

Das läßt sich dann leicht weiter umrechnen. Eine Umrechnung in kartesische Koordinaten ist dagegen offensichtlich unangenehm.

(1.6.44) Als einfacheres Beispiel betrachten wir ebene Polarkoordinaten. Dafür gilt

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \vec{x}_P(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{\partial}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{\partial}_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Die reziproke Basis folgt per Inspektion

$$\vec{\partial}^r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{\partial}^\theta = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

(1.6.45) Nehmen wir das Feld  $s(\vec{x}) = \vec{x}^2 + (\vec{e}_2 \cdot \vec{x})$  mit  $\text{grad}s(\mathbf{x}) = 2\vec{x} + \vec{e}_2$ . Wir haben  $s_P(r, \theta) = r^2 + r \sin \theta$ . Also  $\partial_r s_P = 2r + \sin \theta$  und  $\partial_\theta s_P = r \cos \theta$ . Damit gibt unsere Formel:

$$\begin{aligned} \text{grad}s(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} (2r + \sin \theta) + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} r \cos \theta \\ &= 2r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beachten Sie, wie elegant sich alles zum korrekten Resultat zusammenfügt.

Zur expliziten Berechnung von Gradienten: Vergleiche Vorkurs

## 11.2.4 Invariante Teilmengen der Tensorräume

### 11.2.4a Aktive und passive Transformationen

(2.4.) Wir gehen genauer auf die Wirkungen der Transformationsgruppe ein. Die Transformationsgruppe operiert mathematischerseits auf einer Vielzahl von Objekten, die für die physikalische Beschreibung benötigt werden. Diese Operationen lassen sich physikalisch wieder inhaltlich interpretieren, machen dabei Vorhersagen über die Struktur unserer Welt. Insbesondere macht das Modell der linearen Algebra bestimmte Aussagen über Beziehungen, die zwischen physikalischen Systemen herrschen, die durch Transformationen miteinander verbunden sind. Und sie machen Aussagen über die Einbettung der Systeme in die Geometrie von Raum und Zeit sowie die Beziehungen zwischen den Beobachtungsdaten unterschiedlicher Beobachter.

(2.4.2) Insbesondere interessiert die Frage: **Welche Komponententupel sind für die Beobachter Kandidaten physikalischer Größen?** Welche Daten benötigt man mindestens, um die Ergebnisse anderer zugelassener Beobachter vorherzusagen? Das Beispiel der Relativitätstheorie schärfte den Blick für diese Problematik.

(2.4.3) Nochmals das allgemeine Szenenbild, von dem wir ausgehen.

- $V_0$  Grundraum,  $V$  ein zugehöriger Tensorraum.  $\dim V_0 = n$  und  $\dim V = N$
- $G$  die Transformationsgruppe. Diese operiert auf  $V_0$  vermöge  $(g, \vec{x}) \mapsto g \star \vec{x} = T_g \cdot \vec{x}$  mit  $T_g \in \text{Aut}(V_0)$ . Das ist unsere (mathematische) Vorgabe.
- Weiter sei  $\mathcal{B}$  die Menge aller Basen, die (in der jeweiligen Idealisierung) zu zugelassenen Beobachtern führen. (Etwa alle kartesischen Basen von  $V_0^3$  oder alle Sylvesterbasen von  $V_0^4$ .) Jeder Basiswechsel wird dann durch eine Transformation aus  $G$  beschrieben und umgekehrt führt jedes  $g \in G$  eine zugelassene Basis in eine solche über.
- Ist  $a$  Basis von  $V$ , dann ist  $g \mapsto M_{T_g}$  eine zugehörige Matrixdarstellung der Gruppe.  $M_{T_g}$  ist beschreibende Matrix bezüglich der gewählten Basis.

(2.4.4) Die gegebene Gruppenoperation auf den Grundraumvektoren induziert - wie nach Kap. 3 zu erwarten - weitere Operationen. Alle nachfolgend beschriebenen Gruppenoperationen sind Linksoperationen. Sie sind zum Zweck der Systembeschreibung so verkoppelt, dass stets  $\boxed{g \star \text{alt} = \text{neu}}$  gilt.

- Mit der Matrixdarstellung (zur Basis  $a$ ) operiert  $G$  auch auf den Koordinatenvektoren (zu  $a$ ), d.h. den Datentupeln:

$$(G \times \mathbb{R}_K^n, (g, \vec{x}^K)) \mapsto g \star \vec{x}^K = M_{T_g} \cdot \vec{x}^K, \mathbb{R}_K^n$$

$$\text{Es gilt: } g \star \vec{x} = T_g \cdot \vec{x} = \sum a_i (M_{T_g})_{ik} x_k^K.$$

Physikalisch führt diese Operation zum unten zu beschreibenden *aktiven Standpunkt*. Die Operation ist ausdehnbar auf die Figuren, also Teilmengen von  $V_0$ . Beschreibt  $g$  etwa eine Translation und ist  $F$  eine Figur, dann beschreibt  $g \star F$  die translatierte Figur als zweites System.

- $G$  operiert auch auf  $V_0^*$  per  $(g, \lambda) \mapsto {}^t T_{g^{-1}} \cdot \lambda$ . Für die zugehörige Matrixdarstellung heißt das

$$(G \times \mathbb{R}_K^{*n}, (g, \vec{\lambda}^K)) \mapsto g \star \vec{\lambda}^K = {}^t M_{T_{g^{-1}}} \cdot \vec{\lambda}^K, \mathbb{R}_K^{*n}$$

Nach den Regeln der Transformationstheorie ist  $\vec{\lambda}^K$  als Spaltenvektor anzusetzen. Es gilt

$$\langle g \star \lambda | g \star \vec{x} \rangle = \langle \lambda | \vec{x} \rangle$$

Intuitiv beschreiben die Dualraumelemente Messoperationen an geometrischen Figuren. Vgl. die Interpretation der  $k$ -Formen der äußeren Algebra. Unsere Gleichung besagt dann: **Verschiebt man Figur und Messgerät gekoppelt, dann ändert sich das Messresultat nicht.** Und tatsächlich lassen sich Abweichungen von diesem Ergebnis erfahrungsgemäß darauf zurückführen, dass man irgendwelche Systemteile nicht mit transformiert hat. Abweichungen werden also nicht durch Eigenschaften von  $V_0$  bewirkt. Das ergibt den unten zu beschreibenden *Kopplungsstandpunkt*.

- **Basisoperationen:** Sei  $\mathcal{B}$  die Menge aller Basen, die zu  $G$ -zugelassenen Beobachtern gehören. Dann haben wir die Operation (neue Basis als Funktion der alten, daher  $g^{-1}$ . Das ergibt ein Linksoperation!):

$$(G \times \mathcal{B}, (g, a) \mapsto g \star a = \Sigma a M_{T_{g^{-1}}}, \mathcal{B})$$

Das ist der bisher vorrangig besprochene Basiswechsel, der zum *passiven Standpunkt* führt. Was kurz besagt: Ein und dieselbe Figur wird durch zwei Beobachter beschrieben!

- Mit den Operationen auf  $V_0$  und  $V_0^*$  erhalten wir kanonisch eine Operation auf allen Tensorräumen. Etwa  $g \star (\vec{x} \otimes \vec{y}) = T_g \vec{x} \otimes T_g \vec{y}$  oder  $g \star (\vec{x} \otimes \lambda) = (T_g \vec{x}) \otimes ({}^t T_{g^{-1}} \lambda)$ .

Damit hat man **automatisch** die formale Ausdehnung aller drei Standpunkte auf allgemein zu Tensoren gehörige Datentupel.

(2.4.5) Das ist die mathematische Seite, die Ausdehnung der ursprünglichen Gruppenoperation auf weitere, zur physikalischen Sachverhaltsbeschreibung benötigte mathematische Objekte. Jetzt gehen wir auf die andere Seite über **und interpretieren diese Konstruktionen inhaltlich physikalisch**. Die so vorhergesagten Resultate werden von der Erfahrung weitgehend bestätigt. Ernsthaftige Abweichungen würden eine Änderung des eingangs beschriebenen Szenenbildes verlangen, wobei man meist zunächst an eine Änderung von  $V_0$  denkt. Aber natürlich sind auch viel schwerwiegendere Strukturänderungen denkbar.

(2.4.6) Wir beschreiben drei inhaltliche Interpretationen des Transformationsformalismus. Alle machen gewisse Vorhersagen über das Verhalten physikalischer Systeme und die Übersetzungsabbildungen bei Beobachterwechsel.

(2.4.7) ■ **Aktiver Standpunkt.** Er beruht auf der folgenden physikalischen Ausgestaltung des allgemeinen Szenenbildes:

Ein (und derselbe) Beobachter vermisst zwei Systeme, die durch eine Konfigurationsraumtransformation auseinander hervorgehen. (Lageveränderung, Zeitverschiebung usw.) Transformiert werden sämtliche Systemgrößen. Zwischen den Messresultaten zu den beiden Systemen bestehen bestimmte Beziehungen. Wir beschränken uns auf Transformationen der Transformationsgruppe. Dann werden diese Beziehungen durch die entsprechenden Gruppenoperationen festgelegt.

Aktiv heißt: Das physikalische System selbst wird transformiert. Die Übersetzung der Beobachtungsdaten erfolgt durch die Matrixabbildung der Koordinatenvektoren  $\vec{Y}^N = \vec{T} \cdot \vec{Y}^A$ . Koordinatenfrei geht es um die Zuordnung

$$Y = \Sigma a_J Y_A^J \mapsto g \star Y = \Sigma a_J Y_N^J.$$

Beispiel:  $g \in SO(3)$  beschreibt eine Drehung. Das System sei ein starrer Körper. Das zweite System entsteht durch Drehung des ersten um den Ursprung gemäß  $g$ . Die Ortsvektoren der Punkte transformieren sich gemäß  $\vec{x} \mapsto g \star \vec{x}$ . Das wird auf den gesamten Körper ausgedehnt. Abstände von Punkten bleiben fest. usw. In der Relativitätstheorie beobachtet ein Beobachter einmal einen ruhende Massenpunkt und dann einen derselben Art, der sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit gegenüber dem Beobachter bewegt.

