Brückenkursklausur 8.10. 2004

Bitte die Fragen genau durchlesen und diese beantworten, nichts Ausgedachtes. Achten Sie auf eine vernünftige Formulierung. Zusatzüberlegungen und Kommentare ergeben Sonderpunkte, auch Überlegungen, die zeigen, dass ein Resultat falsch sein muß. Bitte ordentliche Endform. Zeiteinteilung beachten. Bitte wenig "Kooperation" - Viel Spaß und Erfolg

■ 1) Sei $\vec{a} = (0, 2, 2)$ und $\vec{b} = (0, 3, -1)$ und $\vec{c} = (0, 3, 4)$.
a) Bestimmen Sie zeichnerisch die beiden Zahlen α und β, für die $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$ gilt.
b) Bestimmen Sie diese Zahlen anschließend rechnerisch.
c) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{c}$ und $(\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{c}) \times (\frac{1}{5}\vec{c} - \frac{1}{5}\vec{a})$.
d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$.
e) Es sei $\vec{g} = (0, 0, -10)$. Wie lautet die Flugparabel, die $\vec{r}(-3) = \vec{c}$ und $\vec{v}(-3) = \vec{a}$ erfüllt?
f) Bestimmen Sie Ort und Geschwindigkeit der Flugbahn aus e) zur Zeit t=0 sowie den Scheitelpunkt.
g$*$) In welchem Zeitintervall ist der Betrag der Geschwindigkeit kleiner als $\sqrt{8}$?

■ 2) Die Brennpunktseigenschaft der Parabel y=x^2 :
Ein Lichtstrahl falle parallel zur y-Achse auf den Parabelpunkt P_a mit Koordinatenvektor (a,a^2). Die Richtung des Lichtstrahles wird durch $\vec{n} = (0, 1)$ gegeben. Die Tangente an die Parabel in P_a hat die Richtung $\vec{t} = (1, 2a)$. Dann hat die Normale die Richtung $\vec{N} = (-2a, 1)$.
Wir zerlegen $\vec{n}$ in eine zu $\vec{N}$ senkrechte und parallele Komponente: $\vec{n} = \vec{s} + \vec{p}$. Dann gilt für die Richtung des reflektierten Strahles $\vec{r}$ gerade $\vec{r} = \vec{n} - 2\vec{p}$ wie mehrfach besprochen. Man findet $\vec{r} = \frac{1}{1+4a^2}(4a, 4a^2 - 1)$. Als Richtungsvektor für den reflektierten Stahl nehmen wir den bruchfreien Vektor $\vec{R} = (4a, 4a^2 - 1)$.
a) Fertigen Sie eine Skizze der beschriebenen Konfiguration.
b) Berechnen Sie die parallele Komponente $\vec{p}$ und zeigen Sie, dass sich damit über $\vec{r} = \vec{n} - 2\vec{p}$ das angegebene $\vec{r}$ ergibt.
b) Parametrisieren Sie die reflektierte Gerade (durch P_a mit Richtungsvektor $\vec{R}$) und bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse. Ist damit die Brennpunktseigenschaft bewiesen? Wo liegt der Brennpunkt?

■ 3) a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit äußerem Parameter a.

$$\boxed{\begin{aligned} 4x + 6y - 8z &= a \\ 3x + 4y - 5z &= 3 \\ 5x + 7y - 9z &= 2 \end{aligned}}$$

■ 4) Eine komplexe Zahl z erfülle die folgende Gleichung: $\boxed{\frac{2}{z-i} + \frac{1}{3+i} = \frac{1}{2}}$. z soll bestimmt werden.
a) Beschreiben Sie kurz die Strategie mit der Sie vorgehen wollen. Und die sollte **hier nicht** darin bestehen, zunächst mit dem Hauptnenner zu multiplizieren!
b) Bestimmen Sie z.

■ 5) Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden beiden komplexen Zahlen: $z_1 = 3 + 3i$ und $z_2 = -4 + 5i$. Bestimmen Sie weiter $\sqrt{z_2}$ und $\frac{1}{z_2}$. Zeichnen Sie die drei komplexen Zahlen z_2, $\sqrt{z_2}$ und $\frac{1}{z_2}$.

■ 6) Diskutieren Sie das Verhalten der Funktion $\boxed{f(x) = \frac{x}{1-x} e^x}$

■ 7) Diskutieren Sie $g(x) = \frac{x(2-x)}{x^2+1}$ und bestimmen Sie eine Stammfunktion. Beachten Sie, dass $\frac{x(2-x)}{x^2+1} = \frac{2x-(x^2+1)+1}{x^2+1}$ gilt.

■ 8)Die Funktion $g(x) = \frac{\ln(x-2)}{3x(x-3)}$ hat bei x=3 eine Problemstelle. Wie verhält sich g lokal an dieser Stelle? Dazu genügt es, die Tangentenzerlegung von ln(x-2) um $x_0 = 3$ zu bestimmen.

■ 9) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$I = \int_0^a dx (a - \frac{1}{2}x)^5$	$J = \int_0^a dx\ x^5 (a^6 - \frac{1}{2}x^6)^5$	$K = \int_0^1 \frac{dx\ x}{(x^2-4)(x+1)}$

Weiter sei $L = \int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$. Berechnen Sie dies Integral mit Hilfe der Substitution $u = x + \sqrt{1 + x^2}$.

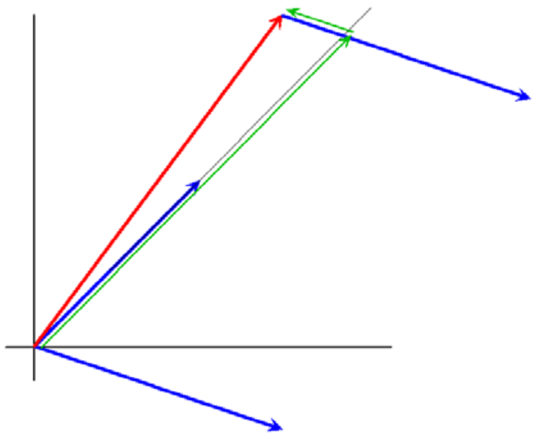
10$*$) ■ Es sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k^2$ für n=1,2,3,... (Bezeichnung!) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt

$$S_n = (-1)^n \binom{n+1}{2} \qquad \text{(Binomialkoeffizient!)}$$

Lösungen

■ 1) Sei $\vec{a} = (0,2,2)$ und $\vec{b} = (0,3,-1)$ und $\vec{c} = (0,3,4)$.
a) Bestimmen Sie zeichnerisch die beiden Zahlen α und β, für die $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$ gilt.
b) Bestimmen Sie diese Zahlen anschließend rechnerisch.
c) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{c}$ und $(\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{c}) \times (\frac{1}{5}\vec{c} - \frac{1}{5}\vec{a})$.
d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$.
e) Es sei $\vec{g} = (0,0,-10)$. Wie lautet die Flugparabel, die $\vec{r}(-3) = \vec{c}$ und $\vec{v}(-3) = \vec{a}$ erfüllt?
f) Bestimmen Sie Ort und Geschwindigkeit der Flugbahn aus e) zur Zeit t=0 sowie den Scheitelpunkt.
g$*$) In welchem Zeitintervall ist der Betrag der Geschwindigkeit kleiner als $\sqrt{8}$?

▼ a) Aus der Figur folgt $\alpha \approx 2$ und $\beta \approx -.3$



b) Alle Vektoren liegen in der y-z-Ebene:

$$\alpha(0,2,2) + \beta(0,3,-1) = (0,3,4)$$

Das Schnittschema gibt

$$\boxed{\begin{array}{lll} 2\alpha + 3\beta = 3 & + & \boxed{4\beta = -1} \quad \beta = -\frac{1}{4} \\ 2\alpha - 1\beta = 4 & - & \qquad\qquad\ \ \alpha = \frac{15}{8} \end{array}}$$

c) $\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{c}) \times (\frac{1}{5}\vec{c} - \frac{1}{5}\vec{a}) = \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{5}\right)\vec{a} \times \vec{c} = -\frac{2}{15}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Sei φ dieser Winkel:

$$\cos\varphi = \frac{14}{\sqrt{8}\sqrt{25}} = \frac{7}{10}\sqrt{2}$$

Das liegt etwas unter 1 und gibt einen sehr kleinen Winkel in Übereinstimmung mit der Figur.

