

Kapitel 11: Die Parametrisierung physikalischer Größen und das zugehörige Transformationsverhalten

11.1 Der allgemeine Transformationsformalismus. 11.1.0 Vorbemerkung

Im Kapitel 8 über Differentialgleichungen haben wir für physikalische Größen die Rollen der Kontrollgröße und der Beobachtungsgröße eingeführt und gesehen, wie sich daraus Systemzustände in Form von Abbildungen ergaben. Hierdurch wurde die deterministische Struktur unserer physikalischen Welt für wichtige Fälle mathematisch modelliert. Jetzt wollen wir einen anderen grundlegenden Aspekt physikalischer Größen behandeln:

Der jeweilige Wert physikalischer Größen wird typischerweise über Messungen und Beobachtungen bestimmt. Das Ergebnis erscheint jedoch meist nicht **absolut** oder in mathematischer Sprache **kanonisch**, als Wert einer absoluten geometrischen oder auch objektiven Größe, sondern als Zahlentupel, das noch subjektive beobachterabhängige Elemente enthält. So mißt man keinen Punkt, sondern drei Koordinaten, die von der subjektiv-willkürlichen Festlegung des Koordinatensystems abhängen. Diese Beobachtungstupel müssen erst über geeignete Abbildungen vom Parametrisierungs- bzw. Quantifizierungstyp mit den objektiven physikalischen Werten verbunden werden, was aber in bemerkenswertem Maße konsistent möglich ist. Dabei sehen wir hier vollständig vom Problem der Meßunsicherheiten ab, stellen uns vielmehr ideal genaue Messungen vor. Worum es geht, ist: **Was für Meßergebnisse finden unterschiedliche Beobachter desselben Ereignisses oder physikalischen Sachverhaltes vor und welche Zahlen müssen zu einem Tupel zusammengefaßt werden, damit sie eine Quantifizierung derselben interessierenden physikalischen Größe ergeben?**

Hierzu gibt es einen Formalismus, der in der theoretischen Physik ausgiebig benutzt wird und der für die meisten Fälle ausreicht. Vgl. auch Kap. 10.4.6 "Relativitätstheorie". Verdeutlichen wir uns nochmals kurz und drastisch, was die zu erfassende Beobachter**unabhängigkeit** physikalischer Sachverhalte besagt.

"Ein System starrer Körper ist im Gleichgewicht" ist ein Beispiel eines absoluten beobachter**unabhängigen** Aussage. Das Gleichgewicht besteht oder es besteht nicht, unabhängig davon, wo der Beobachter des Systems seinen Ursprung wählt, wie er seine Koordinatenrichtungen wählt usw. Die Beschreibungsgrößen des Systems werden von dieser Wahl abhängen, aber nicht die aus diesen zu extrahierende physikalische Aussage, ob Gleichgewicht vorliegt oder nicht.

Denkbar und damit mathematisch modellierbar sind durchaus Welten, in denen ein Magier durch Wahl seines Koordinatenursprunges Gebäude zum Einsturz bringen kann oder das Tragen schwerer Lasten erleichtert. Aber das ist eine andere als unserer Welt mit einem anderen zugehörigen Formalismus als dem, den wir jetzt beschreiben wollen.

11.1.1 Der Formalismus

(1.1.1) Gehen wir die **Hauptpunkte der zugehörigen Argumentation** durch:

(1.1.2) Physikalische Größen sind in der Regel einerseits qualitativ (geometrisch, absolut, als objektiver Sachverhalt, als mathematische Struktur ...) gegeben. Andererseits werden ihre Werte über Messungen bestimmt. Solche Messungen ergeben Zahlentupel und verlangen fast immer mehr oder weniger viele willkürliche Vereinbarungen. Quantitativ dargestellt wird eine physikalische Kontrollgröße meist über eine **Parametrisierungsabbildung** und eine Beobachtungsgröße über eine **Darstellungsabbildung**.

"Der Ortsvektor \vec{x}_P des Punktes P" und "die Flächennormale \vec{n} des Flächenstückes F" sind typisch qualitative Festlegungen, von Objekten, von deren objektiver Existenz man überzeugt ist. Zugehörige mögliche Quantifizierungen mit Hilfe eines Koordinatensystems wären $\vec{x}_P^K = {}^t(1,2,3,7)$ und $\vec{n}^K = {}^t(1,2,1)$. Jedes Koordinatensystem verlangt zur Festlegung zahlreiche mehr oder weniger willkürliche Vereinbarungen, die der Angabe eine subjektive Komponente geben. Ein anderer Beobachter könnte etwa denselben Punkt P durch $\vec{x}_P^L = {}^t(-1,5,0,6)$ beschreiben. Solche Koordinatendarstellungen sind alles andere als kanonisch! **Wie stellt man fest, dass beide Tripel Darstellungen desselben Punktes sind?** Oder auch: Wie sagt der zu K gehörige Beobachter voraus, was L messen wird, wenn L die Lage desselben Punktes vermisst?

(1.1.3) Quantifizierungen samt der mit ihnen verbundenen Willkür sind im Bereich der Physik zur exakten Beschreibung von Beobachtungen unvermeidbar. Andererseits gilt aber: **Die Möglichkeit unterschiedlicher, aber gleichwertiger Quantifizierungen enthält wichtige Information über die Struktur unserer Welt.** Sie macht Aussagen über Symmetrieeigenschaften, die sich in der Möglichkeit und Gleichwertigkeit bzw. Verschiedenheit unterschiedlicher Beobachter ausdrückt, was wiederum bedeutende Konsequenzen für das Naturverständnis hat.

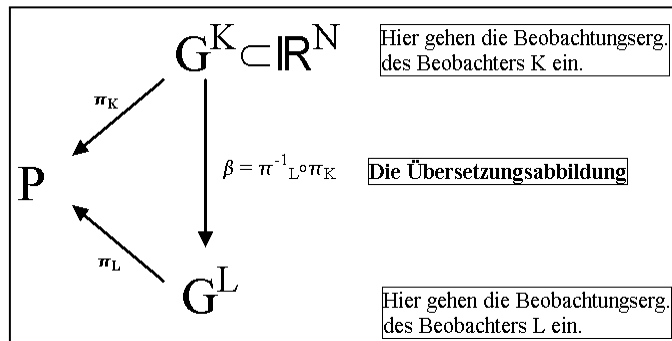
(1.1.4) Wir betrachten jetzt meßbare physikalische Größen wie Geschwindigkeit, Temperatur oder elektrische Ladung. Die denkbaren im Prinzip möglichen Werte einer solchen physikalischen Größe p vom Beobachtungstyp bilden eine Menge P. Die Menge P kann in der Regel so idealisiert werden, dass die Struktur eines Vektorraumes entsteht. Beispiel: Die vektorielle Geschwindigkeit eines Massenpunktes ist eine solche physikalische Größe. Ihre übliche Wertemenge ist V^3 oder \mathbb{R}_K^3 . Teilweise liegt auch eine Teilmenge eines Vektorraumes vor. (Die absolute Temperatur erlaubt keine negativen Werte.)

(1.1.5) Ist P vom Vektorraumtyp (der Dimension $N < \infty$, N Zahl der Freiheitsgrade), so erfolgt eine Parametrisierung von P - oder von Teilmengen davon - durch Angabe einer injektiven hinreichend glatten Abbildung $\pi_K: G \rightarrow P$ mit $G \subset \mathbb{R}^N$. Dies π_K macht also aus dem Tupel von Beobachtungsergebnissen ein absolutes mathematisches Objekt. Die Abbildungsrichtung repräsentiert die gedankliche Richtung der Datenverarbeitung. Das einfachste, aber äußerst nützliche Beispiel einer solchen Abbildungen im Falle von Vektorräumen bilden die Linearkombinationsabbildungen bezüglich gegebener Basen. Etwa

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto L_e(\alpha, \beta, \gamma) = \vec{a}\alpha + \vec{b}\beta + \vec{c}\gamma.$$

e steht für die gewählte Basis. Aber man hat immer die Möglichkeit unterschiedlicher Parametrisierungen. Etwa: Man kann die vektorielle Geschwindigkeit durch kartesische Koordinaten oder polar parametrisieren. Beides entspricht auch unterschiedlichen Beobachtungsmethoden.

(1.1.6) **Das Transformationsproblem:** Gegeben sei eine absolute Größe p mit zugehöriger Wertemenge P und zwei Parametrisierungen dieser Größe:



Das Problem: Wie rechnet man die Beobachtungsergebnisse des Beobachteten K in die von L um?
(Beobachtungsergebnisse = quantitative Meßergebnisse)

Etwas anders formuliert: Wie kann K berechnen oder vorhersagen, was L mißt, wenn beide dasselbe physikalische Phänomen beobachten ? Das also zu demselben Wert aus P gehört.

(1.1.7) Die Antwort ist formal bereits in unserem Diagramm enthalten: **Man benötigt die dort eingeführte Übersetzungsabbildung** $\beta = \beta_{LK}$. Diese wandelt N-tupel, die Meßresultate von K repräsentieren, in die entsprechenden N-tupel von L um. $\beta(\vec{x}^K) = \beta_{LK}(\vec{x}^K)$ liefert also das Meßergebnis \vec{y}^L von L, wenn K das Ergebnistupel \vec{x}^K findet. (Reihenfolge K wird zu L in β_{LK})

- In der elementaren Vektorrechnung unterscheidet man freie und gebundene Vektoren. (Etwa Ortsvektor und Geschwindigkeitsvektor). Erklären sie den Unterschied über den Unterschied bestimmter zugehöriger Übersetzungsabbildungen.
- Für einen Mathematiker ist ein Skalar ein Körperelement, für einen Physiker ein Einstupel, dessen Übersetzungsabbildung stets die Identität ist. Geben sie ein Beispiel eines Skalars im Sinne des Mathematikers, das für den Physiker keines ist.
- Wie sieht die übliche Übersetzungsabbildung für die Zahlbeschreibung einer linearen Abbildung aus? (Kap.4.4.6)

11.1.1a Wie findet man Übersetzungsabbildungen?

(1.1.8) Die Vektorraumtheorie und insbesondere das Teilgebiet der Tensorräume stellt ein **Standardverfahren** zur Behandlung der gestellten Frage nach den Übersetzungsabbildungen bereit, **indem sie die Übersetzungsabbildungen als Resultat von Basiswechseln in Tensorprodukträumen interpretiert**. Denn das Tensorprodukt ermöglicht die Objektivierung, also bei Basisvorgabe den Übergang von Komponenten und Matrizen zu den absoluten Größen und es liefert ein einfaches kanonisches Verfahren zum Umgang mit Basiswechseln.

(1.1.9) Das Modell sieht wie folgt aus:

▼	Sei V_0 der Grundraum (Konfigurationsraum) der jeweiligen Theorie. Weiter sei V_0^* der zugehörige Dualraum.
▼	Sei V ein aus V_0 und V_0^* gebildetes Tensorprodukt (wie $V_0 \otimes V_0^*$ oder $V_0 \otimes V_0 \otimes V_0^*$).
▼	Gibt man eine Basis e von V_0 vor, so bestimmt diese kanonisch eine Basis von V . Jeder Basiswechsel in V_0 induziert daher einen Basiswechsel in V . Oder auch: Gibt man ein Koordinatensystem in V_0 vor, so bestimmt dieses automatisch ein Koordinatensystem in V .
▼	Jede Basis in V bestimmt aber über die zugehörige Linearkombinationsabbildung auch eine Parametrisierung von V .
▼	Damit legt ein Basiswechsel in V_0 automatisch die zugehörige gesuchte Übersetzungsabbildung β in V fest.

(1.1.10) Gehen wir alles noch einmal in Hinblick auf die Bildung zugehöriger Formeln durch:

- Man gibt vor: Eine Basis a für V_0 . D.h ein Koordinatensystem A .
- Man erhält automatisch:
 - In V_0 die Basisdarstellung $x = \sum a_i x_i^A$ für jedes $x \in V_0$.
 - Dazu eine Parametrisierung der Elemente von V durch:

$$\pi_A = (\mathbb{R}^n, \vec{x}^A \mapsto x = \sum a_i x_i^A, V_0)$$

- In V_0^* hat man entsprechend die zu a duale Basis a^* . Und damit die Darstellung $\lambda = \sum a_i^* \lambda_i$ für jede Linearform mit zugehöriger Parametrisierung. (Bei festem Skalarprodukt kann man V und V^* kanonisch identifizieren. Die duale Basis ist dann immer als reziproke Basis zu interpretieren. Kap.10)
- In V erhält man per Tensorkonstruktion (aus a) die eindeutig bestimmte zugehörige Basis A_J . Die Basisdarstellung der Tensoren $t \in V$ lautet $t = \sum A_J T_J^A$. Dabei ist J ein geeigneter Multiindex.

Die zugehörige Parametrisierung der Elemente von V lautet

$$\Pi_A = (\mathbb{R}^N, (T_j^A) \mapsto \Sigma A_j T_j^A, V) \quad (t^A) = (T_j^A) \quad \text{Komponententupel.}$$

(1.1.11) Gibt man jetzt eine zweite Basis b für V_0 vor mit Indexbezeichnung N, so gilt dafür alles entsprechend. Zusätzlich bestimmt die zweite Basis die Transformationsmatrizen T für V_0 über $a=bT$ und \bar{T} für V über $A=B\bar{T}$. (Die Matrix \bar{T} folgt über die Tensorkonstruktion! Die Transformationsmatrix für die duale Basis ist in Kap. 5.2.4 als ${}^tT^{-1}$ bestimmt worden.) Besitzt man diese Matrizen, so hat man die letztlich benötigten Transformationsabbildungen für die Koordinatentupel: $\vec{x}^N = T\vec{x}^A$ und $(t^N)=\bar{T}(t^A)$.

Insbesondere hat man die gesuchte Übersetzungsabbildung $\beta = \beta_{NA} = \bar{T}$ aus (1.1.6)

(1.1.12) Ist T ein Tensorprodukt oder auch ein äußeres Produkt, so läßt sich \bar{T} mit Hilfe von T unmittelbar angeben. Zu rechnen ist nichts mehr, was einen der Vorzüge dieses Standardverfahrens ausmacht. (Im Falle der äußeren Algebra muß man allerdings die Darstellung mit dem Erzeugendensystem aus allen Indexworten wählen, nicht die übliche Basis zu den Worten mit wachsendem Index. Dasselbe gilt für die in 11.5 einzuführenden invarianten Teiltäume.)

(1.1.13) Betrachten wir ein Beispiel: Sei $V=V_0 \otimes V_0^* \otimes V_0^* \otimes V_0$. Dann ist A mit $A_{irsj}=a_i \otimes a_r^* \otimes a_s^* \otimes a_j$ die alte zugehörige Basis von V. Die Konstruktion der neuen Basis B sei analog. Dann schreibt sich die zugehörige Transformationsgleichung der Tensorkomponenten

$$Y_{irsk}^B = \Sigma T_{ia} {}^tT_{rb}^{-1} {}^tT_{sc}^{-1} T_{kd} Y_{abcd}^A \quad \text{oder kurz} \quad \vec{Y}^B = \bar{T}\vec{Y}^A$$

(1.1.14) Ausgeschrieben ist das ein i.a. enorm langer Ausdruck mit n^4 Summanden. Aber in der Regel lassen sich die benötigten Rechnungen im Indexkalkül ausführen, für den die Zahl der Terme unwichtig ist.

(1.1.15) Beachten Sie den Bau der Formel:

Jedem Tensorfaktor entspricht ein Index und beim Transformieren eine Matrix. Ist der Faktor V_0 , so ist diese Matrix T, ist der Faktor V_0^* , so ist die Matrix ${}^tT^{-1}$. Die freien Indizes i,r,... links tauchen rechts in derselben Reihenfolge als jeweils erster Index der Matrizen auf. Der zweite Index, über den summiert wird, erscheint dann wieder als Index der alten Komponenten. Usw.

Die gesamte Struktur ist völlig festgelegt, wenn man nur angibt, von welchem Typ die einzelnen Tensorfaktoren sind.

(1.1.16) Der Physiker tut das, indem er die Faktoren des Typs V_0 *kontravariant* und die des Typs V_0^* *kovariant* nennt. Zu kontravariant gehört T und zu kovariant ${}^tT^{-1}$.

