Kapitel 12: **Strukturanalyse individueller Endomorphismen V->V Eigenwerttheorie**.

12.1 **Allgemeine Theorie**
12.1.0 **Vorbemerkung**

(1.0.1) Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum zunächst ohne Skalarprodukt und beliebigem kommutativem Körper. Die übliche Matrixquantifizierung eines Endomorphismus u:V→V sah so aus: Man gab eine Basis e von V vor und bildete u(e_i) als Linearkombination der e_i, also u(e_i) = $\Sigma e_k M_{ki}$. Aus den Koeffizienten berechnete man die beschreibende Matrix. Oder auch : **Man bildete die Restriktion von u auf die von den e_i erzeugten Geraden und das reichte gemäß Fundamentalidentität**. Vgl. Kap. 4.4.3.

(1.0.2) Welche Basis man wählte, war völlig gleichgültig. Man erhielt immer eine Quantifizierung. Ob diese kompliziert oder weniger kompliziert, geometrisch instruktiv oder geometrisch undurchsichtig war, danach haben wir nicht gefragt. Wichtig war vielmehr vom bisherigen Standpunkt, dass das Verfahren für **alle** Endomorphismen V→V ausführbar war.

(1.0.3) Jetzt fragen wir umgekehrt: Kann man die Basis für einen fest vorgegebenen Endomorphismus so wählen, dass die quantitative Darstellung möglichst einfach wird und die Restriktion auf die Basisvektoren möglichst instruktiv?

Und bei Erfolg als AnschluBproblem: Für welche weiteren Endomorphismen außer dem gegebenen ist dieselbe gefundene Basis auch noch optimal?

(1.0.4) Hat man sich das erste Problem bewußt gestellt, so legen die bisherigen Erfahrungen mit der linearen Algebra einen Antwortversuch der folgenden Art nahe:

▼ Versuche den gesamten Raum V in eine direkte Summe von Teilräumen zu zerlegen, derart dass die Restriktion von u auf jeden dieser Teilräume ein Vielfaches der Identität ist. Jeder Vektor eines solchen Teilraumes ist dann ein **Eigenvektor**. Beim Übergang vom Urbild zum Wert bleibt die Richtung des Vektors erhalten, höchstens die Länge darf sich verändern.

▼ Wählt man eine Basis aus Vektoren dieser Teilräume, wird die beschreibende Matrix eine **Diagonalmatrix**. Die geometrische Struktur der Restriktionen auf die von den Basisvektoren erzeugten Geraden ist optimal durchschaubar.

(1.0.5) ??? Damit ist klar, was zu fragen ist: **Kann man zu einem gegebenen u:V→V eine Basis aus Eigenvektoren finden**?

Die Nützlichkeit der Eigenwerttheorie sollte bereits in Kap. 7 klar geworden sein: Über einen Eigenvektoransatz erhielt man die Lösungen linearer autonomer Diferentialgleichungen. Und auch die Separationsmethode für partielle Differentialgleichungen benutzte Eigenvektoren.

12.1.1 **Das Begriffssystem**

(1.1.1) Wir beginnen mit den grundlegenden Definitionen und ersten zugehörigen Resultaten. Im Hinblick auf später auftretende Komplikationen verallgemeinern wir einige Stellen bereits stärker. Einen Teil der Definitionen kennen wir bereits, stellen sie aber nochmals systematisch zusammen. (Vgl Kap.7.1.8b)

Definition:	V Vektorraum über dem kommutativen Körper K und u:V→V ein Endomorphismus.
Dann	heißt ein Vektor x∈V ein *Eigenvektor von u*, wenn es eine Zahl λ ∈K gibt, für die u(x)=λx gilt und x≠0 ist.
	Diese Zahl λ heißt *der Eigenwert von u zum Eigenvektor x.*
	Die Menge aller Eigenwerte von u wird *das Spektrum von u* genannt. Sp(u)⊂ K.Das Spektrum ist eine **Teilmenge** von K.
	Für jedes λ ∈Sp(u) heißt $\mathcal{E}(\lambda)$={x|x∈V, u(x)=λx} *der Eigenraum zum Eigenwert* $\lambda \in Sp(u)$.

(1.1.3) Für jedes λ ist $\mathcal{E}(\lambda)$ offenbar ein Teilraum von V. Für $\lambda \in$Sp(u) ist dieser nichttrivial, also ungleich dem Nullraum, denn dann gibt es mindestens einen Eigenvektor $\neq$0. Für $\lambda \notin Sp(u)$ ist der Raum $\mathcal{E}(\lambda)$ auch bildbar und gleich dem Nullraum.

(1.1.4) Auf dem Teilraum $\mathcal{E}(\lambda)$ ist u einebesonders einfache Abbildung, nämlich gleich $\lambda \cdot id$. Wir setzen u=λid+Rest. Dann ist der Restoperator genau auf $\mathcal{E}(\lambda)$ die Nullabildung. Oder auch

$$\boxed{\mathcal{E}(\lambda)=\text{Kern(u-}\lambda\text{id)}}.$$

(1.1.5) Zusammenfassend haben wir folgende Charakterisierungen für Eigenvektoren und Eigenwerte mit Hilfe des Raumes $\mathcal{E}(\lambda) = Kern(u - \lambda id)$:

$$\begin{aligned}\lambda \quad \in \quad & Sp(u) \Longleftrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \neq \{0\} \Longleftrightarrow Kern(u-\lambda id) \neq \{0\} \\ & (\Longleftrightarrow \det(u-\lambda id) = 0 \Longleftrightarrow (u-\lambda id) \text{ ist nicht invertierbar.})\end{aligned}$$

Beachten Sie: **Damit sind wir in der Lage, konkrete Beispiele routinemäßig durchzurechnen.** Wir müssen nur unsere bisherigen Resultate zusammenstellen und nutzen:

- ▼ Die Matrix M sei gegeben. Bilde M-λid und damit det(M-λid).
- ▼ Berechne det(M-λid) - Kap.9 . Das Ergebnis ist ein Polynom vom Grade n in λ.
- ▼ Bestimme die Nullstellen. (Ev. durch Raten und Polynomdivision).
- ▼ Setze die Nullstellen nacheinander in das lineare homogeneGleichungssystem $\boxed{\text{M-}\lambda id = 0}$ ein und löse es. (Vorkurs, Kap.5). Man benötigt jeweils nur eine Basis des Lösungsraumes. Beachte: Der Rang ist nicht maximal, so dass eine Bedingung unberücksichtigt bleiben kann.

In (1.3.29) wird dies Schema etwas erweitert erneut gegeben samt einem konkreten Beispiel.

(1.1.6) Die letzten beiden eingeklammerten Bedingungen in (1.1.5) setzen zusätzlich voraus, dass V endlichdimensional ist. Der unendlichdimensionale Fall, den wir hier nicht verfolgen, verlangt eine weitere Entfaltung des Begriffsapparates, den man speziell für Banachräume vornimmt.