e)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} T^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3+2T \\ 4+2T-5T^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2-10T \end{pmatrix} \qquad \text{mit T=(t+3).}$$

f) Für t=0 ist T=3, also $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -35 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -28 \end{pmatrix}$. Im Scheitel ist $v_z(t) = 0$, also $T_S = \frac{1}{5}$ oder $t_S = \frac{16}{5}$. D.h. $\vec{r}_S = \vec{r}(t_S) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 21 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{v}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

g) Für den Betrag der Geschwindigkeit folgt

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{4 + (2-10T)^2}$$

Verlangt wird $|\vec{v}(t)| < \sqrt{8}$, also (da die Wurzelfunktion und quadrieren monoton sind):

$$\begin{aligned} 4 + (2-10T)^2 &< 8 \\ (2-10T)^2 &< 4 \\ |2-10T| &< 2 \\ 0 &< T < \frac{2}{5} \quad \text{also} \quad \boxed{-3<t<-\tfrac{13}{5}} \end{aligned}$$

In diesem Zeitintervall ist die Geschwindigkeit ausreichend klein.

■ 2) Die Brennpunktseigenschaft der Parabel $y=x^2$:

Ein Lichtstrahl falle parallel zur y-Achse auf den Parabelpunkt P_a mit Koordinatenvektor (a,a^2). Die Richtung des Lichtstrahles wird durch $\vec{n} = (0,1)$ gegeben. Die Tangente an die Parabel in P_a hat die Richtung $\vec{t} = (1,2a)$. Dann hat die Normale die Richtung $\vec{N} = (-2a,1)$.

Wir zerlegen $\vec{n}$ in eine zu $\vec{N}$ senkrechte und parallele Komponente: $\vec{n} = \vec{s} + \vec{p}$. Dann gilt für die Richtung des reflektierten Strahles $\vec{r}$ gerade $\vec{r} = \vec{n} - 2\vec{p}$ wie mehrfach besprochen. Man findet $\vec{r} = \frac{1}{1+4a^2}(4a, 4a^2-1)$. Als Richtungsvektor für den reflektierten Stahl nehmen wir den bruchfreien Vektor $\vec{R} = (4a, 4a^2-1)$.

a) Fertigen Sie eine Skizze der beschriebenen Konfiguration.

b) Berechnen Sie die parallele Komponente $\vec{p}$ und zeigen Sie, dass sich damit über $\vec{r} = \vec{n} - 2\vec{p}$ das angegebene $\vec{r}$ ergibt.

c) Parametrisieren Sie die reflektierte Gerade (durch P_a mit Richtungsvektor $\vec{R}$) und bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse. Ist damit die Brennpunktseigenschaft bewiesen? Wo liegt der Brennpunkt?

a)....

b) $\vec{n} = \vec{s} + \vec{p}$. Mit $\vec{n} = (0,1)$ und $\vec{N} = (-2a,1)$ folgt $\vec{p} = \frac{(\vec{n}\cdot\vec{N})}{\vec{N}^2}\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}(-2a,1)$. Weiter ist $\vec{r} = \vec{n} - 2\vec{p}$, also

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (0,1) - \frac{2}{1+4a^2}(-2a,1) \\ &= \frac{1}{1+4a^2}\left[(0,1+4a^2) - (-4a,2)\right] \\ &= \frac{1}{1+4a^2}(4a, 4a^2-1) \quad \text{wie behauptet.} \end{aligned}$$

c)

$$\vec{x}_r(u) = (a,a^2) + u(4a, 4a^2-1) = \left(a + 4au, a^2 + 4a^2u - u\right)$$

Schnitt mit der y-Achse heißt x=0, also a(1+4u)=0. Für a$\neq$ 0 folgt u=-$\frac{1}{4}$. Eingesetzt gibt das den y-Wert $a^2 - a^2 + \frac{1}{4}$.

D.h. der Punkt (0,$\frac{1}{4}$) hat die behauptete Brennpunktseigenschaft. Alle reflektierten Strahlen (auch der mit a=0) gehen durch ihn hindurch.

