19. Tag Übungen Etwa bis Aufgabe 5 sowie 8)

■ 1) Fingerübungen zur Integration $\frac{1}{\alpha}$-Regel und Umkehrung Kettenregel):

$I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{1+\pi^2 x^2}$	$I_{11} = \int_0^a dx \ \frac{1}{a+x}$	$I_{13} = \int_0^{\frac{T}{2}} dx \ \sin(\omega x)$ mit $T=\frac{2\pi}{\omega}$	$I_{14} = \int_0^A dx \ e^{-ax}$
$I_{15} = \int_0^1 dx \ e^{-2x+3}$	$I_{18} = \int_1^1 dt \ (1+7x^2 t)^{17}$	$I_{20} = \int_0^1 dt \frac{d}{dt}(1+t^2)^5$	$\frac{d}{dx}\int_0^x dt e^{-xt} = ?$

$J_1 = \int_1^2 dx \ x^3(1+2x^4)^7$	$J_2 = \int_1^2 dx \ \frac{x}{2+3x^2}$	$J_3 = \int_1^2 dx \ \frac{x}{(2+3x^2)^2}$	$J_4 = \int_0^1 dx \ x e^{x^2}$
$J_5 = \int_0^1 dx \ \frac{2x+3}{x^2+3x+5}$	$J_6 = \int_0^q dt \ t\sin(3t^2)$	$J_7 = \int_{-1}^1 dx \ \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^3}$	$J_8 = \int_0^a dt \ \frac{\sin(\omega t)}{1+2\cos^2(\omega t)}$

$$J_{91} = \int_0^1 dx \ \frac{x}{1+x^4} \qquad J_{92} = \int_0^1 dx \ \frac{x^2}{1+x^4} \qquad J_{93} = \int_0^1 dx \ \frac{x^3}{1+x^4}$$

$$\text{und } J_{10} = \int_1^3 dx \ \frac{\ln x}{x}. \quad \text{und } J_{11} = \int_a^b dt \frac{f'(t)}{f(t)} \qquad J_{12} = \int_a^x dt \frac{f'(t)}{f^2(t)}$$

■ 2) Sei x$\mapsto f(x)$ reelle integrable Funktion. Auch x$\mapsto |f(x)|$ sei integrabel. Dann gilt

$$\left| \int_a^b dx f(x) \right| \leq \int_a^b dx \, |f(x)| \, .$$

a) Konkretisieren Sie die Ungleichung durch ein Beispiel, für das keine Gleichheit herrscht.
b) **Beweisen** Sie die Ungleichung.

■ 3) Sei f(x)=x+2sin(2x). Bestimmen Sie die Stammfunktion F von f, die $F(\pi) = 5$ erfüllt.

■ 4) Einige "Umformungen des Integranden". Was folgt jeweils?

$\frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$	$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\frac{1}{1+e^x}$ mit e^{-x} erweitern!

■ 5) Berechnen Sie mit Partialbruchzerlegung

$$J_1 = \int \frac{dx(x+3)}{x(x^2-4)} \qquad J_2 = \int \frac{dx(ax+b)}{(x-a)(x-b)} \qquad J_3 = \int dx \frac{x^2}{x(x-1)}$$

$I_1 = \int \frac{dx(x^2+5)}{x^2(x^2+4)}$	$I_2 = \int \frac{dx}{(x-a)^2(x-b)^2}$	$I_3 = \int \frac{dx x^2}{x^2-1}$

$$K_1 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \qquad K_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$$

■ 6) Berechnen Sie mit partieller Integration folgende Integrale

$\int_0^T dt t e^{at}$	$\int_0^a dx x^2 \sin x$	$\int_0^A dx atn(x)$	$\int_0^A dx asn(x)$

■ 7) Berechnen Sie über Ableiten nach einem Parameter oder partielle Integration

$$\int_0^\infty dt t^n e^{-at} \text{ für n=0,1,2,...}$$

■ 8) Weitere Fingerübungen:

$E_1 = \int_0^1 dx(2+3x)^4$	$E_2 = \int_1^2 \frac{dx}{(2-3x)^3}$	$E_3 = \int_0^1 \frac{dx}{(2-3x)^3}$
$F_1 = \int_a^x du(1+ux)^7$	$F_2 = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{(1+3x^2)^7}$	$F_3 = \int_0^x du \frac{\cos u}{\sin^4(u)}$
$S_1 = \int dt \ \cos(at)\sin(\sin(at))$	$S_2 = \int \frac{dt e^{-xt}}{(1+e^{-xt})}$	$S_3 = \int da \ \sin^2(xa)$
$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \ x\sqrt{1-4x^2}$	$I_2 = \int_0^1 dx \ x\sqrt{1-4x^2}$	$I_3 = \int \frac{dt(at+b)}{(t+1)^2}$
$I_4 = \int \frac{dx}{2x^2-3x+5}$	$I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}}$	$I_6 = \int_0^A \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1+\sqrt{u}}}$
$R_1 = \int \frac{1+x+x^2}{(x+1)(x-1)}$	$R_2 = \int dx x^a (\ln x)^2$	$R_3 = \int dt e^{-t}(e^{2t} - 2e^{-2t})$