(1.1.7) Wir benötigen für Kap.12.3 folgende Verallgemeinerung:

Definition:	Für $\lambda \in Sp(u)$ und k=1,2,3,.. sei der k-te verallgemeinerte Eigenraum definiert durch $\boxed{\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)=\text{Kern((u-}\lambda id)^k)}$.
	Zusätzlich sei $\mathcal{E}^{(0)}(\lambda)=\{0\}$.

(1.1.8) Man bildet also nicht nur Kern(u-λid) sondern auch Kern(u-λid)$^2 = Kern\left((u-\lambda id) \circ (u-\lambda id)\right)$ usw. Das sind erneut Teilräume und es gilt offensichtlich $\boxed{\mathcal{E}^{(r)}(\lambda)\subset \mathcal{E}^{(s)}(\lambda) \text{ für r<s.}}$ Die Folge der verallgemeinerten Eigenräume kann höchstens wachsen. Ist V endlichdimensional, muss die Folge k$\mapsto \mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$ aus Dimensionsgründen stationär werden! D.h. es gibt s mit $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$=$\mathcal{E}^{(s)}(\lambda)$ für alle k$\geq$s.

Setzt man wieder u=λid+Rest, so ist der Rest auf $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$ nicht notwendig Null, aber nilpotent! **Er ergibt nach ausreichender Iteration Null.** (Kap. 4.4.5b und 6.4.5)

(1.1.9) **Hilfssatz 1**:

Für $\lambda \in Sp(u)$ und k$\in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$ invariant unter u. D.h. es gilt $\boxed{\text{u}(\mathcal{E}^{(k)}(\lambda))\subset \mathcal{E}^{(k)}(\lambda).}$

Beweis: (u-λid)$\circ$u=u$\circ$(u-λid).

(1.1.10) **Hilfssatz 2:**

Es **seien**	$\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_r$ **verschiedene** Eigenwerte zu u. k$_i \in \mathbb{N}$ und x$_i \in \mathcal{E}^{(k_i)}(\lambda_i)$ und x$_i \neq 0$ für 1=1,2,..,r.
Dann	Dann sind die x$_i$ linear unabhängig. D.h. die Teilräume $\mathcal{E}^{(k_i)}(\lambda_i)$ bilden eine direkte Summe.

Insbesondere sind Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten (k$_i$ = 1) immer linear unabhängig.

(1.1.11) **Beweis**: Sei $z = x_1\alpha_1 + ...x_r\alpha_r = 0$ mit etwa $\alpha_1 \neq 0$. Zu zeigen: x_1=0. Bilde

$$\varphi = (u - \lambda_2 id)^{k_2} \circ ... \circ (u - \lambda_r id)^{k_r}$$

und wende φ auf z an. Alle Summanden verschwinden bis auf den ersten. Also $\varphi(x_1)$ =0. Man möchte folgern, dass x_1 =0 ist. Sei φ_1 die Einschränkung von φ auf $\mathcal{E}^{(k_1)}(\lambda_1)$. Es genügt, zu zeigen, dass φ_1 invertierbar ist. Und hierfür genügt es, zu zeigen, dass jeder der Faktoren (u-$\lambda_k$id) auf $\mathcal{E}^{(k_1)}(\lambda_1)$ invertierbar ist. Dazu schreibt man:

$$(u - \lambda_k id) = (\lambda_1 - \lambda_k)\left(id + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_k}(u - \lambda_1 id)\right)$$

Der zweite Summand $(u - \lambda_1 id)$ ist aber auf $\mathcal{E}^{(k_1)}(\lambda_1)$ nilpotent! Und jeder Endomorphismus der Form "id + nilpotent" ist invertierbar über die geometrische Reihe: $(id+n)^{-1}$=id-n +$(-n)^2$ +....., die ja im nilpotenten Fall nach endlich vielen Termen abbricht.

Die folgenden beiden Fragen lassen sich mit den Methoden aus Kapitel 4 behandeln.

☐ Studieren Sie das Wachsen der verallgemeinerten Eigenräume am Beispiel u-λid=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die zugehörigen Kerne.

☐ Sei $\alpha \neq \beta$ und M=$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das Spektrum und die zugehörigen Eigenräume.

12.1.2 **Der Idealfall: Diagonalisierbarkeit.**

(1.2.1) Kehren wir zu unserer Ausgangsfrage zurück: **Kann man den Raum V in Teilräume aus Eigenvektoren zerlegen**. Oder auch: **Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren**?

(1.2.2) Von jetzt ab sei V stets endlichdimensional.

(1.2.3) Zwei Fälle sind - abhängig von u - denkbar und kommen auch vor:

Definition:	V endlichdimensional über K und u:V→ V linear.
Dann	heißt u *diagonaliserbar,* wenn es eine Basis aus Eigenvektoren von u gibt.

Den alternativen Fall, dass es keine Basis aus Eigenvektoren gibt, werde wir später analysieren. Wenn Sie die letzte Frage nach (1.1.11) gerechnet haben, verfügen Sie bereits über ein Beispiel.

(1.2.4) Anders formuliert können wir auch sagen:

$$V \text{ diagonalsierbar} \Longleftrightarrow \text{V ist direkte Summe der } \mathcal{E}(\lambda): \ V = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \mathcal{E}(\lambda)$$

Im nichtdiagonalisierbaren Fall ist zu vermuten, dass V dann gleich der direkten Summe der (1.1.7) eingeführten verallgemeinerten Eigenräume $\mathcal{E}^{(k)}(\lambda)$ für ausreichend großes k ist. In Kap. 12.3 wird das bewiesen werden.

(1.2.5) Überdies werden wir sehen, dass wir unter gewissen Umständen den alternativen Fall doch noch auf den diagonalisierbaren zurückführen können. ("Halbeinfache Endomorphismen", Kap. 11.1.3a).

(1.2.6)

Definition:	Für $\lambda \in Sp(u)$ wird $\mu = \dim \mathcal{E}(\lambda)$ die *geometrische Multiplizität des Eigenwertes* λ genannt. Es gilt 1≤ $\mu \leq n$.

(1.2.7) Hieraus folgt ein elementares, aber immer wieder nützliches Resultat. Nach Hilfssatz 2 ist die Summe der Eigenräume ja eine direkte, so dass sich die Multiplizitäten zur Dimension des jeweils erzeugten

Raumes addieren. Und jeder Eigenwert trägt mindestens eine 1 zu dieser Summe bei, die insgesamt den Wert n=dimV nicht überschreiten darf.

Folgerung: !!!!	u ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Summe der geometrischen Multiplizitäten gleich n ist. Das ist insbesondere der Fall, wenn es n verschiedene Eigenwerte gibt.

(1.2.8) **Sei u diagonalisierbar** und E_i eine Basis aus Eigenvektoren (mit zugehörigen Eigenwerten λ_i). Beachten Sie: diese λ_i müssen keineswegs alle verschieden sein. Hat λ_i die geometrische Multiplizität μ_i, dann sind ebensoviele der λ einander gleich.

