Übungen (11.Tag)
Skalarprodukt

■ $\boxed{\text{0) Aufwärmen}}$: Den Winkel zwischen $\vec{e} = (1,1,2)$ und $\vec{f} = (3,1,1)$ bestimmen. / Was versteht man unter Bilinearität des Skalarproduktes? / Wie erkennt man mit Hilfe des Skalarproduktes, ob der Winkel (zwischen was) spitz oder stumpf ist? / Bestimmen Sie alle zu (1,2,3) senkrechten Vektoren einmal rechnerisch und einmal über die Nutzung allgemeiner Resultate! / Den *Cosinussatz* vektoriell herleiten! / $(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c})(4\vec{a} + 2\vec{b}) = ...$

Und: Beweise: In einem Rhombus (=Raute=Parallelogramm mit gleichlangen Seiten) stehen die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht.

■ 1) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}(1) = (2,2,1)$ und $\vec{v}(1) = (0,1,3)$. Unter welchem Winkel trifft die Flugbahn die x-y-Ebene? (Immer "Winkel zwischen zwei Vektoren", hier zwischen momentaner Geschwindigkeit und $\vec{e}_3$). $\vec{g}$ =(0,0,-10)

a) Umkehrung: Der Winkel zwischen momentaner Geschw. und $\vec{e}_3$ (der gegebenen Flugparabel) sei bekannt. Kann man daraus die zugehörige Höhe z=H bestimmen?

■ 2) $\boxed{\text{Rechenübungen}}$ Skalarprodukt: Alle Indizes K werden fortgelassen! Sei

$$\vec{a} = (1,3,7) \quad , \quad \vec{b} = (4,0,-2) \quad \text{und} \quad \vec{c} = (3,-1,0).$$

- Berechnen Sie: $\vec{a}^2$, $|\vec{a}|$, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, $|\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}^2\vec{c}$, $\vec{b}^2\vec{c}^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- Die Einheitsvektoren in Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{a} - 2\vec{b}$
- Den Abstand der Endpunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- Den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{a} + \vec{b}$.

■ 3) Vereinfachen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für das Skalarprodukt die Terme $(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})^2 - (\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}) \cdot (\vec{x} - \vec{y} - \vec{z})$ und $((\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}))(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b})^2(\vec{a} - \vec{b})$.

■ 4) Formen Sie mit Hilfe der Bilinearität des Skalarproduktes den Term $\left(\vec{a}^2\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}\right)^2$ um. Es muß $\vec{a}^2(\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b}))^2$ herauskommen.

■ 5) Wie kann man mit Hilfe des Skalarproduktes Winkelhalbierende parametrisieren? Welches Schnittproblem bietet sich an? Versuchen Sie sich daran.

■ 6) Gegeben das 1×3-System 2x+3y+7z=10. Bestimmen Sie für die Lösungsebene die Achsenabschnitte, den (kürzesten) Abstandsvektor und dessen Länge.

■ 7) Gegeben Sei die Vektorgleichung $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ vom Typ der Zentralformel. Multiplizieren Sie beide Seiten dieser Gleichung skalar einmal mit $\vec{a}$ und einmal mit $\vec{b}$. Kann man mit dem Ergebnis α und β bestimmen? ($\vec{x}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien gegeben)

■ 8) Wie erhält man zu einer gegebenen Geraden Vektoren dazu senkrechte Vektoren? Dasselbe für eine gegebene Ebene.

■ 9) Was für Figuren werden durch die folgenden 3 Mengen (im Konfigurationsraum) festgelegt? $\vec{a} \in V_0^3$ sei ungleich Null.

$\{\vec{x} \mid \vec{x} \in V_0^3,\ \vec{x}^2 = 9\}$	$\{\vec{x} \mid \vec{x} \in V_0^3,\ (\vec{a} \cdot \vec{x}) = 9\}$	$\{\vec{x} \mid \vec{x} \in V_0^3,\ (\vec{a} \cdot \vec{x}) = 9, \vec{x}^2 = 4\}$

■ 10) 3x$+\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z = 2$ beschreibt eine Ebene im Raum. Als Skalarprodukt schreiben ($\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b}$) und in die verschiedenen in (6.1.40) gegebenen Formen bringen und interpretieren!

■ 11) Skalarprodukt und Vektorprodukt: Es seien g und h zwei Geraden im Raum. Dann sind der "kürzeste Abstand" zwischen den Geraden und der "Winkel zwischen den Geraden" wichtige Bestimmungsstücke der Konfiguration.

Beide lassen sich mit Hilfe des Skalarproduktes bestimmen. Überlegen Sie sich eine zugehörige Strategie. Was den kürzesten Abstand betrifft, so sollte der **Vektor** des kürzesten Abstandes bestimmt werden, samt der Lage dieses Vektors relativ zu den beiden Geraden.