(2.4.8) ■ **Passiver Standpunkt.** Die Ausgestaltung des Szenenbildes sieht jetzt wie folgt aus: Ein und dasselbe System wird von 2 Beobachtern beobachtet, deren Koordinaten durch ein Element der Transformationsgruppe auseinander hervorgehen. Es werden also Ereignisse an **einem** System vermessen, aber durch **zwei** Beobachter. Nach unserem üblichen Schema gehört dazu ein Basiswechsel in  $V_0$ , beschrieben durch ein Element der Transformationsgruppe  $G$ . Ist  $a$  die alte und  $b$  die neue Basis, so haben wir  $b = g \star a = a \vec{T}_{g^{-1}}$ . In diesem Fall sind die Koordinatenvektoren der beiden Beobachter die relevanten Größen. (Man fragt ja nach der Übersetzungsabbildung!) Und für diese gilt erneut  $\vec{Y}^N = T_g \vec{Y}^A$ . Die Gleichung

$$Y = \Sigma a_J Y_J^A = \Sigma b_J Y_J^N$$

der Vektorrechnung bezieht sich vornehmlich auf diesem Standpunkt.

(2.4.9) ■ **Kopplungsstandpunkt.** Man kann beide Szenenbilder koppeln und dazu macht die Vektorrechnung ganz bestimmte Aussagen: **Zwei verschiedene Beobachter vermessen je ein zugehöriges System.** Aber die Systeme gehen durch dieselbe Transformation auseinander hervor, die auch die Beobachter verbindet. Und das heißt: Der alte Beobachter hat die Vektorbeschreibung  $Y^1 = \Sigma a_J Y_{A1}^J$  für das erste System. Und  $Y^2 = \Sigma a_J Y_{A2}^J = \Sigma a_J T_{.K}^J Y_{A1}^K$  für das zweite. Das gibt aber wegen  $b_K = \Sigma a_J T_{.K}^J$  auch  $Y^2 = \Sigma b_K Y_{A1}^K$ . Oder: **Der zweite Beobachter erhält für das zweite System genau dieselben Zahlbeschreibungen wie der erste für das erste,**

$$\vec{Y}^{2N} = \vec{Y}^{1A}.$$

Das ist offensichtlich eine starke Isotropieaussage über unsere Welt, vornehmlich deren Raum-Zeit-Struktur, die automatisch in das Vektorraumtransformationsverhalten eingebaut ist. Sie ist keineswegs denknotwendig, entspricht aber weitgehend der Erfahrung.

(2.4.10) Wir stellen jetzt das folgende Problem: Das Szenenbild sei wie eben beschrieben. Wir wählen einen festen Tensorraum  $V$ , den wir als Kandidaten zur Beschreibung einer physikalischen Größe ansehen. Ist  $Y \in V$  und  $Y = \Sigma a_J Y^J$ , dann sollte  $(Y^J)$  die einschlägigen Beobachtungsdaten des zu  $a$  gehörigen Beobachters enthalten. **Aber braucht man immer alle Komponenten  $Y^J$ ?**

Zur Verdeutlichung Die Ortsbeschreibung im  $V_0^3$  erfolgt durch Zahltripel, die Koordinatenvektoren aus  $\mathbb{R}_K^3$ . Also  $\vec{x}^K = {}^t(x, y, z)$ . Angenommen ein Querulant erscheint und behauptet, man müsse die Lage von Massepunkten durch 5-Tupel beschreiben. Sagen wir durch  $\vec{x}^Q = (x, y, z, y - x, z - y)$ . Diese Beschreibung würde man als *redundant* charakterisieren. Denn die letzten beiden Koordinaten sind überflüssig und die ersten drei für sich genommen spannen einen invarianten Teilraum des  $\mathbb{R}^5$  auf. Sie reichen bereits aus, um mit Hilfe der Übersetzungsabbildung die Koordinaten eines neuen Beobachters vorherzusagen. In Analogie dazu fragen wir: Kann es ein, dass man in Tensorräumen unter bestimmten Umständen vielleicht mit weniger Koordinaten auskommt, als denen, die aus einer vollständigen Basisbeschreibung  $\Sigma a_J Y^J$  hervorgehen?

(2.4.11) Tatsächlich ist das vielfach der Fall. Wieso? Nun, die Gruppe operiert auf  $V$  und dieser Raum zerfällt dabei in Bahnen. Vereinigungen solcher Bahnen sind unter  $G$  *invariante Teilmengen*. D.h. mit  $Y \in F$  gilt auch immer  $g \star Y \in F$ , wenn  $F$  eine solche invariante Teilmenge ist. Beachten Sie übrigens: **Menge**, nicht etwa Teilraum!

Was bedeutet das zunächst für den aktiven Standpunkt? Dann ist  $Y = \Sigma a_J Y^J$  und  $g \star Y = \Sigma a_K T_{.J}^K Y^J = \Sigma a_K Y^{NK}$  mit  $Y$  und  $g \star Y \in F$ .

Und was bedeutet das für den passiven Standpunkt? Sei  $Y \in F$  mit altem Beobachter  $a$ . Also  $Y = \Sigma a_J Y^{AJ}$ . Für den neuen Beobachter mit Basis  $b$  gilt  $Y = \Sigma b_K T_{.J}^K Y^{AJ} = \Sigma b_K Y^{NK}$  Oder  $Y^{NK} = \Sigma T_{.J}^K Y^{AJ}$  Zusammen sieht man: Die Übersetzungsabbildung  $\beta_{NA} : (Y^{AJ}) \mapsto (Y^{NK})$  macht aus einem Tensor  $T \in F$  stets wieder einen Tensor  $T \in F$ . Die Komponenten, die die Elemente von  $F$  festlegen, genügen daher zur Ausführung der Übersetzungsabbildung und werden zu Kandidaten zur Beschreibung einer physikalischen Größe. Formal: Sei  $a$  eine Basis und  $\bar{L}_a : \mathbb{R}^N \rightarrow V$  die zugehörige Linearkombinationsabbildung. Weiter sei  $F^a \subset \mathbb{R}^N$  das Urbild von  $F$  unter  $L_a$ . Dann ist auch  $F^a$  unter  $G$  invariant. Ist  $b$  weitere zulässige Basis, dann gilt  $F^a = F^b$ .

(2.4.12) Zur Erinnerung: Wie beschreibt man üblicherweise **Teilmengen** eines Vektorraums? Durch zusätzliche Bedingungen an die Koordinaten, wodurch die Zahl der freien Parameter, die Zahl der Freiheitsgrade, reduziert wird. Eine affine Ebene im Raum in der Dreipunkteform führt auf die Nebenbedingung  $x+y+z=1$ . Ein Ursprungskreis in der Ebene wird durch  $x^2 + y^2 = r^2$  festgelegt usw. Ebenso wird man jetzt die Tensorkoordinaten  $(Y^J)$  des allgemeinen Tensors durch zusätzliche Bedingungen einschränken, die die Zugehörigkeit zu  $F$  sichern. Und dabei haben wir gesehen: Ist  $F$  invariant und erfüllt  $\vec{Y} = (Y^J)$  diese Einschränkung, dann tut das auch  $g \star \vec{Y} = (\Sigma T_{.K}^J Y^K)$ . Zur Verdeutlichung ein konkretes Beispiel, das wir nachfolgend genauer behandeln:

Ist  $\vec{Y} = (Y_{ij})$  eine **symmetrische** (doppelt kovariante) Matrix, dann ist  $g \star \vec{Y}$  auch eine symmetrische Matrix. Nie wird daraus im neuen System eine nicht symmetrische. Zur Bestimmung

einer symmetrischen  $n \times n$ -Matrix benötigt man aber nur  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , nicht aber  $n^2$  Zahlangaben bzw. Komponenten. Der direkte Beweis: Sei  $Y_{ik}^A = Y_{ki}^A$ . Also  ${}^t Y^A = Y^A$ . Dann folgt wegen  $Y^N = {}^t T^{-1} Y^A T^{-1}$  und mit den Rechenregeln der Transposition

$${}^t Y^N = {}^t ({}^t T^{-1} Y^A T^{-1}) = {}^t T^{-1} {}^t Y^A {}^t T^{-1} = Y^N.$$

□ Ist  $\vec{Y} = (Y_{.k}^i)$ , dann stimmt das nicht. Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel. Wie steht es mit  $\vec{Y} = (Y^{ik})$ ?

(2.4.13) **Zusammenfassung:** Ist  $F \subset V$  invariante Teilmenge, dann sind die Koordinatentupel  $\vec{Y}$  der Elemente aus  $F$  **Kandidaten für die Beschreibung physikalischer Größen**. Zur Ausführung der zugehörigen Übersetzungsabbildung benötigt man nur die  $F$  bestimmenden Parameter.

Oder: Werden die Elemente von  $F$  durch  $k \leq N$  freie Parameter bestimmt, dann sind die zugehörigen  $k$ -Tupel der Koordinatenvektoren Kandidaten für die Beschreibung einer physikalischen Größe, da die  $F$  festlegenden Nebenbedingungen auch nach der Transformation erfüllt sind.

Ist  $F$  dagegen nicht invariant, dann genügt das  $k$ -Tupel eines Beobachters nicht immer, um das entsprechende Tupel eines anderen vorherzusagen. Und in diesem Sinne kann keine Quantifizierung einer beobachterunabhängigen physikalischen Größe vorliegen.

(2.4.14) **Wir suchen hier nicht systematisch nach invarianten Teilmengen von  $V$ , sondern geben nur einige wichtige Beispiele mit zugehörigen Anwendungen!**

## 11.2.4b Symmetrische und antisymmetrische Tensoren

Das jetzt zu besprechende Beispiel invarianter Teilräume ist von großer Bedeutung, kommt immer wieder vor und ist auch stark verallgemeinerbar. Wir nutzen es sowohl bei der nachfolgend vorgenommenen Analyse der totalen Ableitung eines Vektorfeldes als auch bei der Diskussion des Hookschen Gesetzes der Elastizitätstheorie.

(2.4.15) Sei  $V = V_0 \otimes V_0$ . Dieser Raum erweist sich als direkte Summe zweier invarianter Teilräume:

$$\boxed{V_0 \otimes V_0 = (V_0 \otimes_S V_0) \oplus (V_0 \otimes_A V_0)}$$

Wir führen den **Beweis** dieser Behauptung über die Angabe einer die Zerlegung liefernden Basis. Die resultierende Zerlegung ist dann basisunabhängig.

(2.4.16) Sei  $f$  Basis von  $V_0$ . Setze

$$e_i \otimes e_k = \frac{1}{2}(e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) + \frac{1}{2}(e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) = e_i \otimes_S e_k + e_i \otimes_A e_k$$

Dann sollen die  $e_i \otimes_S e_k$  mit  $i \geq k$  Basis von  $V_0 \otimes_S V_0$  und die  $e_i \otimes_A e_k$  mit  $i > k$  Basis von  $V_0 \otimes_A V_0$  sein. Laut Definitionsgleichung liegt ein Erzeugendensystem (aus nicht zerlegbaren Tensoren) vor. Die Anzahl ist  $n^2 = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n-1)$ . Das beweist die behaupteten Basiseigenschaften.

(2.4.17) Bei Summation über **alle**  $i, k$  liegen nur Erzeugendensysteme vor. Im Rahmen der Summenschreibweise wird gerne mit diesen Erzeugendensystemen gearbeitet.

(2.4.18) **Sind die beiden Teilräume invariant?** Ja, die zugehörigen Komponentenmatrizen sind in Bezug auf jede Basis und daher nach jeder Transformation symmetrisch bzw antisymmetrisch. Das rechnet man direkt nach oder entnimmt es der folgenden Rechnung, die zugleich die Komponenten konstruiert.

(2.4.19) Zunächst eine **Hilfsbetrachtung**: Sei  $A = \sum_{ik} M_{ik}$ . Dabei sollen  $i$  und  $k$  dieselbe Indexmenge durchlaufen. Das ist eine wichtige Bedingung. Dann rechnen wir wie folgt:

$$A = \sum_{ik} M_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ik} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{ik} M_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{ik} (M_{ik} + M_{ki})$$

Im zweiten entscheidenden Schritt haben wir die Indexbezeichnungen einfach vertauscht ( $i$  wird zu  $k$  und  $k$  zu  $i$ ). Das geht natürlich nur bei gleicher Indexmenge!

(2.4.20) Für einen allgemeinen Tensor  $Y \in V_0 \otimes V_0$  rechnen wir zunächst:

$$Y = \sum e_i \otimes e_k Y^{ik} = \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) Y^{ik} + \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) Y^{ik}$$

Auf jede dieser Summen wenden wir obige Hilfsbetrachtung an und finden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) Y^{ik} &= \frac{1}{4} \sum (e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) (Y^{ik} + Y^{ki}) = \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) Y_S^{ik} \\ \text{mit } Y_S^{ik} &= \frac{1}{2} (Y^{ik} + Y^{ki}) \end{aligned}$$

und (da  $e_k \otimes e_i - e_i \otimes e_k = -(e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i)$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) Y^{ik} &= \frac{1}{4} \sum (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) (Y^{ik} - Y^{ki}) = \frac{1}{2} \sum (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) Y_A^{ik} \\ \text{mit } Y_A^{ik} &= \frac{1}{2} (Y^{ik} - Y^{ki}) \end{aligned}$$

(2.4.21) Insgesamt erhalten wir damit folgende eindeutige Zerlegung eines Tensors aus  $V_0 \otimes V_0$ , wobei wir den gesamten benötigten Formelapparat angeben:

$Y = \sum e_i \otimes_S e_k Y_S^{ik} + \sum e_i \otimes_A e_k Y_A^{ik}$	mit
$e_i \otimes_S e_k = \frac{1}{2} (e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) = e_k \otimes_S e_i$	und $Y_S^{ik} = \frac{1}{2} (Y^{ik} + Y^{ki}) = Y_S^{ki}$
$e_i \otimes_A e_k = \frac{1}{2} (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) = -e_k \otimes_A e_i$	und $Y_A^{ik} = \frac{1}{2} (Y^{ik} - Y^{ki}) = -Y_A^{ki}$

Beachten Sie, dass die doppelt auftretenden Faktoren  $\frac{1}{2}$  korrekt sind. Die Summe geht über alle Paare  $(i,k)$ , so dass für  $i \neq k$  jeder Summand doppelt auftritt. Das Paar  $(i,k)$  liefert denselben Beitrag wie  $(k,i)$ . Zwar ist  $e_i \otimes_A e_k = -e_k \otimes_A e_i$ , aber für den Kofaktor  $Y_A^{ik}$  gilt dasselbe:  $Y_A^{ki} = -Y_A^{ik}$ . Im Produkt  $e_i \otimes_A e_k Y_A^{ik}$  heben sich die beiden Vorzeichen heraus.

(2.4.22) Bei der Summe über alle  $i,k$  handelt es sich **nicht mehr um eine Basisdarstellung** des Tensors, sondern um eine durch ein Erzeugendensystem. Dafür sind die zugehörigen Komponenten nicht mehr unabhängig:  $Y_S^{ik} = Y_S^{ki}$  und  $Y_A^{ik} = -Y_A^{ki}$ .

- Beweisen Sie: Sei  $Y = \sum_{ik} (a_i \otimes b_k + b_k \otimes a_i) Y^{ik}$ . Dann gilt  $Y = \sum_{ik} (a_i \otimes b_k + b_k \otimes a_i) Y_S^{ik}$  und  $\sum_{ik} (a_i \otimes b_k + b_k \otimes a_i) Y_A^{ik} = 0$ . Folgern Sie, dass die Zerlegung aus (15) unabhängig von der Wahl der Basis ist.
- Wieso ist eine entsprechende Zerlegung für den Tensorraum  $V \otimes W$  bei  $W \neq V$  nicht möglich, dagegen für  $V_0^* \otimes V_0^*$  wieder problemlos?
- Verallgemeinern Sie die Konstruktion auf  $V_0 \otimes V_0 \otimes V_0$ . Zeigen Sie, dass die beiden entstehenden Teilräume noch nicht den gesamten Tensorraum aufspannen.

(2.4.23) Der Raum der Zweivektoren  $V \wedge V$  hat dieselbe Dimension wie der Raum der antisymmetrischen Tensoren  $V \otimes_A V$ . Besteht da ein Zusammenhang? Es liegt nahe, den basisbezogenen Isomorphismus  $e_i \wedge e_k \mapsto e_i \otimes_A e_k = \frac{1}{2} (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i)$  zu betrachten. Die übliche Rechnung zeigt, dass er unabhängig von der Basiswahl ist. Bei Rechnungen muss man nur immer sorgfältig darauf achten, ob man über die Basis  $e_i \wedge e_k$  mit  $k < i$  oder über das Erzeugendensystem aller  $e_i \wedge e_k$  summiert. Also: Antisymmetrische Tensoren etwa aus  $V_0 \otimes V_0$  lassen sich bei Bedarf als Elemente von  $V_0 \wedge V_0$  interpretieren und umgekehrt.

## 11.2.4c Anwendung der Zerlegung auf die totale Ableitung eines glatten Vektorfeldes

### Die Rotation (1)

(2.4.24) Ein glattes Vektorfeld  $\vec{F} : V_0 \rightarrow V_0$  sei gegeben. Zunächst darf  $\dim V_0 = n$  sein. Für das totale Differential haben wir bei **konstantem** Basisfeld  $e$  die Formel

$$d\vec{F} = D\vec{F}(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x} = \sum_{ik} \vec{e}_i \frac{\partial F^i}{\partial x^k} \Delta x^k.$$

Das gibt für die totale Ableitung folgende tensorielle Form:

$$D\vec{F}(\vec{x}) = \sum_{ik} \vec{e}_i \frac{\partial F^i}{\partial x^k} \otimes \vec{e}^k = \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^k \frac{\partial F^i}{\partial x^k}$$

$$D\vec{F}(\vec{x}) = \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^k J_{.k}^i \quad \text{mit} \quad J_{.k}^i = \frac{\partial F^i}{\partial x^k} = \partial_k F^i$$

Wandelt man in die Darstellung bezüglich der Basis  $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_k$  um, dann können wir das in einen invarianten symmetrischen und einen invarianten antisymmetrischen Teil zerlegen:

$$\begin{aligned} DF(\vec{x}) &= \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k J^{ik} = \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes_S \vec{e}_k J_S^{ik} + \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes_A \vec{e}_k J_A^{ik} \\ &= DF_S(\vec{x}) + DF_A(\vec{x}) \end{aligned}$$

□ Wieviel Komponenten hat der antisymmetrische Teil? Insbesondere in den Fällen  $n=2,3,4$ ?

(2.4.25) **Uns interessiert der antisymmetrische Teil**  $DF_A(\vec{x})$ . Welche geometrisch inhaltliche Interpretation hat  $DF_A(\vec{x}) = \sum_{ik} \vec{e}_i \otimes_A \vec{e}_k J_A^{ik}$ ? Sie ist ja invariant und sollte daher eine physikalische Größe beschreiben können.

(2.4.26) Das diskutieren wir nur für den Fall  $n=3$ , also  $V_0 = V_0^3$ . Dann gilt

$$DF_A(\vec{x}) = 2 \sum_{i < k} \vec{e}_i \otimes_A \vec{e}_k J_A^{ik} = 2(\vec{e}_1 \otimes_A \vec{e}_2) J_A^{12} + \vec{e}_1 \otimes_A \vec{e}_3 J_A^{13} + \vec{e}_2 \otimes_A \vec{e}_3 J_A^{23}$$

$$\begin{aligned} dF_A &= DF(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x} = \vec{e}_1 J_A^{12} \Delta x_2 - \vec{e}_2 J_A^{12} \Delta x_1 + \vec{e}_1 J_A^{13} \Delta x_3 - \vec{e}_3 J_A^{13} \Delta x_1 + \vec{e}_2 J_A^{23} \Delta x_3 - \vec{e}_3 J_A^{23} \Delta x_2 \\ &= \vec{e}_1 (J_A^{12} \Delta x_2 + J_A^{13} \Delta x_3) + \vec{e}_2 (J_A^{23} \Delta x_3 - J_A^{12} \Delta x_1) + \vec{e}_3 (-J_A^{13} \Delta x_1 - J_A^{23} \Delta x_2) \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir eine kartesische Basis (so dass die übliche Komponentendarstellung des Vektorproduktes gilt) und setzen

$$\boxed{J^1 = -J_A^{23} = \frac{1}{2}(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)} \quad \boxed{J^2 = -J_A^{31} = J_A^{13} = \frac{1}{2}(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)} \quad \boxed{J^3 = -J_A^{12} = \frac{1}{2}(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)}.$$

