}(t) \times \ddot{\vec{s}}(t) = \kappa(t)v^3(t)\vec{B}(t)$
was κ und \vec{B} liefert. \vec{N} folgt dann über $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$. |
| (4) | Bilde $\ddot{\vec{s}}(t)$. Damit folgt τ über $\ddot{\vec{s}}(t) \cdot \vec{B}(t) = \kappa(t)v^3(t)\tau(t)$. |
| (5) | Die momentane Winkelgeschwindigkeit schließlich folgt zu
$\vec{\omega}(t) = -\kappa(t)v(t)\vec{B}(t) + \tau(t)v(t)\vec{T}(t)$ |

1. (a)

(b)

was κ und \vec{B} liefert. \vec{N} folgt dann über $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$.

2. Bilde $\ddot{\vec{s}}(t)$. Damit folgt τ über $\ddot{\vec{s}}(t) \cdot \vec{B}(t) = \kappa(t)v^3(t)\tau(t)$.

3. Die momentane Winkelgeschwindigkeit schließlich folgt zu

$$\vec{\omega}(t) = -\kappa(t)v(t)\vec{B}(t) + \tau(t)v(t)\vec{T}(t)$$

(1.5.3) Beispiel: **Die räumliche Spirale.**

Wir parametrisieren die räumliche Spirale in der üblichen Weise:

$$\vec{s}(t) = \vec{e}_r(\omega t)R + \vec{e}_3\omega Ht \quad \text{mit} \quad \vec{e}_r(\alpha) = \vec{e}_1 \cos \alpha + \vec{e}_2 \sin \alpha$$

Dann ist $2\pi H$ der z-Höhenunterschied für einen Umlauf. Die Parametrisierung der Ganghöhe durch H erweist sich als vorteilhaft. Die Ganghöhe für einen Umlauf wird also zu einem Kreis verbogen und H ist dessen Radius!

Jetzt bilden wir die erste Ableitung und werten sie aus:

$\begin{aligned} \dot{\vec{s}}(t) &= R\omega\vec{e}_t(\omega t) + \omega H\vec{e}_3 & \text{mit} \quad \vec{e}_t(\alpha) &= -\vec{e}_1 \sin \alpha + \vec{e}_2 \cos \alpha \\ v(t) &= \dot{\vec{s}}(t) = \omega\sqrt{R^2 + H^2} & \text{Bogenlänge } s(t) &= t\omega\sqrt{R^2 + H^2} \\ \vec{T}(t) &= \frac{R\vec{e}_t(\omega t) + H\vec{e}_3}{\sqrt{R^2 + H^2}} & \text{Tangenteneinheitsvektor} & \end{aligned}$
--

Dabei ist $K = \sqrt{R^2 + H^2}$ der Radius eines gedachten Kreises, dessen Umfang gleich der Bogenlänge eines Spiralumlaufs ist! Es gilt $v = \frac{K}{T}$, wenn $T = \frac{2\pi}{\omega}$ die Umlaufzeit ist.

Beachten Sie, dass $(\vec{e}_r(\alpha), \vec{e}_t(\alpha), \vec{e}_3)$ eine Orthonormalbasis bildet! Weiter sehen wir: Ist α der Steigungswinkel der Tangente gegenüber der 1-2-Ebene, dann ist $\tan(\alpha) = H/R$. Dies gibt eine weitere geometrische Interpretation von H.

Jetzt berechnen wir die zweite Ableitung und die daraus folgenden Größen. Da v konstant ist, gehen wir über (2a) in (1.5.2)

$$\ddot{\vec{s}}(t) = -R\omega^2\vec{e}_r(\omega t)$$

$\kappa(t) = \frac{R}{R^2 + H^2} \quad \vec{N}(t) = -\vec{e}_r(\omega t) \quad \vec{B}(t) = \frac{R\vec{e}_3 - H\vec{e}_t(\omega t)}{\sqrt{R^2 + H^2}}$

Die Krümmung ist also konstant und ganghöhenabhängig kleiner als die Krümmung $\frac{1}{R}$ des Grundkreises in der 1-2-Ebene. \vec{N} dagegen gibt die Richtung der Beschleunigung und die ist immer radial auf die z-Achse gerichtet.

□ Bestimmen Sie alternativ die Größen über den Weg (2b)

Jetzt benötigen wir noch die Torsion. Sie folgt über die dritte Ableitung:

$$\ddot{\vec{s}}(t) = -R\omega^3\vec{e}_t(\omega t) \quad \ddot{\vec{s}}(t) \cdot \vec{B}(t) = \kappa v^3 \tau = \frac{HR\omega^3}{\sqrt{R^2 + H^2}}$$

$\tau = \frac{H}{R^2 + H^2}$

Die Spirale ist eine Raumkurve mit konstanter Krümmung und Torsion.

(1.5.3) Beispiel: **Der Graph einer reellen Funktion.**

Ein zweites wichtiges Beispiel wird durch den Graphen einer reellen Funktion f gegeben. Wir wählen die kanonische Parametrisierung des Graphen in der x-y-Ebene, also

$s(t) = (t, f(t), 0)$. Damit folgt für die Geschwindigkeit $\dot{s}(t) = (1, f'(t), 0)$. Dann gilt stets $B = \vec{e}_3$. Wir erhalten die folgenden Formeln:

$\begin{aligned} \dot{\vec{s}}(t) &= (1, f'(t), 0) & v(t) &= \sqrt{1 + f'^2(t)} & \vec{T}(t) &= \frac{1}{v(t)}(1, f'(t), 0) \\ \ddot{\vec{s}}(t) &= (0, f''(t), 0) & \dot{\vec{s}}(t) \times \ddot{\vec{s}}(t) &= (0, 0, f''(t)) & \kappa(t) &= \frac{f''(t)}{(1 + f'^2(t))^{\frac{3}{2}}} \\ \vec{B}(t) &= (0, 0, 1) & \vec{N}(t) &= (-f'(t), 1, 0) & \tau(t) &= 0 \end{aligned}$
--

Hierbei haben wir entgegen der allgemeinen Vereinbarung in (1.1.5) der Krümmung κ ein Vorzeichen belassen. Das bedeutet, dass \vec{T} und \vec{N} in dieser Reihenfolge immer positiv orientiert sind und an einem Wendepunkt \vec{N} nicht springt. Der Sprung findet in κ statt! Dann bedeutet $f''(t) > 0$ auch $\kappa > 0$ und die Kurve ist nach oben gekrümmt wie eine Parabel. (In der schematischen Kurvendiskussion ergibt dies Vorzeichen der zweiten Ableitung ein Minimum!) Ist dagegen die Funktion nach unten gekrümmt wie $\cos x$ bei $x=0$, dann sind zweite Ableitung und Krümmung negativ.

- Bestimmen Sie für die Parabel $y = \alpha x^2$ mit $\alpha > 0$ den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte.
- Bestimmen Sie für die kanonische Parametrisierung $x \mapsto (x, \alpha x^2)$ der Parabel die Zerlegung der Beschleunigung in tangentiale und normale Komponente. Bestimmen Sie den Vektor $\vec{\omega}(x)$ der momentanen Winkelgeschwindigkeit.
- Wie vereinfachen sich die Frenet-Serreschen Formeln für eine ebene Bewegung? Überprüfen Sie ihre Gültigkeit am Beispiel der Parabel.