Rechnen Sie als konkretes Beispiel $\vec{x}_g(a) = a(1,2,3)$ und $\vec{x}_h(b) = (2 + b, 3b, 1)$.

Vektorprodukt

■ 12) Nochmals $\boxed{\text{Aufwärmen}}$: Geometrische Form des Vektorproduktes? / Normale zur Ebene E durch P aus E? Lot von Q auf die Ebene E?

■ 13) Rechenübungen Vektorprodukt:

Sei $\vec{a} = (1,3,0)$ und $\vec{b} = (0,3,-1)$ und $\vec{c} = (\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{5}) = \frac{1}{30}(15,40,-12)$.

a)Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times (\vec{a} - \vec{c})$, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{a})$, $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 5\vec{c})$.

b) Zerlegen Sie $\vec{a}$ in die zu $\vec{b}$ parallele und senkrechete Komponente.

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einmal mit Hilfe des Skalarproduktes und einmal mit Hilfe des Vektorproduktes.

d) Welche Orientierung haben die drei Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$?

■ 14) Sei E Ebene mit Parametrisierung $\vec{x}_E(u,v) = (1+u, 2+v, 3+u+2v)$. und P der durch $\vec{x}_E(2,1)$ bestimte Punkt auf E. Weiter sei Q der Punkt mit Ortsvektor $\vec{x}_Q = (4,4,4)$.

a) Bestimmen Sie die Normale von E im Punkte P.

b) Bestimmen Sie den Vektor des kürzesten Abstandes von Q und E.

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Verbindungsstrecke von P mit Q un d der Ebene E.

■ 15) Ein Fluid ströme mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}^K = (0,10,0)$. Eine Parallelogrammfläche in der Stömung werde durch die beiden Kantenvektoren $\vec{a}^K = (2,0,1)$ und $\vec{b}^K = (1,0,-3)$ festgelegt. Wie groß ist das Volumen, das pro Zeiteinheit durch die Fläche strömt?

■ 16) Reziproke Basis zu $\vec{a} = (2,1,1)$, $\vec{b} = (1,2,1)$ und $\vec{c} = (1,1,12)$.

Komplexe Zahlen

■ 17) Beweisen Sie das Assoziativgesetz für die komplexe Multiplikation (mit der Tunnelmethode und der kart. Darstellung!)

■ 18) $\boxed{\text{Rechenübungen}}$: Sei $z_1 = 3 - i$ und $z_2 = 3 + 3i$. Bestimmen Sie für die folgenden Rechenterme die kartesische Endform u+iv. Meist gibt es mehrere Rechenwege. Bemühen sie sich jeweils, einen kurzen zu finden.

$z_1 z_2$	$(z_1 + z_2)^2$	$(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$	$(z_1 + iz_2)^2$
$(1+z_1)^2$	$1+z_1 + z_1^2$	$2z_1 - 3z_2$	$(i+z_1)(i - z_2)$

■ 19) a) Wandeln Sie in die polare Darstellung um (mindestens geistige Skizze!):

3+3i	3+4i	3-4i	-3+4i	-3i

b) Wandeln Sie in die kartesische Darstellung um:

$3e^{2i}$	$5e^{-2i}$	$3e^{4i}$	$2e^{i\pi}$	$3e^{i\frac{\pi}{2}}$	$-5e^{i\frac{\pi}{4}}$	$e^{-\frac{\pi}{2}+2}$

c) Umwandeln mit Taschenrechner oder Computerprogramm!

■ 20) Sei z=3-4i. Bestimmen Sie dazu z^2, $\sqrt{z}$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{i-z}$, (i-z)(z+1) und $\sqrt{i+z}$ sowohl in polarer als auch in kartesischer Form. (Das Resultat möglichst effizient in einer geeigneten Darstellung ansteuern, dieses umwandeln.)

■ 21) Vereinfachen Sie die folgenden Rechenausdrücke:

$\frac{3-4i}{2+i} + \frac{5+i}{2-i}$	$\frac{i+\frac{2-i}{2+3i}}{1-\frac{2+5i}{2-3i}}$	$i+\frac{1}{2+i} + \frac{1}{2}$	$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+e^{i\frac{\pi}{2}}}$

■ 22) Bestimmen Sie alle (auch die komplexen) Lösungen für z von

$$(1+i)z^2 - 3iz + 2 = 3i.$$

■ 23) Bestimmen Sie alle komplexen z, die die folgende Gleichung erfüllen: $\boxed{\frac{i}{(1+i)+\frac{1}{i(z+1)}} = \frac{1}{3+i}}$.

a) Dasselbe für $\boxed{\frac{1}{z+i} + \frac{2}{z-i} = 3+4i}$.

■ 27) Bestimmen Sie alle 7 Lösungen von $z^7 = i$.