(1.1.17) Mathematisch entspricht der Transformationsformel aus (1.1.13) die folgende absolute Gleichung in V. Sie stellt ein und denselben Vektor (Tensor) Y mit Hilfe von zwei Basen dar:

$$\boxed{Y = \Sigma a_i \otimes a_r^* \otimes a_s^* \otimes a_j Y_{irsj}^A = \Sigma b_i \otimes b_r^* \otimes b_s^* \otimes b_j Y_{irsj}^B}$$

Die Transformationsformel (1.1.13) folgt aus dieser Gleichung unmittelbar, wenn man wie üblich die a-Basis (= alt) durch die b-Basis ("neu") ausdrückt. Denn T ist ja die Transformationsmatrix für a und ${}^tT^{-1}$ ist die Transformationsmatrix für die zugehörige Dualbasis a^* . (Kap.5.2.4 und 9.2.2)

(1.1.18) Manchmal kann man das Transformationsgesetz in die Form einer Matrixmultiplikation umschreiben, die dann einfacher zu handhaben ist. Für die beschreibende Matrix einer linearen Abbildung gilt in Indexformulierung $M_{ik}^N = \Sigma T_{ir} {}^tT_{ks}^{-1} M_{rs}^A$. Das läßt sich schreiben als Matrixprodukt $M^N = T M^A T^{-1}$ wie wir aus Kap. 4.4.6a wissen. Für die beschreibende Matrix einer Bilinearform gibt (4.2.3) die entsprechende Umformung. Diese Matrix transformiert sich doppelt kovariant. Also $B_{ik}^N = \Sigma {}^tT_{ir}^{-1} {}^tT_{ks}^{-1} M_{rs}^A$. Das gibt die etwas andere Matrixgleichung $B^N = {}^tT^{-1} B^A T^{-1}$.

11.1.1b Die Transformationsgruppe

(1.1.19) Welche Basen sind zulässig und bestimmen dadurch auch *die zulässigen Basiswechsel*? In der Regel wird man keineswegs **alle** Basen nehmen, sondern nur die eines bestimmten Typs, etwa alle Orthonormalbasen oder alle Sylvesterbasen. Die Menge aller zugehörigen Basiswechsel sollte durch eine Gruppe, die

jeweilige Transformationsgruppe induziert werden. Etwa $S(3)$ im euklidischen Fall und die Lorentzgruppe $S(1,3)$ im Fall der Relativitätstheorie. Und $\text{Aut}(V_0)$, wenn man alle Basen zuläßt.

(1.1.20) Diese Gruppe operiert nun auf einer Vielzahl von Objekten und Räumen. Dadurch wird das in Kap. 3.3 beschriebene Konzept realisiert, ein und dieselbe Operation auf die unterschiedlichsten Objekte wirken zu lassen. Hier geht es natürlich um die Frage: **Was geschieht mit irgendwelchen Messergebnissen am System, wenn man einen Beobachterwechsel vornimmt.**

(1.1.21) Gehen wir einige für uns wichtige Gruppenoperationen durch. Sei zunächst \mathcal{B} die Menge der zulässigen Basen. Dann operiert G auf dieser Menge gemäß $e=fT$ oder besser $(T,e) \mapsto T \star e = f = eT^{-1}$. Dabei ist T die Transformationsmatrix und e wie üblich die alte und f die neue Basis. Überdies identifizieren wir die Gruppenelemente mit den Matrizen $T=T_g$. Entsprechend operiert G auf den dualen Basen durch Übergang zur transponierten Abbildung.

(1.1.22) Sei jetzt V einer der oben beschriebenen Tensorräume der Dimension N . e_j eine zulässige Basis von V_0 und e_J die Ausdehnung dieser Basis auf V . Dabei verallgemeinern wir die Kollektivindexschreibweise, die wir in der äußeren Algebra benutzt haben, in naheliegender Weise. $J=13 \dots 42$ etwa besage $e_J = e_1 \otimes e_3^* \otimes e_4 \otimes e_2$. Jeder Tensor $Y \in V$ hat dann die Basisdarstellung $Y = \sum e_J Y_J^K$. Das ergibt die Darstellungsabbildung $D_{e,} = (V, Y \mapsto \vec{Y}^K, \mathbb{R}^N)$. Dabei ist \mathbb{R}^N der Raum der Komponententupel, der also die Tupel der jeweiligen Meßergebnisse aufnimmt. Und dann operiert G von links auf \mathbb{R}^N vermöge $(T, \vec{Y}^A) \mapsto \vec{Y}^N = \overline{T} \vec{Y}^A$. Wir schreiben auch $T \star \vec{Y} = \overline{T} \cdot \vec{Y}$, um die Operationsstruktur zu verdeutlichen. In Komponentenform ist das jetzt $Y_J = \sum \overline{T}_{JK} Y_K$.

(1.1.23) Das bedeutet, dass die Gruppenelemente durch $N \times N$ Matrizen (\overline{T}_{JK}) beschrieben dargestellt werden, welche wegen $g \star (h \star Y) = (g \circ h) \star Y$ die folgende Linearitätseigenschaft erfüllen müssen:

$$\boxed{\overline{T}_g \overline{T}_h = \overline{T}_{g \circ h}} \quad \text{Etwa bei Drehungen um} \quad R(\varphi)R(\psi) = R(\varphi + \psi) \\ \text{eine feste Achse:}$$

Oder auch: Man hat einen Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$, der Transformationsgruppe G in die lineare Gruppe von V . Derartige Gruppenhomomorphismen beherrscht man mathematisch gut, woraus viele wichtige und tieferliegende physikalische Konsequenzen resultieren. Vgt. Kap 9.2.7a.

(1.1.24) Die Gruppe G erfaßt die unter (1.1.3) genannten Symmetrieeigenschaften. Die Gruppe ist im Prinzip immer mit anzugeben. Also *Tensor bezüglich der orthogonalen Gruppe* oder *Vektor bezüglich der Lorentzgruppe* usw. Der ε -Tensor der Physik ist nur Tensor bezüglich der speziellen orthogonalen Gruppe. Usw.

(1.1.25) Über die uns letztlich interessierenden Übersetzungsabbildungen können wir damit zusammenfassend sagen:

Der Beobachterwechsel werde durch das Gruppenelement $g \in G$ also T_g beschrieben. Gehört das Koordinatentupel \vec{Y}^A zu einem Element des Raumes V , dann, wird die Übersetzungsabbildung durch die Matrix \overline{T} der jeweiligen Gruppendarstellung gegeben.

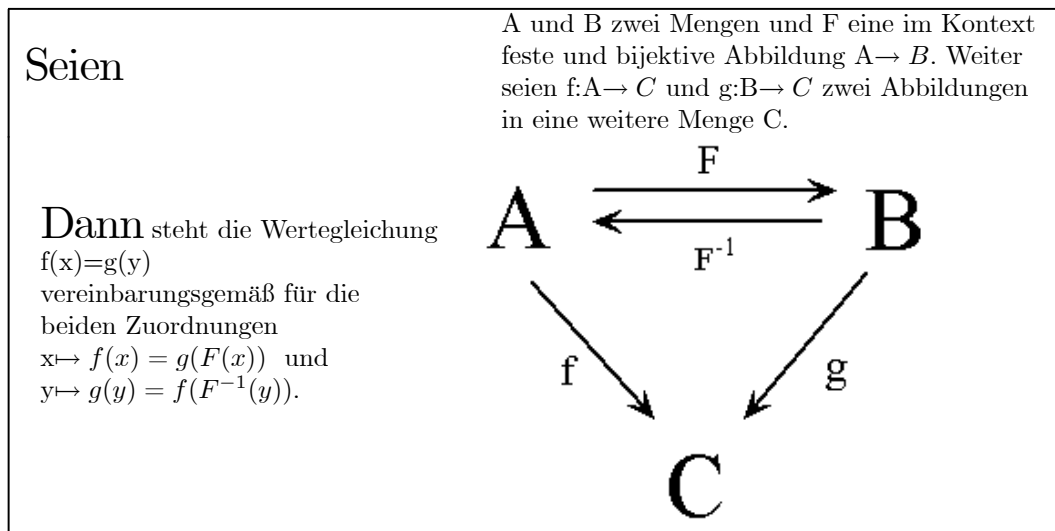
(1.1.26) Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse

(1)	Die gesamte Struktur wird durch Vorgabe des Konfigurationsraumes V_0 des zur betrachteten Größe gehörigen Tensorraumes V sowie durch Angabe der Transformationsgruppe festgelegt. Zur Transformationsgruppe gehört auch die Angabe der zulässigen Basen. Das sind die benötigten Zutaten.
(2)	Sobald man dann in V_0 zwei zulässige Basen oder eine Basis und ein Gruppenelement vorgibt, verhält sich das System wie ein System kommunizierender Röhren: Das Einfüllen von T in V_0 fixiert die Transformationsmatrix \overline{T} für V und damit die Übersetzungsabbildung zugehörigen Koordinatentupel.
(3)	Mathematisch liegt eine Darstellung $(G, g \mapsto \overline{T}_g, \text{Aut}(\mathbb{R}^N))$ in Form eines Gruppenhomomorphismus vor.

11.1.2 Einige Konventionen zur Schreibweise von Abbildungen

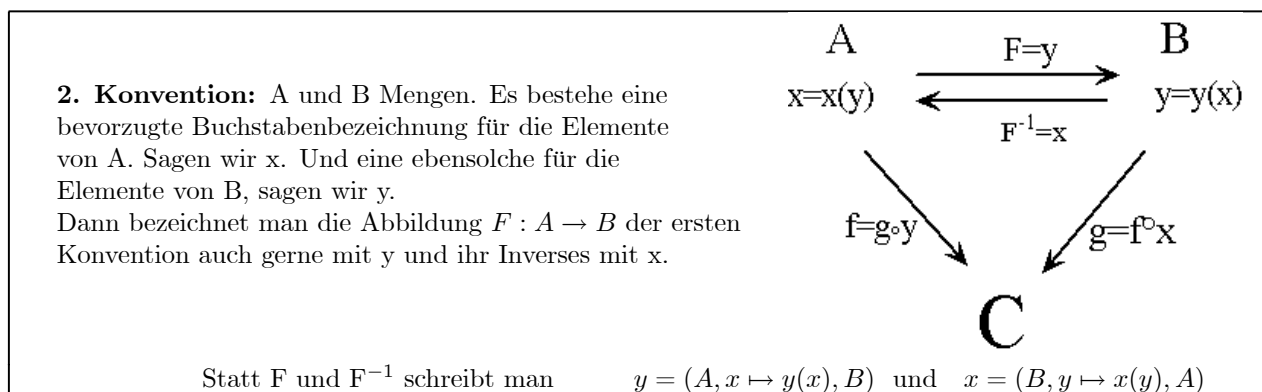
(1.2.1) In der Physik und anderen Anwendungsbereichen entstehen Abbildungen vielfach über definierende Gleichungen für die Werte. Dabei haben sich einige nützliche Konventionen herausgebildet, die den in der Mathematik üblichen konträr sind, die aber für manche Zwecke, insbesondere für die Quantifizierung und die Transformation von Feldern vorteilhaft sein können. Wir beschreiben diese Konventionen hier kurz. Für das Verständnis dieser Vereinbarungen erweist sich erneut der Rollenbegriff als vorteilhaft.

(1.2.2) **1. Konvention:**



(1.2.3) D.h. $f(x)=g(y)$ steht sowohl für die Abbildungsgleichung $f=g \circ F$ als auch alternativ für $g=f \circ F^{-1}$. Im Rahmen des Rollenzuweisungskonzeptes ist jeweils fallspezifisch festzulegen, ob x oder y unabhängige Variable sein soll. Die andere Größe erhält dann jeweils die Rolle einer abhängigen Hilfsgröße.

(1.2.4) Man kann die Gleichung $f(x)=g(y)$ verwenden, um eine der beiden Abbildungen g oder f zu definieren. Beim Differenzieren ist die genannte Konvention unbedingt zu beachten. Die Gleichung $f(x,y)=g(r,\theta)$ steuert so die Umrechnung zwischen ebenen kartesischen und polaren Koordinaten.



(1.2.5) Man muß also jeweils mit Hilfe des Kontexts entscheiden, **ob ein Buchstabe Abbildung oder Wert** bezeichnet, was natürlich wieder eine Rollenzuweisung beinhaltet. Wir werden diese Konvention meist dadurch mildern, dass wir die Abbildung durch einen Index kenntlich machen und etwa $x = x_P(y)$ statt $x=x(y)$ schreiben.

Anmerkung: Das totale Differential ds eines Skalfeldes wird von uns als Wert $Ds(x) \cdot \Delta x$ der totalen Ableitung interpretiert. Im Differentialformenkalkül übernimmt ds dann die Rolle von $Ds(x)$, wird zur Abbildung $ds: \Delta x \mapsto Ds(x) \cdot \Delta x$.

(1.2.6) Beispiel: Das Element $J_{ik} = \partial_k F_i$ der Jacobimatrix wird gerne mit $\partial_k y_i$ bezeichnet.

(1.2.7) Beide Konventionen zusammen ergeben:

$f(x)=g(y)$ ist je nach Situation interpretierbar als $f(x)=g(y(x))$ oder $f(x(y))=g(y)$.

Erneut entstehen die rechten Gleichungen durch unterschiedliche Rollenzuweisungen an die beiden Buchstaben x und y .

(1.2.8) Schließlich wird durch eine dritte Konvention alles auf die Spitze getrieben.

3. Konvention: Man legt dazu die Bezeichnung für die Elemente aus A und B , also x und y kanonisch fest, was allen Regeln der mathematischen Abbildungstheorie widerspricht. Dann sagt einem die Bezeichnung unmittelbar, welcher Urbildraum gemeint ist, und man vereinbart, auch noch f und g mit demselben Buchstaben zu bezeichnen.

Man schreibt also $f(x)=f(y)$ und meint mit dem linken f etwas anderes als dem rechten.

(1.2.9) In eine derartige Gleichung darf man nicht einfach Werte einsetzen. Ist etwa $y=F(x)$ und $5=F(2)$ und $2 \in B$, so gilt keineswegs $f(2)=f(2)$ sondern $f(2)=f(5)$. Einzige Rettung sind dann Schreibweisen wie $f(x=2)=f(y=5) \neq f(x=5)$ usw.

(1.2.10) Formal ist das Vorgehen so zu interpretieren: Die Buchstaben x und y haben in der Gleichung eine Doppelrolle! Sie sind einmal **Index zur Charakterisierung der Abbildung** und zum anderen eben **Variable**. Trennt man die beiden Rollen, erhält man Gleichungen wie $f_x(x)=f_y(y)$. Und **hier** darf man einsetzen. Etwa $f_x(2)=f_y(5) \neq f_y(2)$.

(1.2.11) Im Sinne des Problemkreises der Parametrisierung physikalischer Größen ist auch die dritte Konvention durchaus stimmig: Ein und dieselbe physikalische Größe f wird auf unterschiedliche Weise parametrisiert, einmal auf die kanonisch durch den Buchstaben x fixierte Weise und einmal auf die durch y fixierte Weise. Bezeichnet T ein Temperaturfeld der Ebene, so schreibt man

$$T(\vec{x}) = T(x, y) = T(r, \theta) \quad \text{statt} \quad T_A(\vec{x}) = T_K(x, y) = T_P(r, \theta).$$

Hier bezeichnet T drei ganz unterschiedliche Funktionen (Abbildungen), was beim Rechnen zu beachten ist. Solange einem das bewußt ist und man keine Werte einsetzen oder differenzieren muß, kann man sich die Indizes tatsächlich sparen: Denn A für "absolut" und K für "kartesisch" und P für "polar" geht natürlich ebenso aus den kanonischen Variablenbezeichnungen hervor.

(1.2.12) Wir werden die dritte Konvention meiden, indem wir zusätzliche Indizes anbringen, die beiden anderen Konventionen jedoch durchaus verwenden. Konkret: Statt etwa die Ortsvektoren zweier Geraden g und h mit $\vec{x}(\alpha)$ und $\vec{x}(\beta)$ zu bezeichnen, schreiben wir $\vec{x}_g(\alpha)$ und $\vec{x}_h(\beta)$. Das ermöglicht uns einerseits, die Hilfen zu nutzen, die gleiche Symbole für Intuition und Erinnerung liefern, vermeidet aber das formale Kuddelmuddel, das vielfach so geklärt und erklärt wird, daß der Fragende mit dem Satz "Ist doch klar, wie das gemeint ist", abgespeist wird.

11.1.3 Konventionen zur Kennzeichnung des Transformationsverhaltens. (Tensorieller Indexkalkül)

Die Konventionen dieses Abschnittes ergänzen und verfeinern die Regeln des Indexkalküls aus Kapitel 4.4.2b. Zur Erinnerung wiederholen wir zunächst die **Grundideen des Indexkalküls für Moduln und Vektorräume** Kapitel 4.4.2:

◆ (I.0) Alle Rechnungen mit Matrizen und Koordinatenvektoren sollen möglichst in Rechnungen für die Komponenten umgewandelt werden. Denn dann kommt man vollständig mit den Rechenregeln für Körper und Ringe aus.