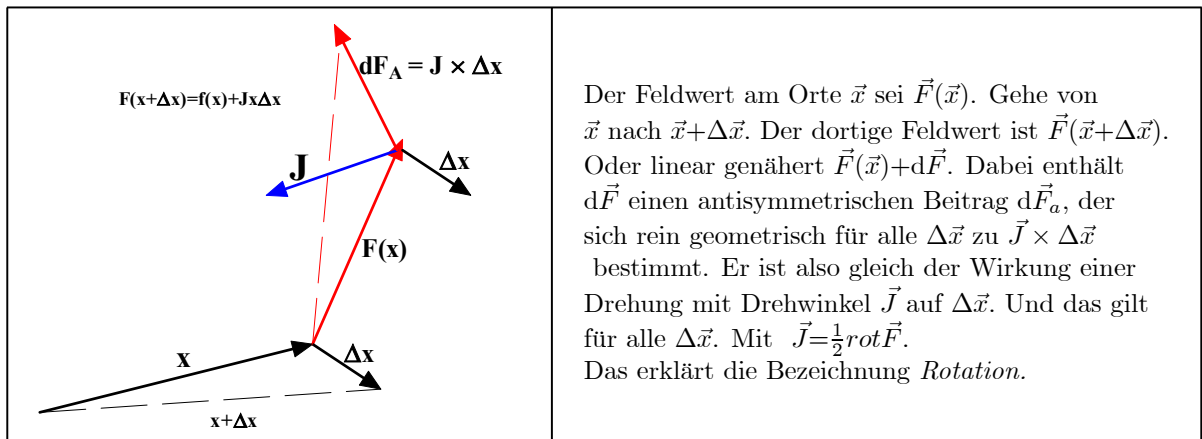
Also

$$dF_A = \vec{e}_1 (J^3 \Delta x_2 - J^2 \Delta x_3) + \vec{e}_2 (J^1 \Delta x_3 - J^3 \Delta x_1) + \vec{e}_3 (J^2 \Delta x_1 - J^1 \Delta x_2) = \vec{J} \times \Delta\vec{x}.$$

Einsetzen der Definition von  $J_A^{ik}$  gibt

$$\begin{aligned} -\vec{J} &= \vec{e}_1 J_A^{23} + \vec{e}_2 (-J_A^{13}) + \vec{e}_3 J_A^{12} \\ -\vec{J} &= \frac{1}{2} \vec{e}_1 (\partial_3 F_2 - \partial_2 F_3) - \frac{1}{2} \vec{e}_2 (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \frac{1}{2} \vec{e}_3 (\partial_2 F_1 - \partial_1 F_2) \\ &= -\frac{1}{2} \sum \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \partial_k F_l = -\frac{1}{2} \text{rot} \vec{F} \quad \boxed{\text{rot} \vec{F} = 2\vec{J}} \end{aligned}$$

**Fassen wir zusammen:** Der antisymmetrische Teil der totalen Ableitung eines glatten Vektorfeldes  $\vec{F} : V_0^3 \rightarrow V^3$  läßt sich tensoriell schreiben  $\boxed{DF_A = \sum \vec{a}_i \otimes \vec{a}_k J_A^{ki}}$  und ist nach der vorangegangenen Analyse invariant mit nur drei Freiheitsgraden. Der Beitrag  $dF_A$  dieses Teiles der totalen Ableitung zum totalen Differential ist gleich dem Beitrag einer Drehung zu  $d\vec{F}$ , nämlich gleich  $\vec{J} \times \Delta\vec{x}$  mit  $\vec{J} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{F}$ . D.h. die zugehörige Änderung des Feldes hat eine einfache geometrische Interpretation, wie in der Figur dargestellt.



Die Konstruktion wandelt das " $+\Delta\vec{x}$ " in der von-Klammer von  $\vec{F}$  um in eine geometrische elementare geometrische Bildung, für deren Ausführung man nur den in  $\Delta\vec{x}$  festen Vektor  $\text{rot}\vec{F}(\vec{x})$  und  $\Delta\vec{x}$  selbst benötigt.

In Kap 14 geben wir eine weitere inhaltlich Interpretation der Rotation mit Hilfe von Integralen.

(2.4.27) **Die Berechnung der Rotation** (mit Hilfe partieller Ableitungen) erfolgte hier für konstante Basisfelder. Die Ausdehnung auf nicht konstante besprechen wir weiter unten. Mit Hilfe der Eigenwerttheorie aus Kapitel 12 ist es leicht, auch dem symmetrischen Teil der Feldänderung eine geometrische Bedeutung zu geben.

**Zusammenfassung:** Der antisymmetrische Teil von  $D\vec{F}$  ordnet dem gegebenen Vektorfeld  $\vec{F}$  ein weiteres Vektorfeld  $\text{rot}\vec{F}$  zu, das wir in einem beliebigen kartesischen Rechtssystem mit Hilfe der partiellen Ableitungen bestimmen können.

Wie steht es mit den Argumenten in diesen Feldern? Es liegt ein Feld auf dem Konfigurationsraum vor, wir arbeiten ja noch nicht mit einer allgemeinen Parametrisierung. Überdies handelt es sich um einen Ableitungsoperator, so dass  $(\text{rot}\vec{F})(\vec{x})$  korrekt ist. Vielfach wird daraus das bequeme, aber u.U. formal problematische  $\text{rot}(\vec{F}(\vec{x}))$ . So benutzen wir unten die verbreitete, obwohl problematische Schreibweise  $\text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{x})$ .

Was ist, wenn  $\vec{F}$  mit Hilfe einer Parametrisierung gegeben ist?  $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}^P(\vec{\alpha}))$ . Dann schreibt man im Sinne der Konventionen für Abbildungen gerne  $\text{rot}\vec{F}(\vec{\alpha})$  anstelle des gemeinten, aber umständlichen  $\text{rot}\vec{F}(\vec{x}^P(\vec{\alpha}))$ .

(2.4.28) Zunächst ein **Beispiel einer direkten Berechnung einer Rotation:**

Sei  $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\omega} \times \vec{x}$  das Geschwindigkeitsfeld einer Starrkörperdrehung. Wir führen kartesische Koordinaten ein und finden

$$(\vec{f}(\vec{x}))^K = \vec{\omega}^K \times \vec{x}^K = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 z - w_3 y \\ w_3 x - w_1 z \\ w_1 y - w_2 x \end{pmatrix}$$

Das gibt eine (konstante) Funktionalmatrix, die bereits antisymmetrisch ist:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} = J_A$$



Mit den obigen Definitionen folgt für  $\vec{J}$  und für das totale Differential

$$\vec{J}^K = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad dF_A = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \begin{pmatrix} -w_3 \Delta x_2 + w_2 \Delta x_3 \\ w_3 \Delta x_1 - w_1 \Delta x_3 \\ -w_2 \Delta x_1 + w_1 \Delta x_3 \end{pmatrix} = \vec{J} \times \Delta \vec{x}.$$

Oder auch

$$\text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{x}) = 2\vec{\omega}.$$

(2.4.29) Es ist günstig und üblich, die Berechnung der Rotation in kartesischen Koordinaten mit Hilfe des in **kartesischen** Koordinaten invarianten Differentialoperators  $\vec{\nabla} = \Sigma \vec{e}_i \partial_i$  zu schreiben. (Gesprochen "Nabla", nach einem phönizischen Saiteninstrument.) Offensichtlich lassen sich die für konstante kartesische Rechtsbasen geltenden Formeln für  $\vec{J}$  wie folgt darstellen:

$$\text{rot} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \partial_k F_l(\vec{x}^K)$$

(2.4.30) Die Rotation ist eine Konstruktion, die aus einem gegebenem Vektorfeld ein weiteres Vektorfeld macht, das sich für jedes kartesische Rechtssystem in der hergeleiteten Weise mit Hilfe des Differentialoperators  $\vec{\nabla}$  berechnet.

$$\text{Vektorfeld } \vec{F} \quad \xrightarrow{\text{rot}} \quad \text{Vektorfeld } \text{rot} \vec{F}$$

(2.4.31) Für eine **Bestimmung der Rotation eines Feldes** haben wir wie üblich mehrere Optionen:

- Direkt über die äußere Ableitung und deren Antisymmetrisierung und das heißt letztlich über die Formel aus (2.4.29).
- Durch Anwendung zur Rotation gehöriger Ableitungsregeln auf das jeweilige Feld
- Mit Hilfe des Indexkalküls

**Der Beweis der Ableitungsregeln** erfolgt günstig mit Hilfe des Indexkalküls. Sie finden sich in den üblichen Formelsammlungen.

□ Sei  $s$  Skalarfeld und  $\vec{F}$  ein Vektorfeld. Welche Ableitungsregel erwarten Sie für  $\text{rot}(s\vec{F})$ ?

Nochmals eine **Bemerkung zur Bezeichnung**: Im Zusammenhang mit den drei Operatoren der Vektoranalysis Gradient, Rotation und Divergenz sind die Konventionen aus Kap. 11.1.2 zur Abbildungsbezeichnung nützlich und ihre Anwendung verbreitet. Der jeweilige Kontext entscheidet, was mit  $\text{rot} \vec{F}(\vec{x})$  gemeint ist:  $(\vec{x})$  oder  $(\vec{x}^K)$  oder oder gar  $(\vec{x}^P(\vec{\alpha}))$ .

(2.4.32) Mit Hilfe des  $\vec{\nabla}$ -Operators und des Indexkalküls lassen sich die Ableitungsregeln für die Rotation routinemäßig herleiten. Rechnen wir zunächst obiges Beispiel (mit konstantem  $\vec{\omega}$ )

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{x}) &= \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \partial_k (\vec{\omega} \times \vec{x})_l = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{lrs} \partial_k \omega_r x_s = \Sigma \vec{e}_i (\delta_{ir} \delta_{ks} - \delta_{is} \delta_{rk}) \omega_r \partial_k x_s \\ &= \Sigma \vec{e}_i (\delta_{ir} \delta_{ks} - \delta_{is} \delta_{rk}) \omega_r \delta_{ks} = \Sigma \vec{e}_i \omega_i 3 - \Sigma \vec{e}_i \omega_i = 2\vec{\omega}. \end{aligned}$$

Also das alte Resultat. (Benutzt wurde  $\Sigma_l \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{lrs} = \delta_{ir} \delta_{ks} - \delta_{is} \delta_{rk}$  und  $\Sigma_k \delta_{kk} = 3$  sowie die übliche Regel  $\Sigma_j \delta_{rj} M_{js} = M_{rs}$ .)

