Vorkurs Mathematik 2005

Übungen 30.9.2005 und langes Wochenende!

■ 0) Die Fragen aus Kap. 7.1.6 zur Mengenbildung

■ 0a) Bestimmene Sie die folgenden Figuren im V_0^3 bzw. $\mathbb{R}_K^3$ mit der Mengenschreibweise:

$$F = \{\vec{x} | \vec{x} \in V_0^3 ......\}$$

a) Im V_0^3 : Vollkugel um $\vec{0}$ mit Radius R, die zugehörige Kugeloberfläche, das Bild einer Geradenparametrisierung, den von einer Ursprungsebene erzeugten oberen Halbraum. Einen Spat mit Eckpunkt in $P \in E^3$.

b) Im $\mathbb{R}_K^3$: Einen Vollzylinder mit Achse auf der 3-Achse und den zugehörigen Zylindermantel, einen Kegel mit Spitze im Ursprung und Achse in 1-Richtung und eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

■ 1) Was bedeuten die folgenden Begriffe? Präzisieren durch Angabe eines Abbildungs**typs** und möglichst eines konkreten Beispiels in Form einer Abbildung:

Größenmaß	Spiegelung	Projektion	Alter

.

■ 2) Vervollständigen Sie nachfolgende Gleichungen der Form y=f(x) zu einem jeweils naheliegenden Abbildungstripel. Was läßt sich jeweils (mit erträglichem Aufwand) über Bild und Graph sagen? Sofern nichts anderes gesagt ist, sind die Variablen reell.

$y=1-x^2$	$y=\frac{1}{1-x^2}$	$y=\sin(\frac{1}{x})$	$y(x)=\sqrt{a^2-x^2}$	$y(a)=\sqrt{a^2-x^2}$
$z \mapsto \bar{z}$ $z \in \mathbb{C}$	$(x,y,z) \mapsto (x,z)$	$(x,y,z) \mapsto (0,x,z)$	$(x,y,z) \mapsto (x,z,y)$	$(x,y,z) \mapsto (x^2,z^2,y^2)$
$z(x,y)=x^2-y^2$	$r(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$	$s(x,y)=\frac{xy}{x^2-y^2}$	$q(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$	
$z(t)=te^{it}$				$z(t)=\cos(t)+i\sin(\pi t)$
$T(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$	$\vec{F}(\vec{x})=\frac{\vec{x}}{\lvert\vec{x}\rvert}$			

■ 3) Ein Tischtennisball wird zur Zeit t=0 in der Höhe H über einem Tich losgelassen. Er fällt senkrecht auf den Tisch und springt wirder hoch. Zur Zeit t habe er die Höhe h(t) und die Geschwindigkeit v(t). Letztere hat ein Vorzeichen.

Skizzieren Sie die Graphen von $t \mapsto h(t)$ und $t \mapsto v(t)$ für einige Sprünge.

■ 4) Gegeben ein Quadrat und darin ein Punkt P. Gesucht der Abstand von P zum Randpunkt $Q(\alpha)$ des Quadrates, wobei α ein geeigneter Polarwinkel sein soll. Wie groß ist der Abstand $d(\alpha)$ von P und $Q(\alpha)$? Gesucht ist die Zuordnung $\alpha \mapsto d(\alpha)$, Graph und Rechenausdruck. Wählen Sie als Beispiel das achsenparallele Einheitsquarat und P(0.2,0.2).

■ 6) Was für eine geometrische Operation wird durch die folgende Abbildung beschrieben:

$$p = (\mathbb{R}_K^3, (x,y,z) \mapsto (x,y,0), \mathbb{R}_K^3) \text{ ?}$$

Was ergibt sich für $p \circ p$?

■ 7) Welche geometrische Operation wird durch die folgende Abbildung beschrieben

$$r = (\mathbb{R}_K^2, (x,y) \mapsto (-y,x), \mathbb{R}_K^2) \text{ ?}$$

Bestimmen Sie $r \circ r$ rechnerisch und geometrisch? Existiert die inverse Abbildung zu r? Wenn ja, wie sieht sie aus?

■ 8) Sei f(x)=ax(1-x). Berechne $f_2(x) = f \circ f(x)$ und $f_3(x) = f \circ f_2(x)$.

■ 9) Es sei A={a,b,c,d} und f:A→A mit f(a)=b, f(b)=c , f(c)=d und f(d)=a. Existiert die inverse Abbildung? Wenn ja: Geben Sie diese an.

a) Dasselbe für g:A→ A mit g(a)=a, g(b)=b, g(c)=d und g(a)=a.

c) Sei W={1,2,3,4}. Geben Sie ein Beispiel einer invertierbaren Abbildung A→ W an. Wieviel derartige Abbildungen A→ W gibt es?

■ 10*) Im Ursprung befinde sich eine Kugel mit Radius R und relektierender Oberfläche. Ein Strahl parallel zur z-Achse falle von oben ein und treffe die Kugel. Der Strahl habe den Abstand r von der z-Achse. Bestimmen Sie den reflektierten Strahl. Wo trifft der reflektierte Strahl die x-y-Ebene? Welchen Abstand R hat dieser Auftreffpunkt vom Ursprung? Bestimmen Sie die Zuordnung r$\mapsto$ $R(r)$.