(1.3.1) Betrachten wir etwa die Gleichung $\vec{y} = \sum \vec{b}_i M_{ik} x_k$. Anwenden von L_b^{-1} macht daraus die reinen Gleichungen vom Indextyp $y_i = \sum_k M_{ik} x_k$ (i freier Parameter). Vielfach interpretieren wir aber auch die erste vektorielle Gleichung bereits als Gleichung des Indexkalküls, einfach nur etwas anders zusammengefaßt. Oder auch: Alle relevanten Elemente des Indexkalküls sind in der Darstellung für feste Basen bereits enthalten, nur dass sie vektoriell codiert sind. Mit Hilfe von Koeffizientenvergleich erhält man aus der Vektorgleichung sofort das Gleichungssystem des Indexkalküls im engeren Sinne.

11.1.3a Konventionen zum Indexkalkül

(1.3.2) Wir stellen nochmals die in den Kapiteln 4 und 5 entwickelten Regeln zum Indexkalkül zusammen.

◆ (I.1) Die Koordinatenräume K^N der Koordinatenvektoren werden als **Linksvektorräume** geschrieben, sobald sie in der Rolle von Parameterräumen auftreten, was fast immer der Fall ist. D.h. als Urbildmenge einer Linearkombinationsabbildung. Alle zugehörigen Tupel sind als Spaltenvektoren anzusetzen.

Das sichert die übliche Form der Matrixrechnung Spalte=Matrix×Spalte.

◆ (I.2) **Alle geometrischen Vektorräume werden als Rechtsvektorräume** geschrieben. D.h. die typische Basisdarstellung hat immer die Form:

$$\vec{x} = \sum \vec{b}_j x_j = \vec{b}_1 x_1 + \dots + \vec{b}_n x_n .$$

Eine Linearkombinationsabbildung führt daher immer von einem Linksraum in einen Rechtsraum: $L : K^n \rightarrow V$.

◆ (I.3) Vorgabe eines Koordinatensystems S bedeutet, dass man in **allen** am Problem beteiligten Räumen eine Basis vorgibt. Wie üblich kennzeichnen wir zugehörige Koordinatengrößen durch einen Index S .

Ist also b eine zu S gehörige Basis und $\vec{x} = \sum \vec{b}_i x_i$, dann ist der Spaltenvektor $\vec{x}^S = (x_i)$ der zugehörige Koordinatenvektor. Im Indexkalkül ist das einfach x_i .

◆ (I.4) Ein Index, der als äußerer Parameter auftritt, heißt *laufender oder freier Index*. Er läuft über die Indexmenge einer der beteiligten Basen. Ein freier Index steht immer auf beiden Seiten einer Gleichung des Indexkalküls der Gleichung (Merkmal!).

◆ (I.5) Ein Index, über den summiert wird, heißt *stummer Index*. Auch er bezieht sich auf eine der beteiligten Basen. Ein stummer Index tritt - von ganz seltenen Ausnahmen abgesehen - in der Summe, zu der er gehört, immer doppelt auf. Sonst (außerhalb der Summe) kommt er nicht vor. (Das Vorkommen am Summenzeichen wird nicht gezählt!)

Im Rahmen der Matrixrechnung ist es in der Regel so, dass **zwischen** den beiden Vorkommen eines stummen Index kein weiterer Index steht. Diese Indexstruktur spiegelt die Regel Zeile mal Spalte der Matrixrechnung wider. Also

$$\sum_k M_{ik} N_{kj} \quad \text{aber nicht ohne Grund} \quad \sum_k N_{kj} M_{ik} .$$

◆ (I.6) Von allen Rechenregeln des Körpers sollte man das Kommutativgesetz der Multiplikation so lange wie möglich meiden. Nie Faktoren vertauschen, ohne dass ein besonderer Grund vorliegt! Denn beim Vertauschen der Faktoren wird die Indexreihenfolge verändert, und das ist in der Regel nicht gut.

11.1.3b Der Übergang zum Tensorkalkül

(1.3.3) Das **Grundkonzept des (bisherigen) Indexkalküls** war: Führe vektorielle Rechnungen auf Rechnungen für die einzelnen Komponenten zurück. Das erfolgt vielfach gleichwertig durch Rechnen mit festen Basen. Bei der Einführung beschreibender Matrizen läuft das (meist) auf die Frage hinaus: *Wie wird diese Matrix definiert?*

(1.3.4) Das neue **Grundproblem des Tensorkalküls** ist: Man hat ein Tupel (irgendwie bereits eingeführter) mathematischer Objekte. Man fragt: Wie verhalten sich diese bei Koordinatenwechsel? Dazu muss man sie zunächst in eine *standardisierte Form bringen, die es dann erlaubt, das zugehörige Transformationsverhalten abzulesen*. Und das ist die Form, die im Indexkalkül unter (I.1) für die Koordinatenvektoren eingeführt ist:

$$\boxed{\text{Neue Spalte} = \text{Matrix} \cdot (\text{alte Spalte})}$$

Beide Formen können, müssen aber nicht übereinstimmen. Insbesondere ist die Herstellung der tensoriellen Transformationsform ein Grund, Faktoren zu vertauschen. (Verletzung von (I.6)).

(1.3.5) Unser Vektormodell liefert zwei Arten von Transformationsverhalten vektorieller Größen, *kovariantes* und *kontravariantes*. In physikalischen Texten werden Formeln gerne im Indexkalkül **als Formeln für die Komponenten** dargestellt. Dann ist es vordringlich, das jeweilige Transformationsverhalten und weitere wichtige Eigenschaften möglichst unmittelbar durch Inspektion erkennen zu können. Die nachfolgend beschriebenen im physikalischen Bereich verbreiteten Konventionen erleichtern das, sobald man sich an sie gewöhnt hat. Sie beziehen sich vornehmlich auf einen Grundraum mit symmetrischem nicht ausgeartetem Skalarprodukt, einem Fall, für den sie einen besonders effizienten Kalkül bereitstellen.

(1.3.6) Schreibweisen des tensoriellen Indexkalküls

(▼ T.1) Zur Unterscheidung der beiden Arten von Transformationsverhalten verwendet man die **Indexstellung**. Indizes können hoch oder tief gestellt werden. Bei Hochstellung besteht die Gefahr, den Index mit einer Potenz zu verwechseln, x^2 könnte sowohl für "x-zwei" als auch "x-Quadrat" stehen. Fast immer ist jedoch aus dem Zusammenhang klar, was gemeint ist. $(x^2)^2$ steht meist für "x-zwei-Quadrat".

(▼ T.2) Eine kontravariante (sich mit T transformierende) Indexgröße wird durch einen **hochgestellten** Index kenntlich gemacht. Anknüpfungsbeispiel sind die Komponenten von Orts- und Geschwindigkeitsvektoren, die mit $\boxed{x^i}$ bzw. $\boxed{v^j}$ bezeichnet werden. Wie üblich läuft der Parameter i hier (stillschweigend) von 1 bis $n = \dim V$.

(▼ T.3) Eine kovariante (sich mit ${}^tT^{-1}$ transformierende) Indexgröße wird durch einen tiefgestellten Index kenntlich gemacht. Etwa $\boxed{\lambda_i}$.

(▼ T.4) Summiert wird immer über einen doppelt auftretenden Index, der einmal hoch- und einmal tief gestellt ist, was Basisunabhängigkeit der Summe sichert.

(▼ T.5) Die Komponenten der Transformationsmatrix T werden wie folgt bezeichnet: $\boxed{T = (T_{\cdot k}^i)}$. Also: Der erste Index hoch-, der zweite tiefgestellt.

(▼ T.6) Die Komponenten der Matrix ${}^tT^{-1}$ werden mit $T_{i \cdot}^k$ bezeichnet. Also $\boxed{{}^tT^{-1} = (T_{i \cdot}^k)}$. Derselbe Buchstabe T, aber mit anderer Indexstellung!

(▼ T.7) Die Basisdarstellung eines Vektors lautet $\boxed{\vec{x} = \sum \vec{a}_i x^i}$.

(▼ T.8) Für die Komponenten der inversen Matrix erhält man (durch Rückgängigmachen der Transposition in $T_{\cdot \cdot}^k$) $\boxed{(T^{-1})_{\cdot k}^m = T_{k \cdot}^m}$

(▼ T.9) Entsprechend für die Komponenten der transponierten Matrix $\boxed{({}^tT)_{\cdot k}^i = T_{\cdot i}^k}$

(1.3.7) Neu und gewöhnungsbedürftig sind die Indexstellungen an der Transformationsmatrix T. Daher eine zusammenfassende Zuordnungstabelle für die unterschiedlichen Stellungen:

Herkömmlich	$(T)_{ik}$	$({}^tT)_{ik}$	$({}^tT^{-1})_{ik}$	$(T^{-1})_{ik}$
Tensoriell	$T_{\cdot k}^i$	$T_{\cdot i}^k$	$T_{i \cdot}^k$	$T_{k \cdot}^i$

(1.3.8) Wieso erhalten die Basisvektoren in (T.7) einen unteren Index "kovariant" ? Wie ist das zu verstehen? Die übliche Beziehung zwischen den beiden Basen ist "Alte Basis durch neue ausdrücken" Also $\boxed{\vec{a}_i = \sum \vec{b}_k T_{ki}}$ Aber das ist die **Definitionsgleichung** für T. Sie hat nicht die **Form, aus der man das Transformationsverhalten abliest**. Das verlangt *neu durch alt* und Linksschreibweise. Lösen wir

die Definitionsgleichung nach der neuen Basis b auf, so folgt $\vec{b}_k = \Sigma ({}^t T^{-1})_{kj} \vec{a}_j$. Dabei haben wir die Matrixkomponenten wie bisher bezeichnet. In der neuen Schreibweise lauten die beiden Gleichungen

$$\vec{a}_i = \Sigma \vec{b}_k T_{..i}^{k..} \quad \text{und} \quad \vec{b}_k = \Sigma T_{k..}^{..j} \vec{a}_j.$$

Summiert wird über einen oberen und einen unteren Index und diese grenzen aneinander!

(1.3.9) Wie schreiben sich die Gleichungen $T^{-1}T = TT^{-1} = id_V$ mit den neuen Bezeichnungen? Einsetzen gibt $\Sigma T_{rk}^{-1} T_{ks} = \Sigma T_{rk}^{-1} T_{..s}^{k..} = \Sigma T_{k..}^{..r} T_{..s}^{k..} = \delta_s^r$ und $\Sigma T_{rk} T_{ks}^{-1} = \Sigma T_{..k}^{r..} T_{s..}^{-1} = \delta_s^r$. Das ist etwas gewöhnungsbedürftig. Die Matrixproduktregel *angrenzender Summationsindizes* ist hier verletzt.

(1.3.10) Bemerkung zur Bezeichnungsweise: Die Termbezeichnung ${}^t T^{-1}$ enthält codiert die übliche Beschreibung des Weges, wie man aus T die neue Matrix erhält: T wird transponiert und invertiert ohne Beachtung der Reihenfolge. In der neuen Bezeichnung $(T_{i..}^{..k})$ fehlt diese Wegbeschreibung. Wir werden jedoch sehen, dass die neue Bezeichnung bei Vorhandensein einer nicht ausgearteten orthogonalen Geometrie einen dann einfacheren anderen Konstruktionsweg von T nach ${}^t T^{-1}$ beschreibt!

(1.3.11) Wie steht es mit dem **Transformationsverhalten der dualen Basis** a^* ? Für sie haben wir die Festlegungsgleichung $a_i^* = \Sigma b_k^* ({}^t T^{-1})_{ki}$. Umgestellt gibt das als Gleichung zum Ablesen des Transformationsverhaltens: $b_k^* = \Sigma_i T_{ki} a_i^*$. (Neu durch Alt und Linksschreibweise). Das ist kontravariant, d.h. wir haben einen oberen Index zu verwenden!

(▼ T.10) Die Vektoren der dualen Basis erhalten einen oberen Index. Für sie gilt

$$a^{*i} = \Sigma b^{*i} T_{k..}^{..i} \quad \text{und} \quad b^{*k} = \Sigma T_{..i}^{k..} a^{*i}.$$

Erneut liefert die neue Bezeichnung über die Indexstellung die gesamte Information. Und ein Vektor des Dualraumes schreibt sich $\lambda = \Sigma a^{*i} \lambda_i$.

(1.3.12) **Bemerkung zur Summation:** Beachten Sie, wie (T.7) und (T.10) auch für vektorielle Summen die Regel (T.4) erfüllen!

(1.3.13) **Bemerkung zur Indexstellung:** Nehmen wir an, wir hätten einen Tensor $U \in V^* \otimes V^* \otimes V$. Die nachfolgende Tabelle liefert die zugehörige Basisdarstellung sowie das Transformationsverhalten einmal in der bisherigen Schreibweise und einmal in der neuen tensoriellen:

Bisher:	$U = \Sigma a_i^* \otimes a_j^* \otimes \vec{a}_k U_{ijk}$	$U_{ijk}^N = \Sigma {}^t T_{ir}^{-1} {}^t T_{js}^{-1} T_{kt} U_{rst}^A$
Tensorform	$A = \Sigma a^{*i} \otimes a^{*j} \otimes \vec{a}_k A_{ij}^{..k}$	$(U^N)_{ij}^{..k} = \Sigma T_{i..}^{r..} T_{j..}^{s..} T_{..t}^{k..} (U^N)_{rst}^{..t}$

Das Beispiel zeigt einmal die enorme Schematisierung der Darstellung. Zum anderen zeigt es, wie gut die eingeführte Indexstellung für die beiden Matrizen $T = (T_{i..}^{..k})$ und ${}^t T^{-1} = (T_{i..}^{..k})$ zur Transformationsformel der Komponenten paßt, die die neuen Größen durch die alten ausdrückt. Zuerst (von links) immer der freie Index - im Beispiel i, j, k - und dann der zu summierende stumme. Im Beispiel r, s und t .

(1.3.14) Es folgen zwei wichtige, aber jetzt bereits klare Regel.

(▼ T.11) Die Tensorarstellung einer **linearen Abbildung** $\varphi : V \rightarrow W$ bezüglich der Basen a und b lautet $\varphi = \Sigma b_k \otimes a_r^* M_{kr}$. Das ist abzuändern zu $\varphi = \Sigma \vec{b}_k \otimes a^{*r} M_{..r}^{k..}$, konsistent mit dem bekanntem Transformationsverhalten $M^N = T M^A T^{-1}$. Die zugehörige Fundamentalidentität lautet

$$\varphi(\vec{x}) = \Sigma a_k M_{..i}^{k..} x^i.$$

Das Transformationsverhalten in tensorieller Form

$$(M^N)_{..k}^{i..} = \Sigma T_{..r}^{i..} T_{k..}^{..s} (M^A)_{..s}^{r..}$$

Wieder rechts mit den freien Indizes zuerst und in korrekter Stellung.

(▼ T.12) Eine **Bilinearform** dagegen schreibt sich jetzt $B = \Sigma a^{*k} \otimes a^{*r} B_{kr}$ mit zugehöriger Fundamentalidentität

$$B(x, y) = \Sigma y^i B_{ik} x^k = \Sigma B_{ik} y^i x^k.$$

Das zugehörige Transformationsverhalten in tensorieller Form

$$B_{ik}^N = \Sigma T_{i..}^r T_{k..}^s B_{rs}^A.$$

Die bisherigen Beispiele sollten bereits verdeutlicht haben, dass man der Indexstellung alle relevante Information entnehmen kann.

(1.3.15) Die nachfolgende Übung enthält eine wichtige Anwendung des bisher Gesagten, die allerdings eigenständige Überlegungen verlangt. Wir kommen später auf die Antwort zurück.

- Es seien $\vec{\alpha} \mapsto \vec{x}_\pi(\vec{\alpha}) = \vec{x}$ und $\vec{\beta} = \vec{x}_\varphi(\vec{\beta}) = \vec{x}$ zwei Parametrisierungen des Ortsvektors \vec{x} . Die Konventionen zur Schreibweise von Abbildungen aus 11.1.2 sollen verwendet werden. Erklären und interpretieren Sie damit die folgenden Gleichungen, wie man sie teilweise in physikalischen Texten findet.

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha^i} = \Sigma_k \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta^k} \frac{\partial \beta^k}{\partial \alpha^i} \quad T_{.r}^{k.} = J_{.r}^{k.} = \frac{\partial \beta^k}{\partial \alpha^r} = \partial_r \beta^k.$$

Interpretieren soll insbesondere heißen: Machen Sie sich auch Gedanken über den merktechnischen Nutzen dieser Schreibweisen! T steht wie üblich für die Transformationsmatrix eines Basisfeldwechsels und J für eine Jacobimatrix.

11.1.3a Der Indexkalkül im Falle einer nicht ausgearteten orthogonalen Geometrie

(1.3.16) Zum Konfigurationsraum V gehöre das nicht ausgeartete symmetrische Skalarprodukt G. Die beschreibende Matrix - den *metrischen Tensor* - bezeichnen wir mit g. Also $g_{ik} = G(a_i, a_k)$, wenn a die gewählte Basis ist. Der metrische Tensor g transformiert sich im Matrixkalkül nach der Regel $g^N = {}^t T^{-1} g^A T^{-1}$, also doppelt kovariant, was die unteren Indizes rechtfertigt.