(2.4.32a) Und jetzt einige Beispiele für die Herleitung von Ableitungsregeln. Dabei sei  $e$  immer kartesische Rechtsbasis!

- $s$  Skalarfeld und  $\vec{F}$  Vektorfeld. Zu berechnen ist  $\text{rot}(s\vec{F})$ .

$$\begin{aligned} \text{rot}(s\vec{F}) &= \vec{\nabla} \times (s\vec{F}) = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \partial_k (sF_l) = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} ((\partial_k s) F_l + s \partial_k F_l) \\ &\quad \text{(Produktregel!)} \\ &= \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} (\partial_k s) F_l + s \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ikl} \partial_k F_l = (\text{grad} s) \times \vec{F} + s \text{rot} \vec{F} \end{aligned}$$

$$\text{rot}(s\vec{F})(\vec{x}) = (\text{grad} s)(\vec{x}) \times \vec{F}(\vec{x}) + s(\vec{x}) (\text{rot} \vec{F})(\vec{x})$$

Haben Sie das oben so erraten?

- $\vec{F}$  und  $\vec{G}$  zwei Vektorfelder. Zu berechnen  $\text{rot}(\vec{F} \times \vec{G})(\vec{x})$ .

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) &= \vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ijkl} \partial_k (\vec{F} \times \vec{G})_l = \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ijkl} \partial_k \varepsilon_{lrs} F_r G_s \\
&= \Sigma \vec{e}_i \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{lrs} ((\partial_k F_r) G_s + F_r (\partial_k G_s)) = \Sigma \vec{e}_i (\delta_{ir} \delta_{ks} - \delta_{is} \delta_{kr}) ((\partial_k F_r) G_s + F_r (\partial_k G_s)) \\
&= \Sigma \vec{e}_i ((\partial_k F_i) G_k + F_i (\partial_k G_k)) - \Sigma \vec{e}_i ((\partial_k F_k) G_i - F_k (\partial_k G_i)) \\
&= (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} + \vec{F} (\text{div} \vec{G}) - \vec{G} (\text{div} \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}
\end{aligned}$$

- Gehen Sie in einer Formelsammlung die Ableitungsregeln für rot durch. Können Sie die gezielt "erraten"? Beweisen Sie einige weitere oder alle.

## 11.2.4d Die äußere Ableitung in der äußeren Algebra Rotation (2)

(2.4.33) Wir gehen jetzt der Frage nach, wie man die Rotation erhält, wenn das Basisfeld nicht konstant ist. Und allgemeiner, wie der antisymmetrische Teil der totalen Ableitung für  $\dim V_0 \neq 3$  zu interpretieren ist. Bei der Definition der Rotation über das Kreuzprodukt ging die Dreidimensionalität ja entscheidend ein.

(2.4.34) Oben haben wir gesehen, dass man allgemein die antisymmetrischen Tensoren aus  $V \otimes V$  mit dem Raum der Zweivektoren identifizieren kann:  $a \wedge b \mapsto a \otimes_A b$ . Für den antisymmetrischen Teil der äußeren Ableitung gibt das die Darstellung

$$\begin{aligned}
DF_A(x) &= \Sigma_{ik} a^i \otimes_A a^k J_{ik}^A = 2 \Sigma_{i < k} a_i \otimes_A a_k J_{ik}^A \\
\text{wobei } J_{ik}^A &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_i}{\partial \alpha^k} - \frac{\partial F_k}{\partial \alpha^i} \right) = \frac{1}{2} (\partial_k F_i - \partial_i F_k)
\end{aligned}$$

Das Feld muss hier bezüglich der reziproken Basis dargestellt werden -  $\boxed{F = \Sigma a^i F_i}$  - um die für unsere Konstruktion erforderlichen (dopelt kovarianten) Matrixelemente  $J_{ik}$  zu erhalten. ( $V_0 \otimes V_0^*$  läßt sich nicht antisymmetrisieren!) Die partiellen Ableitungen  $\partial$  verlangen einen unteren Index, nach dem sich der Rest zu richten hat. Denken Sie daran, dass A hier als Index für *antisymmetrisch* steht, nicht für *alt*.

(2.4.35) Übergang zur äußeren Algebra gibt die Darstellung

$$DF_A(\vec{x}) = 2 \Sigma_{i < k} a^i \wedge a^k J_{ik}^A = \Sigma_{i,k} a^i \wedge a^k J_{ik}^A.$$

(14) Das ist das, was wir oben für konstante Basisfelder behandelt haben. Jetzt sei  $\vec{\alpha} \mapsto \vec{x}_P(\vec{\alpha})$  eine Konfigurationsraumparametrisierung und  $\vec{\partial}$  das zugehörige Koordinatenbasisfeld. Die Basisdarstellungen laufen über dieses Feld.

(2.4.36) Dazu bilden wir den (auf den ersten Blick sonderbar wirkenden) Differentialoperator

$$\boxed{\vec{\nabla} = \Sigma \vec{\partial}^i \partial_i = \Sigma \vec{\partial}^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i}},$$

den wir im Sinne der äußeren Algebra als formales **1-Vektorfeld** interpretieren.  $\dim V_0 = n$  ist nicht auf 3 beschränkt. Die Ableitung soll wie üblich auf alles wirken, das rechts von diesem Operator steht, es sei denn, das würde durch Beklammerung unterbunden.

- Was ergibt sich im Falle eines kartesischen Basisfeldes für  $\vec{\nabla}$ ?

(2.4.37) Sei  $s$  ein glattes Skalarfeld, also im Sinne der äußeren Algebra ein Nullvektorfeld. Dann ist  $\vec{\nabla} \wedge s$  ein 1-Vektorfeld mit  $\vec{\nabla} \wedge s = \Sigma \vec{\partial}^i (\partial_i s)$ , d.h. wir erhalten den Gradienten gleich in seiner allgemeinsten Darstellung (1.6.42).

(2.4.38) Weiter sei  $\vec{F} = \Sigma \vec{\partial}^r F_r$  ein 1-Vektorfeld erneut in der Basisdarstellung mit **kovarianten** Komponenten. Jetzt bilden wir das Dachprodukt

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge \vec{F} &= \left( \Sigma \vec{\partial}^i \partial_i \right) \wedge \Sigma \vec{\partial}^r F_r = \Sigma \vec{\partial}^i \wedge (\partial_i \vec{\partial}^r) F_r + \Sigma \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r (\partial_i F_r) \\
&= \Sigma \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^m \Gamma_{im}^r F_r + \Sigma \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r (\partial_i F_r) \\
&= 0 + \Sigma_{r > i} \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r (\partial_i F_r - \partial_r F_i) = 2 \Sigma_{r > i} \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r \frac{1}{2} (\partial_i F_r - \partial_r F_i) \\
&= -\Sigma_{ir} \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r J_{ir}^A = -D\vec{F}_A \quad \text{wie oben eingeführt.}
\end{aligned}$$

Der über die Produktregel folgende Beitrag nach (1.4.18)

$$\Sigma \vec{\partial}^i \wedge (\partial_i \vec{\partial}^r) = \Sigma \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^m \Gamma_{im}^r = \Sigma_{m>i} \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^m (\Gamma_{im}^r - \Gamma_{mi}^r)$$

ergibt Null wegen der in (1.4.15) bewiesenen Symmetrie der  $\Gamma$ -s.

(2.4.39) Und das heißt, dass die **hergeleiteten Formeln für den antisymmetrischen Teil des totalen Differentials auch für nicht konstante Koordinatenbasisfelder gelten**, sofern nur die angegebene Indexstellung eingehalten wird. Und überdies gilt das alles für jede endliche Dimension. Anwenden von  $\vec{\nabla}$  auf ein 1-Vektorfeld ergibt ein Zweivektorfeld, das in der beschriebenen Weise den antisymmetrischen Teil des totalen Differentials bestimmt. Aber bereits für  $n=4$  läßt sich  $\vec{\nabla} \wedge F$  nicht wieder als Vektorfeld interpretieren!

(2.4.40) Was ergibt sich im Falle  $n=\dim V_0 = 3$ ? In diesem Fall können wir wie folgt weiterrechnen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} &= \Sigma_{r>i} \vec{\partial}^i \wedge \vec{\partial}^r (\partial_i F_r - \partial_r F_i) \\ &= \vec{\partial}^1 \wedge \vec{\partial}^2 \left( \frac{\partial F_2}{\partial \alpha^1} - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha^2} \right) + \vec{\partial}^1 \wedge \vec{\partial}^3 \left( \frac{\partial F_3}{\partial \alpha^1} - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha^3} \right) + \vec{\partial}^2 \wedge \vec{\partial}^3 \left( \frac{\partial F_3}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial F_2}{\partial \alpha^3} \right) \end{aligned}$$

Mit Hilfe des \*-Operators aus Kap. 9.2.11 wird daraus wieder ein 1-Vektorfeld, das unsere oben in (2.4.26) für kartesische Koordinaten eingeführte Rotation ist!

$$\boxed{* (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) (\vec{\alpha}) = \text{rot} \vec{F} (\vec{x}(\vec{\alpha}))}$$

Jetzt allerdings haben wir die Koordinatendarstellung für beliebige Koordinatenbasisfelder.

(2.4.41) **Beispiel in Zylinderkoordinaten.** Wir haben  $\vec{\partial}_\varphi = r \vec{e}_\varphi$ . Also  $\vec{\partial}^\varphi = \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r^2} \vec{\partial}_\varphi$ . Sei nun  $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{\omega} \times \vec{x} = \vec{\partial}_\varphi(r, \varphi, z) \omega = \vec{\partial}^\varphi(r, \varphi, z) r^2 \omega$ . Oder  $\vec{F}^Z(r, \varphi, z) = {}^t(0, r^2 \omega, 0)$ . Das gibt nur eine nicht verschwindende partielle Ableitung  $\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} = 2r\omega$ . Somit

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F}(r, \varphi, z) = \vec{\partial}^r \wedge \vec{\partial}^\varphi (2r\omega) = +\vec{e}_r \wedge \left( \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \right) 2r\omega = 2\vec{\omega} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\text{rot} \vec{F}(\vec{x}) = 2\vec{\omega}}$$

## 11.2.4e Die Divergenz

(2.4.42) Sei jetzt  $H$  ein  $(n-1)$ -Vektorfeld. Also  $H = \Sigma_{k=1}^n \vec{\partial}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\vec{\partial}^k} \wedge \dots \wedge \vec{\partial}^n H_k$ . Erneut bilden wir  $\vec{\nabla} \wedge H$ . Das ist dann ein  $n$ -Vektorfeld, proportional zu  $\vec{\partial}^n \wedge \dots \wedge \vec{\partial}^n$ . Hierfür finden wir sofort:

$$\vec{\nabla} \wedge H = \vec{\partial}^n \wedge \dots \wedge \vec{\partial}^n \left( \Sigma_{k=1}^n (-1)^{k+1} \partial_k H_k \right).$$

Wie in (2.4.38) fallen alle Beiträge aus Ableitungen der  $\vec{\partial}^i$  heraus.

