Lösungen zum dritten Übungsblatt

1. Am einfachsten und zufriedenstellend wäre es gewesen, mit einem Bildchen ein ganzzahliges Gitter zu zeichnen, in das man ausgehend von $(0,0)$ eine eckige 'Spirale' einzeichnet, die alle Gitterpunkte erfasst, also etwa eins hoch, eins nach rechts, dann zwei nach unten, zwei nach links, drei nach oben, drei nach rechts, usw. Damit hat man eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nunmehr lässt man wie folgt alle ganzzahligen Paare aus, deren zweite Komponente Null ist oder deren Komponenten nicht teilerfremd sind: Diese Teilmenge von Bild(f) hat ein unbeschränktes Urbild in $\mathbb{N}$, das eine Teilfolge $(k_n)_n$ von $\mathbb{N}$ bildet, und die Abbildung $g : n \mapsto k_n$ ist eine Bijektion auf diese Teilfolge, so dass $f \circ g$ die gewünschte Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$ ist, genauer hätte man dem resultierenden Repräsentanten einer rationalen Zahl noch dessen Klasse zuzuordnen, also $n \mapsto [f(g(n))] = $ *Äquivalenzklasse* von $f(g(x))$ zu bilden.

2. Wenn man entweder $\vec{a}$ spezialisiert, etwa zu $\vec{a}^K = (0,0,1)$, dann die Restriktion auf die $yz-$ Ebene betrachtet, so sieht man das Feld recht gut: Auf einer Geraden senkrecht zu $\vec{a}$ ist stets derselbe Faktor an den Ortsvektor anzubringen und der so gestreckte Ortsvektor am zugehörigen Punkt anzuheften. Allerdings sollte man verbal die Rotationssymmetrie des Feldes um die Achse durch den Ursprung und parallel zu $\vec{a}$ bemerken, so dass man mit dieser Restriktion schon das ganze Feld erfasst. Übrigens kommt bei Vektoren $\vec{x}$ senkrecht zu $\vec{a}$ der Nullvektor heraus, es ist nicht etwa 'kein Feld da'. Bei anderem Betrag von $\vec{a}$ als Eins werden alle Feldvektoren entsprechend gestreckt.

3. Zu zeigen ist, dass die Gleichung $g(f(x)) = c$ mit $c \in C$ beliebig und Unbestimmter x genau eine Lösung hat. Nun hat aber nach Voraussetzung die Gleichung $g(b) = c$ genau eine Lösung $b \in B$, weiter hat mit diesem b die Gleichung $f(x) = b$ genau eine Lösung. Schließlich rechnet man nach, dass
$$f^{-1}\left(g^{-1}\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)\right) = f^{-1}(\left(g^{-1} \circ g\right)\left(f(x)\right)) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x.$$
Also ist $f^{-1} \circ g^{-1}$ die Umkehrabbildung zu $g \circ f$.

4. $\underline{f}$ ist genau dann bijektiv, wenn f es ist. In diesem Falle ist $\underline{f}^{-1}$auch stets die Umkehrabbildung. Einfache Beispiele erhält man etwa damit, dass man mit nicht injektiver Abbildung f und $a \neq b$, $f(a) = f(b)$ auch hat: $\underline{f}\ (\{a\}) = \underline{f}\ (\{b\})$, obwohl $\{a\} \neq \{b\}$, so dass $\underline{f}$ nicht injektiv ist und somit gar keine inverse Abbildung haben kann.

5. Offenbar ist die Relation im allgemeinen nicht transitiv, etwa hat man mit $M = \{1\}$, $N = \{1,2\}$ und $K = \{2\}$, dass $M \sim N$ und $N \sim K$, weil diese Mengenpaare nicht disjunkt sind, aber man hat nicht $M \sim K$, da M und K disjunkt sind.

6. (a) Das Urbild von $\{y\}$, $-1 < y < 1$, unter sin hat stets in jeder vollen Periode zwei Elemente, für 1 und -1 ergibt sich jeweils nur eines. An diese sind jeweils die ganzzahligen Vielfachen von 2π zu addieren. Also:
$$\begin{aligned} \text{Für } -1 &< y < 1 \text{ hat man} \\ \underline{\sin}^{-1}(\{y\}) &= \{\arcsin(y) + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(y) + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}, \\ \text{für } y &\in \{-1, 1\} \text{ hat man} \\ \underline{\sin}^{-1}(\{y\}) &= \{\arcsin(y) + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

   (b) Hyperbeln bzw. für den Feldwert 0 die Doppelgerade, an die sich die Hyperbeläste asymptotisch nähern.

   (c) Die Klassen, welche von der Partition$\{p_1, ..., p_4\}$ induziert werden, wurden recht gut gesehen. Es handelt sich um die Gebiete, die jeweils oben und unten bzw. rechts und links von der Doppelgeraden $x^2 = y^2$ aus gesehen jeweils jenseits/diesseits der Hyperbeln $y^2 = x^2 + 1$ bzw. $x^2 = y^2 + 1$ liegen.

   (d) Hier könnte man einmal präzisieren zu 'parallel', die Klassen sind dann zu veranschaulichen als Ursprungsgeraden ohne den Ursprung. Man könnte auch die Relation präzisieren zu: 'Parallel und in gleiche Richtung zeigend', also $\vec{x} \sim \vec{y}$ genau dann, wenn es $\lambda > 0$ gibt mit $\vec{x} = \lambda\vec{y}$. In diesem Falle werden die Klassen Halbgeraden ohne den Ursprung.

7. Sei $t \in T$. Dann $f(t) \in \underline{f}\,(\{t\}) \subset \underline{f}\,(T)$, also $t \in \underline{f}^{\,-1}\left(\underline{f}\,(T)\right)$. Aber Gleichheit bedeutet: Wenn u im Urbild von $\underline{f}\,(T)$ liegt, dann auch in T. Das ist natürlich nur dann der Fall, wenn kein Element aus $A \setminus T$ dasselbe Bild wie ein Element von T. Bei injektivem f hätte man also stets die Gleichheit. Zweite Frage: Analog fragt sich für $\underline{f}$, ob für Teilmengen $U \subset W$ eine Inklusionsbeziehung zwischen U und $\underline{f}\left(\underline{f}^{-1}(U)\right)$ bestehe.Wir behaupten, dass hier stets zutrifft:

$$U \supset \underline{f}\left(\underline{f}^{-1}(U)\right).$$

Denn sei $a \in \underline{f}^{-1}(U)$. Dann gibt es ein $u \in U$ mit $f(a) = u$. Also ist das Bild von a in U. Dies zeigt die behauptete Inklusion, sie ist banal nach Definition gültig. Aber Gleichheit gilt nicht, wenn f nicht surjektiv ist, etwa $u \notin \mathrm{Bild}(f)$. Dann ist mit $U = \{u\}$ die Menge $\underline{f}\left(\underline{f}^{-1}(U)\right)$ leer. Ist f surjektiv, so besteht stets Gleichheit.