(1.2.9) Was folgt aus der Diagonalisierbarkeit? Wegen $u(E_i)=E_i\lambda_i$ ist die u bezüglich E beschreibende Matrix eine **Diagonalmatrix** und die Diagonalelemente sind gerade die Eigenwerte! Mit Hilfe der Tensordarstellung linearer Abbildungen erhalten wir die Formel (E_i^* die zu E_i duale Basis! $\lambda_i = \lambda_k$ für $i\neq k$ ist hier zulässig):

$$\boxed{u=\lambda_1 E_1\otimes E_1^*+....+\lambda_n E_n\otimes E_n^*} \qquad \boxed{u(x)=\lambda_1 x_1 E_1+.....+\lambda_n x_n E_n}$$

(1.2.10) Wendet man erneut u an, so folgt:

$$u^2 = u\circ u = \lambda_1^2 E_1\otimes E_1^* + ... + \lambda_n^2 E_n \otimes E_n^*$$

usw. D.h.. jedes Anwenden von u wirkt immer nur auf den E-Faktor im Tensorprodukt und produziert einen zugehörigen gewöhnlichen Faktor λ im jeweiligen Summanden. Aus der Zusammensetzung $u\circ u$ wird die Multiplikation $\lambda\lambda$.

(1.2.11) Noch besser ist es, mit der zu der Basis gehörenden Darstellung für die identische Abbildung zu beginnen (vgl. Kap.9.4.3b):

Satz:	Es sei u:V$\to V$ diagonaliserbar und E Basis aus Eigenvektoren.
Dann	Dann erhält man die folgende **Zerlegungung der Eins**:
	$id_V = E_1\otimes E_1^* + E_2\otimes E_2^* + ... + E_n\otimes E_n^*$. Damit folgt:
	$u^p = \lambda_1^p E_1\otimes E_1^* + \lambda_2^p E_2\otimes E_2^* + ... + \lambda_n^p E_n\otimes E_n^*$.

$E_j\otimes E_j^*$ ist in V die Projektion auf die durch E_j erzeugte Gerade! $E_j\otimes E_j^*(x)=x_j E_j$. Und auf dieser Geraden ist u einfach die Multiplikation mit λ_j. **Die Zerlegung der Eins stellt u genau in der gewünschten Weise als Summe einfachster Abbildungen dar!**

(1.2.12) Aber in (1.2.11) ist ja nicht nur der Endomorphismus u auf diese Weise dargestellt. Wir erinnern an die zweite Frage aus (1.0.3): Per Linearkombination kann man zunächst zu Polynomen in u übergehen und durch Reihenbildung zu durch Potenzreihen darstellbare Funktionen von u. Das Ergebnis ist eine "Funktion des Endomorphismus u".

Und das war es, was in Kapitel 7 als offenes Problem verblieb: Zu einer gegebenen linearen Abbildung M die Matrixfunktion e^{tM} möglichst einfach zu konstruieren.

Jetzt liefert unsere Konstruktion immer eine Formel der folgenden Art:

$$f(u) = f(\lambda_1)E_1\otimes E_1^* + f(\lambda_2)E_2\otimes E_2^* + ... + f(\lambda_n)E_n\otimes E_n^*.$$

(1.2.13) Das führt zu der folgenden wichtigen

Definition:	K=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei u ein diagonalisierbarer Endomorphismus und E_i eine Basis aus Eigenvektoren. Sei weiter f:D$\to\mathbb{R}$ mit D$\subset\mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit Sp(u)$\subset D$, die sich in D als punktweiser Grenzwert von Polynomen darstellen läßt.
Dann	wird der Endomorphismus f(u) wie folgt definiert: $f(u)=f(\lambda_1)E_1\otimes E_1^* + f(\lambda_2)E_2\otimes E_2^* + ... + f(\lambda_n)E_n\otimes E_n^*$.
	Es gilt $Sp(f(u))=\{y\mid y=f(\lambda),\ \lambda\in Sp(u)\}$.

(1.2.14) Ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Eigenvektorbasis? Ja,! Die Eigenräume selbst sind absolut. Innerhalb der Eigenräume kann man die Basen noch beliebig wählen. In Jedem Eigenraum ist u und damit f(u) aber proportional zu id und das ist in jeder Basis gleich der Summe der $E\otimes E^*$.

(1.2.15) Beachten Sie: Mit u ist dann auch f(u) diagonalisierbar und das Spektrum von f(u) ist wie angegeben $Sp(f(u))=\{y\mid y=f(\lambda),\ \lambda\in Sp(u)\}$. Allerdings kann durchaus $f(\lambda_i)=f(\lambda_k)$ gelten für $\lambda_i\neq\lambda_k$.

(1.2.16) Unterschiedliche reelle Funktionen können zu demselben Endomorphismus f(u) führen! Inspektion der Definitionsformel für f(u) zeigt:

Satz:	Es **seien** f und g zwei reelle Funktionen, deren Definitionsbereich Sp(u) enthält. **Dann** gilt f(u)=g(u) genau dann, wenn f und g auf dem Spektrum übereinstimmen.

(1.2.17) **Dieser Satz hat nützliche Konsequenzen**: Angenommen man möchte eine Endomorphismus- oder Matrixfunktion wie e^{tu} oder sin(ωu) oder $\frac{i}{1+u}$ berechnen, die über eine Reihendarsteilung oder eine Bedingungsgleichung für f(u) definiert, aber rechnerisch nur schwer zugänglich ist. x=f(u)=$\sqrt{1+u}$ etwa wird man als Lösung der Polynomgleichung $x^2 - id$=u interpretieren. Die Gleichung ist im Endomorphismenring ja problemlos formulierbar.

Wir beschränken uns auf den Fall K=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Und wir setzen voraus, dass f punktweiser Limes einer Polynomfolge ist.

☐ Beweisen Sie: Angenommen die Polynome p_n konvergieren punktweise in D gegen f, dann konvergiert $p_n(u)$ gegen f(u).

Wir nehmen an, dass wir die Menge Sp(u) kennen, die ja höchstens n Elemente haben kann. Nun bestimmen wir ein möglichst einfaches Polynom p mit p(x)=f(x) für alle Elemente aus dem Spektrum und bilden p(u). Das ist bei einem Polynom ja immer mit endlich vielen Rechenschritten möglich. (Angenommen es ist $p(x)=2+x-3x^2$. Daraus ist $p(u)=2id+u-3u^2$ zu bilden. Das sind wenige Matrixprodukte und Matrixadditionen. Dann gilt f(u)=p(u). **Mit dem leicht zugänglichen p(u) haben wir auch das möglicherweise schwer zugängliche f(u) bestimmt.**

(1.2.18) Diese Konstruktion nennen wir *die Polynommethode der Endomorphismuskonstruktion.*

(1.2.19) **Zur Durchführung benötigen man nur das Spektrum, nicht die Eigenvektoren**. Letztere gingen nur als Katalysatoren in die Begründung der Konstruktion ein.