(2.4.42) Wir beschränken uns auf den Fall  $n=3$ . Dann folgt mit  $H = \vec{\partial}_1 \wedge \vec{\partial}_2 H_{12} + \vec{\partial}_1 \wedge \vec{\partial}_3 H_{13} + \vec{\partial}_2 \wedge \vec{\partial}_3 H_{23}$  sofort

$$\vec{\nabla} \wedge H = \vec{\partial}^1 \wedge \vec{\partial}^2 \wedge \vec{\partial}^3 (\partial_3 H_{12} - \partial_2 H_{13} + \partial_1 H_{23})$$

(2.4.43) Ist die Basis ein konstantes kartesisches Basisfeld, dann setzen wir wie üblich

$$H_1 = H_{23} \quad H_2 = -H_{13} \quad \text{und} \quad H_3 = H_{12}.$$

$$\boxed{\vec{H} = *H}$$

Also

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge H &= \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 (\Sigma \partial_i H_i) = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \cdot \text{div} \vec{H}. \\ \text{div} \vec{H} &= \Sigma \partial_i H_i \end{aligned}$$

Oder auch

$$\text{div} \vec{H} = * \vec{\nabla} \wedge (* \vec{H}).$$

So konstruiert ist die Divergenz ein Operator, der aus dem Vektorfeld  $\vec{H}$  ein Skalarfeld  $\text{div}\vec{v}$  macht.

$$\vec{v} \xrightarrow{\text{div}} \text{div}\vec{v}$$

(2.4.44) Auf die Frage nach der Berechnung der Divergenz in allgemeinen Koordinaten werden wir später in Kap 14 zurückkommen. Im Augenblick behandeln wir unten die Frage der inhaltlichen Interpretation der Divergenz.

- Wir haben die Formel  $\text{div}\vec{H} = \Sigma\partial_i H_i$  für eine kartesische Darstellung  $\vec{H} = \Sigma\vec{e}_i H_i$  hergeleitet. Also in tensorieller Schreibweise  $\vec{H} = \Sigma\vec{e}_i H^i$ . Jetzt sei  $\vec{a}$  ein konstantes, aber sonst beliebiges Basisfeld mit  $\vec{H} = \Sigma\vec{a}_i H^i$ . Zeigen Sie, dass dann immer noch gilt  $\text{div}\vec{H} = \Sigma\partial_i H^i$ . Was ist dabei unter  $\partial_i$  zu verstehen?
- Leiten Sie durch Berechnung von  $\vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b})$  eine Formel für  $\Sigma\vec{e}_i a_k \partial_i b_k$  her. und bestimmen Sie damit wiederum eine Ableitungsformel für  $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(2.4.45) Beispiel: Wir berechnen die Divergenz von  $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}r^{-3-\alpha}$  einmal kartesisch und einmal polar (für den  $V_0^3$ ).

- Beweisen Sie mit Indexrechnung die Ableitungsregel  $\text{div}(s\vec{v}) = s\text{div}\vec{v} + \text{grad}s \cdot \vec{v}$  und  $\text{div}(\vec{x}) = 3$ .  
Mit den Resultaten der Frage folgt die Divergenz auf die übliche Weise zu:

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{F}(\vec{x}) &= 3r^{-3-\alpha} + \vec{x} \cdot \left( \frac{\vec{x}}{r} (-3-\alpha)r^{-4-\alpha} \right) = r^{-3-\alpha} [3 - 3 - \alpha] = -\alpha r^{-3-\alpha} \\ \text{div}\vec{F}(\vec{x}) &= -\alpha r^{-3-\alpha} \quad \text{für } \vec{x} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Insbesondere verschwindet für  $\alpha = 0$  die Divergenz außerhalb des Ursprungs.

Polar haben wir die Basen

$$\vec{\partial}_r = \vec{e}_r = \vec{\partial}^r \quad \vec{\partial}_\theta = r\vec{e}_\theta \quad \vec{\partial}^\theta = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \quad \vec{\partial}_\varphi = r \sin\theta \vec{e}_\varphi \quad \vec{\partial}^\varphi = \frac{1}{r \sin\theta} \vec{e}_\varphi$$

Damit folgt für das Feld und dann die Divergenz

$$\begin{aligned} \vec{F}^P(r, \theta, \varphi) &= \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi r^{-2-\alpha} = \vec{\partial}^\theta \wedge \vec{\partial}^\varphi (r^2 \sin\theta) \frac{1}{r^{2+\alpha}} = \vec{\partial}^\theta \wedge \vec{\partial}^\varphi r^{-\alpha} \sin\theta. \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{F}^P &= \vec{\partial}^r \wedge \vec{\partial}^\theta \wedge \vec{\partial}^\varphi (-\alpha) r^{-\alpha-1} \sin\theta = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi \frac{1}{r^2 \sin\theta} (-\alpha) r^{-\alpha-1} \sin\theta \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{F}^P &= \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi \boxed{(-\alpha)r^{-\alpha-3}} \end{aligned}$$

Man kann hier nicht sagen, dass eine Rechnung deutlich kürzer als die andere wäre. In der Regel wird man die kartesische Rechnung bevorzugen. Aber das Beispiel zeigt, wie man dasselbe Resultat für ein beliebiges Koordinatenbasisfeld erhält.

- Was bedeutet das Resultat  $\text{div}(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^{3+\alpha}}) = (-\alpha)|\vec{x}|^{-\alpha-3}$  im Rahmen der Maxwell'schen Gleichungen für die Elektrodynamik? Einheitenkontrolle!

Beachten Sie: Für  $\alpha = 0$  erhält man außerhalb des Ursprungs eine verschwindende Divergenz! Vergleichen Sie das mit der in Kap.6.1.1c diskutierten Eigenschaft des Coulombfeldes! Was bedeutet eine nicht verschwindende Divergenz ( $\alpha \neq 0$ ) für das dort besprochene Modell? (Das  $\alpha$  aus Kap.6,1,1c hat nichts mit unserem jetzigen  $\alpha$  zu tun!)

### Die inhaltliche Interpretation der Divergenz

(2.4.46) Sei dazu  $(V, \vec{x} \mapsto \vec{v}(\vec{x}), V)$  ein Vektorfeld, das wir als momentanes (stationäres) **Geschwindigkeitsfeld** interpretieren. Also wieder das Modell aus Kap.6.1.1c. Darin spezifizieren wir zur Zeit  $t=0$  einen kleinen Spat mit Eckpunkten  $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ . Diese Punkte sollen von der Strömung mitgenommen werden. Die Kantenvektoren sind  $\vec{k}_i = \vec{x}_i - \vec{x}_0$ . Nach einer Zeit  $\Delta t$  haben die Eckpunkte die Lage  $\vec{x}_i(0+\Delta t)$ , wenn  $t \mapsto \vec{x}_i(t)$  die Lösung der Differentialgleichung  $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}(\vec{x}(t))$  mit Anfangswert  $\vec{x}_i(0) = \vec{x}_i$  ist. In Tangentenapproximation

erhalten wir für die neuen, von der Strömung mitgeführten Kantenvektoren  $\vec{k}_i(0 + \Delta t)$  :

$$\begin{aligned}\vec{k}_i(\Delta t) &= \vec{x}_i(\Delta t) - \vec{x}_0(\Delta t) \\ &= (\vec{x}_i - \vec{x}_0) + (\vec{v}(\vec{x}_i) - \vec{v}(\vec{x}_0))\Delta t + \dots \\ &= \vec{k}_i + (\vec{v}(\vec{x}_0 + \vec{k}_i) - \vec{v}(\vec{x}_0))\Delta t + \dots \\ &= \vec{k}_i + D\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \vec{k}_i \Delta t + \dots \\ &= \vec{k}_i + \sum \vec{k}_j (\vec{k}^j \cdot D\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \vec{k}_i) \Delta t\end{aligned}$$

(2.4.47) Der Spat besitzt ein zeitabhängiges Volumen  $Vol(\Delta t)$ . Uns interessiert die Volumenänderung mit der Zeit, also  $Vol(\Delta t) - Vol(0)$ . Eine zur Beschreibung geeignete Größe ist die Volumenänderungsgeschwindigkeit, also die Größe  $\frac{Vol(\Delta t) - Vol(0)}{\Delta t}$ . Und schließlich, um die Volumengröße zu eliminieren, bilden wir ( $Vol(0) \neq 0$ ) die relative momentane Volumensänderungsgeschwindigkeit, also  $\boxed{\frac{Vol(\Delta t) - Vol(0)}{Vol(0) \cdot \Delta t}}$ . Diese Größe möchten wir bestimmen.

