Vorkurs Mathematik für Physiker

Aufgaben 10.9. und Wochenende

1. Vereinfachen Sie die folgenden Rechenausdrücke zu einer sinnvollen Endform

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \frac{1}{7}(3,14,10)+(\frac{4}{7},-1,\frac{3}{7})\\ \vec{d} &= \frac{1}{6}\vec{e}+\vec{f} \quad \text{mit} \quad \vec{e}=(4,6,3) \quad \text{und} \quad \vec{f}=(\frac{1}{3},1,\frac{1}{2})\\ \vec{w} &= (\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2},2^{\frac{3}{2}})\end{aligned}$$

2. In der Ebene: $\vec{a}^K=(1,0)$ und $\vec{b}^K=(0,2)$ sowie $\vec{x}^K=3\vec{a}^K+2\vec{b}^{K}$. Weiter sei $\vec{e}^K=(1,1)$ und $\vec{f}^K=(-1,1)$. Bestimmen Sie u und v, so dass $\vec{x}^K=u\vec{e}^K+v\vec{f}^K$. Lösen Sie das Problem (näherungsweise) zeichnerisch und rechnerisch.

3. Bringen Sie folgende Parametrisierungen in die geometrische Form:

$$\vec{y}_g(a)=(1-a,2a,5a-7) \qquad \text{und} \qquad \vec{x}_E(u,v)=(1+u-2v,a+2u,bv)$$

4. Angenommen die drei Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ der Zentralformel liegen alle in einer Ebene, aber nicht alle auf einer Geraden. Und $\vec{x}$ sei ein Vektor dieser Ebene. Zeigen Sie, dass es dann viele Lösungen der Gleichung $\vec{x}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ in x,y,z gibt. Bestimen Sie diese.

5. Es sei $\vec{a}=(2,3,-1)$ und $\vec{b}=(1,0,7)$.

   (a) Geben Sie eine Parametrisierung der Geraden, die durch die Endpunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt wird.

   (b) Liegt der Punkt Q mit $\vec{x}_Q^K=(4,9,-15)$ auf dieser Geraden?

   (c) Zeigen Sie, daß der Nullpunkt nicht auf dieser Geraden liegt. Bestimmen sie dann eine Parametrisierung der Ebene E, die durch den Nullpunkt geht und g enthält.

   (d) Wo schneidet E die x-y-Ebene.

6. Ein bewegter Körper befinde sich zur Zeit $t_1=-2$ am Orte A und zur Zeit $t_2=5$ am Orte B mit Koordinatenvektoren $\vec{r}_A=(-3,5,7)$ und $\vec{r}_B=(0,-4,13)$.

   (a) a)Wie groß ist die mittlere vektorielle Geschwindigkeit in diesem Zeitraum?

   (b) b) Angenommen, der Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit: Wo befindet er sich zur Zeit t=5?

   (c) c) Wann schneidet er die x-y-Ebene (bei konstanter Geschwindigkeit)?

7. In einigen Eckpunkten eines Würfels werden Massen angebracht. In den 4 Eckpunkten des oberen Deckels je eine Masse m und in einem der unteren Eckpunkt eine Masse M. Bestimmen Sie den Schwerpunkt dieses Systems.

8. Der Schwerpunkt des Systems "Erde Mond"?

9. Was für eine Gleichung ergibt sich, wenn man den Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt legt?

10. Was läßt sich über die Geraden g und h sagen, die durch die folgenden Parametrisierungen gegeben sind:

$$\vec{x}_h(a)=\vec{a}+2\vec{b}+(3a-1)\vec{b} \quad \text{und} \quad \vec{x}_j(\alpha)=2\vec{a}+\vec{b}+(\alpha+1)\vec{b}.$$

    Ist g=h möglich?

11. Beweisen mit Hilfe der Vektorraumaxiome die beiden Gleichungen $0\vec{x} = \vec{0}$ und $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$.

12. Ein Fluß der Breite B fließe (idealisiert) mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{V}$. In dem Fluß fährt ein Motorboot mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{w}$ **relativ zum Wasser.** Wie weit wir das Motorboot abgetrieben, wenn es von einem Ufer zum gegenüberliegenden fährt?

    Zusatzfrage: Das Boot habe konstanten Geschwindigkeitsbetrag. Unter welchem Winkel muß es starten, um ein vorgegebenes Stück A abgetrieben zu werden?

13. Ein dicker Ring aus Eisen wird erhitzt. Vergrößert oder verkleinert sich dabei der innere Radius? Welcher Bezug besteht zur Vektorrechnung? Skizzieren sie den Sachverhalt eventuell an Hand einiger einfacher Figuren.

14. Gegeben zwei parallele Geraden im Raum. Wie beschreibt man den Streifen zwischen diesen beiden Geraden vektoriell?

15. Parametrisieren sie alle Geraden im Raum, die durch einen festen Punkt P$\in E^3$ gehen. Das ist mit 3 Parametern leicht, sollte aber auch mit zweien gehen. Was für ein Problem tritt auf?

16. Ein Mensch bewegt sich mit konstanter vektorieller Geschwindigkeit an einer Straßenlaterne vorbei. Wie bewegt sich die Spitze seines Schattens? (Bezeichnungen, Rollenverteilung, gesuchte Form des Resultates- dann Lösung.)

17. Ein Strahl verläßt den Ursprung mit der Richtung $\vec{n}^K = (1,1,2)$. In der Ebene z=H wird der Strahl reflektiert. Die Richtung des reflektierten Strahles ist $\vec{r}^K = (1,2,-3)$. Wo trifft der reflektierte Strahl die x-y-Ebene?

18. Wir betrachten die kubische Gleichung

    $$x^3 + px + q = 0 \text{ in der Unbestimmten x.}$$

    Diese Gleichung soll auf zwei Weisen gelöst werden.

    (a) a) Machen Sie den Ansatz x=$\frac{\alpha}{y} - y$ mit noch freiem Parameter α. Setzen Sie dies in die Gleichung für x ein. Bestimmen Sie α so, dass Sie die entstehende Gleichung in y lösen können. Zuerst y^3 bestimmen, damit dann $(\alpha/y)^3$ berechnen und dann erst die dritten Wurzeln bilden. Das ergibt x. (Erste Methode.)

    (b) b) Machen Sie den Ansatz x=u+v. Durch Einsetzen und Zusammenfassen erhält man die Gleichung $(u^3+v^3)+(u+v)(3uv+p)+q=0$. Das ist erfüllt, wenn man 3uv+p=0 und $u^3+v^3+q=0$ verlangt. Aus der ersten Gleichung folgt $27u^3v^3 = -p^3$. Aus beiden Gleichungen folgt $v^6 + qv^3 - (p/3)^3 = 0$. Das ist lösbar. Analog für u. Es folgt:

    $$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und} \quad u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

    Erneut folgt eine Lösung (der drei) Lösungen. (Zweite Methode.)

19. Gegeben ein Punkt P und ein festes kartesisches Koordinatensystem K. Der Punkt werde durch ein Bündel paralleler Lichtstrahlen beleuchtet. **Wo liegt der Schatten des Punktes in einer der Koordinatenebenen?** Gegeben sei der Koordinatenvektor $\vec{x}_P$ des Punktes und ein Richtungsvektor $\vec{f}^K$ des Lichtes. Als Ebene wählen wir die 1-2-Ebene. Die 3-Komponente von $\vec{f}^k$ soll ungleich Null sein.

Übungen 13.9.

■ 1) **Geradenbeschreibung**: Zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines achsenparallelen räumlichen Quaders besitzen die folgenden Koordinatenvektoren: $\vec{x}_P^K = (-1,1,1)$ und $\vec{x}_Q^K = (2,5,4)$.

a) Geben Sie die Koordinatenvektoren der fehlenden Eckpunkte an.

b) Bestimmen Sie den Schnitt des Vollquaders mit der y-z-Ebene.

c) Geben sie eine Parametrisierung der Raumdiagonalen (des Quaders) an, die von "hinten links unten nach vorn rechts oben" verläuft. Wo trifft diese Raumdiagonale die x-y-Ebene?

d) Wieviel Eckpunkte eines Spates benötigt man, um alle übrigen angeben zu können. Formulieren Sie selbst ein Beispiel.

