■ 1) Diskutieren Sie y=2sin(x)cos(x) einmal mit Hilfe einer Termumformung und einmal direkt. Überdies geht y=$\cos^2 x - \sin^2 x$ aus der diskutierten Funktion durch eine kleine Transformation hervor. Um welche handelt es sich?

■ 2) Skizzieren sie die Graphen der folgenden Zuordnungen:

x$\mapsto \sqrt{x^n(a-x)}$ n=1,2,3,4 a>0	x$\mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+2}$	x$\mapsto x+\sqrt{x}$	x$\mapsto \sqrt{\sin^2(x)}$	x$\mapsto x\sqrt{1-x^2}$

■ 3) Diskutieren Sie (kurz) den Verlauf der zusammengesetzten Abbildung x$\mapsto \ln(\ln(x))$.

■ 4) Wie verhalten sich $e^{\sin(x)}$, $e^{3\sin(2x)}$ und $e^{\sin^2(3x)}$ bei x=0? (Die bisherige Information reicht zur Antwort!)

■ 5) Was bewirken kleine Transformationen im Falle der Sinusfunktion? (Das heißt welche neuen Funktionen erhält man so? Formulieren Sie den Rechenausdruck und skizzieren sie den Graphen.

a) Dasselbe für x$\mapsto \sqrt{x}$ und x$\mapsto \ln(x)$. Welche Beobachtung macht man hinsichtlich der Zahl der Freiheitsgrade für das Ergebnis?

■ 5) Bilden Sie für die folgenden Rechenausdrücke ein Verlaufsdiagramm (in x):

$\sin(3x^2+e^x)$	$\sin(3x^2)+e^x$	$x^2-\sin(\ln(\cos(x^2)))$	$x+x^2\sin(x^2)+\frac{x^2}{\sin x^2}$	

Tangentenzerlegung

■ 6) Formulieren Sie die Tangentenzerlegung von x$\mapsto x^{-n}$ um einen Punkt $x_0 \neq 0$. Bestimmen Sie mit Hilfe der ersten Denkfigur die Ableitung.

a) Versuchen Sie das auch für x$\mapsto w(x) = \sqrt{x}$ mit x,$x_0 > 0$. Hinweis: An der richtigen Stelle mit dem Faktor $\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)$ erweitern

b) Bestimmen Sie mit der ersten Denkfigur die Ableitung von F(x)=$\frac{x^2+3}{x^3+2}$. Welcher $x_0 - Wert$ ist auszunehmen?

■ 7) Die Ableitung von f(x)=$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ ist $f'(x_0) = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}$. Das sei bekannt. Berechnen Sie jetzt $\sqrt[3]{8.01} = \sqrt[3]{8+0.01}$ exakt und in Tangentenapproximation. Dasselbe für $\sqrt[3]{8.001}$ und $\sqrt[3]{9}$. Berechnen sie jeweils auch den absoluten und den lokalen Fehler.

■ 8) **Fingerübung Additionstheorem**: Je eine Formel für sin(x+y+z) und für cos(x+y+z) herleiten.

■ 9) Welche Beziehung besteht zwischen der allgemeinen Exponentialfunktion E_a und der Exponentialfunktion exp?

■ 10 a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung aller nach oben geöffneten Normalparabeln (der Ebene), deren Scheitelpunkt auf dem Einheitskreis um den Ursprung liegt.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung an die Tangente der Normalparabel zum Punkte x_0.

c) Patrametrisierern Sie alle Tangenten an die Normalparabel.

■ 11) Berechnen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln die folgenden Ableitungen:

$$f_1(x)=\sin(x^2) \quad f_2(x)=\sin^2 x \quad f_3(x)=\sqrt{1+3x^2} \quad f_4(x)=e^{x^2}\cos(x) \quad f_5(x)=\frac{x^2-x+1}{e^x+1}$$

■ 12) Skizzieren sie den Graphen von f(x)=x+sin(x). Gesucht ist eine Lösung der Gleichung f(x)=$\frac{1}{2}$. Wandeln Sie das in ein Nullstellenproblem um und bestimmen Sie die Lage der Nullstelle näherungsweise mit dem Newtonverfahren.

