Ein Dutzend weiterer Aufgaben aus früheren Probeklausuren

■ 1) Gegeben drei Punkte P,Q und R aus E^3 mit Koordinatenvektoren $\vec{x}_P^K = (1,1,0)$ und $\vec{x}_Q^K = (2,0,2)$ und $\vec{x}_R^K = (0,3,3)$.

a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt S (für gleiche Massen) dieser drei Punkte.

b) Fertigen Sie eine Skizze, die die Lage der vier Punkte (im Koordinatensystem K) aufzeigt.

c) Es sei E die Ebene, die von P,Q und R aufgespannt wird. Geben Sie eine Parametrisierung von E an. Wie lauten die Parameterwerte, die zum Schwerpunkt gehören.

d) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{x}_P^K$ und $\vec{x}_Q^K$. (Angabe im Bogenmaß.)

e) Berechnen Sie das Vektorprodukt $(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) \times (\vec{x}_R - \vec{x}_P)$ und dessen Betrag. Welche geometrische Größe innerhalb der Ebene E haben Sie mit diesem Betrag bestimmt?

■ 2) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}(3) = (0,-2,0)$ und $\vec{v}(3) = (0,7,8)$. Weiter sei $\vec{g} = (0,0,-10)$.

a) Wie lautet die Flugparabel? (Achtung: **Was ist an dieser Stelle alles sorgfältig anzugeben?)**

▼

- Die Daten liefern für Ort und Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (0,-2,0) + T(0,7,8) + (0,0,-5)T^2 = (0,-2+7T, 8T-5T^2) \text{ mit T=t-3} \\
\vec{v}(t) &= (0,7,8) + (0,0,-10)T^2 = (0,7,8-10T)
\end{aligned}$$

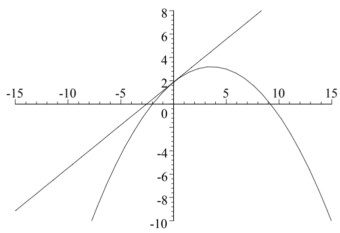
b) Scheitelpunkt, wo und wann trifft die Flugbahn die Horizontalebene (z=0)?

- **Scheitelpunkt** bei $T_S = \frac{4}{5}$ oder $t_S = \frac{19}{5}$ Also $\vec{r}(\frac{19}{5}) = (0, \frac{18}{5}, \frac{16}{5})$.
- z=0 besagt $T_A \cdot (8-5T_A)=0$. Also $T_A = 0$ (trivial, "Start" $\vec{r}(3)$) und $T_A = \frac{8}{5}$. D.h $t_A = \frac{23}{5}$. Einsetzen gibt $\vec{r}(\frac{23}{5}) = (0, \frac{46}{5}, 0)$ für den "Aufschlagpunkt".

c) Wo wird die z-Achse getroffen und unter welchem Winkel ?

- Die z-Achse wird für x=y=0 getroffen. Also T=$\frac{2}{7}$ oder t=$\frac{23}{7}$. Das gibt $\vec{r}(\frac{23}{7}) = (0,0,\frac{92}{49})$. Weiter ist $\vec{v}(\frac{23}{7}) = (0,7,\frac{36}{7})$. Das gibt den Winkel $\cos\alpha = \frac{\frac{36}{7}}{\sqrt{49+\frac{36^2}{49}}} = \frac{36}{3697}\sqrt{3697} = .59$ Also $\alpha = \arccos(.59) = .93$

d) Fertigen Sie eine zusammenfassende Skizze der Konfiguration.



e) Geben Sie die skalare Geschwindigkeit als Funktion der Zeit an.