(1.2.20) Nochmals das erforderliche Vorgehen:

▼ Bestimme das Spektrum von u, also Sp(u)$\subset \mathbb{R}$.

▼ Gegeben ein reelles x$\mapsto$f(x). Gesucht: Der Endomorphismus f(u).

▼ Bestimme ein Polynom x$\mapsto$p(x) mit p(x)=f(x) für alle x$\in$Sp(u).
Das sind höchstens n=dimV Punkte!

▼ Setze für die Zahl x den Endomorphismus u ein.

▼ Das gibt p(u). Es ist f(u)=p(u).

☐ Angenommen das Spektrum hat nur zwei Elemente und dimV=2. Was für ein Polynom setzte man an? Bestimmen Sie die Koeffizienten und geben Sie so eine allgemeine Formel für f(u) an. Was für ein Polynom ist anzusetzen, wenn Das spektrum drei Elemente hat?

(1.2.21) Wir spekulieren noch kurz über die formale Struktur, die hinter dieser Konstruktion steckt. Sei $\mathcal{F}$ ein Ring reeller Funktionen, die sämtlich für die Punkte aus Sp(u) definiert sind. Dann sollte eine die Ringstruktur erhaltende Abbildung $(\mathcal{F}, f \mapsto f(u), End_K(V))$ vorliegen. D.h. wir parametrisieren gewisse von u erzeugbare Endomorphisnnen durch entsprechende reelle Funktionen, wobei mit Hilfe der Ringstruktur formulierbare Beziehungen aber auch Grenzwertbeziehungen erhalten bleiben. Wir lösen Aufgaben für End(V), indem wir im Parameterraum rechnen, d.h. indem wir mit reellen Funktionen rechnen. Die Rechnungen sind dann im Endomorphismenraum einfach für die Eigenwerte auszuführen und das sind Körperelemente! Und der Tensorformalismus macht daraus die gewünschten Endomorphismen. Kurz: Konstruktionen wie "e-hoch-Matrix" oder "log(1+Matrix)"sind für diesen Formalismus kein Problem. Aber verwechseln Sie das bitte nicht mit Konstruktionen, bei denen die Operation f einfach mit jeder Komponente ausgeführt wird. Etwa die Matrix, die aus den Wurzeln aller Komponenten von M gebildet wird. Derartiges ist mathematisch meist wenig nützlich, findet sich aber nicht selten in Computeralgebrasystemen implementiert. Kurz: Ist M=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ dann ist $\sqrt{M}$ mitnichten gleich der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, wie man leicht nachprüft.

☐ Berechnen Sie $\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}}$ mit Hilfe der Polynommethode! Das Spektrum ergibt sich mit den in Kap. 7 besprochenen Methoden zu Sp(M)= $\{5+2\sqrt{6}, 5-2\sqrt{6}\}$.

(1.2.21) Will man nicht beim Spektrum aufhören, sondern bis zur Zielgeraden - der Zerlegung der Eins - vordringen, dann ergeben sich im Rahmen der Matrixdarstellung noch einige Vereinfachungen. Wir wählen K=$\mathbb{R}$ und V=$\mathbb{R}^n$ mit kanonischem euklidischen Skalarprodukt. Dann ist der kanonische Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n*}$ einfach die Transposition. Zusätzlich gilt bzw. ist zu beachten:

▼ Die duale Basis ist in **Zeilenform** zu schreiben.

▼ Das Tensorprodukt E⊗E* ist ein Spezialfall des Matrixproduktes.

▼ Die Spaltendarstellung der Basis E bildet die Spalten von T^{-1}, wenn T die Transformationsmatrix ist (E="neu" durch "alt").

▼ Die Zeilen von T ergeben de Zeilendarstellung der reziproken Basis.

(1.2.22) Es folgt ein Beispiel unter Auslassung der Zwischenrechnungen. Die einzelnen Größen werden natürlich auch von Computeralgebraprogrammen geliefert. Zunächst **die Matrix, das Spektrum und eine Basis aus Eigenvektoren**. Das ist die übliche Reihenfolge der Bestimmung. Die Ergebnisse zeigen, dass das Beipiel gut rechenbar ist: Keinerlei Brüche und Wurzeln!

$M=\begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 \\ 1 & -10 & 7 \\ 1 & -17 & 12 \end{pmatrix}$	Sp(M)={1,2,3}	$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $E_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Über $E=eT^{-1}$ folgt T^{-1} und daraus T. Hier ist e die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Aus T liest man E* ab. Alternativ kann man T über die Formeln für die reziproke Basis erhalten, wenn man diese in Zeilenform schreibt. Man findet:

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$T=\begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$E_1^* = (-1, 7, -4)$ $E_2^* = (1, -5, 3)$ $E_3^* = (-1, 2, -1)$

Damit verfügen wir über alle Bestandteile, um die zugehörige **Zerlegung der Eins** anzugeben:

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 7, -4) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} (1, -5, 3) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (-1, 2, -1) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ -2 & 14 & -8 \\ -3 & 21 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & -15 & 9 \\ 5 & -25 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rechts stehen die Projektionsmatrizen auf die drei Eigenräume.

☐ Verifizieren Sie, dass die letzte Summe wirklich gleich der Einheitsmatrix ist. Dann die gesamte Rechnung.

☐ Wie testet man, dass wirklich Projektionsmatrizen vorliegen? Probieren Sie das an einer der drei Matrizen aus. Welchen Rang muss eine derartige Matrix haben?

(1.2.24) Und jetzt die Bestimmung einiger Funktionen von M. Sagen wir $\sqrt{M}$ und M^{-1}. Die zugehörigen reellen Funktionen sind $x \mapsto \sqrt{x}$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$. Ihre Werte erfüllen $(\sqrt{x})^2 = x$ und $x \cdot \frac{1}{x} = 1$. Beide Beziehungen bleiben nach Einsetzen von M für x erhalten, wobei 1 durch id zu ersetzen ist und die Multiplikation in die Zusammensetzung übergeht. Das rechtfertigt unsere Schreibweise $\sqrt{M}$ und M^{-1}. Beide Endomorphismen lassen sich sowohl über die Polynommethode als auch über die Zerlegung der Eins bestimmen.

(1.2.25) Bestimmung von $\sqrt{M}$ über die Polynommethode: Wir benötigen ein Polynom $p(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$, das für die Elemente x=1,2,3 mit $\sqrt{x}$ übereinstimmt.