■ 11) "Vorstellungsskizze" : Gegeben der Einheitskreis und darauf ein Punkt P mit Polarwinkel θ. Weiter sei S der "Startpunkt" auf dem Kreis zum Winkel $\theta = 0$. Wir können P und S einmal durch den zugehörigen Bogen auf dem Einheitskreis verbinden oder durch die (kürzere) Verbindungsstrecke. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der folgenden Zuordnung

$$\theta \mapsto \text{Länge des Verbindungsbogens-Länge der Verbindungsstrecke}$$

Gehen Sie aus von der anschaulichen Vorstellung dieser Größen. Leiten Sie anschließend einen Rechenausdruck für den Funktionswert her.

■ 12) Vorstellungsskizze: Betrachten Sie ein (ebenes) Pendel mit einer festen Stange. Die Lage des Pendels soll durch den zugehörigen Ausschlagswinkel α bestimmt werden. Dabei soll $\alpha = 0$ zur negativen y-Achse gehören . Die Schwerkraft zeige in Richtung der negativen y-Achse. Zur Zeit t=0 erhält das Pendel einen Stoß, der ihm eine Anfangsgeschwindigkeit gibt, der es bis zu einem maximalen Winkel α_m hochtreibt. Skizzieren Sie (wieder über die Vorstellung und damit verbundene Erfahrungen) die Zurdnung t$\mapsto$ $\alpha(t)$, wobei t die Zeit ist. Wählen Sie für α_m die folgenden Werte: $\alpha_m = 0.1$ und 0.2 ("kleine Ausschläge") dann 0.8 ("mittlerer Ausschlag") und 1.5 ("großer Ausschlag"). Die Skizze sollte so angelegt sein, daß man die Fälle vergleichen kann. Skizzieren sie dann noch zwei Fälle mit "Überschlag", einen bei dem dieser ganz knapp gelingt und einen mit großer Geschwindigkeit.

■■ 13) Halbquantitative Skizze: Fertigen sie für die folgenden Funktionen über die Analyse des Rechenausdrucks eine Skizze des Graphen an.

Nochmals: *Keine Wertetabelle*, höchstens die Werte einiger besonderer Punkte. Möglichst viele per Inspektion erkennbare Eigenschaften in der Skizze unterbringen! Eventuelle Problemstellen oder Unklarheiten durch ein "?" markieren. Spezielle Tricküberlegungen sind natürlich erwünscht!

Gehen Sie aus von der Kenntnis der Grundfunktionen jeweiligen Aufbau des Rechenausdrucks:

$x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$	$x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)$	$x \mapsto x + (x-1)(x-2)(x-3$

$x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$	$x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)$	$x \mapsto x + (x-1)(x-2)(x-3)$	
$x \mapsto x - sin(x)$	$x \mapsto \frac{\sin x}{x}$	$x \mapsto \frac{x}{\sin x}$	$x \mapsto \frac{\sin x}{1+x^2}$
$x \mapsto \frac{x}{a^2-x^2}$ mit a>0	$x \mapsto x\cos(x^2)$	$x \mapsto x^2\cos(x)$	$x \mapsto x^2\sqrt{1-x^2}$
$x \mapsto \sin(\sin x))$	$x \mapsto \cos(\sin(x))$	$x \mapsto e^x - x^{2m}$ m=0,1,2,....	

■ 14Diskutieren Sie das Verhalten der Zuordnung $x \mapsto A\sin x + B\cos x$, indem Sie mit Hilfe des Additionstheorems für den Sinus eine geschickte Umformung des Rechenausdrucks vornehmen.

Hinweis zum anderen Tunnelende: Es soll etwas von der Form asin(x+α) herauskommen.

■ ■15) Berechnen Sie die inverse Funktion (volles Tripel) für die folgenden Funktionen:

y=3x$^3 - 9$	x$\mapsto$ e^{3x+2}	x$\mapsto$e$^x - e^{-x}$	y=3+9e^{-2x}

■ ■16) Diskutieren Sie die Umkehrfunktionen von Sinus und Cosinus. Starten Sie mit dem Graphen. Welche Urbild- bzw. Bildmenge sollte man wählen?

■ 17) Verstehen und interpretieren bzw. vervollständigen Sie die folgende Gleichungen:

x$^x = e^{x\ln x}$	a$^x = e^{x\ln a}$	ln(a^x) = ...	ln(ae$^{bx^2}$)

a) Was ist zu folgenden Gleichungen zu sagen:

$(x^x)^x = x^{(x^x)}$	e$^{x^2} = e^{2x}$	e$^{-x} = e^{\frac{1}{x}}$	ln(x+y)=lnx$\cdot \ln y$

■ 18) Einstieg in Kap.8.4.4a: Mit Hilfe der Additionstheoreme kann man eine nützliche Formel für die Größe $\boxed{\text{sin(x)+sin(y)}}$ herleiten. Tun Sie das. Hinweis: Offenbar gilt x=$\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ und y=$\frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y)$.