(1.3.17) Hieraus folgt:

$$\boxed{{}^t T^{-1} = g^N T (g^A)^{-1}}.$$

Diese Gleichung enthält den in (1.3.10) bereits angekündigten zweiten Weg, die Matrix ${}^t T^{-1}$ zu berechnen. Und wir werden sehen, dass sich dieser Weg mit Hilfe des Indexkalküls gut codieren läßt.

(▼ T.13) Wir bezeichnen die Komponenten der inversen Matrix von g mit g^{ik} . Also

$$\boxed{g^{-1} = (g^{ik})}.$$

Das gibt die (zunächst gewöhnungsbedürftigen) Gleichungen $\boxed{\Sigma_r g_{ir} g^{rk} = \Sigma g^{ir} g_{rs} = \delta_r^k}$.

- Weisen Sie nach, dass tatsächlich doppelt kontravariantes Transformationsverhalten vorliegt, was die oberen Indizes rechtfertigt.

Damit schreibt sich (1.3.16) im Indexkalkül

$$\boxed{T_{i..}^{.k} = \Sigma g_{ir}^N T_{..s}^{r.} g_A^{sk}}$$

D.h. die Berechnung der neuen Matrix ${}^t T^{-1}$ erfolgt durch Multiplikation von T mit g bzw. g^{-1} und diese Multiplikation wird vollständig durch die Indexstellung beschrieben.

(1.3.18) Genauer:

(▼ T.14) Das Herauf- und Herunterziehen von Indizes:

- Der Übergang von $T_{..k}^{i.}$ zu T_{ik} erfolgt durch Multiplikation mit g^N von links: $T_{ik} = \Sigma g_{ir}^N T_{..k}^{r.}$ (**Herunterziehen eines Index mit g**).
- Der Übergang von $T_{..k}^{i.}$ nach T^{ik} erfolgt durch Multiplikation von rechts mit $(g^A)^{-1}$. Also $T^{ik} = \Sigma T_{..r}^{i.} g_A^{rk}$. (**Heraufziehen eines Index mit g**).

(1.3.19) **Wir identifizieren den Dualraum mit dem Grundraum** durch den Isomorphismus $\iota : V \rightarrow V^*$ ausDie zu a reziproke Basis wird mit $(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^n)$ bezeichnet. D.h. $\vec{a}^i = \iota^{-1}(a^{*i})$. Und die Vektoren dieser Basis transformieren sich nach (..) kovariant, wie die Indexstellung anzeigt.

(1.3.20) Zu jeder Basis von V haben wir jetzt automatisch die 2. reziproke Basis a^* von V. Oder auch: Tupel, die bisher als Elemente des Dualraumes interpretiert werden mußten, können jetzt als Vektoren aus V selbst angesehen werden - nur gehören sie eben zu einer anderen Basis des Grundraumes.

Wir wissen bereits, dass g den Übergang zwischen Basis und reziproker Basis beschreibt $a = a^*g$. Das zeigt, dass der Wchsl zwischen Basis und reziproker Basis auch durch Herauf- und Herunterziehen des Index erfolgt:

$$\vec{a}^i = \Sigma \vec{a}_r g^{ri} \quad \text{und} \quad \vec{a}_k = \Sigma \vec{a}^r g_{rk}.$$

(▼ T.15) **Ko- und kontravariante Komponenten eines Vektors.** Jeder Vektor \vec{x} kann entweder durch die Basis a oder die zugehörige reziproke Basis a^* dargestellt werden:

$$\vec{x} = \Sigma \vec{a}_i x^i = \Sigma \vec{a}^i x_i.$$

Man nennt die x^i die kontravarianten und x_i die kovarianten Komponenten des Vektors \vec{x} . Die Umrechnung erfolgt vollständig schematisch mit Hilfe der Indexstellung:

$\vec{a}^i = \Sigma \vec{a}_k g^{ki}$	$\vec{a}_k = \Sigma \vec{a}^i g_{ik}$	$x^i = \Sigma g^{ik} x_k$	$x_k = \Sigma g_{ki} x^i$
Klar gilt		$\Sigma x_i y^i = \Sigma x^i y_i = G(\vec{x}, \vec{y})$ (Fundamentalidentität)	

(1.3.21) **Wann muss man zwischen g^N und g^A unterscheiden?** Nicht beim Übergang zwischen ko- und kontravarianten Komponenten, da dann die Grundraumbasis fixiert ist. Anders bei der Berechnung der Transformationsmatrix ${}^tT^{-1}$.

Nun ist es in der Regel in der Physik so, dass die Transformationsgruppe aus Isometrien besteht, und das bedeutet, dass dann $g^A = g^N$ gilt. Dann läuft der gesamte Rechenkalkül schematisch über die Indexstellung ab und diese wird durch Herauf- und Herunterziehen der Indizes mit Hilfe von g bewirkt. In diesem Fall vereinfacht sich (1.3.17) zu

$$T_{i..}^{..k} = \Sigma g_{ir} T_{..s}^{r..} g^{sk}.$$

(1.3.22) Und beachten Sie: **Einem einschlägigen Rechenausdruck kann man sein Transformationsverhalten bzw. seine mathematische tensorielle Struktur unmittelbar durch Inspektion der Indexstellung ansehen**

- Testen Sie das am Beispiel $R_{..km}^{ij..}$. Wie sieht die Tensorarstellung dieses (im Indexkalkül gegebenen) Komponententupels aus? Wie das zugehörige Transformationsverhalten? Und dann dasselbe für die Größe $\Sigma_k R_{..km}^{ik..}$.
- Wie stellt sich die in Kap 9.3.4e eingeführte Kontraktion von Tensoren in der der jetzigen Indexschreibweise dar?

(1.3.23) Als weiteres Beispiel behandeln wir die **Strukturkonstanten einer Algebra.**

(V_0, \star) sei eine Algebra. Die Multiplikation sei bezüglich der alten Basis a durch die Strukturkonstanten c_{ik}^ℓ gegeben. Also $a_i \star a_k = \Sigma a_\ell c_{ik}^\ell$. Bezüglich der neuen Basis A seien die Strukturkonstanten d_{st}^r . Wir **erwarten** folgendes durch die Indexstellungen beschreibens und unmittelbar festgelegtes Transformationsverhalten:

$$A_r \star A_s = \Sigma_t A_t d_{rs}^t \quad \boxed{d_{rs}^t = \Sigma T_{.i}^{t.} T_{r.}^j T_{s.}^k c_{jk}^{i..}}$$

Das **prüfen** wir mit einer Rechnung herkömmlicher Art, bei der wir die d-s durch die c-s ausdrücken müssen. Der Gang der Rechnung ist klar:

$$\begin{aligned} A_r \star A_s &= \Sigma_t A_t d_{rs}^t = (\Sigma a_i (T^{-1})_{ir}) * (\Sigma a_k (T^{-1})_{ks}) \\ &= \Sigma a_i * a_k (T^{-1})_{ir} (T^{-1})_{ks} = \Sigma a_n c_{ik}^n (T^{-1})_{ir} (T^{-1})_{ks} \\ &= \Sigma_t T_{tn} c_{ik}^n (T^{-1})_{ir} (T^{-1})_{ks} \\ &= \Sigma_t T_{t.n} ({}^tT^{-1})_{ri} ({}^tT^{-1})_{sk} c_{ik}^n \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich gibt die Transformationsformel und unsere Übersetzungstabelle für die Indexstellung liefert tatsächlich das zunächst schematisch erhaltene Transformationsgesetz.

Herkömmlich	$(T)_{ik}$	$({}^tT)_{ik}$	$({}^tT^{-1})_{ik}$	$(T^{-1})_{ik}$	$d_{rs}^t = \sum T_{t,n} ({}^tT^{-1})_{ri} ({}^tT^{-1})_{sk} \cdot c_{ik}^n$
Tensoriell	$T_{.k}^i$	$T_{.i}^k$	$T_{i.}^k$	$T_{k.}^i$	$d_{,rs}^t = \sum T_{.n}^t T_{r.}^i T_{s.}^k \cdot c_{ik}^n$

□ Zu welchem Tensorraum gehören die Strukturkonstanten daher?

(1.3.24) Natürlich gibt es auch Indizes, bei denen das Transformationsverhalten weder ko- noch kontravariant ist. Etwa bei nichtlinearen Parametrisierungen des Ortsvektors $\vec{\alpha} \mapsto \vec{x}(\vec{\alpha})$. Trotzdem wollen wir auch hier eventuelle Indizes nach oben schreiben. Also $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$. Der Nutzen dieser Vereinbarung wird sich beim Differenzieren zeigen.

(1.3.25) Wir besprechen jetzt drei größere Beispiele, die zeigen, wie mathematische und physikalische Gegebenheiten das Transformationsverhalten bestimmter Größen genauer **der sie beschreibenden Zahlupel** festlegen. Und zwar betrachten wir den **Normalenvektor** (11.1.4), den **Spannungstensor** (11.1.5) und den **Gradienten eines Skalarfeldes** (11.1.6). In all diesen Fällen findet man ein nichttriviales Transformationsverhalten, das jedoch in jedem Fall durch ein kurzes Stichwort gut merkbar wird.

11.1.4 Die Feldkomplikation

(1.4.1) Bei Abbildungen, speziell bei Abbildungen vom Feldtyp, ist es meist erforderlich, Urbildraum und Wertraum gesondert zu parametrisieren. Kap.6.1.4-6. Nehmen wir an, wir hätten eine Abbildung, bei der der Urbildraum die Konfigurationsraumrolle hat, etwa ein Feld auf V_0^3 . Dann hat dieser Urbildraum folgende vier Funktionen:

1. Er beschreibt in seiner Rolle als Konfigurationsraum die physikalische Größe "**Ort**".
2. Er beschreibt die **vektorielle Geschwindigkeit** im Konfigurationsraum über Formeln des Typs $\vec{V}\Delta t = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ bzw. $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$.
3. Er ermöglicht und beschreibt die **Parallelverschiebung** von Vektoren.
4. Er übernimmt die oben skizzierte Rolle des Grundraumes V_0 für den tensoriellen **Transformationsskalkül**.

(1.4.2) Eine derartige Aufgabenvielfalt kann nur beim ersten Ansatz unentfaltet einem einzigen Raumtyp zugeordnet werden. Ein erstes Argument gegen diese Rollenidenkonzentration ist, dass die möglichen Orte wegen 1.) immer einen Vektorraum oder Teilvektorraum bilden müssen. Diese Annahme ist schon bei einfachen Beispielen wie ebene oder räumliche Pendelbewegung, starres Molekül usw. wenig sinnvoll und angemessen. Der in Kapitel 16 zu besprechende Formalismus der Mannigfaltigkeiten trennt die vier Funktionen dann auch weitgehend. Etwas genauer:

- Zu 1): Der den Ort beschreibende Konfigurationsraum verliert seine Rolle als Vektorraum, er wird zur Mannigfaltigkeit.
- Zu 2) und 4): Zu jedem Punkt wird die Menge der möglichen momentanen Geschwindigkeiten gebildet und diese bildet einen Vektorraum, genauer ein Vektorraumfeld. (Kein Vektorfeld! Den Punkten wird kein individueller Vektor, sondern jeweils ein ganzer Vektorraum zugeordnet!) Denn die möglichen Geschwindigkeiten können sich von Punkt zu Punkt ändern. Man denke an die Bewegung auf einer Kugeloberfläche. Dieser Raum der lokal möglichen Geschwindigkeiten übernimmt dann die 4. Funktion, also die Rolle des Grundraumes V_0 für den Transformationsformalismus. Mit dieser auszuführenden Präzisierung bleibt der soeben besprochene Formalismus gültig und wichtig. Vgl. auch Kap. 6.3.3, "geometrischer Tangentialraum".
- Zu 3) Die Parallelverschiebung - etwa einer Geschwindigkeit von einem Punkt (= Ort) zu einem anderen oder der Vergleich zweier Feldstärken zu **verschiedenen** Orten - schließlich ist i.a. nicht mehr auf kanonische Weise möglich. Will man sie dennoch, so benötigt man eine zusätzliche Struktur.

Die in den Anwendungen auftretenden Vektoren sind in der Regel keine Einzelvektoren, sondern Vektorfelder auf dem Konfigurationsraum. Manchmal kann man den Konfigurationsraumpunkt einfach als äußeren Parameter behandeln. Dann gilt alles bisher Gesagte entsprechend modifiziert. Zwei neue Probleme treten auf.

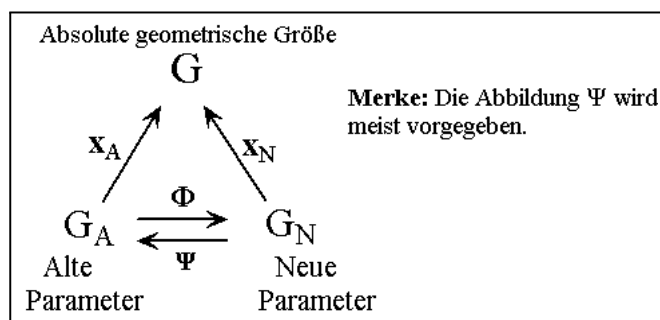
- Wie transformieren sich die Vektorgrößen, wenn man die Konfigurationsraumparametrisierung wechselt. Kurz: Wie transformieren sich die Basisfelder $\vec{\partial}$? Es zeigt sich, dass der Parameter $\vec{\alpha}$ auch hier weitgehend äußerer Parameter ist
- Wie ändern sich die Basisfelder $\vec{\partial}(\vec{\alpha})$, wenn man den Aufpunkt ändert? Kurz: Wie sieht die Tangentenapproximation für $\vec{\partial}(\vec{\alpha} + \Delta\vec{\alpha})$ aus?

Auf diese beiden Fragen gehen wir jetzt nacheinander ein.

11.1.4a Transformationsverhalten der Koordinatenbasisfelder

(1.4.3) Was das Transformationsverhalten betrifft, so beschränken wir uns im Augenblick auf die Diskussion eines Vektorfeldes vom Typ $V_0 \rightarrow V_0$. Hat man hier die Zusammenhänge verstanden, so lassen sich die anderen Fälle relativ leicht anschließen. Unser Feld sei $f = (G, \vec{x} \mapsto f(\vec{x}), V_0)$ und G sei offenes Gebiet von V_0 .

(1.4.4) Es sei daran erinnert, dass jetzt Urbild und Wert beide durch Koordinaten ausgedrückt werden müssen, d. h. beide Seiten müssen transformiert werden. Daher können wir nicht mehr wie sonst mit dem Basiswechsel starten. Stattdessen starten wir mit der Vorgabe von zwei bijektiven Parametrisierungen der Urbildmenge G . Wir werden sehen, dass hier im Feldfall die gesamte Struktur durch diese Vorgabe festgelegt wird. Die Skizze erklärt die Bezeichnungen.



Ψ ist die übliche **Einstiegsabbildung**: Die alten Koordinaten werden als Funktion der neuen dargestellt. Etwa $x=r\cos\theta$ und $y=r\sin\theta$ beim Übergang zu ebenen Polarkoordinaten.

(1.4.5) Φ soll die dazu inverse Abbildung sein, also $\Phi = \Psi^{-1}$. Wir werden sehen, dass diese Abbildung hier rechnerisch wichtig ist. Wir haben die Darstellungsgleichungen $\vec{x} = \vec{x}_A(\vec{\alpha}) = \vec{x}_N(\vec{\beta})$, die den Vektor $\vec{x} \in G$ durch die Parameter ausdrücken. Durch Ableiten erhalten wir die beiden Basisfelder $\vec{\partial}_A = \vec{\partial}_A(\vec{\alpha})$ und $\vec{\partial}_N = \vec{\partial}_N(\vec{\beta})$. Zunächst sind das Basisfelder über der jeweiligen Parametrisierung. Aber infolge der vorausgesetzten Bijektivität kann man sie auch als Felder über G interpretieren. (Kap. 6.3.4b). Damit wirklich Basen vorliegen, muß das Rangkriterium aus 6.3.3 erfüllt sein. Der Rang von $D\Phi$ muß überall maximal gleich $\dim V_0 = n$ sein. Oder auch: Φ muß im Sinne des Satzes von der inversen Abbildung aus Kap.7. invertierbar sein.