$I_1 = \int_{-1}^1 dx \left[1+(2x-3)^{17}\right]$	$I_2 = \int_0^1 dt \ t e^{3t^2}$	$I_3 = \int_0^a du \ \frac{u^3}{(u^4+a^4)^2}$	$I_4 = \int_0^1 dx \ \frac{x+3}{3x+2}$
$I_5 = \int_{-a}^a du \ u^5 \cos(\sin(u))$	$I_6 = \int dx \cos^3 x$	$I_7 = \int dx \sin x e^{3\cos x}$	$I_8 = \int dx \frac{\ln(\ln x))}{x}$

Kurvendiskussion: $\boxed{f_1(x) = \frac{e^x}{1+x}}$ und allgemeiner $\boxed{f_{2n+1}(x) = \frac{e^x}{1+x^{2n+1}}}$

Inspektion zeigt folgende Sachverhalte:

▼ 1) x$\neq -1$ Pol. Näherung: $\frac{e^{-1}}{1+x}$

▼ 2) $\mathrm{f}_1(0) = 1$ genauer

▼ 2a) Herleitung der Dominanzapproximation um x=0 mit Hilfe der Polynomapproximation für exp und der geometrischen Reihe;

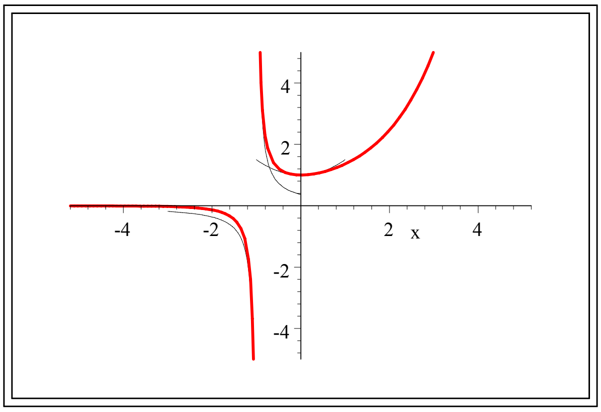
$$\begin{aligned} f_1(x) &= (1 + x + \frac{1}{2}x^2 ...)(1 - x + x^2 - ...) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + ... \quad \text{Verhalten bei x=0.} \end{aligned}$$

▼ 3) Funktion geht gegen 0 für x nach -∞, gegen ∞ für x nach ∞

4) $\mathrm{f}'(x) = \frac{e^x \cdot (1+x) - e^x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x^2)}$ Nur Null für x=0!

5) Minimum bei x=0.

Das sagt folgende Graphenform vorher bzw. erklärt diese:



Was ist mit $\frac{e^x}{1+x^3}$? Die Punkte 1), 2) und 3) bleiben. Für das Verhalten um x=0 folgt jetzt:
2a)

$$f_3(x) = (1 + x + \frac{1}{2}x^2 ...)(1 - x^3 + ...) = 1 + x + ...$$

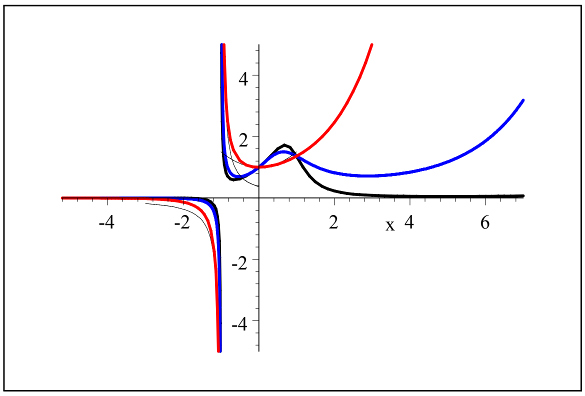
Also anderer Durchgang durch x=0!.

▼ Zu 3) Was geschieht für positive x? Zunächst wird der Nenner groß (auch im Vergleich mit e^x)! D.h. f(x) wird wieder kleiner, bleibt aber positiv. Erst bei ausreichend großem x gewinnt der Zähler. Wo das stattfindet ist nicht klar. Bei x=1 haben wir stets (alle 1+x^{2n+1}) den y-Wert $\frac{e}{2}$. Bei x=2 aber schon $\frac{e^2}{1+2^3} =$ 0.82. Also muss zwischen x=0 und x=2 ein Maximum liegen. Entsprechend zwischen x=-1 und x=0 ein Minimum. Da f schließlich wieder wächst, muss oberhalb von x=1 ein weiteres Minimum liegen.

4) $\mathrm{f}'_n(x) = e^x \frac{1 \cdot (1+x^n) - 1 \cdot nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{e^x}{(1+x^n)^2}\left(1 - nx^{n-1} + x^n\right)$

Zur Extremwertbestimmung müssen wir das Nullstellenverhalten von y=x$^n - nx^{n-1} + x^n$ analysieren.

Jetzt die Graphen von f_1, f_3 und f_5.



Der Graph von f_5 nähert sich überraschen weit der x-Achse. Erst etwa bei x=13 gewinnt die Exponentialfunktion.

Und wo liegen die Extremwerte? Bei den Nullstellen von $y = x^n - nx^{n-1} + x^n$. Wir zeigen dies für n=3 und 5 und finden tatsächlich die drei erwarteten Nullstellen und damit Extremwerte.