■ 13) Diskutieren sie f(x)=$|x|^{\frac{1}{5}}\ln(|x|)$. Wo verschwindet die Ableitung?

■ 14) Bestimmen Sie die Ableitungen des Arcustangens, des hyperbolischen Arcustangens und des Arcussinus.

■ 15) **Beweisen** Sie die Ungleichung $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Hinweis: Skizze, die erste Ungleichung über den Vergleich zweier Längen, die zweite über den Vergleich zweier Flächeninhalte! Beweisen Sie dann, daß $\frac{\Delta x - \sin\Delta x}{\Delta x}$ die Resttermeigenschaft besitzt.

■ 16) Beweis / Problemlösung / Textverständnis: Gegeben ein Kreis und eine zugehörige Sehne der Länge 2y. Weiter der Kreisdurchmesser, der senkrecht auf dieser Sehne steht. Dieser Durchmesser wird von der Sehne in 2 Strecken unterteilt, deren Längen mit u und v bezeichnet werden. Zeigen Sie, daß $y^2 = uv$ gilt. (Hinweis: Skizze mit geeignetem Koordinatensystem!)

■ 17) Beweisen Sie die Quotientenregel mit Hilfe der Produktregel, der Kettenregel und dem bereits geführten Nachweis, daß y$\mapsto \frac{1}{y}$ für y$\neq 0$ differenzierbar ist.

■ 18) Bestimmen Sie für die folgenden Rechenausdrücke (über Einsetzen der Tangentenzerlegungen) das Verhalten an den Unbestimmtheitsstellen:

$$\frac{\tan x}{x(3+7x)} \quad \frac{\ln(x)}{x-1} \quad \frac{(\ln x)^2}{x-1} \quad \frac{\ln x}{(x-1)^2} \quad \frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)}$$

■ 19) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente zum Punkte (x_0, x_0^2) an die Parabel y=x^2. Bestimmen Sie dann eine Gleichung der Normalen durch denselben Punkt.

■ 20) Diskutieren Sie die Funktion y=$\frac{x^2}{1+x^4}$

■ 21) Diskutieren Sie die Funktion y=$\frac{x^2}{1+x^2}$. Wieso ist hier die Umformung $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ angebracht?

■ 22) Bestimmen Sie die Lage der Nullstellen und der Maxima der folgenden drei Funktionen: y=sin(x^2) und y=sin($\frac{1}{x}$) und y=sin($\sqrt{x}$).

■ 23) Diskutieren Sie die beiden Funktionen $h_\pm(x) = \sqrt{|x|} \pm \sqrt{1-x^2}$. Beide Graphen in einem Bild skizzieren!

■ 24) Diskutieren Sie die Funktionsscharen $f_a(x) = x + a\sin(x)$ und $g_a(x) = \frac{a}{x^2+a}$. .

■ 25) Diskutieren Sie das Verhalten der Kurvenschar

$$f_n(x) = \frac{e^x}{1+x^n} \quad \text{n=0,1,2,3,...}$$

■ 26) Wie lautet die Tangentenzerlegung von y=$\frac{e^{\sin(\tan(x))}}{1-x}$ um x=0? (Ohne Rechnung!)

■ 27) Geben Sie die Tangentenapproximation der durch $\delta \mapsto \sin\delta \cdot e^{2\tan(3\delta)}$ gegebenen Funktion um $\delta = 0$ an.

■ 28) **Kettenregel**: Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Ableitung:

F_1(x)=(-3x^3 + 7)^8 $\quad F_2(x) = \frac{1}{(1-x^2)^3}$ $\quad F_3(x)=\sqrt{1-x}$ $\quad F_4(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$F_5(x)$=sin(cos(x)) $\quad F_6(x)$=ln(x+ln(x)) $\quad F_7(x)=\ln(e^x + x)$ $\quad F_8(x) = x^x$

■ 29) Berechnen Sie **alle** Lösungen der folgenden Bestimmungsgleichungen

tan(x)=2 $\quad$ sin(x)=0.5 $\quad$ arctan(x)=0.2 $\quad$ cos(x^2)=0.5