■ 3) a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit äußerem Parameter a.

$$\boxed{\begin{array}{|lr|llll|l|ll|}\hline 4x+6y-8z & =a & +3 & & & & & & \\ 3x+4y-5z & =3 & -4 & +5 & \text{gibt} & & \text{2y-4z=3a-12} & 1 & \boxed{\text{0=3a+6}} \\ 5x+7y-9z & =2 & & -3 & & & \text{-y+2z=9} & 2 & \\ \hline\end{array}}$$

Welche (y,z) erfüllen das? Fallunterscheidung! Für a$\neq - -$ 2 ist das System unlösbar. Für a=-2 ist beispielsweise z frei. Es folgt y=-9+2z und 3x=3-4y+5z=3-4(-9+2z)+5z=39-3z oder x=13-z Zusammen

$$\boxed{\vec{x}_L(\text{z})=\left(\begin{array}{c} 13-z \\ -9+2z \\ z \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 13 \\ -9 \\ 0 \end{array}\right)+\text{z}\left(\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right)}$$

Eine Gerade, k =1.

■ 4) Eine komplexe Zahl z erfülle die folgende Gleichung: $\boxed{\frac{2}{z-i}+\frac{1}{3+i}=\frac{1}{2}}$. z soll bestimmt werden.

a) Beschreiben Sie kurz die Strategie mit der Sie vorgehen wollen. Und die sollte **hier nicht** darin bestehen, zunächst mit dem Hauptnenner zu multiplizieren!

b) Bestimmen Sie z.

■ 5) Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden beiden komplexen Zahlen: $z_1 = 3+3i$ und $z_2 = -4+5i$. Bestimmen Sie weiter $\sqrt{z_2}$ und $\frac{1}{z_2}$. Zeichnen Sie die drei komplexen Zahlen z_2, $\sqrt{z_2}$ und $\frac{1}{z_2}$.

▼

b)

$$\begin{aligned} \frac{2}{z-i}+\frac{1}{3+i} &= \frac{1}{2} \\ \frac{2}{z-i} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3+i}=\frac{(3+i)-2}{2(3+i)}=\frac{1+i}{2(3+i)} \\ z-i &= 4\frac{3+i}{1+i}=2(3+i)(1-i)=2(4-2i) \\ z &= 8-3i \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} z_1 &= 3+3i=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_2=-4+5i=\sqrt{41}e^{i(-atn\left(\frac{5}{4}\right)+\pi)} \\ \sqrt{z_2} &= \pm\sqrt[4]{41}e^{\frac{i}{2}\left(-atn\left(\frac{5}{4}\right)+\pi\right)} \qquad \frac{1}{z_2}=\frac{1}{\sqrt{41}}e^{i(atn\left(\frac{5}{4}\right)-\pi)} \end{aligned}$$

Skizze

■ 6) Diskutieren Sie das Verhalten der Funktion $\boxed{\text{f(x)}=\frac{x}{1-x}\text{e}^x}$

▼ Folgende Eigenschaften sieht man unmittelbar durch erste Inspektion des Rechenausdrucks:

a) Nullstelle bei x=0. Genauer f(x)$\approx x\cdot 1$ $\quad(1=\frac{1}{1-0}e^0)$

b) Pol bei x=1. Genauer f(x)$\approx \frac{e}{1-x}$

c) Für x$\rightarrow +\infty$ dominiert e^x, so dass f(x)$\rightarrow -\infty$ geht. Das Vorzeichen wird durch den Faktor $\frac{1}{1-x}$ verursacht.

d) für x→ $-\infty$ dominiert erneut e^x. Dieser Faktor geht jetzt nach Null. Vorzeichen ist erneut -. Ursache ist jetzt der Faktor x. Also f(x)→ 0 aus dem Positven.

e) Man erwartet (Skizze) ein Maximum bei x>1 und ein Minimum für x<1. Also

f) Ableitungsberechnung. Nebenrechnung:

$$(xe^x)' = e^x(1+x)$$

also (Ausklammern!)

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x)\cdot(1-x) - xe^x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{e^x}{(1-x)^2}\left[1+x-x^2\right]$$

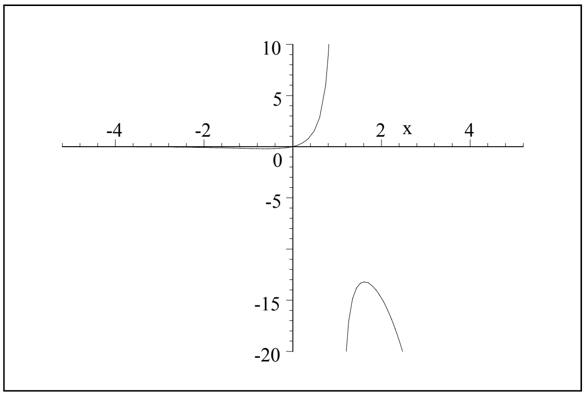
Nullstelle für $x^2 - x - 1 = 0$, also $x_{12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Numerisch $x_1 \approx 1.62$ und $x_2 \approx \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = -0.62$. Das entspricht den Erwartungen.