Die Rechnung gibt: $\alpha = 3 - 3\sqrt{2}$, $\beta = \frac{1}{2}(-5 + 8\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$ und $\gamma = \frac{1}{2}(1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Für diese Werte gilt $p(M)=\sqrt{M}$. Über Einsetzen und Umsortieren folgt:

$$\begin{aligned} \sqrt{M} &= 1(3id - \frac{5}{2}M + \frac{1}{2}M^2) + \sqrt{2}(-3id + 4M - M^2) + \sqrt{3}\left(id - \frac{3}{2}M + M^2\right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ -2 & 14 & -8 \\ -3 & 21 & -12 \end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & -15 & 9 \\ 5 & -25 & 15 \end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt erfordert einige Zwischenrechnung un liefert das Resultat, das sich unmittelbar aus der Zerlegung der Einheit ergibt, wie ein Blick auf (1.2.22) zeigt.

(1.2.26) Die inverse Matrix M^{-1} existiert genau dann, wenn 0 nicht im Spektrum liegt, was hier der Fall ist. Man muß ja für alle Elemente des Spektrums $\frac{1}{x}$bilden können. Über die Zerlegung der Eins finden wir ohne jede Rechnung:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ -2 & 14 & -8 \\ -3 & 21 & -12 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & -15 & 9 \\ 5 & -25 & 15 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

(1.2.27) Man sieht: Ist die Zerlegung der Eins erst einmal verfügbar, dann kann man mit ihr extrem einfach arbeiten, auch einfacher als mit der Polynommethode und viel einfacher als mit der in Kapitel 4.4.4c beschriebenen Methode der Umwandlung der Bedingungen in ein Gleichungssystem für die Komponenten. Das Rechnen mit Endomorphismen oder Matrizen wird auf das Körperrechnen zurückgeführt, allerdings unter der Vorraussetzung, dass sich die beteiligten Endomorphismen aus dem Ausgangsendomorphismus u aufbauen.

☐ Bestimmen Sie für M aus (1.2.22) den Endomorphismus exp(tM)=e^{tM}. Diskutieren Sie die Konsequenzen von (1.2.14) und (1.2.16) für die Bestimmung der Lösungen linearer autonomer Differentialgleichungen (Kap.7).

☐ Folgendes ist noch abzusichern: Zeigen Sie. daß das über (1.2.14) definierte e^{tM} gleich dem in Kap.7 mit Hilfe der Potenzreihe definierten e^{tM} ist.

11.1.3 **Das charakteristische Polynom**.

(1.3.1) Zwei Fragen verbleiben zur genaueren Klärung:

▼ 1) Wie erhält man allgemein das Spektrum eines Endomorphismus und welche Probleme treten dabei auf.

▼ 2) Wie erkennt man, ob der Endomorphismus diagonalisierbar ist.

(1.3.2) Wir beginnen mit dem ersten Themenkreis. Es sei dimV=n<∞. Für n=2 haben wir das Problem in Kap.7.1.8 eingehend besprochen. Jetzt diskutieren wir den allgemeinen Fall. Vgl. auch Kap. 9.1.1a.

(1.3.3) Was läßt sich über Sp(u) sagen? λ ∈Sp(u) heißt, dass u-λid$_V$ einen nichttrivialen Kern hat. Und das ist gleichbedeutend mit det(u-λid)=0. Diese letzte Gleichung ist eine Bedingung für den Eigenwert λ allein, die gesuchten Eigenvektoren kommen in ihr nicht mehr vor.

(1.3.4) Denkt man sich diese Determinante mit Hilfe der äußeren Algebra ausgewertet, so sieht man per Inspektion, dass ein Polynom n-ten Grades in λ vorliegt. Man nennt dies Polynom das *charakteristische Polynom des Endomorphismus.* Wir bezeichnen es mit x↦ $\chi_u(x)$. In der Physik wird manchmal der Name *Säkulargleichung* benutzt. **Die Nullstellen dieses Polynoms bilden das Spektrum von u.** Auch einige der Koeffizienten dieses Polynoms folgen unmittelbar, wie wir bereits wissen:

$$\begin{aligned} \chi_u(x) &= (-x)^n + Tr(u)(-x)^{n-1} + ... + \det(u) \\ Tr(u) &= \text{"Spur von u" = Summe der Diagonalelemente.} \end{aligned}$$

(1.3.5) Wie wir noch sehen werden, interessieren uns vornehmlich unter u invariante Teilräume von V. Wie macht sich die Invarianz eines Teilraumes im charakteristischen Polynom bemerkbar?

(1.3.6) Der folgende nützliche Hilfssatz gibt die Antwort:

Hilfssatz 3:

Sei	u:V→V linear und F⊂V unter u invarianter Teilraum und $u_0 : F \to V$ die Restriktion von u auf F.
Dann	gilt detu=det$u_0 \cdot \det u_Q$, wobei u_Q ein hier nicht weiter zu spezifizierender Homomorphismus ist. Kurz: detu_0 ist Teiler von detu.

(1.3.7) Beweis: Wähle eine Basis von F und ergänze zu einer Basis von V. Die beschreibende Matrix hat Dreiecksblockform, so dass die Determinante in der beschriebenen Weise faktorisiert.

(1.3.8) Ist F unter u invariant, so ist F offenbar auch unter u-λid invariant. Also:

Folgerung: Ist F unter u invariant und u die Restriktion von u auf F, **dann** ist χ_{u_0} ein Teiler von χ_u. (Teiler im Sinne der Polynome.)

(1.3.9) Für invariante Geraden ist das charakteristische Polynom vom ersten Grade und hat damit immer eine Nullstelle. Jede unter u invariante Gerade besteht aus Eigenvektoren zu u! Ist λ der Eigenwert, so enthält das charakteristische Polynom den Faktor (x-λ).

(1.3.10) Also: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte. Mit etwas mehr Genauigkeit: Die Nullstellen des Polynoms, die im Körper K liegen, bilden das Spektrum. Hat man eine solche Nullstelle, ist das zugehörige Eigenvektorproblem als lineare Gleichung routinemäßig behandelbar. Vgl. Kapitel 7.1.8b

(1.3.11) Aber damit stoßen wir auf ein Problem. Mit dem Vektorraum ist auch der Körper festgelegt. Die Nullstellen des Polynoms müssen jedoch keineswegs alle in diesem vorgegebenen Körper liegen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass wieder K=$\mathbb{R}$ oder K=$\mathbb{C}$ gilt. Dann wissen wir, dass es in $\mathbb{C}$ immer Nullstellen gibt. In $\mathbb{R}$ dagegen muss das nicht der Fall sein. p(x)=x^2+4 etwa hat keine reelle Nultstelle. Ein reeller Vektorraum mit diesem charakteristschen Polynom hat ein leeres Spektrum.

