4.Tag / 9. September
Mathematischer Zugang Vektoren / Anwendung zur Beschreibung

■ Rekapitulation Koordinatensystem / Skizzen / Beschreibung von Objekten des Konfigurationsraumes:

Menge	E^3	V_o^3 bzw V^3	$\mathbb{R}_K^3$	$\mathbb{R}^n$
Element Bezeichnung	P	$\vec{x}_P$ bzw. $\vec{v}$	$\vec{x}_P^K$, $\vec{v}^K$	$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ oder a$\in \mathbb{R}^n$ $\in$ legt Bedeutung fest!
Element verbal	Punkt	Ortsvektor Geom. Pfeil	Koordinaten-vektor	n-Tupel (reeller Zahlen)

■ Kap.3 Der mathematische Weg zu den Vektoren
(Auch geleitet vom Wunsch: Man möchte mit Vektoren rechnen !!)

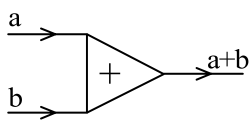
▼ Terme und Zuordnunge (Ergebnis und Weg zum Ergebnis!)

▲ Verlaufsdiagramme (zur Verdeutlichung:)

$\frac{1}{\sqrt{x}+1}$	$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}+1$	$\sqrt{\frac{1}{x+1}}$

▲ Was leisten die Zahlen (Umgang) ?? Abgrenzung von außen

★**Algebraische Verknüpfungen** (Kompositionen)



★Abgrenzung von innen durch **Grundregeln für die Verknüpfungen**

★ Die (hauptsächlichen, für die Vektoren wichtigen) Grundregeln für $\mathbb{R}$ ("Körperaxiome")

▲ Exkurs: Folgen des Assoziativgesetzes - also die sich ergebenden Gebrauchsregeln!

▼ Die Addition der Vektoren

▲ Konstruktion im Falle des $\mathbb{R}^n$ (speziell $\mathbb{R}_K^3$)

▲ V_o^3 und V^3

▲ Prüfen der Regeln

▲ Übergangsregel

Fazit: **Was allein die Addition betrifft, so dürfen wir mit Vektoren genauso rechnen wie mit rellen Zahlen**. Alle Rechnungen lassen sich ja allein über die Grundregeln gerechtfertigt.

▼ Multiplikation der Vektoen mit einem Skalar ..

▲ "Geht nicht"-Aussage

▲ Die Ersatzkonstruktion für $\mathbb{R}^n$ usw.

▼ Die Grundregeln

▼ Die Grundregeln für die Verbindung der beiden Veknüpfungen: **Distributivgesetze!!!**

▼ Rechnen mit Vektoren (3.3.34)

▲ Der Übergang zwischen $\mathbb{R}^3_K$ und V^3_0

▲ Verlaufsdiagramme / unzulässige Terme und Gleichungen

▼Vektorräume

▲ Die Axiome

▲ Einfache (immer gültige) Folgerungen $\boxed{0\vec{x} = \vec{0}}$ oder $\alpha\vec{0} = \vec{0}$ oder $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$.

▲ Bahnkurven und Felder

▼ Nutzung: Konstruktion eines einfachen Weges vom Ursprung zu allen Punkten einer Geraden und dessen Darstellung durch eine Formel

Übungen

0) Setzen Sie im Binomialsatz a=$\cos^2 x$ und b=$\sin^2 x$. Was für Gleichungen haben Sie dann bewiesen. Etwa für die Fälle n=2,3 und 4? Ergebnisformulierung im Tafelbild.

$\cos^6 x + (2+1)\cos^4 x \sin^2 x + (2+1)\cos^2 x \sin^4 x + \sin^6 x$

$-\cos^4 x \sin^2 x - 1\cos^2 x \sin^4 x$

$1 - cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$

1) Skizzen!! $\vec{x}_g(a) = \vec{r} + a\vec{d}$ mit $\vec{r}^K = (1,1,1)$ und $\vec{d}^K = (-1, 2.0)$ und a=0,±1, ±2 .

Figur der Endpunkte, wenn a alle Zahlen zwischen -1 und +1 durchläuft?

1a) Umkehrung: Was für eine Figur wird durch (die Endpunkte) folgender Vektorgleichung beschrieben? $\vec{r}(t) = rt\cos(\omega t)\vec{e}^K_1 + rt\sin(t)\vec{e}^K_2 + \alpha t\vec{e}^K_3$, wenn t die reellen Zahlen durchläuft?

2) Verlaufsdiagramm für (x,y)$\mapsto$sin(x+y^2) $+ x^2$

3) Typische Vektorgleichung nach $\vec{x}$ auflösen. (Inspektion: Rollen? Benötigte Regeln? Strategie?

$$3(\vec{a} + \vec{x}) + \alpha(\vec{a} - 2\vec{x}) + 3\alpha\vec{x} = (a+4)(3\vec{x} - 2\vec{a})$$

3a) In $\mathbb{R}^3_K$ sei gegeben $\vec{a}^K = (\frac{1}{17}, 3, 7)$ und $\vec{b}^K = (-2, 4, 3)$ und $\alpha = \frac{9}{17}$

Bestimme $\vec{x}$ aus folgender Gleichung

$$3(\vec{a}^K - 2\vec{x}^K) = 5\vec{b}^K + 5\vec{x}^K$$

Inspektion: Es bieten sich 2 Wege an, von denen einer sich als viel kürzer erweist. Wie sehen die aus? Gehen Sie beide und vergleichen Sie den Aufwand!!

4) Unsinnige Gleichungen? Welche sind sinnvoll, welche nicht und warum?

$2\left(3\vec{x} + \vec{a} - \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right) = \vec{x} - 7$		$3\vec{x}(7 - \vec{b}) = \vec{a}$
$3(\vec{x}7 - \vec{b}) = \vec{a}$		$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2} = \frac{\vec{a}}{x}$
$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2} = \frac{a}{\vec{x}}$		$(2+a)(3-b)(\vec{x} - \vec{a}) = \frac{\vec{x}}{(2-a)}$

5) Löse $\alpha\vec{x} = \vec{b}$ nach $\vec{x}$ auf. Dazu nur die Vektoraumaxiome verwenden! Dabei sei $\alpha \neq 0$.

$\alpha\vec{x} = \vec{b}$	α hat multpl. Inverses $\frac{1}{\alpha}$. Gl. damit multiplizieren
$\frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{x}) = \frac{1}{\alpha}\vec{b}$	Fastassoziativität
$(\frac{1}{\alpha}\alpha)\vec{x} = \frac{1}{\alpha}\vec{b}$	Eigenschaft reziprok!
$1\vec{x} = \frac{1}{\alpha}\vec{b}$	Unitarität
$\vec{x} = \frac{1}{\alpha}\vec{b}$	Gesuchte Form.

Da jeder dieser Schritte umkehrbar ist, sieht man, dass dies tatsächlich Lösung ist und damit die einzige. Man darf wie erwartet rechnen!!