g) Die Extremwerte liegen bei (1.62, -13.2) und bei (-0.62, -0.2)

f) Wendepunkte: Einer sollte links vom Minimum liegen:

$$\begin{aligned}
f\,'(x) &= \frac{e^x}{(1-x)^2}\left[1+x-x^2\right] \\
\left(e^x(1+x-x^2)\right)' &= e^x\left[1+x-x^2+1-2x\right] = e^x(2-x-x^2) \\
f\,''(x) &= \frac{e^x(2-x-x^2)\cdot(1-x)^2 - e^x(1+x-x^2)\cdot(-2)(1-x)}{(1-x)^4} \\
&= \frac{e^x}{(1-x)^3}\left[(2-x-x^2)(1-x)+2(1+x-x^2\right] \\
&= \frac{e^x}{(1-x)^3}\left[4-x-2x^2+x^3\right]
\end{aligned}$$

Das Polynom hat nur eine Nullstelle zwischen -2 und -1, was der Erwartung entspricht.
Der Graph mit extrem flachen Minimum:



■ 7) Diskutieren Sie g(x)=$\frac{x(2-x)}{x^2+1}$ und bestimmen Sie eine Stammfunktion. Beachten Sie, dass $\frac{x(2-x)}{x^2+1} = \frac{2x-(x^2+1)+1}{x^2+1}$ gilt.

▼

a) Nullstellen bei x=0,2. Genauer g(x)≈ $2x$ bei x=0 und g(x)≈ $\frac{2}{5}(2-x)$ bei x=2.

b) Positive Werte nur zwischen diesen beiden Nullstellen

c) Keine Symmetrie

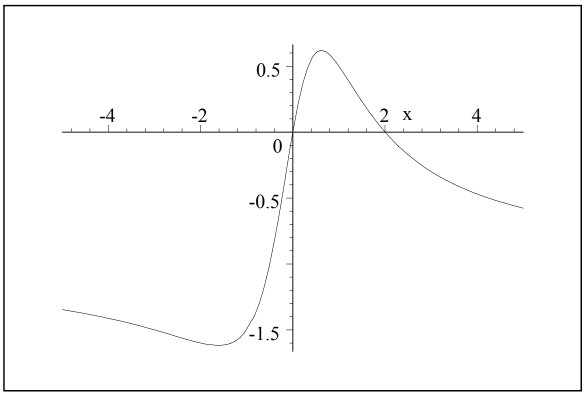
d) Wegen $\frac{x(2-x)}{x^2+1} = \frac{\frac{2}{x}-1}{1+\frac{1}{x^2}}$ geht g(x) gegen -1 für x→ $\pm\infty$. Genauer: $\frac{x(2-x)}{x^2+1} = -1 + \frac{2x+1}{x^2+1}$. Also monoton von oben für x$\rightarrow +\infty$ und monoton von unten für x$\rightarrow -\infty$. D.h. es gibt ein Minimum für negative x.

e) Skizze ist jetzt gut machbar.

f) Ableitung zur Bestimmung der beiden Extremwerte:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2x-x^2}{x^2+1} \\ g'(x) &= \frac{(2-2x)\cdot(x^2+1)-(2x-x^2)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = -2\frac{x^2-1+x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Dieselben Nullstellen wie in der varangegangenen Aufgabe!



Und die Stammfunktion: g(x)=$\frac{x(2-x)}{x^2+1} = -1 + \frac{2x+1}{x^2+1} = -1 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$. Also

$$G(x) = -x + \ln|x^2+1| + atn(x)$$

■ 8)Die Funktion g(x)=$\frac{\ln(x-2)}{3x(x-3)}$ hat bei x=3 eine Problemstelle. Wie verhält sich g lokal an dieser Stelle? Dazu genügt es, die Tangentenzerlegung von ln(x-2) um $x_0 = 3$ zu bestimmen.