(1.4.6) Wie üblich soll die alte $\vec{\partial}_A$ -Basis durch die neue $\vec{\partial}_N$ dargestellt werden. Daher schreiben wir $\vec{x}_A(\vec{\alpha}) = \vec{x}_N(\Phi(\vec{\alpha}))$. Beachten Sie, dass wir hier Φ und nicht Ψ benötigen! Diese Gleichung differenzieren wir nach der Kettenregel und finden:

$$\frac{\partial \vec{x}_A}{\partial \alpha^j}(\vec{\alpha}) = \sum_s \frac{\partial \vec{x}_N}{\partial \beta^s}(\vec{\beta}) \frac{\partial \Phi^s}{\partial \alpha^j}(\vec{\alpha}) \quad \text{D.h.} \quad \vec{\partial}_{A,j} = \sum_s \vec{\partial}_{N,s} J^s_j(\vec{\alpha}) \quad \text{mit} \quad J^s_j(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \Phi^s}{\partial \alpha^j}(\vec{\alpha}).$$

D.h.: Die Transformationsmatrix der beiden Basisfelder ist einfach die Jakobimatrix J der Funktion Φ .

Nochmals: Φ gehört zu "neu durch alt" und gibt uns die Transformationsmatrix für "alt durch neu" der $\vec{\partial}$ -Felder. In der rechten geometrischen Kurzform $\vec{\partial}_{A,j} = \sum_s \vec{\partial}_{N,s} J_{.j}^s(\vec{\alpha})$ sind die meisten Argumente fortgelassen.

Für die durch die Indexstellung gekennzeichnete inverse Matrix folgt dann:

$$J_{.j}^s(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \Phi^s}{\partial \alpha^j}(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \beta^s}{\partial \alpha^j}(\vec{\alpha}) \quad \boxed{J_{i.}^k(\vec{\beta}) = \frac{\partial \Psi^k}{\partial \beta^i}(\vec{\beta}) = \frac{\partial \alpha^k}{\partial \beta^i}(\vec{\beta})}$$

(1.4.7) Jetzt sind wir problemlos in der Lage, das Transformationsverhalten unseres Vektorfeldes $f : V_0 \rightarrow V_0$ abzuleiten. Dabei nehmen wir ja an, dass beide Größen \vec{x} und $\vec{y} = f(\vec{x})$ bezüglich der beiden Basisfelder $\vec{\partial}_A$ und $\vec{\partial}_N$ entwickelt werden. Wir beginnen mit der absoluten Darstellung:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \sum \vec{\partial}_j^A f_A^j(\vec{\alpha}) = \sum \vec{\partial}_s^N f_N^s(\vec{\beta}) \\ &= \sum \vec{\partial}_s^N(\vec{\beta}) J_{.j}^s(\vec{\alpha}) f_A^j(\vec{\alpha}) \\ &= \sum \vec{\partial}_s^N J_{.j}^s(\Psi(\vec{\beta})) f_A^j(\Psi(\vec{\beta})). \end{aligned}$$

Zur zweiten Zeile: Wir müssen die neuen Komponenten durch die alten ausdrücken und $\vec{\beta}$ über $\vec{\alpha} = \Psi(\vec{\beta})$ als unabhängige Variable nehmen. Über Koeffizientenvergleich folgen die neuen Komponenten als Funktion der alten, **folgt also die gewünschte Transformationsbeziehung:**

$$\boxed{f_N^s(\vec{\beta}) = \sum_j J_{.j}^s(\Psi(\vec{\beta})) f_A^j(\Psi(\vec{\beta})) \quad \text{oder auch} \quad f_N^s(\vec{\beta}) = \sum_j \frac{\partial \Psi^s}{\partial \alpha^j}(\Psi(\vec{\beta})) f_A^j(\Psi(\vec{\beta}))}$$

(1.4.8) Damit wissen wir, wie sich Vektoren und Vektorfelder des Grundraumes transformieren. Wir haben J als Transformationsmatrix und wir müssen mit Hilfe von Ψ die korrekten Argumente einführen. Es sollte klar sein, wie die entsprechende Ausdehnung auf Tensorfelder aussieht.

- Rechnen Sie $f(\vec{x}) = \vec{x}$ und $g(\vec{x}) = (\vec{e}_3 \vec{x}) \vec{x}$ in Polarkoordinaten um. Absolut ist das leicht. Aber sie können und sollen das jetzt mit einigem Aufwand auch allein durch Transformation der Koordinaten ausführen. Beachten Sie: Sie können die Funktionalableitungen von Ψ bilden, die zugehörige Jacobimatrix invertieren, die korrekten Argumente einfügen und haben nach den Ableitungsregeln die gesuchte Jacobimatrix von Φ . Auf diese Weise umgehen Sie die Berechnung von Φ selbst.

11.1.4b Transformationsverhalten des Tupels der partiellen Ableitungen

(1.4.9) Wir haben gesehen, dass sich die Koordinatenbasisfelder $\vec{\partial}_i = \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial \alpha^i}$ kovariant transformieren. Dieser Sachverhalt läßt sich wie folgt verallgemeinern:

Seien $\vec{\alpha} \mapsto \vec{x}_A(\vec{\alpha})$ und $\vec{\beta} \mapsto \vec{x}_N(\vec{\beta})$ wieder zwei Parametrisierungen des Ortsfaktors \vec{x} . Weiter sei $f = (V_0, \vec{x} \mapsto f(\vec{x}), W)$ eine in irgendeinen Raum weiterführende differenzierbare Abbildung in einen Vektorraum W , in dem wir aber keine Basis einführen. Wie üblich setzen wir $f_A(\vec{\alpha}) = f(\vec{x}_A(\vec{\alpha}))$ und $f_N(\vec{\beta}) = f(\vec{x}_N(\vec{\beta}))$. Im Sinne der 2. Konvention bezeichnen wir die oben mit Φ und Ψ bezeichneten Übersetzungsabbildungen mit $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\vec{\beta})$ und $\vec{\beta} = \vec{\beta}(\vec{\alpha})$. Dann gilt beispielsweise $f_N(\vec{\beta}) = f_A(\vec{\alpha}(\vec{\beta}))$. (Fertigen Sie eine Skizze dieser Konfiguration!) Jetzt differenzieren wir partiell nach der neuen Koordinate β^i . Das gibt mit der Kettenregel

$$\frac{\partial f_N}{\partial \beta^i}(\vec{\beta}) = \sum_k \frac{\partial f_A}{\partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) \frac{\partial \alpha^k}{\partial \beta^i}(\vec{\alpha}(\vec{\beta})) = \sum_k \frac{\partial f_A}{\partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) J_{i.}^k = \sum_k J_{i.}^k(\vec{\alpha}) \frac{\partial f_A}{\partial \alpha^k}(\vec{\alpha}(\vec{\beta}))$$

und das bedeutet kovariantes Verhalten. Oder etwas anders geschrieben und mit fortgelassenen Argumenten

$$\boxed{\partial_i^N f_N = \sum_k J_{i.}^k \partial_k^A f_A.}$$

(1.4.10) Nochmals: Das ist die Kettenregel. Läßt man jetzt im Sinne der dritten Konvention in f noch die unterschweidenden Indizes A und N fort, dann kann man auch f "fortkürzen" und erhält für das Tupel der partiellen Ableitungen das Transformationsgesetz

$$\partial_i^N = \sum_k J_{i,k}^A \partial_k^A.$$

(1.4.11) (▼ T.16) Wegen $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \alpha^i}$ usw. merkt man sich das in Form einer **Eselsbrücke**: *Oben ist unten und unten ist oben*. Soll sagen: Ein oberer Index unten im Nenner ist oben unterer Index, da kovariant.

□ s Skalarfeld. Bilde $\frac{\partial^2 s}{\partial x^i \partial x^j}$. Welches Transformationsverhalten folgt aus der Eselsbrücke? Wieso ist das in diesem Fall korrekt?

(1.4.9) Fassen wir zusammen: **Die Feldkomplikation sieht in ihrer allgemeinen Form wie folgt aus:**

1. Urbild und Wert müssen u.U. gesondert transformiert werden.
2. Man startet günstig mit zwei bijektiven Parametrisierungen des Urbildraumes, die überall das Rangkriterium erfüllen.
3. Diese ergeben die benötigten Koordinatenbasisfelder und die Transformationsmatrix.
4. Mit der Transformationsmatrix kann man den gesamten Formalismus gemäß (1.1.26) starten, wobei der Ort als äußerer Parameter anzusehen ist.
5. Mit Hilfe der Parametrisierungen kann man die jeweils benötigte unabhängige Variable in den Argumenten einführen.

(1.4.10) Als wichtige Ergänzung zur Einführung des Transformationsformalismus sollte man sich noch bewußt machen, daß es zwei unterschiedliche zugehörige Aufgabentypen gibt:

□ Die **leichte Aufgabe** des Lernenden: Man kennt den Vektorraum V und die zugehörige Konstruktion von Basen für diesen Raum. Problem: Leite das Transformationsverhalten der Komponententupel, also die Übersetzungsabbildung her. Beispiel: Unsere Diskussion der Relativitätstheorie in Kap. 10.7. In den typischen Lehrbuchdarstellungen hat man es mit diesem Aufgabentyp zu tun.

□ Die **schwere Aufgabe** des (forschenden) Physikers: Man bildet aus Beobachtungsdaten ein Koordinatentupel und stellt korrespondierende Daten (derselben physikalischen Ereignisse) unterschiedlicher Beobachter zusammen. Suche dazu die passende mathematische Struktur, die mit den Daten vereinbar ist und prüfbare Voraussagen macht. (V, V₀, Transformationsgruppe, eventuell Konfigurationsraumparametrisierung.) Hierbei sollte man an die in Kapitel 10 besprochenen Beispiele aus der Relativitätstheorie denken:

Etwa: Aus dem experimentell gefundenen Sachverhalt der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit baue man die dazu passende Struktur der hyperbolischen Ebene auf.

Oder: Man erkläre die physikalischen Phänomene, die ein bewegter Beobachter vorfindet, wenn er statische elektrische oder magnetische Felder betrachtet durch Einführen der beschriebenen Zweiform F.

(1.4.11) Tatsächlich hat man es meist mit einer Mischform beider Aufgaben zu tun: Man hat eine physikalische Größe mit einem bestimmten theoretisch gegebenen Transformationsverhalten sowie erwartete Formelverknüpfungen mit anderen physikalischen Größen. Kurz: Man hat eine theoretische Vorerwartung und fragt sich, was man wie am günstigsten messen sollte, um dieses Verhalten und die Formeln zu überprüfen.

11.1.4c Die Ortsabhängigkeit der Koordinatenbasisfelder

(1.4.12) Wir wollen den drei- bzw. n-dimensionalen Raum V_0^n durch krummlinige Koordinaten parametrisieren:

$$\vec{x}_F = (G, \vec{\alpha} \mapsto \vec{x}_F(\vec{\alpha}), V_0^n) \quad G \subset \mathbb{R}^n \quad \text{offen}$$

Dabei soll \vec{x}_F glatt und regulär sein, d.h. die Abbildung soll ausreichend oft differenzierbar sein und die Funktionaldeterminante soll überall ungleich Null sein, so dass der Schluss von der Rechnung auf die Geometrie möglich ist. Genauer heißt das hier

Die Vektoren $\vec{\partial}_i$ bilden ein Basisfeld über der Parametrisierung \vec{x}_F . Für jedes $\vec{\alpha} \in G$ ist $\vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \vec{x}_F}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha})$ eine Basis von V_0^n im Punkte $\vec{x}_F(\vec{\alpha})$.

Beachten Sie, dass wir von \vec{x}_F nicht einmal *injektiv* verlangen. Injektiv muss nur die Ableitung $D\vec{x}_F(\vec{\alpha})$ sein.

(1.4.13) Im vergangenen Abschnitt haben wir untersucht, was geschieht, wenn wir die Parametrisierung wechseln. Dabei war der Ort $\vec{x} = \vec{x}_A(\vec{\alpha}) = \vec{x}_N(\vec{\beta})$ fest, war äußerer Parameter. Jetzt halten wir die Parametrisierung fest und verändern den Ort. Oder auch: Wir suchen nach der Tangentenapproximation für unser Basisfeld $\vec{\alpha} \mapsto \vec{\partial}_i(\vec{\alpha})$

(1.4.14) Dazu bilden wir zunächst die zweite Ableitung von \vec{x}_F :

$$\vec{x}_F(\vec{\alpha} + \Delta\vec{\alpha}) = \vec{x}_F(\vec{\alpha}) + D\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot \Delta\vec{\alpha} + \frac{1}{2} D^2\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot (\Delta\vec{\alpha}, \Delta\vec{\alpha}) + \dots$$

Dabei ist $D^2\vec{x}_F(\vec{\alpha})$ eine bilineare Abbildung (Abbildung, keine Bilinearform):

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (\Delta\vec{\alpha}_1, \Delta\vec{\alpha}_2) \mapsto D^2\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot (\Delta\vec{\alpha}_1, \Delta\vec{\alpha}_2), V_0^N)$$

Im \mathbb{R}^n haben wir die kanonische Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Denken Sie daran: $\Delta\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ ist ein Zahltuple. Entwicklung bezüglich dieser Basis gibt

$$D^2\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot (\Delta\vec{\alpha}_1, \Delta\vec{\alpha}_2) = \Sigma_{ik} \frac{\partial^2 \vec{x}_F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) \Delta\alpha_1^i \Delta\alpha_2^k \quad \text{mit} \quad \frac{\partial^2 \vec{x}_F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) = D^2\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_k) \in V_0^n.$$

(1.4.15) Beachten Sie, das sind jetzt keine Zahlen, sondern Vektoren aus V_0^n . In diesem Raum haben wir aber ein Basisfeld, nämlich $\vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \vec{x}_F}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha}) = D\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot \vec{e}_i$. Daher können wir die Vektoren der zweiten partiellen Ableitungen nach diesem Basisfeld entwickeln. Das gibt eine Darstellung der folgenden Art:

$$\frac{\partial^2 \vec{x}_F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) = \Sigma \vec{\partial}_m(\vec{\alpha}) \Gamma_{ik}^m(\vec{\alpha}).$$

Diese Koeffizienten heißen Christoffelsymbole. Aber **Achtung: Trotz der Indexstellung transformieren Sie sich nicht wie einer der üblichen Tensoren!** Jetzt spezifizieren wir die Glattheit von \vec{x}_F dahingehend, dass wir (mindestens) C^2 verlangen. D.h. die zweiten Ableitungen vertauschen. Und das bedeutet, dass die Γ -s in den unteren Indizes symmetrisch sind: $\Gamma_{ik}^m = \Gamma_{ki}^m$ für alle i und k. Das wird sich als eine wichtige Eigenschaft erweisen.

(1.4.16) Da die zweite Ableitung die erste Ableitung der ersten ist, können wir die **Tangentenzerlegung des Basisfeldes** $\vec{\partial}_i$ angeben. Zur Erinnerung: $D(D\vec{x}_F(\vec{\alpha}) \cdot \vec{e}_i) \cdot \Delta\vec{\alpha} = \Sigma \frac{\partial^2 \vec{x}_F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) \cdot \Delta\alpha^k$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \vec{\partial}_i(\vec{\alpha} + \Delta\vec{\alpha}) &= \frac{\partial \vec{x}_F}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha} + \Delta\vec{\alpha}) = \frac{\partial \vec{x}_F}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha}) + \Sigma \frac{\partial^2 \vec{x}_F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) \cdot \Delta\alpha^k + \dots \\ &= \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) + \Sigma \vec{\partial}_m \Gamma_{ik}^m \Delta\alpha^k + \dots \end{aligned}$$

(1.4.17) Diese Entwicklung erweist sich für uns als ausgesprochen wichtig. Die zugehörige Tangentenapproximation der Basisfelder lautet

$$\vec{\partial}_i(\vec{\alpha} + \Delta\vec{\alpha}) = \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) + \Sigma \vec{\partial}_m \Gamma_{ik}^m \Delta\alpha^k \quad \text{mit} \quad \Gamma_{ik}^m = \Gamma_{ki}^m.$$

Oder in Form einer partielle Ableitung

$$\partial_k \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \vec{\partial}_i}{\partial \alpha^k}(\vec{\alpha}) = \Sigma_m \vec{\partial}_m(\vec{\alpha}) \Gamma_{ik}^m(\vec{\alpha})$$

(1.4.18) Jetzt sei $\vec{\partial}^i$ das zu $\vec{\partial}_i$ reziproke Basisfeld. Also $(\vec{\partial}^r(\vec{\alpha}) \cdot \vec{\partial}_s(\vec{\alpha})) = \delta_s^r$. Ableiten mit der Produktregel gibt

$$0 = \left((\partial_i \vec{\partial}^r)(\vec{\alpha}) \cdot \vec{\partial}_s(\vec{\alpha}) \right) + \left(\vec{\partial}^r(\vec{\alpha}) \cdot (\partial_i \vec{\partial}_s)(\vec{\alpha}) \right).$$

Andererseits haben wir die folgenden beiden Entwicklungsformeln (Darstellung der Komponenten mit Skalarprodukten):

$$\begin{aligned} \partial_i \vec{\partial}_s &= \Sigma \vec{\partial}_m \left(\vec{\partial}^m \cdot (\partial_i \vec{\partial}_s) \right) = \Sigma \vec{\partial}_m \Gamma_{is}^m \\ \partial_i \vec{\partial}^r &= \Sigma \vec{\partial}^s \left(\vec{\partial}_s \cdot (\partial_i \vec{\partial}^r) \right) = -\Sigma \vec{\partial}^s \left(\vec{\partial}^r \cdot (\partial_i \vec{\partial}_s) \right) = -\Sigma \vec{\partial}^s \Gamma_{is}^r \end{aligned}$$

Vergleich gibt

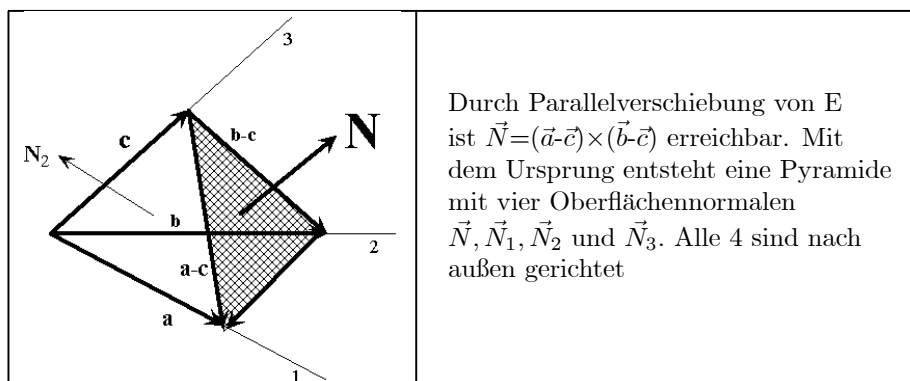
$$\boxed{\partial_i \vec{\partial}^r(\vec{\alpha}) = -\Sigma \vec{\partial}^s(\vec{\alpha}) \Gamma_{is}^r(\vec{\alpha})}$$

11.2 Anwendungsbeispiele

11.2.1 Das Transformationsverhalten eines Normalenvektors

(2.1.1) Wir betrachten den euklidischen V_0^3 , in dem physikalisch oder geometrisch eine Basis e , festgelegt ist, die keineswegs eine Orthonormalbasis sein muß. Unser Ziel ist, möglichst viele Größen einerseits quantitativ und andererseits möglichst einfach mit Hilfe dieser Basis zu beschreiben.