D.h man sollte besser die exakte Schreibweise $\mathrm{Sp}_K(u)$ statt $\mathrm{Sp}(u)$ verwenden.

$$Sp(u) = \{\lambda | \lambda \in K \text{ und } \lambda \text{ ist Nullstelle von } \chi_u(x)\}.$$

(1.3.12) Hierzu ein wichtiges Beispiel: V=$\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ und u=$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\boxed{\chi_u(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$$

. Die beiden Nullstellen sind $e^{i\alpha}$ und $e^{-i\alpha}$. Für $\alpha \neq k\pi$ mit k$\in \mathbb{Z}$ sind das keine reellen Zahlen. D.h. das Spektrum ist - der geometrischen Erwartung an ein Drehmatrix entsprechend - leer.

$$Sp_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset \quad \text{aber} \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u) = \{e^{-i\alpha}, e^{-i\alpha}\}$$

(1.3.14) Das überaus wichtige Beipiel verdeutlicht, was geschehen kann: Sämtliche Nullstellen des charakteristischen Polnnoms gehören keineswegs immer zum Spektrum. Zum Spektrum gehören nur diejenigen Nullstellen, die im Körper des Vektorraumes liegen.

(1.3.15) Im Körper $\mathbb{C}$ zerfällt nun jedes Polynom vollständig in das Produkt seiner Linearfaktoren. Hier stimmen Spektrum und Nullstellenmenge des charakteristischen Polynoms überein.

(1.3.16) **Linearfaktordarstellung des charakteristischen Polynoms im Körper der komplexen Zahlen:**

- ▼ Ist $\chi_u(x)$ das charakteristische Polynom des Endornorphismus, dann gibt e r$\leq n$ verschiedene Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_r \in \mathbb{C}$, derart dass gilt
(-1)$^n \chi_u(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2}.....(x-\lambda_r)^{\alpha_r}$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_r = n = \dim V$.
- ▼ Liegen alle Nullstellen im Körper des Vektorraumes, gilt $\mathrm{Sp}_K(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_r\}$.
- ▼ Andernfalls gilt $\mathrm{Sp}_K(u) = K \cap \{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_r\}$.
- ▼ Für jedes $\lambda \in$Sp(u) heißt die in der Darstellung auftretende eindeutig bestimmte Zahl α *die algebraische Multiplizität des Eigenwertes.*

(1.3.17) Kritisch ist der Fall K=$\mathbb{R}$, aber λ nicht reell. Da unter diesen Umständen das charakteristische Polynom rein reelle Koeffizienten hat (K=$\mathbb{R}$), müssen solche nicht reelle Nullstellen immer **paarweise** auftreten: Denn ist λ eine solche Nullstelle, dann gilt dasselbe auch für die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}$.(Beweis: Aus $\chi_u(\lambda) = 0$ folgt $\overline{\chi_u(\lambda)} = 0$ und daraus bei **reellen** Koefizienten $\chi_u(\overline{\lambda}) = 0$.)

(1.3.18) Unter diesen Umständen gibt es zwei Möglichkeiten, um weiter zu kommen:

▼ **1. Weg:** Man macht aus dem Vektorraum über $\mathbb{R}$ einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ und gelangt so zum günstigen Fall zurück, in dem das Spektrum gleich der Menge aller Nullstellen des charakteristischen Polynoms ist.

▼ **2.Weg:** Man sucht sich anstelle der invarianten Geraden aus Eigenvektoren, die zu den in $\mathbb{R}$ liegenden Nullstellen gehören, **andere invariante Tellräume**. Etwa solche, die zu einem Paar konjugiert komplexer Nullstellen $(\lambda, \overline{\lambda})$ gehören und auf denen u auch ein einfaches Verhalten im gegebenen Vektorraum über $\mathbb{R}$ hat. (Es zeigt sich, dass das Ebenen sind.)

11.1.3a Komplexifizierung des Vektorraumes (Körpererweiterung)

(1.3.19) Den zweiten Weg werden wir mit Hilfe von Resultaten des ersten untersuchen. Daher zuerst die Methode der Körpererweiterung.

(1.3.20) Wir haben bereits im Zusammenhang mit der Komplexifizierung linearer Differentialgleichungen aus einem Vaktorraum V der Dimension n über $\mathbb{R}$ kanonisch einen Vektorraum W derselben Dimension über $\mathbb{C}$ gemacht. Kap.7.1.8e. War e, eine Basis von V. dann sollte das auch eine Basis von W werden, nur dass eben die Zahlfaktoren jetzt aus $\mathbb{C}$ sein durften. Alternativ ließ sich W wie folgt beschreiben: W=V$\oplus$iV in dem Sinne, dass W ein Vektorraum der Dimension 2n über $\mathbb{R}$ war mit Basis 1e$_k$ und ie$_k$. Jeder Vektor z aus W schrieb sich eindeutig z=x+ig mit x,y$\in$V.

□ Man kann W über $\mathbb{C}$ noch auf eine weitere Weise einführen: Als Tensorprodukt $\mathbb{C}\otimes$V. Dabei ist $\mathbb{C}^1$ als zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ anzusehen. Zeigen sie das.

(1.3.21) Als nächstes wird der Endomorphismus u kanonisch von V auf W ausgedehnt, also komplexifiziert. Für die Ausdehnung $\overline{u}$ gilt definitionsgemäß $\overline{u}(z) = \overline{u}(x + iy) = u(x) + iu(y)$. Ist nun e$_k$ eine Basis von V und damit auch von W, dann haben u und $\overline{u}$ **dieselbe beschreibende Matrix,** wie man sofort sieht. Und damit auch dasselbe charakteristische Polynom, dessen Nullstellen sicher alle im Körper $\mathbb{C}$ liegen.

□ Sei V=$\mathbb{Q}^2$ über $\mathbb{Q}$ und u=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Das gibt das charakteristische Polynom $\chi_u(x) = x^2 - 2$. Dieses Polynom hat in $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle! Wir wissen, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$={p+q$\sqrt{2}$| p,q$\in$ $\mathbb{Q}$} ein Körper ist. Setzen Sie W= Q[$\sqrt{2}$]$\times$Q[$\sqrt{2}$] über $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Erweitern Sie u jetzt kanonisch zu einer linearen Abbildung u:W$\to$W mit demselben charakteristischen Polynom. Und in dem größeren Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ liegen beide Nullstellen $\pm\sqrt{2}$ des Polynoms.

> **Ergebnis:** Es sei V reeller Vektoraum und u:V$\to$V linear. Falls das charakteristische Polynom von u Nullstellen besitzt, die nicht reell sind, erweitert man u zu einer linearen Abbildung $\overline{u}$ der Komplexifizierung W von V. Dies $\overline{u}$ hat dasselbe charakteristische Polynom wie u und das Spektrum von u ist gleich der Nullstellenmenge des charakteristischen Polynoms. Damit sind für die Erweiterung $\overline{u}$ gerade die Bedingungen erfüllt, die wir zur Analyse der Frage der Diagonalisierbarkeit benötigen. Das Verfahren nennen wir Körpererweiterung (auf $\mathbb{C}$).

1.23) Bemerkung: Die vorangegangene Aufgabe zeigt, dass Körpererweiterung nicht nur von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ möglich ist, dass vielmehr eine sehr allgemeine Konstruktion vorliegt: Es gilt: Man kann immer einen größeren Körper finden, in dem das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Allgemein heißt ein Endomorphismus halbeinfach, wenn er die Eigenschaft hat, unter geeigneter Körpererweiterung diagonalisierbar zu werden. Das erklärt die Bemerkung aus (1.2.5).