■ 2) **Ebenenbeschreibung**: Geben Sie eine Parametrisierung der Ebene E, die die durch die 3 Punkte A,B und C geht mit $\vec{x}_A^K = (1,2,3)$, $\vec{x}_B^K = (0,-1,-2)$ und $\vec{x}_C^K = (2,1,0)$

b) Liegt der Ursprung in E? Liegt der Punkt S mit Koordinaten $\vec{x}_S^K = (1,1,1)$ auf P?

c) Bestimmen Sie den Schnitt von E mit der von (1,1,1) erzeugten Ursprungsgeraden.

■ 3) **Flugparabeln**. (Achtung: $\vec{r}^K(t)$ und $\vec{v}^K(t)$ müssen immer zuerst in beiden Formen vollständig angegeben werden! An T=t-t_0 als Hilfsgröße denken.) Bestimmen Sie die Flugparabel, die wie folgt festgelegt ist: $\vec{r}^K(-3) = (1,2,2)$, $\vec{v}^K(-3) = (0,2,3)$ und $\vec{g}^K = (0,0,-10)$.

b) $\vec{r}^K(0)$ und $\vec{v}^K(0)$? $\vec{r}^K(1) = ?$

c) In welcher Ebene verläuft die Flugbahn?

d) Wann und wo wird die x-y-Ebene getroffen, wo liegt der Scheitel?

■ 4) Parametrisieren Sie alle Flugparabeln, die durch den Ursprung gehen und die (also deren Ursprungstangente) mit der Horizontalebene den Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden.

■ 5) Von einer Flugparabel wisse man $\vec{r}(t_1) = \vec{a}$ und $\vec{r}(t_2) = \vec{b}$. ($t_1 \neq t_2$, $\vec{a}, \vec{b}$ gegeben.) Bestimmen Sie die Flugparabel. (*Hier zeigt sich die Nützlichkeit einer* **allgemeinen** *Rechnung!)*

Wähle t_1 für t_0. D.h. T=t-t_1

$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{v}_0 T + \frac{1}{2}\vec{g}T^2$

$\vec{b} = \vec{r}(t_2) = \vec{a} + \boxed{\overbrace{\vec{v}_0}}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\vec{g}(t_2 - t_1)^2$

$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{v}_0 T + \frac{1}{2}\vec{g}T^2$ wobei

$\vec{v}_0 = \frac{(\vec{b}-\vec{a}) - \frac{1}{2}\vec{g}(t_2-t_1)^2}{t_2-t_1} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{t_2-t_1} - \frac{1}{2}\vec{g}(t_2 - t_1)$

■ 6) **Schnittmengenbestimmung**: Zwei Ebenen E und F seien wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \vec{x}_E(a,b) &= \vec{u} + a\vec{d} + 2b\vec{e} \\ \vec{x}_F(c,d) &= 2\vec{u} - c\vec{e} + d(\vec{e} + 2\vec{d}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{d} &= (1,1,0) \\ \vec{e} &= (0,2,-1) \\ \vec{e} + 2\vec{d} &= (2,4,-1) \end{aligned} \qquad \vec{u} = (1,0,1)$$

$\vec{x}_E(a,b) = (1 + a, a + 4b, 1 - 2b)$

$\vec{x}_F(c,d) = (2 - 0 + 2d, 0 - 2c + 4d, 2 + c - d)$

$$\begin{aligned} 1 + a &= 2 + 2d \\ a + 4b &= -2c + 4d \\ 1 - 2b &= 2 + c - d \end{aligned}$$

usw. ...