(2.1.2) Betrachten wir als Beispiel die Beschreibung des Flächennormalenvektors \vec{N} zu einer Ebene E , die gemäß der nachfolgenden Skizze durch die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} festgelegt sein soll. E soll keine der drei Achsen enthalten, so dass jede Parallelverschiebung der Ebene drei eindeutige Schnittpunkte mit den Achsen produziert. Die drei entstehenden Achsenvektoren $\vec{a} = \vec{e}_1 a$, $\vec{b} = \vec{e}_2 b$ und $\vec{c} = \vec{e}_3 c$ bilden dann mit der Ebene eine Pyramide.



(2.1.3) Wir haben

$$2\vec{N} = (\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c}) \quad 2\vec{N}_1 = -\vec{b} \times \vec{c} \quad 2\vec{N}_2 = -\vec{c} \times \vec{a} \quad 2\vec{N}_3 = -\vec{a} \times \vec{b}$$

Die Verschiebung von E ist gemacht, damit diese Gleichungen gelten. Jetzt verifiziert man durch Nachrechnen sofort

$$\boxed{-\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3}$$

(2.1.4) Nochmal der wichtige Punkt: Durch Parallelverschieben der Ebene können wir erreichen, daß $\vec{N} = \frac{1}{2} \varepsilon (\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})$ wird, wobei \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} die Koordinatenabschnittsvektoren der Ebene sind. $|\vec{N}|$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks. Das geht, da der Ausdruck auf der rechten Seite stetig von Null nach unendlich wächst. Das Vorzeichen ε ist so zu wählen, daß \vec{N} bezüglich der Pyramide äußere Normale ist. ($\varepsilon = +1$, wenn 1 oder drei Achsenabschnitte positiv sind, $\varepsilon = -1$, wenn 0 oder zwei Achsenabschnitte positiv sind).

(2.1.5) $|\vec{N}|$ ist der Flächeninhalt des von den Achsenabschnitten erzeugten Dreiecks. Weiter setzen wir $v = \vec{e}_1 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$. Das ist das orientierte Volumen des von den drei Basisvektoren aufgespannten Spates.

(2.1.6) Damit rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} 2\vec{N} &= (\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} \\ &= ab\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + ac\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + bc\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \\ &= (abv)\vec{e}^{*3} + (acv)\vec{e}^{*2} + (bcv)\vec{e}^{*1}. \end{aligned}$$

Hierbei ist \vec{e}^{*i} die zu \vec{e}_i reziproke Basis, also $\vec{e}^{*i} \cdot \vec{e}_k = \delta_k^i$. Wir haben bekanntlich $\vec{e}^{1*} = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{v}$ usw., was die letzte Umformung erklärt.

□ Machen sie eine Einheitenkontrolle!

(2.1.7) Die Rechnung aus (1.4.6) gibt für \vec{N} die Basisdarstellung bezüglich der reziproken Basis. Diese Darstellung ist unter den gegebenen Umständen von einfacher Form, kann unmittelbar aus den Systemdaten, die in Form der Achsenabschnitte a,b und c vorliegen, angegeben werden. Die Basisdarstellung durch die Ausgangsbasis selbst ist weitaus komplizierter. Nur wenn die Ebene eine der drei Achsen enthält und sich die Pyramide nicht bilden läßt, wird es komplizierter. Dann muß man notfalls einen geeigneten Grenzwert bilden.

(2.1.8) Nochmals das Ergebnis in Formelgestalt zusammengefaßt:

$\vec{N} = \sum \vec{e}^{*i} N_i$	$N_i = (\vec{e}_i \cdot \vec{N})$	$2N_1 = bcv$	$2N_2 = acv$	$2N_3 = abv$
oder	$\vec{N} = abc v \left(\vec{e}^{*1} \frac{1}{a} + \vec{e}^{*2} \frac{1}{b} + \vec{e}^{*3} \frac{1}{c} \right)$			
oder mit $2V=abcv$	$2\vec{N} = 2V \left(\vec{e}^{*1} \frac{1}{a} + \vec{e}^{*2} \frac{1}{b} + \vec{e}^{*3} \frac{1}{c} \right)$			
Gesamtvolumen!				

(2.1.9) Liegt die ursprüngliche Fläche in einer der Koordinatenebenen, dann ist nur eines der \vec{N}_i von Null verschieden. Die Formel $N_i = (\vec{e}_i \cdot \vec{N})$ bleibt gültig. Die Normale hat dann die Richtung des entsprechenden \vec{e}^{*i} . Bei der Darstellung durch die \vec{e}_i dagegen werden alle drei Terme benötigt. Die resultierende Richtung ist nicht mehr unmittelbar ersichtlich.

(2.1.10) Die weiteren Formeln aus (1.4.8) sind als Parametrisierung der drei Komponenten durch a,b und c anzusehen, wobei die Parameter geometrische Bedeutung besitzen. Das wird es uns ermöglichen, die beiden Gleichgewichtsbedingungen der Statik aus Kap.5 für den Pyramidenkörper in eine unmittelbar auswertbare Form zu bringen.

(2.1.11) Das Tupel $\vec{N}^K = (N_i)$ der drei Normalenvektoren transformiert sich - wie die Formel $N_i = (\vec{e}_i \cdot \vec{N})$ zeigt, kovariant. Wir haben es mit den kovarianten Komponenten eines Vektors zu tun. Also

$$N_i^{neu} = \sum_k ({}^t T^{-1})_i^k N_k^{alt}$$

11.2.2 Der Spannungstensor (Stress)

(2.2.1) Wir betrachten erneut einen elastischen Körper und nehmen an, dass er sich in einem Spannungszustand befinde. Wir wählen einen Punkt \vec{x} dieses Körpers mit zugehöriger Basis $\vec{e}_i = \vec{e}_i(\vec{x})$. Die zugehörige reziproke Basis bezeichnen wir mit \vec{e}^i , kennzeichnen sie also **nur noch durch die Indexsteilung**.

(2.2.2) Der Spannungszustand macht sich im Gedankenexperiment wie folgt bemerkbar: Schneidet man um x ein kleines ebenes Flächenstück mit äußerer Normale \vec{N} frei, so muß zum Aufrechterhalten des Gleichgewichtes eine kompensierende Kraft $\vec{K} = \vec{T}(\vec{N})$ angebracht werden. Die Größe das Stückes wählen wir so gering, dass Tangentenapproximation gültig ist. In diesem Bereich (und dann per Idealisierung allgemein) ist die Kraft proportional zur Fläche. Also $\vec{T}(\alpha\vec{N}) = \alpha\vec{T}(\vec{N})$. Oder auch: Der jeweilige Spannungsvektor $\frac{\vec{T}(\vec{N})}{|\vec{N}|}$ ist für feste Richtung konstant. $\frac{\vec{T}(\vec{N})}{|\vec{N}|}$ ist also ein Maß dafür, welchen Kräften und Spannungen das Material am Punkte \vec{x} ausgesetzt ist.

(2.2.3) **Uns interessiert die Zuordnung $\vec{N} \rightarrow \vec{T}(\vec{N})$, die die gesamte Information enthält.**

(2.2.4) Sei \vec{N} ein Normalenvektor, der in (1.4.2) beschriebenen Art und \vec{e}_i eine **konstante** Basis. Es sei $(\vec{N} \cdot \vec{e}_i) \neq 0$. Wir konstruieren die in (1.4.2) beschriebene Pyramide aus Dreiecksflächen und schneiden sie frei, fragen also nach dem **Kräftegleichgewicht am herausgeschnittenen Körper**. Das Flächenstück sei ausreichend klein gewählt, so dass Volumenkräfte gegen Flächenkräfte vernachlässigt werden können. (Die

Volumenkräfte gehen mit der dritten Potenz des typischen Figurdurchmessers nach Null, die Flächenkräfte nur mit der zweiten.) Der Sonderfall, dass die Fläche eine der Achsen enthält, sei ausgenommen. Dann haben wir insgesamt 4 Flächenkräfte zu betrachten. Kräftegleichgewicht für die Pyramide verlangt, dass die Summe aller vier Kräfte verschwindet.

Oder mit selbsterklärenden Bezeichnungen:

$$\vec{K}_N = -\vec{K}_1 - \vec{K}_2 - \vec{K}_3.$$

Nun gehört \vec{K}_1 zu dem von b und c aufgespannten Dreieck, mit äußerem Normalenvektor $\vec{N}_1 = -\frac{1}{2}\vec{b} \times \vec{c}$. Es ist die für diese Fläche benötigte Kompensationskraft. Also $-\vec{K}_1 = \vec{T}(\vec{N}_1)$. Analog für die beiden anderen Indizes. Unter Verwendung der in (1.5.2) besprochenen Homogenität folgt

$$\boxed{\vec{T}(\vec{N}) = \vec{T}(\vec{N}_1) + \vec{T}(\vec{N}_2) + \vec{T}(\vec{N}_3) = N_1 \vec{T}(\vec{e}^1) + N_2 \vec{T}(\vec{e}^2) + N_3 \vec{T}(\vec{e}^3)}.$$

(2.2.5) Für die drei Vektoren $\vec{T}(\vec{e}^i)$ setzen wir wie üblich eine Basisdarstellung an, wobei wir zur Darstellung die Ausgangsbasis verwenden:

$$\boxed{\vec{T}(\vec{e}^i) = \sum \vec{e}_k T^{ki}}$$

Einsetzen gibt:

$$\vec{T}(\vec{N}) = \sum \vec{e}_k T^{ki} N_i = \sum \vec{e}_k T^{ki} (\vec{e}_i \cdot \vec{N}) = \sum T^{ki} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_i (\vec{N})$$

(2.2.6) Damit haben wir eine Tensordarstellung einer linearen Abbildung $T: \vec{N} \mapsto \vec{T}(\vec{N})$ konstruiert. Beachten Sie: Urbildraum und Werteraum sind beide vom Typ V^3 . Aber wir verwenden zur Beschreibung unterschiedliche Basen: **Im Urbildraum arbeiten wir mit der reziproken Basis und im Werteraum mit der Ausgangsbasis.** Mit dieser Basiswahl erhält man für die Tensorkomponenten die günstigste Form.

(2.2.7) Die Tensorkomponenten müssen sich nach unserer Konstruktion doppelt kontravariant transformieren. Die Transformationsmatrix sei R. dann gilt in selbsterklärender Schreibweise:

$$T_{neu}^{st} = \sum R_{.k}^s R_{.m}^t T_{alt}^{km}$$

(2.2.8) **Für die freigeschnittene Pyramide muß nicht nur die Summe der Kräfte verschwinden, sondern auch die der Drehmomente!** Stellen wir die zugehörige Bilanz auf. Jede Kraft wirkt konstant auf eine dreieckige Fläche. Wir können sie als Gesamtkraft auf den jeweiligen Flächenschwerpunkt angreifen lassen. Dieser ist etwa im von \vec{a} und \vec{b} erzeugten Dreieck durch $\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$ gegeben. Die zu \vec{N} gehörige Fläche hat den Schwerpunkt $\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ Die Drehimpulsbilanz besagt unter Beachtung der Vorzeichenkonvention:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{T}(\vec{N}) \\ &= \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{T}(\vec{N}_1) + \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{T}(\vec{N}_2) + \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{T}(\vec{N}_3) \end{aligned}$$

(2.2.9) Setzt man links die Kraftbilanzgleichung $\vec{T}(\vec{N}) = \vec{T}(\vec{N}_1) + \vec{T}(\vec{N}_2) + \vec{T}(\vec{N}_3)$ ein, so heben sich sechs Beiträge fort.. Es verbleibt die Bedingung:

$$\vec{a} \times \vec{T}(\vec{N}_1) + \vec{b} \times \vec{T}(\vec{N}_2) + \vec{c} \times \vec{T}(\vec{N}_3) = \vec{0}$$

(2.2.10) Nun ist $\vec{a} = a\vec{e}_1$ usw. und $\vec{T}(\vec{N}_1) = \sum \vec{e}_k T^{ki}$. Einsetzen gibt sofort $\boxed{T^{ik} = T^{ki}}$ für alle Indexpaare. (Nehmen wir etwa die zwei Beiträge links zu $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$. Einer kommt aus $\vec{a} \times \vec{T}(\vec{N}_2) = bcv\vec{a} \times \vec{T}(\vec{e}_1)$ nämlich $abcvT^{21}$. Dabei haben wir (1.5.5) benutzt. Der zweite kommt aus $\vec{b} \times \vec{T}(\vec{N}_1)$ und ergibt sich zu $-bacvT^{21}$. Also $T^{12} = T^{21}$.)

(2.2.11) **D.h. der Spannungstensor ist symmetrisch.**

(2.2.12) Das ist ein wichtiges Resultat. In der Eigenwerttheorie in Kap. 12 werden wir sehen, dass es dann immer eine Orthonormalbasis \vec{e}_i , gibt, in der der Trägheitstensor Diagonalform annimmt (Hauptachsensystem). Basis und reziproke Basis stimmen bei einer Orthonormalbasis überein und wir finden für **diese** Basis die einfache Formel:

$$\boxed{\vec{T}(\vec{N}) = \vec{e}_1 \sigma_1 N_1 + \vec{e}_2 \sigma_2 N_2 + \vec{e}_3 \sigma_3 N_3 \quad \sigma_i = T^{ii} \quad T^{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j}$$

Da $\vec{N} \mapsto \vec{T}(\vec{N})$ einen wichtigen physikalischen Sachverhalt erfasst, lohnt diese Formvereinfachung.

(2.2.13) Wir geben ein **Beispiel einer Folgerung**: Sofern \vec{N} bei verschiedenwertigen σ -s nicht in Richtung einer der drei Achsen zeigt, haben \vec{N} und $\vec{T}(\vec{N})$ nicht dieselbe Richtung. Wir wollen $\vec{T}(\vec{N})$ dann in eine normale und eine tangentiale Komponente zerlegen. D.h. in eine normale Druckkraft auf die Fläche und eine tangentiale Scherkraft. Beides sind offenbar für Materialbeurteilungen wichtige Größen.

(2.2.14) Da die Kräfte im betrachteten Modell proportional zu den Flächeninhalten sind, normieren wir auf die Einheitsfläche, gehen also zu den Spannungen über. Die Normale parametrisieren wir durch die Polarwinkel, setzen also $\vec{n} = \vec{e}(\theta, \varphi)$ an und suchen nach der Abbildung $M: {}^t(\theta, \varphi) \mapsto {}^t(T_n(\theta, \varphi), T_t(\theta, \varphi))$. Die Indizes stehen für normal und tangential.