11.1.3b **Invariante reelle Ebenen**

(1.3.24) Wie steht es mit dem zweiten Weg aus (1.3.18)? Wenn wir also aus irgendwelchen Gründen den Körper unseres Vektorraumes nicht vergrößern wollen? Wie bereits angedeutet, müssen wir dann andere invariante Teilräume zulassen, auf denen die Restriktion von u nicht mehr einfach ein Vielfaches der Eins ist. Diese Frage wollen wir jetzt kurz verfolgen.

(1.3.25) Sei also $\lambda = \alpha + i\beta$ eine nicht reelle Nullstelle des charakteristischen Poignoms ($\beta \neq 0$). Dann ist $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ auch eine Nullstelle und beide haben - wie obige Argumentation zeigt- dieselbe algebraische Multiplizität α.

Sei weiter E=e+if ein Eigenvektor zu λ in der eingeführten komplexen Erweiterung W. Dann ist E*=e-if ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ wie man sofort verifiziert. Dabei sind e und f natürlich beides Vektoren aus V. Über Hilfssatz 2 aus (1.1.10) folgt, dass E und E* über $\mathbb{C}$ unbhängig sind. Und das sit nur möglich, wenn e und f das über $\mathbb{R}$ sind.

(1.3.26) Sei H=<e,f> die von e und f erzeugte Ebene in V über $\mathbb{R}$. Wir vermuten: **H ist einerseits unzerlegbar bezüglich u und andererseits invariant unter u.** Gehen wir diese Vermutung einmal durch: Ist H invariant? Wir haben 2e=E+E* und 2if =E-E*. Einsetzen gibt sofort: 2u(e)=λE +$\overline{\lambda}$E*= 2(αe-βf) und 2iu(f)=2i(βe+αf). Zur Erinnerung $\lambda = \alpha + i\beta$.

(1.3.27) H ist also tatsächlich invariant und die Restriktion u$_0$ von u auf H hat folgende beschreibende Matrix

$$M_{u_0} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix}. \qquad \text{Also} \qquad \begin{aligned} &\chi_{u_0}(\mathrm{x})=(\alpha\text{-x})^2+\beta^2=(\text{x-}\alpha\text{-i}\beta)(\text{x-}\alpha\text{+i}\beta) \\ &= (x-\lambda)(x-\overline{\lambda}) \end{aligned}$$

(1.3.28) Die gefundene Matrix kann wie folgt zerlegt werden:

$$\boxed{\mathrm{M}_{u_0}=\sqrt{D}\begin{pmatrix} \cos & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{D}=\alpha^2+\beta^2 \qquad \text{und} \quad \cos\varphi=\tfrac{\alpha}{\sqrt{D}} \qquad \sin\varphi=\tfrac{\beta}{\sqrt{D}}}.$$

D.h. es liegt ein Produkt aus einer Drehmatrix und einer Umskalierung vor! Die Umskalierung der Längen erfolgt mit der Wurzel aus D=det(M). Daher ändert sich der Flächeninhalt von Figuren mit dem Faktor D=$\alpha^2+\beta^2=\lambda\overline{\lambda}$. Und das ist die Determinante von u.

(1.3.29) Fassen wir zusammen:

Satz: Zu jedem Paar $(\lambda,\overline{\lambda})$ konjugiert komplexer Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren E=e+if und F=e-if der komplexifizierten Theorie gehört ein unzerlegbarer invarianter Teilraum H=<e,f> des reellen Raumes V, dessen Basisvektoren sich mit der der folgenden Matrix transformieren:

$$\boxed{\mathrm{M}_{u_0}=\sqrt{D}\begin{pmatrix} \cos & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{D}=\lambda\overline{\lambda}=\alpha^2+\beta^2 \qquad \text{und} \quad \cos\varphi=\tfrac{\alpha}{\sqrt{D}} \qquad \sin\varphi=\tfrac{\beta}{\sqrt{D}}}$$

Damit haben wir den relevanten Typ invarianter Teilräume im Fall komplexer Eigenwerte für einen reellen Vektorraum konstruiert.

11.1.4 **Diagonalisierbarkeit**

(1.3.30) Was läßt sich für den wichtigen Fall ausssagen, bei dem alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms im betrachteten Körper liegen? Hier liefern unsere Überlegungen zum charakteristischen Polynom noch das folgende allgemeine Resultat:

Satz: V Vektorraum über K. u:V→V linear und F⊂V ein invarianter Teilraum unter u. Weiter sei u_0 die Restriktion von u auf F. Schließlich habe das charakteristische Polynom alle seine Nullstellen in K.

Dann gilt:
1) F enthält wenigstens einen Eigenvektor von u.
2) Sei $\lambda\in Sp(u)$ mit algebraischer Multiplizität α. Es sei $\mathcal{E}(\lambda)$ der zugehörige Eigenraum mit $\mu=\dim(\mathcal{E}(\lambda))$. **Dann gilt** $\mu\leq\alpha$.
$\boxed{\text{Geometrische Multiplizität} \leq \text{algebraische Multiplizität}}$

(1.3.31) Beweis: 1) χ_{u_0} ist Teiler von χ_u und enthält damit mindestens einen der Linearfaktoren (x-λ) und damit eine Nullstelle. Der zugehörige Eigenvektor von u ist auch Eigenvektor von u.

2) Auf F=$\mathcal{E}(\lambda)$ ist u gerade die Multiplikation mit λ. Das zugehörige charakteristische Polynom der Restriktion ist $(X-\lambda)^\mu$. Und das muss ein Teiler von χ_u sein. Aus der Linearfaktordarstellung folgt $\mu\leq\alpha$.

(1.3.32) Für die Frage der Diagonalisierbarkeit bedeutet das:

Satz u:V→V linear. Das charakteristische Polynom habe alle seine Nullstellen in K.

Dann ist u genau dann diagonalisierbar, wenn für alle $\lambda\in$Sp(u) die algebraische gleich der geometrischen Multiplizität ist.

Die Bedingung (1.2.6) ist ein Spezialfall hiervon.

(1.3.33) Wir formulieren noch die folgende abschließende Charakterisierung des diagonalisierbaren Falles, die zeigt, dass dann sämtliche invariante Teilräume aus Eigenvektoren aufgebaut sind.

Satz: Sei u:V→ V diagonalisierbar. Speziell zerfällt also das charakteristische Polynom in Linearfaktoren. Weiter sei F⊂V ein unter u invarianter Teilraum.

