Übungen! 8. Tag.

■ 1) **Flugparabel:** Spezialisieren Sie auf den Fall des "senkrechten Wurfes" und leiten Sie daraus die übliche Formel für die Fallzeit ("Loslassen in der Höhe H") ab.

★ Antwort: $\vec{r}_0^K = (0,0,H) = \vec{r}^K(t_0)$ und $\vec{v}^K(t_0) = \vec{0}^K$ und $\vec{g} = (0,0,-g)$. Der Körper wird zur Zeitv t_0 in der Höhe H mit Staqrtgeschwindigkeit $\vec{0}$ losgelassen, also im Scheitelpunkt. Das gibt folgende Bahnkurve:

$$\vec{r}^K(t) = (0,0,H - \frac{1}{2}gT^2) \qquad \vec{v}^K(t) = (0,0,-gT)$$

Der Aufschlag auf der Horizontaqlebene erfolgt für $z(t_A) = 0$. Dh. für $H = \frac{1}{2}g(t_A - t_0)^2$. Also zum Zeitpunkt $\boxed{(t_A - t_0) = \sqrt{\frac{2H}{g}}}$.*Die* Geschwindigkeitbeim Aufschlag ist $\boxed{v_A = -gT_A = -\sqrt{2Hg}}$.

■ a) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}^K(5) = (0,0,H)$ mit $H \geq 0$ und $\vec{v}^K(5) = (0,2,2)$. Weiter sei $\vec{g}^K = (0,0,-g)$. Wie groß ist g höchstens zu wählen, damit die Flugparabel die Höhe z=5H erreicht?

■ 2) Vergleichen Sie die folgenden 4 inhomogenen Gleichungssysteme und skizzieren Sie deren Lösungsmenge in $\mathbb{R}^2$.

2x+7y=3	2x+7y=3 4x+3y=5	2x+7y=3 4x+3y=5 3x+5y=4	2x+7y=3 4x+3y=5 3x+5y=0

■ 3) **Beweise**: Es sei M eine reelle m×n-Matrix und $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \in \mathbb{R}^m$. Es gelte $M\vec{a}_1 = \vec{b}_1$ und $M\vec{a}_2 = \vec{b}_2$. Dann ist $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ eine Lösung der Gleichung $M\vec{x} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$.

(Sorgfältige Formulierung in wenigen Zeilen!)

★**Lineare Gleichungssysysteme** :

1. Klassifizieren (äußere Parameter??) und Vermutungen zu k und ℓ aufstellen.
2. Lösung bestimmen, möglichst geometrische Endform herstellen.
3. Tatsächliches k und ℓ mit vermuteten Werten vergleichen. Erfassen eventuelle Fallunterscheidungen alle Möglichkeiten?

■ 4) Überprüfen und konkretisieren Sie an den nachfolgenden Beispielen die Regel "Allgemeine Lösung der inhomog. Gl. = spezielle. Lösung der inhom. + allgemeine der homogenen". Welche Werte haben jeweils k und ℓ ?

-x+2y+z-3w=7	x+y+z+w=3 2x-y+3z-2w=-1	x+y+z+w=3 2x-y+3z-2w=-1 y-z=2

a) Schreiben Sie diese Gleichungen auch in Matrixform.

■ 5) Lösen Sie (a,b äußere Parameter, hier ist sorgfältige und konzentrierte Arbeit angebracht, da die Rechnungen aufwendig werden können):

ax+3y-5z=1 x+y-z=a	ax+2z=2 5x+2y=1 x-2y+bz=3	4x+y-az+w=2 x-y+2w=3 ay+w=4	$2x+2y-z+t=4$ $4x+3y-z+2t=6$ $8x+5y-3z+4t=12$ $3x+3y-2z+2t=6$

★ Beispiel: Inspektion des dritten Systems zeigt eine sehr einfache Struktur: In der dritten Gleichung sind x und z eliminiert. D.h. man kann sie als Ende der Elimination nehmen und sogleich mit dem Rückeinsetzen beginnen.

$\underline{\text{y frei}}$ $\underline{\text{w=4-ay}}$ $\quad$ $\underline{\text{x=-5+(1+2a)y}}$ $\quad$ az=-18+y(7a+5)

Das gibt für $\boxed{a\neq 0}$ eine Lösungsparametrisierung (k=1):

$$x_L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+(1+2a)y \\ y \\ -\frac{18}{a}+\frac{y}{a}(7a+5) \\ 4-ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -\frac{22}{a} \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1+2a \\ 1 \\ \frac{1}{a}(5+7a) \\ -a \end{pmatrix}$$

Probe: $4(-5)$+0-a(-$\frac{18}{a}$)+4=..
(−5)-0+2·4 = ..
4=.. Stimmt

für den Aufpunktvektor, inhomogen

$4(1+2a)+1-a\cdot\frac{1}{a}(5+7a)+(-a)=..$
$(1+2a)-1+2(-a)=...$
a+(-a)=... stimmt

für den Richtungsvektor, homogen

Und für $\boxed{a=0}$: Zunächst die zu erfüllende Gleichung: $0\cdot z$=-18+5y. Also y=$\frac{18}{5}$ nicht mehr frei und z frei. Zusammen:

$$\vec{x}_L(z) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{18}{5} \\ z \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 \\ 18 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Probe: Für a=0 lautet das System:

4x+y+w=2
x-y+2w=3 $\qquad$ Stimmt!
w=4

■ 6) Geben Sie für das folgende Gleichungssystem eine geometrische Interpretation und lösen Sie es (m äußerer Parameter):

$$\boxed{\begin{array}{l} y-mx=1 \\ y-2x=m^2 \end{array}}$$

■ 7) Wie sind die folgenden Zuordnung für Koordinatenvektoren geometrisch zu interpretieren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{P}{\mapsto} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{S}{\mapsto} \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{R}{\mapsto} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \quad ?$$

Schreiben Sie alle drei als Matrixzuordnung!

■ 8) Wie sieht für eine Ebene im Raum eine Gleichung (für die Koordinaten der Ebenenpunkte) aus? Gibt es eine Analogie zur Abschnittsform einer Geraden in der Ebene? Konkretisierungsbeispiele?

a) Wie wandelt man eine Gleichungsbeschreibung (für eine Ebene) in eine Paramtrisierung um und umgekehrt?

■ 9) Was für eine Figur wird durch die folgende Bahnkurve beschrieben? Beschreiben sie die Fläche, auf der diese Bahn verläuft. Dabei sind $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems. $\vec{e}_1^K = (1,0,0)$ usw.

$$\vec{r}(t) = (2+\frac{1}{2}(\sin(t))^2)(\vec{e}_1\cos t + \vec{e}_2 \sin t) + \vec{e}_3 \sin t$$

■ 10) **Die Zykloide**: Ein Kreis mit Radius R rolle geradlinig auf einer Ebene. Auf dem Kreisrand sei ein Punkt P markiert. Bestimmen Sie die Bahnkurve t$\mapsto \vec{r}^K(t)$ dieses Punktes. Denken Sie daran, mit der Wahl eines günstigen Koordinatensystems zu beginnen!