(2.2.15) Die normale Komponente zeigt in Richtung \vec{n} , ist also die zu \vec{n} parallele. Wir erhalten über die Hauptachsenformel aus (1.5.12) sofort die uns interessierende *Mohrsche Abbildung*:

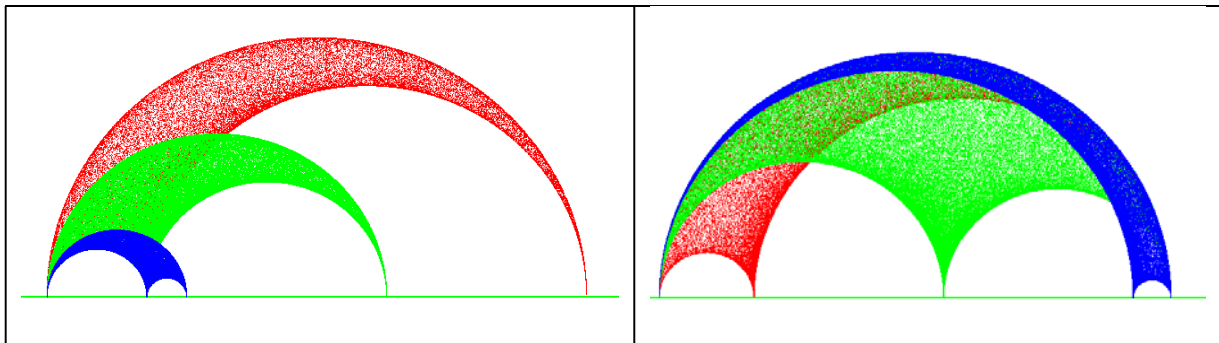
$$\begin{aligned} {}^t(\theta, \varphi) &\mapsto M(\theta, \varphi) = {}^t(T_n(\theta, \varphi), T_t(\theta, \varphi)) \\ n_1 &= \cos \varphi \sin \theta \quad n_2 = \sin \varphi \sin \theta \quad n_3 = \cos \theta \quad (\text{Polardarstellung}) \\ T_n &= (\vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n}) = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ T_t &= \sqrt{\vec{T}^2(\vec{n}) - T_n^2} = \sqrt{(\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2} \end{aligned}$$

Dies ist eine geometrisch interessante Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Insbesondere zeigt Bild(M) an, welche tangentialen und normalen Spannungen an der betrachteten Stelle des Körpers überhaupt auftreten können, wie und wie stark das Substratmaterial also belastet wird.

(2.2.16) Der Deformationstensor beschreibt die Geometrie einer Deformation, gibt an, wie sich mit der Materie verbundene geometrische Größen wie Winkel und Längen unter der Deformation ändern. Der Spannungstensor beschreibt Einflüsse, die in Form von Kräften auf den Körper wirken und die Ursache der Deformation sind. Und diese Kräfte treten hier weniger als äußere Felder auf, wie wir es sonst gewöhnt sind, als in Form von Kräften, die benachbarte Teilstücke über die Grenzfläche aufeinander ausüben.

Diese Kräfte werden durch den Spannungstensor (stress) beschrieben. Offen bleibt noch die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den beiden Tensoren. In Kap. 11.3.# werden wir darauf zurückkommen.

Die Figur zeigt zwei Beispiele für das Bild der Mohrschen Abbildung. Horizontal ist T_t , vertikal T_n aufgetragen. $\sigma_1 = 1$. Im linken Bild ist $\sigma_3 = 1.5$ und $\sigma_2 = 1.7$ und 2.7 und 3.7 (rot). Im rechten Bild ist $\sigma_2 = 3.7$ und σ_3 durchläuft die drei Werte 1.5 und 2.5 und 3.5.



11.2.3 Der Gradient eines Skalarfeldes

Den Gradienten haben wir bereits kurz in Kap.6 (3.1.13) und (3.2.11) eingeführt. Zur Erinnerung:

Ist s Skalarfeld auf dem **euklidischen** V^n mit totaler Ableitung Ds , so gilt für das totale Differential

$$Ds(\vec{x}) \cdot \Delta \vec{x} = (\text{grad}s(\vec{x}) \cdot \Delta \vec{x})$$

Das legt über die Kürzungsregel den Vektor $\text{grad}s(\vec{x})$ fest.

Jetzt benutzen wir den Gradienten, um die Transformationsproblematik exemplarisch zu verdeutlichen. Ebenso ergibt das ein weiteres Beispiel, wie das Transformationsverhalten über die mathematische Struktur festgelegt wird. Die Länge dieser Ausführungen sollte eindringlich den Nutzen des gesamten Formalismus verdeutlichen. Denn die gesamten Rechnungen und Ausführungen lassen sich zu dem Satz zusammenfassen: **Die partiellen Ableitungen eines Skalarfeldes transformieren sich kovariant.**

11.2.3a Ein gerechnetes Beispiel des Transformationsproblems

(2.3.1) Wir geben ein idealisiertes Beispiel zum Szenenbild Beobachterwechsel. Alle Basen seien im Konfigurationsraum konstant. Die Rechnungen sind - besonders bei ungeschickter Schreibweise - nicht ganz kurz, aber weitgehend festgelegt.

(2.3.2) Der Beobachter A verwende ein kartesisches Koordinatensystem, das zu der Orthonormalbasis e_i gehöre, unser *altes* System. Wir kennzeichnen es durch kleine Buchstaben. B dagegen arbeitet mit schiefen Koordinaten, die zu einer Basis \vec{E}_i gehören. Die zugehörigen neuen Koordinaten kennzeichnen wir durch große Buchstaben. Beide Beobachter beschäftigen sich mit ein und derselben "Temperaturverteilung" $\vec{x} \mapsto T(\vec{x})$.

(2.3.3) Für A ist dass die Temperaturverteilung $(x,y,z) \mapsto T(x,y,z)$ (eigentlich $T_A(x,y,z)$). Auch B spricht von der Temperaturverteilung $(x,y,z) \mapsto T(x,y,z)$. Eigentlich $(X,Y,Z) \mapsto T_B(X,Y,Z)$. Solange beide getrennt arbeiten, stört die gleiche Bezeichnung nicht. Man sieht, wie die in 11.1.2 beschriebenen Konventionen entstehen.

(2.3.4) B bestimmt den Temperaturgradienten für einen Punkt experimentell und fragt an, ob sein Resultat mit einer theoretischen Vorhersage von A übereinstimmt. Er überläßt A die Transformationsarbeit und gibt nur $\boxed{\text{grad}T(1,2,2) = (20,6,22)}$ als sein Ergebnis an.

(2.3.5) Das Temperaturfeld, das A als Beschreibungsgrundlage benutzt, sei wie folgt gegeben $T(x, y, z) = 5 + 2x^2 + 3yz - 4(xy + xz)$. Wie muß A vorgehen, um die Messung von B zu interpretieren?

(2.3.6) A beschafft sich über die Basis E des B die Information: $\vec{E}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{E}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ und $\vec{E}_3 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Damit folgt R^{-1} und durch Rechnung R, wenn R die übliche Transformationsmatrix bezeichnet :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Also ist der von beiden gemeinsam betrachtete Punkt der Temperaturmessung

$$\vec{x}_0 = \vec{e}_1 5 + \vec{e}_2(-2) + \vec{e}_3 2 = \vec{E}_1 1 + \vec{E}_2 2 + \vec{E}_3 2.$$

(2.3.7) In seiner Koordinatenbeschreibung findet A für diesen Punkt den Feldwert:

$$T(5, -2, 2) = T_A(5, -2, 2) = 5 + 50 - 12 = 43.$$

(2.3.8) Für das Tupel der partiellen Ableitungen der in (2.3.5) gegebenen Temperaturverteilung erhält er:

$$\vec{\partial}T_A(x, y, z) = (4x - 4y - 4z, 3z - 4x, 3y - 4x)$$

A benutzt seine kartesische Basis, so dass der folgende Gradientenvektor entsteht: $\text{grad}T(\vec{x}_0) = \vec{e}_0 20 + \vec{e}_2(-14) + \vec{e}_3(-26)$.

(2.3.9) Welche Beziehung besteht nun zu der Tupelangabe des B aus(2.3.4)? Diese lautete $\text{grad}T(0,2,2) = (20,6,22)$? Das Resultat von B könnte sich auf dessen Basis E oder die zugehörige reziproke Basis E^* beziehen. Im ersten Fall hätte man es mit dem folgenden absoluten Vektor zu tun, der **nicht** gleich dem in (2.3.8) gefundenen Resultat ist:

$$\begin{aligned} 20\vec{E}_1 + 6\vec{E}_2 + 22\vec{E}_3 &= 20\vec{e}_1 + 6(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + 22(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \\ &= 48\vec{e}_1 - 38\vec{e}_2 + 22\vec{e}_3 \end{aligned}$$

(2.3.10) Alternativ könnte das Komponententupel sich auf die reziproke Basis des B beziehen, die wir jetzt durch obere Indizes kennzeichnen. \vec{E}^i ist unser früheres \vec{E}_i^* . Da offensichtlich $\vec{E}_1 \cdot (\vec{E}_2 \times \vec{E}_3) = 1$ gilt, folgt

$$\vec{E}^1 = \vec{E}_2 \times \vec{E}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \quad \vec{E}^2 = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \quad \vec{E}^3 = \vec{e}_3$$

Bezüglich dieser Basis des Grundraumes ergibt sich (aus dem angegebenen Gradiententupel des B) folgender absoluter Vektor:

$$20\vec{E}^1 + 6\vec{E}^2 + 22\vec{E}^3 = 20(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) + 6(\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) + 22\vec{e}_3 = 20\vec{e}_1 - 14\vec{e}_2 - 26\vec{e}_3.$$

(2.3.11) Und das stimmt allerdings voll mit dem Tupel überein, das A in (2.3.7) berechnet hat.

(2.3.12) Alternativ könnte A aber auch sein Temperaturfeld in die Koordinaten von B umrechnen und auf diese Weise dem B Vorhersagen für weitere Punkte liefern. In diesem Fall folgt unter Beachtung unserer Vereinbarung, B-s Koordinaten mit Großbuchstaben zu bezeichnen:

$$\begin{aligned} T_B(X,Y,Z) &= T_A(R^{-1}\vec{X}^B) = T_A(X+Y+Z, Y-2Z, Z) \\ &= 5 + 2(X+Y+Z)^2 + 3(Y-2Z)Z - 4(X+Y+Z)(Y+Z) \\ &= 5 + 2X^2 - 2Y^2 + 9XZ + 7YZ. \end{aligned}$$

Speziell $T_B(1,2,2)=5+2-8+16+28=43$. Und damit wie erwartet

$$T_A(5, -2, 2) = T_B(1, 2, 2) = 43.$$

(2.3.13) Jetzt bilden wir das Tupel der partiellen Ableitungen von T_B :

$$\partial T_B(X, Y, Z) = (4X + 8Z, -4Y + 7Z, 8X + 7Z) \quad \text{speziell} \quad \partial T_B(1, 2, 2) = (20, 6, 22)$$

(2.3.14) A teilt dem B mit, dass es sich bei seinem Tripel um die Komponenten eines kovarianten Vektors handele, sich also auf die Darstellung durch reziproke Basis beziehen. Dann weiß B, dass er es - bis auf eventuelle Isomorphie - mit dem folgenden Vektorfeld zu tun hat:

$$\begin{aligned} (X, Y, Z) &\mapsto \vec{E}^1(4X + 8Z) + \vec{E}^2(-4Y + 7Z) + \vec{E}^3(8X + 7Z). \quad \text{Speziell:} \\ (1, 2, 2) &\mapsto \vec{E}^1 20 + \vec{E}^2 6 + \vec{E}^3 22 \end{aligned}$$

(2.3.15) Das ist dasselbe Resultat, das oben mit der anderen Methode erhalten wurde. Die gesamten Betrachtungen sind konsistent, sofern wir annehmen, **dass sich das Komponententupel der partiellen Ableitungen eines Skalarfeldes kovariant transformiert**.

(2.3.16) Auch rein geometrisch ist es sinnvoll, den Gradienten mit Hilfe der reziproken Basis darzustellen.

Wir wissen: geometrisch gibt die Richtung des Gradienten die Richtung der stärksten Feldänderung und die steht senkrecht auf der Tangentialebene zum betrachteten Punkt. Sei \vec{x}_0 ein betrachter fester Punkt und $\vec{x}_0 + E$ die zugehörige Tangentialebene an die zugehörige Niveaufläche. Der Rang von $Ds(\vec{x}_0)$ sei 1. Wir wählen eine Basis \vec{e}_1, \vec{e}_2 für E. D.h. in diese Richtungen sind die beiden partiellen Ableitungen von s Null. Jetzt ergänzen wir zu einer Gesamtbasis. Die partielle Ableitung in die neue Richtung ist nicht Null. Aber der Gradient dürfte i.a. nicht in Richtung von \vec{e}_3 zeigen, denn diese Richtung muß ja nicht auf E senkrecht stehen. Dagegen hat \vec{e}^3 die gewünschte Richtung.

Die nachfolgende mathematische Analyse wird diese Überlegungen formal rechtfertigen.

11.2.3b Der mathematische Formalismus

(2.3.17) Sei s ein Skalarfeld auf V_0 . Der Wert der Feldänderung ds, also das totale Differential, hängt von zwei unterschiedlichen Einflußgrößen ab. Zum einen vom Feld selbst, zum anderen von der gewählten Änderung $\Delta\vec{x}$ der Kontrollgröße, des Urbildes. Die zugehörige Formel $ds=Ds(\vec{x})\cdot\Delta\vec{x}$ trennt die beiden

Größen als Formel. Im Falle des Skalarfeldes ist $Ds(x)$ eine lineare Abbildung $V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, also ein Element des Dualraumes: $Ds(x) \in V_0^*$.

(2.3.18) Wir haben

$$ds = Ds(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x} = \langle Ds(\vec{x}) | \Delta\vec{x} \rangle \quad \text{mit der kanonischen Bilinearform}$$

Num ist ds eine absolute, physikalische Größe, die Feldänderung in der Werterolle!

(2.3.19) Wir geben in V_0 zum Punkte \vec{x} eine feste Basis a_i mit zugehöriger dualer Basis a^i vor, die wir mit A indizieren. Es sei $s(\vec{x}) = s(\Sigma \vec{a}_i x^i) = s_A(\vec{x}^A)$ und $\Delta\vec{x} = \Sigma \vec{a}_i \Delta x^i$. Dann wissen wir aus Kapitel 6, dass gilt:

$$ds = \Sigma \frac{\partial s_A}{\partial x^i}(\vec{x}^A) \Delta x^i = \Sigma \frac{\partial s_A}{\partial x^i}(\vec{x}^A) \langle a^i | \Delta\vec{x} \rangle = \langle \Sigma \frac{\partial s_A}{\partial x^i}(\vec{x}^A) a^i | \Delta\vec{x} \rangle = Ds(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x}$$

(2.3.20) Die Kürzungsregel gibt:

$$Ds(\vec{x}) = \Sigma a^i \frac{\partial s_A}{\partial x^i}(\vec{x}^A) = \Sigma a^i \partial_i s_A(\vec{x}^A)$$

(2.3.21) Ebenso ergibt diese Rechnung die vielfach nützliche Rechenformel

$$ds = \Sigma (\partial_i s_A(\vec{x}^A)) \Delta x^i$$

(2.3.22) Das alles ist nur Spezialisierung der allgemeinen Ableitungstheorie auf unseren Fall. Die Formeln gelten für jedes konstante Basisfeld von V_0 . Orthonormal ist nicht verlangt.

(2.3.23) Wir sehen, dass das Tupel der partiellen Ableitungen das Koordinatentupel der Linearform $Ds(x)$ ist und sich somit kovariant transformiert. Dies haben wir dadurch berücksichtigt, daß wir ∂_i (als Abkürzung für $\frac{\partial}{\partial x^i}$) einen unteren Index gegeben haben. Die folgende Regel zeigt generell, welches Transformationsverhalten bei partiellen Ableitungen zu erwarten ist: (Weitere Tensorregel (▼T.16), auch bereits in (1.4.11) hergeleitet):

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$	selbsterklärende	Unten ist oben und
$\partial^i = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}$	Eselbrücke	oben ist unten

Leitet man nach einer kovarianten Größe ab, etwa einer Komponente einer Linearform, so entsteht eine kontravariante Größe.

Die Merkmregel erweist sich als ausgesprochen nützlich.

□ Was alles ist bei dieser Formel gemäß den Konventionen aus 11.1.2 dem Kontext zu entnehmen?

