Übungen Höhere Mathematik III Nr.6. / 21.11.03

Nr. 4,7 und 8 in der Anwesenheitsübung

■ 1) Etwas Formalismus. **Die Cantor-Menge**.

a) Der Start: Zerlege I $=[0,1]$ disjunkt in die drei Teilintervalle $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ und $I_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ und $I_2 = [\frac{2}{3}, \frac{3}{3}]$ für n=1.

Im zweiten Iterationsschritt sind 6 neue Intervalle zu bilden. Wie sind beispielsweise analog I_{00}, I_{01} und I_{02} zu **definieren**? Wie wird man die drei weiteren Intervalle **bezeichnen**?

b) Betrachte jetzt das Alphabet A=$\{0,1,2\}$ und die zugehörige Halbgruppe der Wörter W(A). (Vgl. Kap. 3. Verknüpfung: Hintereinanderschreiben). Die Wortlänge (=Zahl der Buchstaben) von w$\in W(A)$ bezeichnen wir mit $\ell = \ell$(w). Von W(A) bilden wir zwei Teilmengen. $W_1(A)$ soll aus allen Wörtern bestehen, in denen der Buchstabe 1 nicht vorkommt. Und $C_1(A)$ soll alle Wörter enthalten, die genau eine 1 enthalten und die steht an der letzten Stelle! D.h. jedes v$\in C_1(A)$ hat eine eindeutige Darstellung v=w1 mit w$\in W_1(A)$ sowie $\ell(v) = \ell(w) + 1$.

c) Definieren Sie jetzt **rekursiv** die folgenden zur Cantorschen Konstruktion benötigten Objekte: Für jedes w$\in W_1(A)$ ein abgeschlossenes Teilintervall $I_w=[a_w, b_w]$. Dabei sollten Sie möglichst zunächst a_w festlegen. Der Rest folgt dann. Und für alle v$\in C_1(A)$ ein offenes Intervall I_v. Die Rekursion geht natürlich über die Wortlänge!

d) Geben Sie a_w auch explizit an.

f) Sei k_n die Zahl der im n-ten Schritt (verbeibenden) Intervalle I_w. Bestimmen Sie k_n. Und sei j_n die Zahl der bis zum n-ten Schritt (einschließlich) herausgeschittenen offenen Intervalle. Bestimmen Sie auch j_n.

g) Wie läßt sich nun das Komplement der Cantormange schreiben und damit auch die Menge selbst?

h) Für n=1,2,.. setze

$$I_n = \cup_{\substack{w\in W_1(A)\\ \ell(w)=n}} I_w \qquad \text{Was ist dann} \quad \cap_n I_n \quad ?$$

e) Jedes x aus der Cantormenge C legt eine Intervallschachtelung (=Folge abgeschlossener Intervalle) $n\mapsto I_{w_n}$ fest, deren Durchschnitt gleich $\{x\}$ ist. Wie hängt die zugehörige Wortfolge $n\mapsto w_n$ mit der "Dezimal"bruchdarstellung im Dreiersystem von x zusammen? Was ergibt sich insbesondere für eine Darstellung für die Endpunkte der Intervalle aus I_w und w$\in C_1(A)$? (Denken sie daran, dass die Dezimalbruchdarstellung nicht immer eindeutig ist. So ist $\frac{1}{3} = 0.1000... = 0.02222...$ Wie steht es mit $\frac{2}{3}$?

■ 2) Die genauere Konstruktion der (in der Vorlesung angedeuteten) *Teufelsleiter:* Für jedes n$\in \mathbb{Z}$ konstruieren wir eine stetige Funktion $f_n : [0,1] \to [0,1]$ wie folgt:

a) $f_0(x) = x$

b) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{für } x \in I_0 \in W_1(A) \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in I_1 \in C_1(A) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(x - \frac{2}{3}) & \text{für } x \in I_2 \in W_1(A) \end{cases}$ Also allgemein : Ist w$\in C_1(W)$ mit einer Wortlänge $\leq n$, dann ist f_n auf I_w konstant. Es gibt j_n dieser I_w, wobei j_n oben bestimmt wurde. Und die Endpunkte benachbarter Intervalle sollen linear monoton wachsend verbunden werden mit jeweils gleichem Höhenunterschied $\frac{1}{j_n+1}$. Für die Enden soll gelten $f_n(0) = 0$ und $f_n(1) = 1$. Dann ist jedes f_n stetig und monoton wachsend.

c) Konstruieren und zeichnen Sie noch f_2.

d) Wieso existiert $\lim_{n\to\infty} f_n$ und ergibt erneut eine stetige Funktion? (Kap.6). Was folgt für die Differenzierbarkeit dieser Funktion

■ 3) Erklären Sie mit Hilfe eines Beispiels kurz den Unterschied von Ëine monoton wachsende Funktionsfolgeünd Ëine Folge monoton wachsender Funktionen".