(2.4.48) Dazu berechnen wir das Dachprodukt der Kantenvektoren  $\vec{k}_1(\Delta t) \wedge \dots \wedge \vec{k}_n(\Delta t)$  und entwickeln nach Potenzen von  $\Delta t$ .

$$\vec{k}_1(\Delta t) \wedge \vec{k}_2(\Delta t) \wedge \dots \wedge \vec{k}_n(\Delta t) = \vec{k}_1 \wedge \dots \wedge \vec{k}_n + \Delta t \vec{k}_1 \wedge \dots \wedge \vec{k}_n \left( \sum_{j=1}^n \vec{k}^j \cdot D\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \vec{k}_j \right) + \dots$$

Nach den Regeln der äußeren Algebra ist  $\vec{k}_1(\Delta t) \wedge \dots \wedge \vec{k}_n(\Delta t) = vol(\Delta t) \vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{e}_n$  wobei  $e$  eine euklidische Basis ist. Das gibt

$$\frac{Vol(\Delta t) - Vol(0)}{\Delta t \cdot Vol(0)} = \sum_{j=1}^n \vec{k}^j \cdot D\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \vec{k}_j + \dots$$

Nun ist für ein konstantes Basisfeld  $\vec{k}_i$  aber  $D\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{k}_j = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} = \sum \vec{k}_j \frac{\partial v^j}{\partial x^i}$  und daher  $\vec{k}^j \cdot D\vec{v}(\vec{x}_0) \cdot \vec{k}_j = \frac{\partial v^j}{\partial x^j}$ . Damit folgt:

$$\boxed{\frac{Vol(\Delta t) - Vol(0)}{\Delta t \cdot Vol(0)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v^j}{\partial x^j} = \sum J^j_j = \text{Spur}(D\vec{v}) = \text{div}(\vec{v})}$$

(2.4.49) Ergebnis: Die Divergenz eines Vektorfeldes ist gleich der *relativen Änderungsgeschwindigkeit des Volumens von kleinen von der Strömung mitgenommenen Körpern*. Das ist eine charakteristische Größe des Feldes, die in Tangentenapproximation nicht vom Spat abhängt, sondern eine Funktion des Ortes  $\vec{x}$  ist.

Auch für die Divergenz geben wir in Kap. 14 eine weitere inhaltliche Interpretation mit Hilfe eines Integralsatzes.

(2.4.49) **Beispiel:** Wir betrachten die lineare Differentialgleichung  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$  und schreiben sie in der Phasenraumform:

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(x) \\ -p(x)v(x) - q(x)y(x) \end{pmatrix} \quad \text{Feld:} \quad \vec{F}(y, v) = \begin{pmatrix} v \\ -p(x)v - q(x)y \end{pmatrix}$$

Das ergibt die Divergenz  $\text{div} \vec{F}(x, v) = -p(x)$ . Und damit  $\frac{d}{dt} \frac{Vol(x(t))}{Vol(x(t))} = -p(x(t))$ . Das ist eine einfache separable Differentialgleichung mit der Lösung

$$Vol(t) = Vol(0) e^{-\int_0^t ds p(s)}$$

Nimmt man andererseits an, man hätte zwei unabhängige Lösungen  $y_1$  und  $y_2$ , dann kann man die zugehörigen Phasenraumkurven  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$  bilden. Jetzt beschreibt  $t \mapsto \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = W(t)$  den Flächeninhalt  $F(t)$  des von den beiden Vektoren im Phasenraum aufgespannten Parallelogramms in zeitlicher Abhängigkeit! Man zeigt leicht, dass  $W(t)$  die Differentialgleichung  $\dot{W}(t) = -p(t)W(t)$  erfüllt, also dieselbe Differentialgleichung, die aus der Divergenz folgte. Oder auch:  $-p(t)$  ist in diesem Fall gleich der relativen Flächenänderungsgeschwindigkeit von im Phasenraum (auf den Phasenraumkurven) mitbewegten Figuren.

Zur Herleitung der Formel:  $W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ . Bilde  $\frac{d}{dt} W(t)$  und beachte, dass  $y_1$  und  $y_2$  Lösungen der Differentialgleichung sind. Damit die 2. Ableitungen in  $\frac{d}{dt} W(t)$  eliminieren.

□ Was liefert das hergeleitete allgemeine Resultat für den Spezialfall des harmonischen Oszillators?

## 11.2.5 Isotrope Tensoren und Hooksches Gesetz

(2.5.1) Auf unserer Suche nach invarianten Teilmengen tensorieller Räume kommen wir zu einem besonders einfachem Fall:

Tensoren, die unter den Operationen der Transformationsgruppe stationär sind, also eine **einelementige Bahn** haben, heißen *isotrope Tensoren*. Sie sind für den Bau von Formeln, mit deren Hilfe man Gesetzmäßigkeiten beschreiben will, dann von besonderer Bedeutung, wenn man Argumente dafür hat, dass Beschreibungsgrößen nicht von der Wahl des Beobachters abhängen dürfen. **Bei isotropen Tensoren kann man die neuen Komponenten nicht nur wie sonst mit Hilfe der alten ausrechnen, sondern die neuen sind einfach gleich den alten!**

(2.5.2) Oder vom aktiven Standpunkt aus: Man transformiert das System und hat Argumente, dass gewisse Beobachtungsergebnisse sich unter dieser Transformation nicht ändern sollten. Für einkomponentige Resultate, also für Skalare im Sinne des Physikers, ist das klar. Aber wie steht es, wenn die Beobachtungsergebnisse zu einem mehrkomponentigen Tupel gehören? Sagen wir, wenn es um die Komponentenbeschreibung einer linearen Abbildung geht?

Konkret: Wir betrachten einen elastischen Körper im deformierten Zustand an einem bestimmten Punkt  $x$ . Wir beschreiben den Zustand mit Hilfe der Komponenten zweier Tensoren, des Spannungstensors  $\sigma(x)$  und des Deformationstensors  $\varepsilon(x)$ . Zur Beschreibung wählen wir eine Orthonormalbasis  $e_i$  des  $V_0^3$ . Dann bilden die Komponenten je eine symmetrische Matrix und  $(\sigma_e^{ik})$  und  $(\varepsilon_e^{ik})$ . Diese Matrizen repräsentieren die (etwas aufwendig codierten) Beobachtungsdaten des Systemzustandes. Zwischen diesen Daten sollte (bei ausreichender Idealisierung) eine deterministische Beziehung bestehen: Die Spannungen legen die Deformationen fest oder umgekehrt. Für kleine Deformationen sollte Tangentenapproximation ausreichen. Der konstante Term ist Null, da für die üblichen Systeme ohne Spannung keine Deformation vorhanden ist. Also sollte  $\sigma$  linear von  $\varepsilon$  abhängen. **Das ist das Hooksche Gesetz!** Erfahrungsgemäß ist diese Approximation über einen größeren praktisch relevanten Bereich gültig.

(2.5.3) Für die Komponenten bedeutet das  $\sigma_e^{ik}(x) = \sum H_{e..rs}^{ik} \varepsilon_e^{rs}(x)$ . Dabei ist  $H$  die beschreibende Matrix (bezüglich der gewählten Basis  $e$ ). Die Indexmenge besteht aus den Paaren  $(ik)$ .  $e$  erinnert an die gewählte kartesische Basis. Mit Hilfe der Tensorrechnung erhalten wir für  $H$  sofort die folgende absolute Darstellung

$$H = \sum e_i \otimes e_k H_{e..rs}^{ik} \otimes e^{*r} \otimes e^{*s}.$$

Dabei haben wir die Komponenten an die Stelle gebracht, die die zu kontrahierenden Basisvektoren von den nicht zu kontrahierenden trennt.

(2.5.4) Die Anzahl der Komponenten von  $H$  ist 36. Denn es gibt  $3^4 = 81$  mögliche Indexkombinationen. Aber  $\varepsilon$  und  $\sigma$  sind beide symmetrisch. Beachtet man das, bleiben 36 unabhängig Komponenten. (Eine  $6 \times 6$ -Matrix)

(2.5.5) **Und jetzt das entscheidende Argument:** Im undeforinierten elastischen Material gebe es keine Vorzugsrichtung. Alle Richtungen seien gleichwertig, der Physiker sagt dazu gerne *isotrop*. Beachten Sie: in einem Kristall ist das sicher nicht der Fall. Wenn wir jetzt einen Basiswechsel vornehmen und aktiv oder passiv transformieren, dann sollten sich die Komponenten von  $H$  nicht ändern, zumindest nicht so, dass man die beiden Systeme physikalisch unterscheiden könnte. Könnte man das doch, könnte man darüber besonders ausgezeichnete Richtungen konstruieren.

Also sollte  $H$  bezüglich der neuen Basis  $f$  dieselben Komponenten haben wie bezüglich der alten Basis  $e$ ! Oder  $H_{e..rs}^{ik} = H_{f..rs}^{ik}$  Und das heißt, dass  $H$  im beschriebenen Sinne ein (für orthogonale Transformationen) isotroper Tensor sein sollte! Wir lassen daher den Index  $e$  fort.

(2.5.6) Damit stehen wir vor einem mathematischen Problem: Welche  $SO(3)$ -isotrope Tensoren gibt es überhaupt? Die Antwort darauf wird eine bemerkenswerte Vereinfachung unserer Beschreibung bringen: Die

Komponenten von  $H$  beschreiben offensichtlich die Materialeigenschaften des betrachteten Körpers (in Hinblick auf die Elastizität): Welche Deformation gehört zu einer gegebenen Spannung? Nach obiger Auszählung könnte es 36 derartige Konstanten (für jedes Material) geben. Das Isotropieargument reduziert diese Zahl auf 2. Und das Vorkommen von zwei Materialkonstanten beobachtet man tatsächlich, ebenso dass diese zur Beschreibung ausreichen. .

## 11.2.5a Die Konstruktion $SO(3)$ -isotroper Tensoren

(2.5.7) Wir betrachten nur  $G = SO(3)$ . Dann ist kovariant=kontravariant. Alle zulässigen Basen sind Orthonormalbasen. Wir verwenden Multiindexschreibweise. Sei  $T$  unser Tensor. von  $e$  nach  $f$  und  $R = R_g$  die zugehörige Transformationsmatrix. Ist  $T$  isotrop, dann hat man  $T = g \star T = \Sigma f_J T_J$  mit denselben Komponenten  $RT = T$ . Daraus folgt aber  $T = \frac{1}{2}(T + g \star T)$ .

(2.5.8) Das muss für jedes  $g \in SO(3)$  gelten. Sei  $e$  alte Basis von  $V_0$ . Ersetzen wir jetzt eine gerade Zahl der  $e_i$  durch ihr Negatives und lassen den Rest fest, so ergibt das eine spezielle orthogonale Transformation  $h$ . Diese Transformation können wir leicht auf jedes Tensorbasiselement  $e_J$  ausdehnen. Man erhält immer nur einen Vorfaktor  $\varepsilon(h)$ . Also  $h \star e_J = \varepsilon(h)e_J$ . Enthält  $e_J$  nun eine ungerade Zahl der invertierten Achsen, ist  $\varepsilon_J(h) = -1$ , sonst  $+1$ . Damit gehen wir in die Basisdarstellung der Gleichung  $T = \frac{1}{2}(T + h \star T)$  ein und finden für unseren angenommenen isotropen Tensor  $T$  gerade  $\Sigma e_J T_J = \frac{1}{2} \Sigma e_J (1 + \varepsilon_J(h)) T_J$ . Koeffizientenvergleich gibt: **Für alle  $J$  mit  $\varepsilon_J = -1$  ist notwendig  $T_J = 0$ .** Dabei darf  $h$  geeignet gewählt werden: Suche ein  $h$ , das dies leistet!

