Höhere Mathematik III Übung Nr.4
7.11.2003

■ 1) Es sei $\mathrm{K}_1[x,y] = x^2 + 3y^2$. Die Nebenbedingung laute $\mathrm{K}_1[x,y] = 8$. Für $\mathrm{K}_0[x,y]$ nehmen wir einen der folgenden beiden Fälle

$$K_0[x,y] = 3x + 2y \qquad \text{und} \qquad \mathrm{L}_0[x,y] = xy.$$

Für welche Punkte wird der Wert von K_0 bzw. L_0 extremal unter der gegebenen Nebenbedingung.
a) Interpretieren Sie die beiden Probleme geometrisch. Was ist hinsichlich der Lösungen zu erwarten?
b) Lösen Sie das Problem mit dem Multiplikatorschema

■ 2) Bestimmen Sie die Extremalen zum Wirkungsfunktional

$$S[g] = \int_a^b dt g(t)\sqrt{1 + \dot{g}^2(t)}$$

a) Welches Problem zur *Oberfläche von Rotationskörpern* führt auf dieses Funktional?

■ 3) Formulieren und lösen Sie das zum Stichwort "Kettenlinie im konstanten Schwerefeld" gehörige Extremwertproblem.

■ 4) Das Zweikörperproblem der Mechanik. Wir betrachten die folgende Lagrangefunktion $(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V_0^3)$:

$$L(t, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{v}_1\vec{v}_2) = \frac{m_1}{2}\vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2^2 - U(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

a) Physikalische Interpretation? Wie lauten die Bewegungsgleichungen? (Ein angemessen vollständige, wenn auch kurze Antwort wird erwartet!)
b) Führen Sie die folgende Koordinatentransformation durch:

$$\Phi : \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \\ \frac{1}{M}(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } \mathrm{M}{=}\mathrm{m}_1 + m_2$$

Wie lautet die Lagrangefunktion L^S in den neuen Koordinaten?
c) Welche Erhaltungssätz folgen für die neuen Koordinaten? Wie sehen der verallgemeinerte Impuls und $\bar{H}$ in den neuen Koordinaten aus? Wie lauten die kanonischen Gleichungen? Stellen Sie auch den Geamtdrehimpuls $\vec{J} = m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2$ in den neuen Koordinaten dar.
d) Versuchen Sie die Resultate auf das N-Körperproblem zu übertragen. Die zugehörigen Kräfte sollen alle vom Zweikörpertyp sein, und sich aus Potentialen herleiten, die nur vom Abstandsvektor der beteiligten beiden Teilchen abhängen.

■ Anwesenheitsübung: 5) Text zur Drehimpulserhaltung wird ausgeteilt.
■ Anwesenheitsübung: 6) Fortführung von 4d): Formulieren Sie eine Lagrangefunktion für drei Massepunkte zwischen denen Dreikörperkräfte wirken, so dass das Superpositionsprinzip nicht gilt.
■ 7) Für $\mathrm{L}{=}\mathrm{tv}^3$ wurde die Schar der Extremalen durch (t_1, x_1) bereits bestimmt. Ebenso die Extremale, die (t_1, x_1) mit (t,x) verband. Das war

$$g_{tx}(u) = x_1 + \frac{x - x_1}{\sqrt{t} - \sqrt{t_1}}(\sqrt{u} - \sqrt{t_1}).$$

Der Endpunkt der Extremalen soll jetzt auf der Geraden g mit Gleichung x=H-t liegen. Bestimmen Sie die Kandidaten für die Extremale mit extremalem Funktionalwert,! *(Freier Endpunkt!)*
(Hierzu gibt es mehrere Wege. Verwenden Sie das allgemeine Schema!)