■ 4A) Ergänzung zu Aufgabe 5 Übung Nr. 5: Sei E endliche Menge mit n Elementen. Wieviele σ-Algebren gibt es dann zu E. Bestimmen Sie diese Anzahlen für n=1,2,3 und 4. Versuchen Sie eine Rekursionsformel zu finden.

■ 5) Sei (E,$\mathfrak{M}, w$) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Also insbesondere w(E)=1. Weiter sei A$\in \mathfrak{M}$ mit w(A)$\neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T} = \{X \cap A| \quad X \in \mathfrak{M}\}$ eine σ-Algebra auf A ist!

b) Zeigen Sie, dass (A, $\mathcal{T}$,v) ein Wahrscheinlichkeitsraum ist wenn v wie folgt definiert ist: $\boxed{v(M\cap A) = \frac{w(M\cap A)}{w(A)}}$

c) Welche inhaltliche Bedeutung hat die Konstruktion aus b)? Konkretisieren Sie das am Beispiel des Würfelns.

■ 6) Sei z das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und ($\mathbb{N}$,$\mathfrak{P}$($\mathbb{N}$),z) der zugehörige Maßraum. Was bedeutet das zugehörige Integral?

a) Wann ist a=($\mathbb{N}$,n$\mapsto a_n, \mathbb{R}$) eine Stufenabbildung im Sinne der Definition? Was ist das zugehörige Integral?

b) Wann ist eine Folge a:$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ im Sinne der Theorie absolut integrabel?

■ 7A) Es sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Aussagen. Jede dieser Ausagen kann wahr oder falsch sein. D.h. man hat eine Abbildung w:$\mathcal{A} \to \{0,1\}$ mit der Interpretation: Gilt w(a)=1 für a$\in \mathcal{A}$, dann ist a wahr. Gilt w(a)=0, dann ist a falsch. Nun sei $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ eine Teilmenge ätomarerÄussagen, aus denen man mit Hilfe der üblichen logischen Konstruktionen UND, ODER, NICHT usw. weitere ßusammengesetzteÄussagen bilden kann, die auch in $\mathcal{A}$ liegen sollen. Dann legen die Wahrheitswerte für die Elemente von $\mathcal{A}_0$ die Wahrheitswerte dieser zusammengesetzten Aussagen fest (Wahrheitstafeln!).

Sei nun $\mathcal{A}_{0w} \subset \mathcal{A}_0$ die Teilmenge aller wahren atomaren Aussagen und $\chi : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von $\mathcal{A}_{0w}$. Also $\chi(a) = 1$, wenn a wahr ist und $\chi(a) = 0$ wenn a falsch ist. D.h., dass auf $\chi = w$ gilt (auf $\mathcal{A}_0$).

a) Sei jetzt a,b$\in \mathcal{A}_0$ und c=aUNDb. Dann liegt per Wahrheitstafel w(c) fest (so wie analog im Bereich der Maße $\mu(A\cup B)$ für disjunkte A und B durch μ(A) und μ(B) festgelegt ist). Nun kann man aber w(c) leicht über eine Formel in $\mathbb{R}$ aus $\chi(a)$ und $\chi(b)$ berechnen. Wie lautet die Formel? Bestimmen Sie eine entsprechende Formel für (aODERb) und eine für $(a \Longrightarrow b)$. Denken Sie daran, dass $a \Longrightarrow b$ dieselbe Wahrheitstafel wie (NICHTa)ODERb hat!

b) Ersetzen Sie jetzt die charakteristische Funktion χ durch eine äufgeweichteÄbbildung $\psi : \mathcal{A}_0 \to [0,1]$. Kann man die in a gewonnenen Formeln auf diese Funktionen ψ übertragen, so dass die Werte in $\mathcal{A}_0$ die Werte der zusammengestztten Aussagen festlegen? Und wie ist das zu interpretieren?

c) Konkretisieren Sie das etwa inhaltlich, indem Sie sich für $\mathcal{A}_0$ drei oder vier geeignete Aussagen mit inhaltlich interpretierbarem unscharfen fuzzy"Wahrheitsgehalt ausdenken. Sagen wir:

a sei Öttokar ist starker Raucher" $\psi(a) = 0.7$

b sei Öttokar ist alt" $\psi(b) = 0.5$

c ? d?

Wie steht es mit den "Wahrheitsgehalten"von aUNDb sowie aODERb nach diesem Konzept?

■ 8A) Eine schiefe Ebene kann reibungsfrei auf der Horizontalebene gleiten. Die konstante Schwerkraft wirkt vertikal. Auf der schiefen Ebene kann ein Körper reibungsfrei und rotationsfrei unter dem Einfluss der vertikalen Schwerkraft gleiten. Die Masse der schiefen Ebene sei M, die des Körpers m. Der Steigungswinkel der Ebene sei α.Was für eine Bewegung ergibt sich? Führen Sie günstige Koordinaten ein.