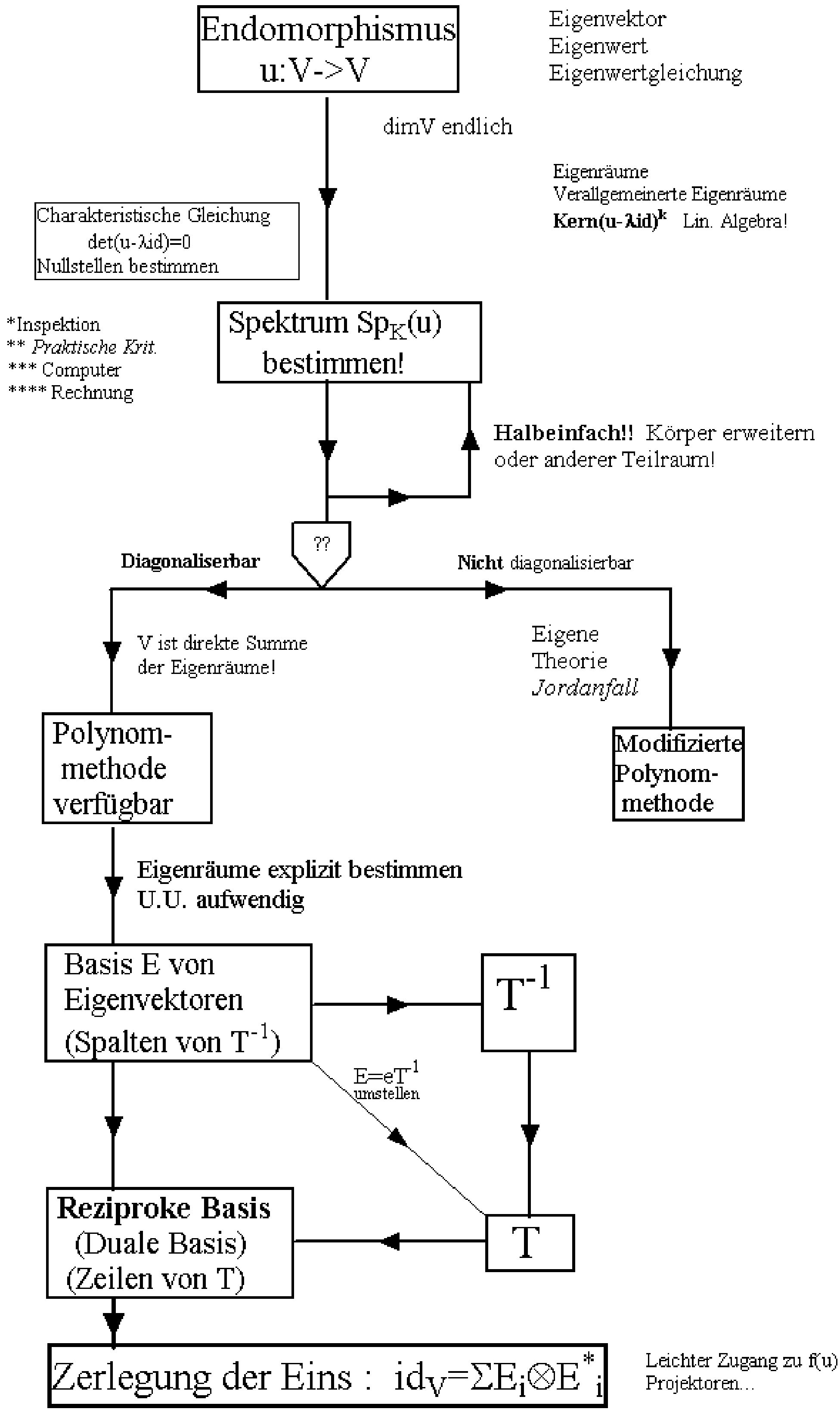
Dann gibt es eine direkte Zerlegung V=F⊕F′' mit den Eigenschaften:
a) Auch F′ ist invariant unter u.
b) Die Restriktionen von u auf F und F′ sind beide diagonalisierbar.

(1.3.25) Wir geben erneut eine zusammenfassende **Übersicht** zum Vorgehen beim Durchrechnen eines konkreten Beispieles. Die letzten Schritte werden etwa in den Anwendungen der theoretischen Physik nicht ausgeführt.

u:V→ V gegeben	M= $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
▼ Bestimme $\chi_u(x) = \det(u - xid_V)$	$\chi_M(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
▼ Die Nullstellen von χ_u suchen	Nullstellen bei x=1,2,3 (x=1 geraten)
▼ ? Körpererweiterung ?	Unnötig
▼ **Spektrum** bestimmen	$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \{1,2,3\}$
▼ u diagonaliserbar? (Hier angenommen)	Ja! Wegen (1.2.6)
■ **Polynommethode** verfügbar	Etwa $e^{tM} = \alpha id + \beta M + \gamma M^2$ ....
▼ Für jedes λ die zugeh. homogene Gl. u(x)-$\lambda x = 0$ losen. (Eigenraum)	$\lambda = 1 : \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{E}_1 = ...$
▼ Basis aus Eigenvektoren bestimmen	$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{E}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
■ Übliche Anwendungen bis hier. Differentialgleichung: Allg. Lösung	$\dot{\vec{y}}(t) = M.\vec{y}(t) \qquad \vec{y}_{\alpha\beta\gamma}(t) = \alpha e^{1t}\vec{E}_1 + \beta e^{2t}\vec{E}_2 + \gamma e^{3t}\vec{E}_3$

▼ Über E erhält man T^{-1} (E=eT^{-1})	$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
▼ Durch Invertieren oder Auflösen folgt T Die Zeilen geben die reziproke Basis.	T= $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
▼ $\boxed{M_u^N = TM_u^A T^{-1} \text{ ist Diagonalmatrix}}$ Die Diagonalelemente sind die Eigenwerte	$TMT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
■ Zugehörige **Zerlegung der 1** hinschreiben **Ziel erreicht.**	$\mathrm{id}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} (-2,-2,-1) + ... = ...$

Wir geben jetzt noch ein Schema, das die ZUsammenhänge in Diagrammform zeigt.


Endomorphismus
u:V->V
Eigenvektor
Eigenwert
Eigenwertgleichung
dimV endlich
Eigenräume
Verallgemeinerte Eigenräume
Kern(u-λid)^k Lin. Algebra!
Charakteristische Gleichung
det(u-λid)=0
Nullstellen bestimmen
*Inspektion
** *Praktische Krit.*
*** Computer
**** Rechnung
Spektrum $Sp_K(u)$
bestimmen!
Halbeinfach!! Körper erweitern
oder anderer Teilraum!
??
Diagonaliserbar
Nicht diagonalisierbar
V ist direkte Summe
der Eigenräume!
Eigene
Theorie
Jordanfall
Polynom-
methode
verfügbar
Modifizierte
Polynom-
methode
Eigenräume explizit bestimmen
U.U. aufwendig
Basis E von
Eigenvektoren
(Spalten von T^{-1})
T^{-1}
$E=eT^{-1}$
umstellen
Reziproke Basis
(Duale Basis)
(Zeilen von T)
T
Zerlegung der Eins : $id_V=\Sigma E_i \otimes E^*_i$
Leichter Zugang zu f(u)
Projektoren...