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{49 + (8-10T)^2} = \sqrt{49 + (38-10t)^2}.$$

▲

■ **3)** Klassifizieren sie das folgende lineare Gleichungssystem und stellen Sie Vermutungen über die Art der Lösungsmenge an. Dabei ist a ein äußerer Parameter. Lösen Sie das System anschließend:

$$\boxed{\begin{array}{l} ax+y=1 \\ y+z=2 \\ z+aw=3 \end{array}}.$$

Ein $3\times 4-$ *System* mit äußerem Parameter. Für den typischen Fall erwarten wir k=1. Aber es dürfte eine **Verzweigung** auftreten. Eliminantion von y und dann von z gibt sofort:

$$\boxed{\begin{array}{l} ax-z=-1 \\ z+aw=3 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\text{a(x+w)=2}}.$$

Verzweigung: 1. Fall: a=0 : **System unlösbar.**
2.Fall: a$\neq$ 0 : Division möglich. x+w=$\frac{2}{a}$. Etwa: $\underset{======}{w \text{ frei}}$ und $\underset{=============}{x=\frac{2}{a}-w}$ und $\underset{============}{z=3-aw}$ und $\underset{==============}{y=-1+aw}$. Zusammengefaßt:

$$\boxed{\vec{x}_L(w)=(\tfrac{2}{a}-w,-1+aw,3-aw,w)=(\tfrac{2}{a},-1,3,0)+w(-1,a,-a,1).}$$

Tatsächlich k=1. für a nach Null wandert der Aufpunkt und mit ihm alle x-Koordinaten ins Unendliche.

■ 4) Vereinfachen Sie unter Verwendung der Distributivgesetze den folgenden Term

$$(a+b+3c)^2-(a+b-3c)^2-2(a+b)c$$

■ 5) Eine Gerade g (der Ebene) gehe durch den Punkt P mit $\vec{x}_P^K=(2,3)$ und habe die Steigung $\frac{1}{2}$.
a) Geben Sie eine vektorielle Parametrisierung von g und eine Geradengleichung an.
b) Bringen Sie die in a) gefundene Geradengleichung in Achsenabschnittsform.
■ 6) Vereinfachen Sie

$$\frac{1}{1+a}+\frac{2}{5-\frac{1+a}{1-a}}$$

■ 7) Was versteht man unter dem *Ortsvektor,* was unter dem *Koordinatenvektor (eines Punktes) P ?*
■ 8)) Ein geometrischer Pfeil habe im Koordinatensystem K den Ortsvektor $\vec{x}_P^K=(2,2,3)$ und im Koordinatensystem L den Koordinatenvektor $\vec{x}_P^L=(2\sqrt{2},0,3)$. Was läßt sich über die relative Lage der beiden Systeme sagen? (Mit Skizze)
■ 9) Zwei Geraden g und h haben die folgende Parametrisierung

$$\vec{x}_g^K(a)=(2+a,1+2a,3a) \text{ und } \vec{x}_h^K=(2+a,1+2a,-3a).$$

Wie entsteht h aus g geometrisch? (Mit Skizze)
■ 10) Sei $\vec{a}=(1,2,3)$ und $\vec{b}=(2,-1,3)$. Berechnen Sie $\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}^2(\vec{a}+\vec{b})$, $\vec{a}\times\vec{b}$ und $(\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b})\times(\frac{1}{7}\vec{b}-\vec{a})$.
■ 11) Gegeben das folgende Gleichungssystem (mit äußerem Parameter a)

$$\begin{aligned} 3x-5y+z &= 2 \\ 2x+5y-3z &= a \end{aligned}$$

a) Was läßt sich vorab über die Lösung vermuten?
b) Lösen Sie das System und bringen Sie die Lösungsmenge in die geometrische Form.
c) Wie sieht eine effiziente Kontrolle des Resultates aus?
■ 12) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}(1)=(0,0,1)$ und $\vec{v}(1)=(0,2,3)$.
a) Bestimmen Sie $\vec{r}(0)$ und die mittlere Geschwindigkeit im Zeitraum $0\leq t\leq 1$.
b) Wann und wo bildet die Geschwindigkeit mit $\vec{e}_3$ einen Winkel von $+\frac{\pi}{4}$?