■ 7) Diskutieren Sie das Problem des Schnittes zweier Ebenen in **vier Dimensionen**

■ 8) In der Ebene sei eine Gerade g durch eine Gleichung gegeben. Wie erhält man daraus eine Parametrisierung der Geraden? Lösen Sie das für die beiden **Geradengleichungen** y=mx+b und $\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1$.

a) Die beiden Geraden g und h. seinen durch die Gleichungen y=2x+3 für g und $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ für h gegeben. Bestimmen Sie deren Schnittpunkt einmal mit Hilfe der Gleichungen und einmal über vektorielle Parametrisierungen.

■ 9) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}^K(5)=(0,0,H)$ mit H$\geq$ 0 und $\vec{v}^K(5)=(0,2,2)$. Weiter sei $\vec{g}^K=(0,0,-g)$.

a) Wie groß ist g höchstens zu wählen, damit die Flugparabel die Höhe z=5H erreicht?

b) Wie groß ist H zu wählen, damit auf der Horizontalbene (z=0) eine grö0ere Ursprungsentfenung als 5H erreicht wird?

Aufgaben zum Kalkülteil von Kap. 5: **Lineare Gleichungssysysteme**

1. Klassifizieren (äußere Parameter??) und Vermutungen zu k und ℓ aufstellen.
2. Lösung bestimmen, möglichst geometrische Endform herstellen.
3. Tatsächliches k und ℓ mit vermuteten Werten vergleichen. Sind eventuelle Fallunterscheidungen vollständig?

■ 2) (1 min und 6min)

3x+7y=4 2x- y =1	$\frac{x}{3}+\frac{y}{7}=\frac{1}{3}$ $\frac{x}{2}$ - y = 1

■ 3) Vergleichen Sie die folgende 4 inhomogenen Gleichungssysteme und skizzieren Sie deren Lösungsmenge in $\mathbb{R}^2$.

2x+7y=3	2x+7y=3 4x+3y=5	2x+7y=3 4x+3y=5 3x+5y=4	2x+7y=3 4x+3y=5 3x+5y=0

■ 4) Und mit äußerem Parameter:

ax+7y=a	2x+7y=3 4ax+3y=4	2x+ay=3 (a-3)x+3y=5 3x+5y=4	2x+7y=3 4x+3y=4 3x+5y=a

Und mit mehr Veränderlichen (a,b äußere Parameter)

2x+7y-3z=0 2x+3y+3z=0 2x+5y+z=0	2x+7y-3z=0 2x+3y+5z=0 2x+5y+z=0	2x+7y-3z=a 2x+3y+5z=b 2x+5y+z=a

■ 5) Einige besondere Systemformen

x-2y+z/3+7w=1 y/3+7z-3w=2 z+w=0 2w=4	y/3+7z-3w=2 z+w=0 x-2y+z/3+7w=1 x+w=2	x+y=1 y+z=2 z+w=3 w+x=a

■ 6) Und etwas größer:

2x+2y-z+t=4 4x+3y-z+2t=6 8x+5y-3z+4t=6 8x+5y-3z+4t=12 3x+3y-2z+2t=6	3a+4b-6c+7d=5 -3a-2b+c=6 5b-c+9d=0

■ 7) Schnitt zweier Ebenen im $\mathbb{R}^4$. Wir starten mit zwei Parametrisierungen (etwa 3 min):

$$\begin{aligned} \vec{x}_E(a,b) &= (2+3a, a+b, -b, 1+a) \\ \vec{x}_F(c,d) &= (2+c, d, 1, -c-2d) \end{aligned}$$

■ 8) Bestimmen Sie die Schnittmenge und interpretieren Sie das Ergebnis

x+2y+3z+4w=1 x+3y+5z+7w=2	x+y/2+z/3+w/4=1 x+y/3+z/5+w/7=2

■ 9) Im Rahmen einer Klausuraufgabe im 2. Semester war folgendes Gleichungssystem in α, β, γ zu lösen. Infolge unzulänglicher Rechenkompetenz entstanden zahlreiche Fehler.

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha - 4\beta + 16\gamma = A^{-4} \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = A^{-2} \\ \alpha + 6\beta + 36\gamma = A \end{array}}$$