(2.5.9) Die Ausführung ist einfach. Angenommen wir betrachten  $e_J = e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_2$ . Invertiert werden sollen beispielsweise  $e_1$  und  $e_2$ . Also  $f_1 = -e_1$  und  $f_2 = -e_2$ . Damit folgt  $f_J = (-1)^3 e_J$ . Und das heißt  $T_J = 0$  für einen isotropen Tensor.

Das Argument ist offenbar sogar unabhängig von  $\dim V_0 = n$ , so dass wir folgern dürfen:

**Folgerung.** Es sei  $T = \Sigma e_J T_J$  ein  $SO(n)$ -isotroper Tensor, wobei  $e$  Orthonormalbasis ist. Sei  $h$  ein Gruppenelement, das eine gerade Zahl der  $e_i$  invertiert, den Rest festläßt. Dann sind alle Komponenten  $T_J$  Null, für die  $e_J$  eine ungerade Zahl der invertierten Basisvektoren enthält.

Ersetzt man  $SO(n)$  durch  $O(n)$ , dann darf man auch eine ungerade Zahl von Basisvektoren invertieren

(2.5.10) 1. Beispiel: Sei  $T \in V_0 \otimes V_0$  und  $n > 2$ . Dann ist  $T_{ij} = 0$  für alle  $T_{ij}$  mit  $i \neq j$ . Denn zu  $i, j$  gibt es immer noch einen dritten Indexwert  $k$  mit  $k \neq i, j$ . Invertiere  $e_i$  und  $e_k$ . **Ungleich Null können höchstens noch die Diagonalelemente  $T_{ii}$  sein.**

2. Beispiel:  $T \in V_0 \otimes V_0 \otimes V_0$  und wieder  $n > 2$ . Dann folgt sofort analog  $T_{iii} = 0$  und ebenso  $T_{iik} = 0$ . Ungleich Null sind höchstens  $T_{ijk}$  mit drei verschiedenen Indizes.

3. Beispiel:  $T \in V_0 \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V_0$  und  $n=3$ . Der Tensor  $H$  des Hookschen Gesetzes fällt hierunter. Welche Komponenten verschwinden? Falls  $J$  drei verschiedene Indexwerte enthält, sagen wir  $ijkk$ , dann invertieren wir  $i$  und  $k$ . Wenn  $J$  zwei verschiedene Werte enthält davon einen nur einmal, etwa  $ikkk$ , dann invertiert man  $i$  und  $j$ . Es bleiben nur die Fälle, in denen **mindestens zwei Indexpaare denselben Wert haben**. Also für  $T_{ijkl}$  die Kombinationen  $\delta_{ij}\delta_{kl}$  und  $\delta_{ik}\delta_{jl}$  und  $\delta_{il}\delta_{jk}$ .

(2.5.11) Jetzt benötigen wir weitere Einschränkungen, die die nicht verschwindenden Komponenten miteinander verbinden. Der nächst einfache Kandidat sind Drehungen von Koordinatenebenen um  $\frac{\pi}{2}$ . D.h. wir betrachten für  $i \neq j$  Basiswechsel des Typs  $f_i = e_j$  und  $f_j = -e_i$ . Die übrigen Basisvektoren von  $V_0$  sollen fest bleiben. Hiermit gehen wir erneut in unsere Gleichung  $T = \frac{1}{2}(T + h \star T)$  ein und nehmen Koeffizientenvergleich vor.

(2.5.12) Was folgt für unsere drei Beispiele?

1. Beispiel: Das gibt  $T_{ii} = \frac{1}{2}(T_{ii} + (-1)^2 T_{jj})$ . Also  $T_{ii} = T_{jj}$ . Die  $SO(3)$ -isotropen Tensoren aus  $V_0 \otimes V_0$  sind genau die Vielfachen der Einheit  $K \Sigma e_i \otimes e_i$ .

2. Beispiel: Hier folgt  $T_{ijk} = \frac{1}{2}(T_{ijk} - T_{jik})$ . Also  $T_{ijk} = -T_{jik}$ . Entsprechend für alle weiteren Indexpaare. Ergebnis für  $n=3$  und  $T \in V_0 \otimes V_0 \otimes V_0$  ist:  $T_{ijk} = C \varepsilon_{ijk}$ . Die Vielfachen des  $\varepsilon$  - Tensors sind die einzigen isotropen Tensoren dieses Typs. Die Isotropie dieses Tensors geht entscheidend in die Komponentendefinition des Kreuzproduktes ein. Läßt man  $O(3)$  als Gruppe zu, gibt es keinen isotropen Tensor dieses Typs.

3. Beispiel: Hier folgt  $T_{iikk} = \frac{1}{2} (T_{iikk} + (-1)^2 T_{kkii})$ . Also  $T_{iikk} = T_{kkii}$ . Das liefert die Form  $T_{ijkl} = C\delta_{ij}\delta_{kl}$ . Die Isotropie dieses Tensors verifiziert man sofort. Analog die beiden anderen oben gefundenen Typen. Damit hat der allgemeinste SO(3)-isotrope Tensor aus  $V_0 \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V_0$  die Form

$$T_{ijkl} = C\delta_{ij}\delta_{kl} + D\delta_{ik}\delta_{jl} + E\delta_{il}\delta_{jk}$$

Verlangt man zusätzlich, dass  $T_{ijkl} = T_{jikl}$  gilt, dann folgt  $D=E$  und man erhält einen Tensor mit nur zwei freien Konstanten

$$T_{ijkl} = C\delta_{ij}\delta_{kl} + D(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

(2.5.13) Damit sind wir in der Lage, die oben begonnene Argumentation zum elastischen Körper abzuschließen. Nochmals:

Das Material befinde sich am Orte  $x$  in dem durch  $\varepsilon(x)$  beschriebenen Deformationszustand und dem durch  $\sigma(x)$  beschriebenen Spannungszustand. Zwischen beiden besteht ein Zusammenhang, der in Tangentenapproximation linear ist.  $\varepsilon(x) \mapsto H.\varepsilon(x) = \sigma(x)$ . Diese lineare Abbildung darf im Raum keinerlei Richtung gegenüber den anderen auszeichnen und solange das Material (im entspannten Zustand) homogen ist, auch nicht vom Orte abhängen. Überdies sind  $\varepsilon$  und  $\sigma$  symmetrisch, woraus  $H_{ijkl} = H_{jikl}$  folgt. Dann ist nach der vorangegangenen Analyse notwendig

$$H_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Dabei sind  $\lambda$  und  $\mu$  zwei Materialkonstanten, die Lamé-sche Konstanten genannt werden. Damit ist die Zahl der zur Beschreibung der elementaren elastischen Eigenschaften eines Stoffes erforderlichen Konstanten von 36 auf zwei reduziert. Das entspricht voll der Erfahrung.

(2.5.14) Als Basis des Raumes der symmetrischen Tensoren wählen wir (in dieser Reihenfolge)

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{13}, a_{13}, a_{23} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = a_i \otimes_S a_j = \frac{1}{2} (a_i \otimes a_j + a_j \otimes a_i).$$

Wie sieht dann die beschreibende Matrix von  $H$  aus? Wir benötigen  $H(e_K) = \sum a_J H_{J,K}$ . Obige Formel für die  $H_{ijkl}$  liefert in selbsterklärender Notation

	11	22	33	12	13	23
11	$\lambda + 2\mu$	$\lambda$	$\lambda$	0	0	0
22	$\lambda$	$\lambda + 2\mu$	$\lambda$	0	0	0
33	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda + 2\mu$	0	0	0
12	0	0	0	$2\mu$		
13	0	0	0		$2\mu$	
23	0	0	0			$2\mu$

(2.5.15) Beispielsweise ist  $H(e_{11}) = e_{11}\lambda + e_{22}\lambda + e_{33}\lambda + e_{11}\mu + e_{11}\nu$ . Und für den allgemeinen Fall

$$\begin{aligned} H(e_{12}) &= \frac{1}{2}H(e_1 \otimes e_2) + \frac{1}{2}H(e_2 \otimes e_1) \\ &= \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2\mu + e_2 \otimes e_1\nu) + \frac{1}{2}(e_2 \otimes e_1\mu + e_1 \otimes e_2\nu) \\ &= e_1 \otimes_S e_2 (\mu + \nu) = e_{12}(\mu + \nu). \end{aligned}$$

Die angegebene Matrix hat folgende inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda} & -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & \frac{1}{\mu} \frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda} & -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & \frac{1}{\mu} \frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} \end{pmatrix}$$



Da nun  $\boxed{-\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} + \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda}}$  gilt, existiert die zu  $H$  inverse Abbildung  $H^{-1} : \sigma(x) \mapsto \varepsilon(x) = H^{-1} \cdot \sigma(x)$ . Der zugehörige Tensor ist erwartungsgemäß erneut isotrop und hat die Form

$$H_{ijkl}^{-1} = \left( -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \left( \frac{1}{4\mu} \right) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

(2.5.16)  $H^{-1}$  bestimmt daher zu einem gegebenen Spannungszustand die zugehörigen Deformation. Angenommen wir üben (nur) einen Druck  $\sigma_3$  in 3-Richtung aus. Was resultiert? Zunächst einmal eine entsprechende Verzerrung der Größe  $\varepsilon_3 = \frac{1}{\mu} \frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda} \sigma_3 = \frac{1}{E} \sigma_3$  in z-Richtung. Das drückt den Youngschen Elastizitätsmodul durch die beiden Laméschen Konstanten aus.  $\boxed{E = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda}}$ . Hinzu kommen Längenänderungen in den beiden dazu senkrechten Achsenrichtungen von der Größe  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} \sigma_3 = -\frac{q}{E} \sigma_3$ . Oder  $\boxed{q = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu+\lambda}}$ . Umgekehrt hat man  $\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{q+1}$  und  $\lambda = \frac{Eq}{(q+1)(1-2q)}$ .