■ 1) Bestimmen Sie von folgenden Funktionen die Ableitung:

$$\begin{array}{llll} F_1(x)=(-3x^3+7)^8 & F_2(x)=\frac{1}{(1-x^2)^3} & ..=\sqrt{1-x} & ..=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ „=\sin(\cos(x)) & ..=\ln(x+\ln(x)) & ..=\ln(e^x+x) & ..=\sin^2(e^{x^2}) \end{array}$$

■ 2) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x)=\frac{1}{1+x}$ auf mindesten 5 verschiedene Weisen.
■ 3) Es sei $sh(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ und $ch(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.
a) Ableitungen ?
b) Funktionsverhalten ("Kurvendiskussion")
c) Was ergibt $ch^2(x)-sh^2(x)$?
d) sh(x+y) und ch(x+y). Bestimmen Sie die zugehörigen Additionstheoreme
e) Vergleich mit den trigonometrischen Funktionen
■ 4) Bestimmen Sie zum Punkte (a,sin(a)) auf dem Graphen von sin die Tangente und die Normale.
a) Wo schneiden sich die Normalen zweier verschiedener Graphenpunkte?
b) Bestimmen Sie den Krümmungsradius der Parabelpunkte und den geometrischen Ort des Mittelpunktes des Krümmungskreises.
■ 5) Ableitung und Diskussion von $\boxed{f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-4}}$
a) Wie lautet die Tangentenzerlegung von f um $x_0=4$ und um $x_0=-4$?
■ 6) Berechnen Sie **alle** Lösungen der folgenden Bestimmungsgleichungen

$$\tan(x)=2 \quad \sin(x)=0.5 \quad \arctan(x)=0.2 \quad \cos(x^2)=0.5$$

■ 7) $f=(D, x \mapsto f(x), \mathbb{R})$ und $J \subset D$ ein Intervall. Wie lautet die Definition von "f ist in J monoton wachsend"?
■ 8) Diskutieren Sie $f_a(x)=|x|^a \ln|x|$ mit 0<a<1.
■ 9)Diskutieren Sie $g_a(x)=(1+ax^2)e^{-x^2}$. Leiten Sie insbesondere eine Polynomnäherung für x nahe bei Null her. Hinweis: Nutzen Sie dazu die Tangentenzerlegung von e^x um x=0.
♣ 7) und 8) wurden ausführlich besprochen, 9) angefangen. Das Vorgehen für 4b) wurde gestern besprochen. Zu 2): Da gibt es wirklich eine Vielzahl von Möglichkeiten.

Zu 9): Wir haben

$$e^{0+\Delta x}=1+\Delta x+\Delta x R_e(0,\Delta x)$$

Für Δx wählen wir $-x^2$. Für kleines x ist x^2 auch klein, so das der Rest klein bleibt:

$$e^{-x^2}=1-x^2+(-x^2)R_e(1,-x^2)\approx 1-x^2.$$

Wir setzen die Tangengtenapproximation ein und finden für kleine x

$$\begin{aligned} g_a(x) &= (1+ax^2)e^{-x^2}\approx(1+ax^2)(1-x^2) \\ &= 1+(a-1)x^2-ax^4\approx 1+(a-1)x^2. \end{aligned}$$

Das ist die gesuchte Polynomapproximation.
Beachten Sie: Startet man für a>0 bei x=0, so wächst der erste Faktor, wogegen der zweite Faktor sich verkleinert. Die Approximation zeigt das Verhalten des Produktes, d.h. welcher der Faktoren zunächst gewinnt. a=1 ist der Grenzfall!
Was zeigt uns die **Inspektion** des Rechenausdrucks:
(1) g_a ist gerade. (2) für |x| groß geht $g_a(x)$ nach Null. (3) Für a>0 ist $g_a(x)$ stets positiv. Für (4) a< 0 erhalten wir eine Nullstelle bei $x_{N\pm}=\pm\sqrt{\frac{1}{-a}}$.

Die hergeleitete Polynomapproximation zeigt, dass es für a>1 zwei Maxima geben muss. (Nach oben geöffnete Parabel!). Weiter außen gibt es dann Wendepunkte
Wir suchen den Ort der Maxima:

$$
\begin{aligned}
g_a'(x) &= 2ax \cdot e^{-x^2} + (1+ax^2)(-2x)e^{-x^2} \\
&= 2xe^{-x^2}((a-1) - ax^2))
\end{aligned}
$$

Also bei

$$x_{M\pm} = \sqrt{\frac{a-1}{a}} \qquad \text{und } x_M{=}0$$

Die Lage der Wendepunkte bestimmen wir nicht mehr. Damit ist die Struktur weitgehend geklärt. Wir betrachten die Fälle a=1, a=-2 und a=2

	x_{N+}	x_{M+}	$1+(a-1)x^2$
a=1	xx	0	1
a=-2	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{6}$	$1-3x^2$
a=2	xx	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$1+x^2$

Das gibt folgendes Bild: