Übungen Höhere Mathematik III Nr.8. / 5..12.03

A Anwesenheitsübung

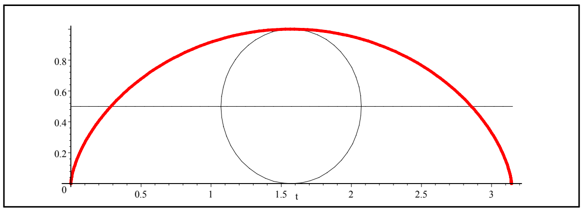
■ 1) Eine Zykloide bzw. Brachistochrone sei durch folgende Parametrisierung gegeben

$$\begin{aligned} y(t) &= e \sin^2 t \\ x(t) &= e(t - \sin(t)\cos(t)) \end{aligned}$$

Für $0 \leq t \leq \pi$ erhält man den ersten Bogen. Dieser bestimmt zusammen mit der x-Achse eine Fläche Z.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt und den Schwerpunkt dieser Fläche!

b) Wie hängt der Parameter e mit dem Radius R des rollenden Kreises der Zykloiden zusammen? Drücken Sie das Ergebnis Ihrer Rechnungen durch R aus und vergleichen Sie mit der Vorerwartung Welche einfachen Ersatzmodelle liegen nahe? Als Hinweis man gie folgende Figur dienen:



■ 2) Im $\mathbb{R}^3_k$ sei in der x-y-Ebene sei ein rechtwinkliges Dreieck gegeben. Eine Kathete liege in x-Richtung ($0 \leq x \leq a$) und die zweite in y-Richtung ($0 \leq y \leq b$). Bestimmen Sie die Komponenten des Trägeitstensors bezüglich des Koordinatensxstems K. Das Dreieck trage eine konstante Flächenmassendichte σ.

■ 3) Im Ursprung des $\mathbb{R}^3_K$ liege eine Kugel vom Radius R. Die Achse eines Zylinders mit Radies $\frac{1}{2}R$ gehe durch den Punkt $(\frac{R}{2}, 0, 0)$. Wie groß ist das Volumen der Schnittmenge?

■ 4A) *Bestimmen Sie Fläche, Schwerpunkt und Trägheit des Herzens.*

Gemeint ist die die Fläche, die durch folgende zwei Funktionen begrenzt wird. Und zwar deren Flächeninhalt, Schwerpunkkt und Trägheitstensor (bezüglich des ebenen x-y-Systems). h>0.

$$\boxed{f_{\pm}(x) = \sqrt{h\,|x|} \pm \sqrt{h^2 - x^2}}$$

■ 5) Eine Kugel vom Radius R wird mittig durchbohrt (kreisförmiger Querschnitt vom Radius $S \leq R$). Volumen und Trägheitstensor der Restfigur? (Konstante Dichte, bezüglich Kugelmittelpunkt). Es bieten sich zwei Wege zur Berechnung an. Begründen Sie Ihre Wahl des kürzeren Weges.

■ 6) Zwei quadratische Platten sind nach Art eines Plattenkondensators angeordnet. Auf beiden ist eine Masse konstant und flächenhaft verteilt. Wie groß ist die Kraft, mit der sich die beiden Platten infolge der Gravitationswechselwirkung anziehen? Stellen Sie hierzu eine Integralformel auf und berechnen Sie die Integrale so weit wie sie kommen.

■ 7A) Führen Sie für $n \geq 2$ im $\mathbb{R}^n$ räumliche Polarkoordinaten ein und bestimmen Sie den zugehörigen Maßfaktor Δ. Gehen Sie dazu rekursiv vor unter Benutzung der Zerlegung

$$\vec{x} = \vec{e}_n x_n + \vec{s} \ , \qquad \vec{s} \perp \vec{e}_n, \qquad x_n = r\cos\theta.$$

(Welche Interpretation hat θ ?)

■ 8) Im $\mathbb{R}^3_K$ sei die folgende Figur gegeben:

$$Z = \left\{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2 \quad \text{und} \quad x^2 + z^2 \leq R^2\right\}.$$

Beschreiben Sie die geometrische Form dieser Figur und bestimmen Sie ihr Volumen. Sie sollten mit Hilfe von Symmetrieargumenten den Integratoinsbereich möglichst klein wählen!

■ 9)

$$J(A,H) = \int_0^A dx \int_0^H dy \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

a) Existenz? Absolut integrabel? Welche Endform ist zu erwarten?
b) Berechnen Sie das Integral und bringen Sie das Ergebnis in die erwartete Endform.

■10A) Ein physikalischer Körper sei wie folgt gegeben ($\vec{e}_i$ kartesische Basis):

Ortsvektor: $\boxed{\vec{x}(r,\theta,h) = \vec{e}_1 h + r\,[-\vec{e}_2 \cos\theta - \vec{e}_3 \sin\theta]}$
mit Parameterbereich $0 \leq h \leq H$ $\quad 0 \leq r \leq R$ $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$ und
Massendichte $\rho(\vec{x}) = M_E f(r)$ mit gegebenem f und M_E

Verwenden Sie die wie folgt definierten Momente:

$$\int_0^R dr r^k f(r) = R^{k+1}\mu_k$$

a) Welches physikalische Ersatzmodell in Form eines Massenpunktes liegt nahe?
b) Berechnen Sie die üblichen Größen: Gesamtmasse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment bezüglich der 1-Achse. Endform / Korrekturfaktor?
c) Jetzt sei $\vec{g} = -\vec{e}_3 g$ die übliche Schwerkraft. Bestimmen Sie die potentielle Energie der gegebenen Lage. Drehen Sie dann um den Winkel α um die 1-Achse. Wie sieht jetzt die potentielle Energie aus?
d) Stellen Sie dann die Lagrangefunktion für Drehschwingungen um die 1-Achse auf? Wie geht hierbei die Massenverteilung des Körpers nur ein? Kann man durch Beobachten der Schwingungen etwas über die Massenverteilung im Zylinder herausbekommen?

(1) Geometrische der Anschauung zugängliche Körper oder Flächen heißen kongruent, wenn man sie durch Verschieben und Drehen zur Deckung bringen kann. Jedes derartige geometrische Objekt läßt sich andererseits nach Angabe eines festen Koordinatensystems durch Angabe seiner Punkte als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ beschreiben. (Hierbei werden üblicherweise Mengen vom Maße Null vernachlässigt!)

> (2) Verallgemeinernd definieren: Zwei beliebige - also u.U. nicht mehr anschauliche - Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ heißen kongruent, wenn man sie durch Translationen und Drehungen (exakt) zur Deckung bringen kann.

(3) Eine unendliche Menge besitzt stets echte Teilmengen, die zur gesamten Menge gleichmächtig sind, also gleiche Anzahl besitzen. **Im Falle des R^3 können wir zusätzlich fragen, ob es vielleicht echte Teilmengen gibt, die zur gesamten Menge nicht nur gleichmächtig sind, sondern sogar kongruent.** Auch hier könnte die Anschauung, die so etwas als absurd erscheinen läßt, uns in die Irre führen.

(4) Die Antwort lautet tatsächlich: **Ja, solche Mengen gibt es!** Nimmt man von der gesamten Menge einen echten Teil, verschiebt und translatiert man diesen geeignet, so ist das Ergebnis deckungsgleich zur Ausgangsmenge. Der Unterschied der beiden Mengen sollte auch keine Menge vom Maße Null sein. Die Beschreibung einer solchen Menge und der Nachweis der behaupteten Eigenschaft ist allerdings recht kompliziert.

(5) Als Beispiel wählen wir die Oberfläche S^2 einer Kugel im $\mathbb{R}^3$. Kongruenz von Figuren auf dieser Oberfläche überprüft man mit Hilfe von Drehungen, also Elementen der Drehgruppe SO_3. Also ohne Spiegelungen und Translationen.

> Die Menge S^2 wollen wir in 4 disjunkte Teile zerlegen, die wir R,G,B und Q nennen wollen. Q ist dabei eine abzählbare Menge von Ausnahmepunkten, die wir uns herausgenommen denken. Zur besseren Gedächtnisunterstützung versehen wir die übrigen drei Mengen mit Farbbezeichnungen: rot, blau und grün. Jedem Punkt auf S^2, der nicht zur Ausnahmemenge Q gehört, kommt daher eine dieser Farbe zu.

(6) Man bestimmt jetzt zwei Drehachsen. Dreht man bezüglich der ersten Achse um 120^0, so wird R in B überführt, d.h. jeder rote Punkt geht genau in einen blauen über. Und dreht man erneut um 120^0, so gehen die blauen in die grünen über. Hiernach sind alle drei Mengen R,G ind B zueinander kongruent.

(7) Dreht man jedoch um eine andere, zur ersten geeignet geneigte Achse um 180^0, so geht R in die disjunkte Vereinigung von G und B über. D.h. R ist auch kongruent zu G$\cup B$. Vermittels Transititvität schließt man: **G$\cup B$ ist kongruent zu jedem seiner beiden Teile G und B und diese sind auch untereinander kongruent.**

(8) Alle diese Mengen sind überabzählbar und im Lebesgueschen Sinne nicht meßbar! Sie sind somit unserer Anschauung weit entzogen. Man sollte sich daher die Verteilung der drei Farben auf S^2 auch keineswegs flächenhaft vorstellen, sondern eher an drei Raster denken, die auf sehr komplizierte Weise auf jeder Vergrößerungsstufe ineinander verschachtelt sind.

(9) **Konstruktion und Beschreibung der Färbungsmenge**.

(9.1) Alle Kongruenzen von Teilmengen von S^2 werden durch Drehungen erfasst, also durch Elemente von SO_3. Von Spiegelungen sehen wir ab. Wir wählen zwei Drehungen aus, die wir mit φ und ψ bezeichnen wollen. Die zugehörigen Drehachsen sollen einen Winkel $\neq 0$ mit einander bilden, dessen genaue Festlegung wir hier nicht besprechen. Jedenfals gibt es sehr viele zulässige Winkel. φ beschreibe eine 180^0-Drehung um die erste Achse. D.h. $\varphi^2 = id$. Dagegen beschreibt ψ eine Drehung um 120^0 um die zweite Achse. Also erst $\psi^3 = id$ oder $\psi^2 = \psi^{-1}$. Jetzt kann man noch gemischte Produkte wie $\varphi\psi\varphi$ oder $\psi^2\varphi\psi\varphi$ usw. bilden. Faktoren φ^2 oder ψ^3 innerhalb eines größeren Produktes darf man imer fortlassen, da sie gleich der Identität sind. Und Faktoren ψ^2 darf man durch ψ^{-1} ersetzen.

(9.2) Es verbleiben Produkte (=Worte) mit den Buchstaben φ, ψ oder ψ^{-1}, bei denen auf φ immer ψ oder ψ^{-1} und auf ψ bzw ψ^{-1} immer φ folgen muss. Zusätzlich gibt es noch das neutrale Element id.

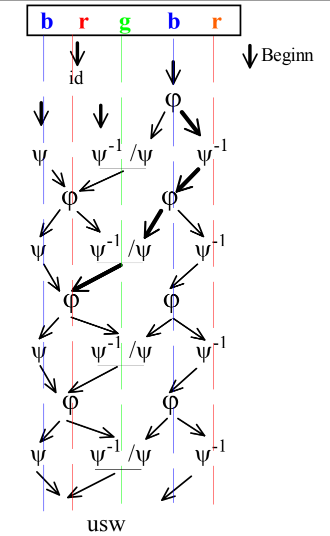
(9.3) Jedes derartige Produkt beschreibt wegen der Gruppenstruktur von SO_3 eine Drehung und **unsere Forderung an den Winkel** zwischen den beiden Drehachsen ist, dass verschiedene dieser Produkte immer auch verschiedene Drehungen ergeben sollen. Oder gleichwertig: **Dass keines dieser Produkte gleich der Einheit id ist.** Man kann zeigen, dass eine solche Winkelwahl möglich ist!

(9.4) Die Gesamtheit der so gebildeten Produkte bildet eine abzählbar unendliche Untergruppe f von SO_3. Der triviale Beweis nutzt das Untergruppenkriterium. Wir nennen f *Färbungsgruppe.*

(9.5) Beschreibung von f und Konstruktion der Farbpartition von f.

Die Elemente von f sind genauer wie folgt definiert:

Jedes Element von f ist id oder **beginnt** mit φ, ψ oder ψ^{-1}. Das ist im oberen Teil des Schemas angedeutet. Jedes Element ($\neq$ id) endet mit φ, ψ oder ψ^{-1}. D.h. $\varphi\psi\phi\psi^{-1}$ beginnt mit φ und endet mit ψ^{-1}. Dann kann man das gesamte Element im Schema durch einen endlichen und eindeutig bestimmten Weg von oben nach unten beschreiben.



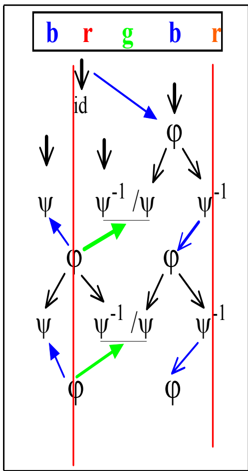
Jedes Element von f (außer id) beginnt als Wort mit einem φ, einem ψ oder ψ^{-1}. Diese Möglichkeiten sind durch $\Downarrow$ angedeutet.
Es folgt eine Kette von Buchstaben φ, ψ und ψ^{-1} wobei alle neutralen Faktoren fortgelassen sind. Die Pfeile legen fest, was jeweils als nächster Faktor möglich ist. φ^2 entfällt. $\varphi\psi^2$ ist durch $\varphi\psi^{-1}$ zu ersetzen und $\varphi\psi^{-2}$ durch $\varphi\psi$. Beachten Sie: Auf ein rechts stehendes φ im blauen Bereich folgt ein **rotes** ψ^{-1} oder ein **grünes** ψ, nicht etwa ein **grünes** ψ^{-1}. Das wird durch das Symbol $\underline{\psi^{-1}/\psi}$ angedeutet. Dies sichert die Eindeutigkeit des Weges
Jedes Element endet mit einem Buchstaben und dieser Buchstabe legt in der angedeuteten Weise die **Farbzugehörigkeit des Elementes** fest.
Fett eingezeichnet ist das Element $\varphi\psi^{-1}\varphi\psi\varphi$.Das (links stehende) letzte φ legt die Zugehörigkeit zur Farbe r fest. Dagegen gehört $\varphi\psi^{-1}\varphi\psi^{-1}\varphi$ zu b.

Also: Jedes Element aus f legt in unserem Schema einen eindeutig bestimmten Weg (von oben nach unten) fest. Die Lage des Endpunktes bestimmt dieFarbe des Elementes!

(9.6) Mit Hilfe dieses Schemas beweist man die folgenden **Multiplikationsregeln:**

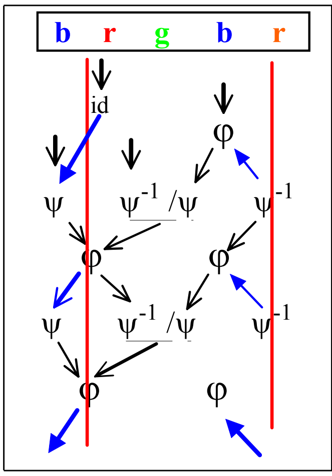
$\mathrm{r}\varphi = b \cup g$	$\mathrm{r}\psi = b$	$\mathrm{r}\psi^{-1} = g$

(9.7) Beweis: Betrachten wir die erste dieser Gleichungen. rφ besagt: An ein zu r gehöriges Wort wird noch ein φ angehängt. Die Figur zeigt, dass dann genau alle blauen und alle grünen Elemente entstehen. Das ist die behauptete Gleichheit.



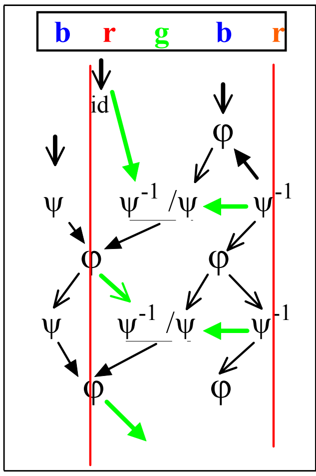
Endet das rote Wort mit einem φ, entsteht ein fortzulassendes φ^2. Die Pfeilrichtung deutet das an. Die Farbe des Pfeiles zeigt die Farbe b oder g des entstehenden Elementes.
Endet das Wort mit ψ^{-1}, so kommt das nach b führende φ hinzu. Und aus id ergibt sich das eine fehlende blaue φ ganz oben.
Ergebnis: $\boxed{\mathrm{r}\varphi = b \cup g}$

Jetzt zur zweiten Gleichung:



Hängt man an ein zu r gehöriges Wort ein ψ an, so entstehen die durch blaue Pfeile gekennzeichneten Worte . Man sieht, dass so genau die blauen Worte entstehen!
$\boxed{\text{r}\psi = b}$

Und jetzt die letzte Gleichung, die durch Anhängen von ψ^{-1} entsteht.



Die grünen Pfeile deuten an, was das Anhängen von ψ^{-1} bewirkt. Entsteht ein $\psi^{-2} = \psi$, so ergibt sich das durch den horizontalen Pfeil angedeutete Ende, das zu grün gehört. Die andere Hälfte von g entsteht durch anhängen von ψ^{-1} an id bzw. φ. Insgesamt $\boxed{\text{r}\psi^{-1} = g}$.

(9.8) Damit ist die Untergruppe f von SO_3 definiert. Zusätzlich haben wir die Partition $f = r \cup b \cup g$. Natürlich verlangt klappt die Konstruktion nur infolge der in (9.3) geforderten Winkelwahl. Unten konstruieren wir eine Menge N$\subset S^2$, also eine Menge von Punkten der Kugeloberfläche mit folgender Eigenschaft:

> Wendet man r auf (die Elemente der Menge) N an, so erhält man eine Menge R=Nr *roter* Punkte. Wendet man b darauf an, so erhält man eine Menge B=Nb blauer Punkte und g ergibt die grünen Punkte G=Ng. Überdies sind die drei Farbmengen disjunkt.

(10) **Konstruktion der Farbpartition von** S^2.

(10.1)Wir müssen zunächst die Menge N definieren! Hierzu denken wir uns zunächst die Elemente der Färbungsgruppe f auf alle Elemente von S^2 angewandt. Arbeitet man mit Zeilenvektoren, dann operiert f von rechts auf S^2. (Der erste Buchstabe eines Worte operieert dann auch als erster!). Untere der Operatiob zerfällt S^2 in Bahnen über die zugehörige Äquivalenzrelation

$$x\tilde{\ }y \quad (\text{x,y} \in S^2) \quad \Longleftrightarrow \exists \alpha \in f \text{ mit y=x}\alpha.$$

(10.2) Jetzt sortieren wir alle Bahnen mit nicht trivialem Stabilisator aus. D.h. Punkte z$\in S^2$, für die es ein $\alpha \in f$ mit $\alpha \neq id$ gibt, aber mit mit $z\alpha = z$. D. h. aber: z liegt auf einer Drehachse eines Elementes von f, ist Fixpunkt dieser Drehung. Da f nur abzählbar viele Elemente enthält, ist die Menge Q dieser Ausnahmepunkte höchstens abzählbar! Diese Teilmenge und die daraus erzeugten endlichen Klassen nehmen wir heraus.

Aus den verbleibenden Klassen (mit trivialen Stabilisatoren) wählen wir (unter Verwendung des Auswahlaxioms) eineVertretermenge. **Diese Vertretermenge sei unsere Menge N.**

(11.3) Wir haben oben bereits die Farbpunktemengen R=Nr und B=Nb und G=Ng eingeführt. Dann ist $S^2 = R \cup B \cup G \cup Q$ eine Partition von S^2, wobei Q nur abzählbar ist.

> Etwas genauer: Sei x$\in$ S^2, aber x$\notin$ Q. Nun liege x in der Klasse mit Vertreter v. D.h. es gibt ein eindeutiges $\alpha \in f$ mit x=vα. (Trivialer Stabilisator!) Zu α gehört aber nach unserer Konstruktion eine eindeutig bestimmte Farbe!

(12) Jetzt wenden wir auf R die Drehung φ an. Wegen der Beziehung r$\varphi = b \cup g$ gibt das Rφ =B$\cup G$. Die Beziehung ist bijektiv, so dass R und B$\cup G$ gleichmächtig sind. Durch diese Drehung um 180^0 wird R in B$\cup G$ übergeführt. **Die beiden Mengen sind nicht nur gleichmächtig, sondern auch kongruent!**

Wenden wir dagegen ψ oder ψ^{-1} an, **dann ist R jeweils konguent zu B und zu G.** Oder auch B ist kongruent sowohl zu B als zu G.

Diese Aussage "nicht nur gleichmächtig, sondern auch kongruent" verdeutlicht unser Problem: Wäre N messbar und das Maß invariant unter Drehungen, dann hätten wir einmal

$$\mu(S^2) = \mu(R) + \mu(B) + \mu(G) + \mu(Q)$$

Andererseits

$$\mu(R) = \mu(B) + \mu(G) \quad \text{und} \quad \mu(B) = \mu(G) = \mu(R) = \mu(N)$$

Zusammen ist das für endliches $\mu(S^2)$ nicht erfüllbar. Also: N und die daraus konstruierten können nicht im üblichen Sinne meßbar sein. Für diese Mengen gelten unsere üblichen Erfahrungenmit endlich vielen Operationen nicht!

(13) Mit Hilfe einer Reihe zusätzlicher technischer Überlegungen kann man das Beispiel weiter ausbauen. Wir geben hier nur das Resultat, das in der Regel als *Banach-Tarski-Paradox* bezeichnet wird:

> Die **Vollkugel** $B^3 \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius R>0 kann in zwei disjunkte Teile zerlegt werden $B^3 = X \cup Y$ mit folgenden Eigenschaften
>
> (a) X laßt sich disjunkt in endlich viele Teile zerlegen X=$X_1 \cup ... \cup X_n$ und korrespondierend Y=$Y_1 \cup ... \cup Y_n$
>
> (b) Die Teile sind derart, dass jedes Y_i zu X_i kongruent ist.
>
> (c) Andererseits kann man auch B_3 zerlegen in $B_3 = K_1 \cup ... \cup K_n$ derart, dass jedes K_i sowohl zu X_i als auch zu Y_i kongruent ist.

Die Vollkugel kann demnach in zwei Teile X und Y zerlegt werden, von denen jeder nach erneuter Zerlegung und Bewegung die gesamte Vollkugel ergibt!