(2.3.24) Was kommt hinzu, wenn V_0 euklidischer Vektorraum ist? Das Skalarprodukt sei mit $E(\vec{a}|\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ bezeichnet. Wir haben den kanonischen Isomorphismus $\iota: V_0 \rightarrow V_0^*$ aus Kap. 10.4.2c mit der definierenden Beziehung $\langle \lambda | \vec{x} \rangle = E(\lambda | \vec{x})$. Insbesondere gilt $\iota^{-1}(a^i) = \vec{a}^i$. Die duale Basis a^i wird auf die reziproke \vec{a}^i abgebildet. In unserem Fall ergibt das die exakte Definition des Konfigurationsraumvektors Gradient:

$$\begin{aligned} \text{grads}(\vec{x}) &= \iota^{-1} Ds(\vec{x}) = \Sigma \vec{a}^i (\partial_i s_A(\vec{x}^A)) \\ \text{und } ds &= \text{grads}(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x} \end{aligned}$$

(2.3.25) Beide Einflußgrößen auf ds werden jetzt durch geometrische Objekte **des Konfigurationsraums** repräsentiert. Damit kann der Gradient auch in der üblichen Weise als Pfeil gezeichnet werden. (Vgl. die Einführung des Skalarproduktes im Vorkurs!)

(2.3.26) Die beiden Formeln aus (2.3.24) enthalten alles, was wir wissen müssen, um den Gradienten zu beherrschen. $\vec{x} \mapsto \text{grads}(\vec{x})$ ist ein Vektorfeld auf V_0 , das kanonische Bild der totalen Ableitung Ds . Die partiellen Ableitungen in einer bestimmten Basidarstellung sind gerade die Komponenten bezüglich der reziproken Basis. Das ist immer dann wichtig, wenn keine Orthonormalbasis vorliegt. Und ds wird erhalten, indem man den Gradienten und die Verschiebung $\Delta\vec{x}$ skalar multipliziert. Für viele Anwendungen ist das - wie schon häufig betont - die entscheidende Formel. Die inhaltlich geometrische Bedeutung des Vektors $\text{grads}(\vec{x})$ wurde bereits früher besprochen. Die Konstruktion gilt für jeden endlichdimensionalen euklidischen Raum.

(2.3.27) Da sich die reziproken Basen bei Basiswechsel mit ${}^tT^{-1}$ transformieren, finden wir das folgende Transformationsverhalten unter Basiswechsel:

$$\partial_k s_N(\vec{x}^N) = \Sigma ({}^tT^{-1})_{k.}^m \partial_m s_A(\vec{x}^A) \quad \text{mit} \quad \vec{x}^N = T\vec{x}^A.$$

Das verifiziert man direkt, indem man $s_N(\vec{x}^N) = s_A(T^{-1}\vec{x}^N)$ per Kettenregel differenziert. Zum Merken dient die Kurzformulierung: **Die Komponenten des Gradienten transformieren sich kovariant** - unterer Index bei ∂ -. Die Rechnungen bei einem Basiswechsel können im konkreten Fall durchaus aufwendig sein. Das hat nichts mit der Einfachheit der allgemeinen Struktur zu tun.

Und fast jedes benötigte Resultat kann auf unterschiedlichen Wegen bestimmt werden. Man sollte darauf achten, jeweils einen günstigen Weg zu finden. Im anschließenden Konkretisierungsbeispiel zeigen wir mehrere Rechenwege auf.

(2.3.28) Im Fall einer kartesischen Basis ist das Schema des Vorgehens meist:

s in Koordinaten formulieren / partielle Ableitungen bilden / mit Basis bzw. $\Delta\vec{x}$ kombinieren / ergibt den Gradienten bzw. ds.

Es sollte klar sein, wie dieses Grundschemata bei nicht kartesischer Basis zu ändern ist. Später werden wir sehen, dass es sogar auf den Fall krummliniger Koordinaten ausgedehnt werden kann.

(2.3.29) **Konkretisierungsbeispiel.** Wir wählen $V_0 = V^2$ mit euklidischem Skalarprodukt. E indiziere ein kartesisches Koordinatensystem mit Basis \vec{e}, \vec{f} . Unser Beispielfeld sei

$$s(\vec{x}) = (\vec{A} \cdot \vec{x}) + \frac{(\vec{B} \cdot \vec{x})}{\vec{x}^2} \quad \vec{A} = (\vec{e} + \vec{f})A \quad \vec{B} = \vec{e}B.$$

(2.3.30) Felddiskussion: Für große \vec{x} dominiert der erste Term abgesehen von der Richtung senkrecht zu \vec{A} . Für kleine \vec{x} dominiert der zweite Term bis auf die Richtung senkrecht zu \vec{B} . Im Ursprung ist das Feld undefiniert. Hier treffen sich die Feldlinien aller Werte. Durch Nullsetzen der Ableitung - siehe unten - findet man zwei kritische Punkte, die vom Sattelpunktstyp sind. Sie errechnen sich zu

$$\vec{x}_+ = -\vec{x}_- = \left(\sqrt{\sqrt{2} + 1}, \sqrt{\sqrt{2} - 1} \right).$$

Überdies gilt die Symmetrie $s(-\vec{x}) = -s(\vec{x})$. Der zweite Term beschreibt das Potential eines Dipols der zweidimensionalen Elektrodynamik. Es ist überlagert vom Potential eines konstanten Feldes \vec{A} .

(2.3.31) Für das kartesische System E hat man die Koordinatendarstellung

$$s_E(x, y) = A(x + y) + \frac{Bx}{r^2} \quad \text{mit} \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Ableiten gibt

$$\partial s_E(x, y) = \left(A + B \frac{y^2 - x^2}{r^4}, A - B \frac{2xy}{r^4} \right) \quad \text{grad}s(\vec{x}) = \vec{A} + B \frac{(y^2 - x^2)\vec{e} - 2xy\vec{f}}{r^4}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $\vec{e}^* = \vec{e}$ und $\vec{f}^* = \vec{f}$ ist. Nullsetzen des Gradienten liefert die beiden kritischen Punkte. Denken Sie daran: $\partial s_E(x, y) \in \mathbb{R}^{2*}$ steht zunächst einmal nur für eine Zusammenfassung von Zahlen. Es bedarf einer gesonderten Interpretation, damit man eine geometrische Bedeutung erhält.

(2.3.32) Jetzt führen wir eine zweite Basis dadurch ein, dass wir die reziproken Vektoren vorgeben. Und zwar wählen wir $\vec{a}^* = \vec{A}$ und $\vec{b}^* = \vec{B}$ mit den oben eingeführten Vektoren \vec{A} und \vec{B} . Der Index sei A. Unsere Wahl bedeutet: $x^A = \vec{a}^* \cdot \vec{x} = \vec{A} \cdot \vec{x}$ und $y^A = \vec{b}^* \cdot \vec{x} = \vec{B} \cdot \vec{x}$. (Skalarprodukte, $\vec{x} = \vec{a}^* x^A + \vec{b}^* y^A$). Diese Vorgaben legen das gesamte Transformationssystem fest.

Man findet:

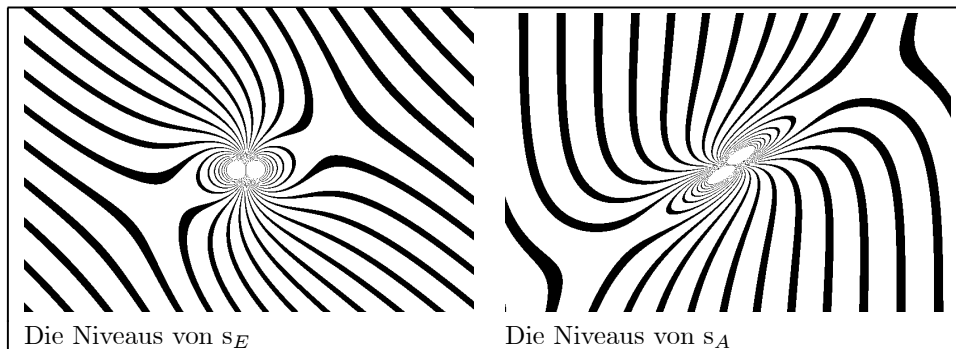
$$\begin{array}{|l} \vec{a}^* = \vec{e} + \vec{f} \\ \vec{b}^* = \vec{e} \end{array} \quad \begin{array}{|l} \vec{a} = \vec{0} + \vec{f} \\ \vec{b} = \vec{e} - \vec{f} \end{array} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad g^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det g^A = 1 \\ \hline \begin{array}{|l} \vec{e} = \vec{0} + \vec{b}^* \\ \vec{f} = \vec{a}^* - \vec{b}^* \end{array} \quad \begin{array}{|l} \vec{e} = \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{f} = \vec{a} \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\vec{a}^*, \vec{b}^*) = (\vec{a}, \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Man sieht, wie aufwendig das gesamte System ist, wenn man **alle** zugehörigen Beziehungen aufschreibt. Meist benötigt man jedoch nur einen Teil dieser Beziehungen bzw. kann sogar mit denen arbeiten, die unmittelbar gegeben sind. In unserem Fall ist s_A gesucht. Geht man von s_E aus, so benötigt man die neuen Koordinaten als Funktion der alten. Dies kann man auf viele Weisen bewerkstelligen. Etwa $\vec{x} = \vec{a}x' + \vec{b}y' = \vec{f}x' + (\vec{e} - \vec{f})y' = \vec{e}(-y') + \vec{f}(x' - y') = \vec{e}x + \vec{f}y$. Vergleich gibt $x = -y'$ und $y = x' - y'$. Alternativ kann man T^{-1} anwenden oder mit der reziproken Basis arbeiten: $x = \vec{e} \cdot \vec{x} = \vec{e}(\vec{a}x' + \vec{b}y') = -y'$ usw.

(2.3.33) Hat man die gewünschte Umrechnung, so gibt Einsetzen mit x für x' und y für y' :

$$s_A(x, y) = x + \frac{y}{x^2 + 2y^2 - 2xy}$$

(2.3.34) Als Felder auf dem \mathbb{R}^2 sind s_E und s_A vom Rechenausdruck aus gesehen recht verschieden. Die Figuren zeigen die Niveaulinien. Man sieht deutlich, dass es sich doch um 2 ähnliche Quantifizierungen desselben Feldes handelt.



(2.3.35) Jetzt können wir partiell differenzieren und finden

$$\partial s_A(x, y) = \left(1 - \frac{2y(x-y)}{r^4}, \frac{x^2 - 2y^2}{r^4} \right)$$

(2.3.36) Mit Hilfe der reziproken Basis gibt das den absoluten Gradienten:

$$\text{grad}s(\vec{x}) = \vec{a}^* \left(1 - \frac{2y'(x' - y')}{r'^4} \right) + \vec{b}^* \frac{x'^2 - 2y'^2}{r'^4} = \vec{A} \left(1 - \frac{2y'(x' - y')}{r'^4} \right) + \vec{B} \frac{x'^2 - 2y'^2}{r'^4}$$

(2.3.37) Drückt man \vec{a}^* und \vec{b}^* durch \vec{e} und \vec{f} aus und x' und y' über T durch x und y dann folgt der früher für E gewonnene Ausdruck des Gradienten.

(2.3.38) Hat man die Zusammenhänge einmal verstanden, so sieht man, daß der gesamte Sachverhalt sich auch durch die folgende Gleichung zusammenfassen läßt **mit der Vereinbarung, jeweils die richtigen Variablen einzusetzen:**

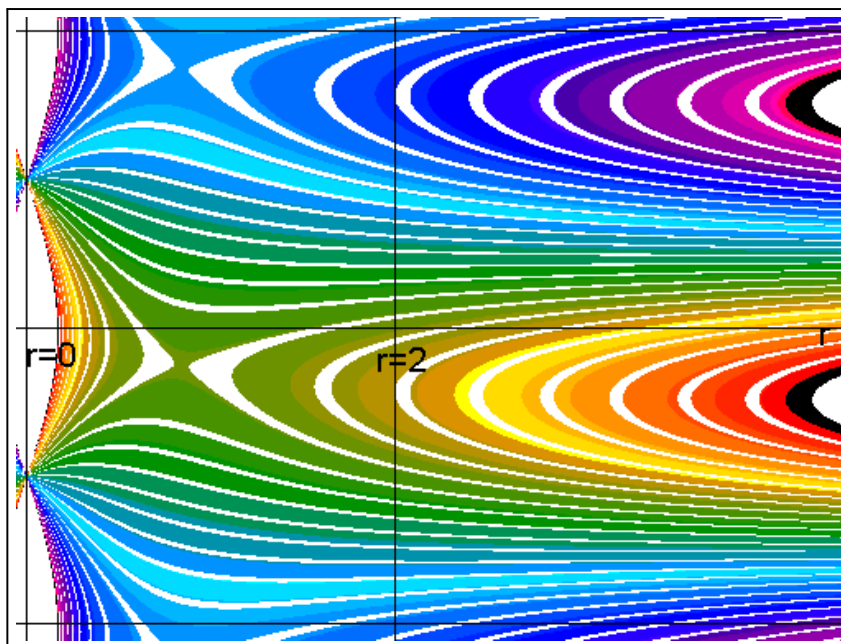
$$ds = \Sigma (\partial_i s_E) \Delta x_E^i = \Sigma (\partial_r s_E T_{ri}^{-1}) T_{is} \Delta x_E^s = \Sigma (\partial_r s_A) \Delta x_A^r$$

Vgl.(2.3.27).

Wie sieht unser Feld in Polarkoordinaten aus? Man erhält

$$s_P(r, \theta) = Ar\sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{B}{r} \cos\theta.$$

Nachfolgend sind für A=B=1 die Niveaulinien aufgezogen. r horizontal ab r=0 und θ von $-\pi$ bis π vertikal.



11.2.3c Der Gradient bei krummlinigen Koordinaten

(1.6.41) Die Qualität eines Formalismus spiegelt sich auch darin wieder, wie gut er sich auf neuartige Situationen verallgemeinern läßt. In unserem Fall erhebt sich das Problem, den Gradienten in krummlinigen Koordinaten, sagen wir Polarkoordinaten, darzustellen. Konkret: wie kann man etwa über die Darstellung (1.6.40) den Feldgradienten finden?

(1.6.42) Sei $\vec{x}_P : G_P \rightarrow G$ eine surjektive glatte Parametrisierung von G. Auf G sei das Skalarfeld $s:G \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Parameter $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$. Wie in 6.1.7 beschrieben bilden wir die Parametrisierung von s vermöge $s_P(\vec{\alpha}) = s(\vec{x}_P(\vec{\alpha}))$. Diese Gleichung leiten wir nach α^i unter Verwendung der Kettenregel ab. Es folgt:

$$\frac{\partial s_P}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha}) = Ds(\vec{x}_P(\vec{\alpha})) \cdot \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) \quad \text{mit} \quad \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) = \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha}).$$

(1.6.42) Die Vektoren $\vec{\partial}_i = \vec{\partial}_i(\vec{\alpha})$ bilden aber ein Basisfeld. Wir können für jedes K die zugehörige reziproke Basis bilden, die wir mit $\vec{\partial}^i = \vec{\partial}^i(\vec{\alpha})$ bezeichnen. Das gibt uns ein weiteres Basisfeld, die reziproke Basis. Und $Ds(\vec{x}_P(\vec{\alpha})) \cdot \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) = \left(\text{grad}s(\vec{x}) \cdot \vec{\partial}_i(\vec{\alpha}) \right)$ ist gerade der zugehörige Entwicklungskoeffizient. Damit folgt sofort die Entwicklung des Gradienten nach dem reziproken Basisfeld:

$$\boxed{\text{grad}s(\vec{x}) = \sum \vec{\partial}^i(\vec{\alpha}) \frac{\partial s_P}{\partial \alpha^i}(\vec{\alpha})}$$

Dabei ist die 1. Konvention zur Abbildungsbezeichnung benutzt.

Damit haben wir den gesamten Formalismus für konstante Basisfelder problemlos auf den Fall der krummlinigen Koordinaten übertragen.

□ Überlegen Sie sich mindestens zwei weitere Herleitungen dieser Formel. Natürlich ist auch der Verweis auf frühere Resultate zulässig.

(1.6.43) Nehmen wir als Beispiel räumliche Polarkoordinaten. Die $\vec{\partial}_i$ sind hier orthogonal, aber nicht normiert. Man findet:

$$\vec{\partial}^r = \vec{\partial}_r \quad \vec{\partial}^\theta = \frac{1}{r} \vec{\partial}_\theta \quad \vec{\partial}^\varphi = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{\partial}_\varphi$$

Ist etwa das Skalarfeld gegeben durch $s_P(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin(\alpha r \cos \theta)$, so folgt

$$\text{grad}s(\vec{x}) = \vec{\partial}^r (2r \sin(\alpha r \cos \theta) + \alpha r^2 \cos \theta \cos(\alpha r \cos \theta)) + \vec{\partial}^\theta (-\alpha r^3 \sin \theta \cos(\alpha r \cos \theta))$$