▼

Text lesen:" Zuerst die Tangentenzerlegung von f(x)=ln(x-2) um x= bestimmen"

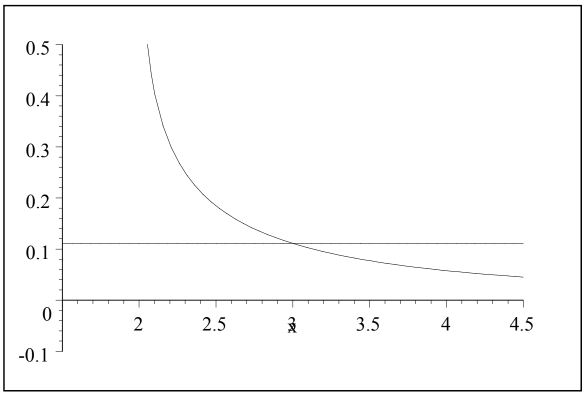
$$\begin{aligned} \ln(x-2) &= \ln(1+(x-3)) \\ &= \ln(1) + 1\cdot(x-3) + ... \\ &= 0 + 1\cdot(x-3) + ... \end{aligned}$$

.Einsetzen gibt

$$g(x) = \frac{0+1\cdot(x-3)+...}{3x(x-3)} = \frac{1+..}{3x}$$

Damit folgt für x=3 der Grenzwert $\frac{1}{9}$.

Zur Ergänzung der Graph in diesem Bereich samt Wert y=$\frac{1}{9}$:



■ 9) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

I=$\int_0^a dx(a-\frac{1}{2}x)^5$	J=$\int_0^a dx\ x^5(a^6-\frac{1}{2}x^6)^5$	K=$\int_0^1 \frac{dx\ x}{(x^2-4)(x+1)}$

Weiter sei L=$\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$. Berechnen Sie dies Integral mit Hilfe der Substitution u=x+$\sqrt{1+x^2}$.

▼

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a dx(a-\frac{1}{2}x)^5 = (-2)\,\frac{1}{6}(a-\frac{1}{2}x)^6|_{x=0}^a \\ &= \frac{1}{3}\left(a^6-\left(\frac{a}{2}\right)^6\right) = \frac{21}{64}a^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^a dx\ x^5(a^6-\frac{1}{2}x^6)^5 = \frac{-1}{3}\int_0^a dx(-\frac{6}{2}x^5)(a^6-\frac{1}{2}x^6)^5 \\ &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}(a^6-\frac{1}{2}x^6)^6|_0^a = \frac{1}{18}\left(a^{36}-\left(\frac{1}{2}a^6\right)^6\right) \\ &= \frac{1}{18}\frac{63}{64}a^{36} = \frac{7}{128}a^{36} \end{aligned}$$

$\int_0^a x^5(a^6-\frac{1}{2}x^6)^5dx = \frac{7}{128}a^{36}$

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{dx\ x}{(x^2-4)(x+1)} = \int_0^1 \frac{dx\ x}{(x-2)(x+2)(x+1)} \\ &= \int_0^1 dx\left[\frac{\frac{2}{12}}{x-2}+\frac{-\frac{2}{4}}{x+2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}\right] \\ &= \frac{1}{6}\left[\ln|x-2|-3\ln|x+2|+4\ln|x+1|\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}\ln 3+\frac{2}{3}\ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x+\sqrt{1+x^2} \\ (u-x)^2 &= 1+x^2 \\ u^2-2ux &= 1 \qquad \text{x=}\frac{u^2-1}{2u} \\ \frac{(2u)\cdot(2u)-(u^2-1)\cdot 2}{4u^2} &= \frac{2+2u^2}{4u^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(1)\quad u &= x+\sqrt{1+x^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{x}=\frac{u^2-1}{2u}\\
(2)\quad \mathrm{dx} &= \frac{1+u^2}{2u^2}\\
(3)\quad \int_0^a dx &\to \int_1^{a+\sqrt{1+a^2}} du
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}} &= \int_1^{a+\sqrt{1+a^2}} du\frac{1+u^2}{2u^2}\cdot\frac{1}{u} = \frac{1}{2}\int_1^{a+\sqrt{1+a^2}} du\left(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u^2}+\ln|u|\right]_1^{a+\sqrt{1+a^2}}\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)^2}+1+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\frac{a}{a+\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{2}\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a\sqrt{1+a^2}+\frac{1}{2}\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)
\end{aligned}
$$

10∗) ■ Es sei $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot k^2$ für n=1,2,3,... (Bezeichnung!) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt

$$S_n = (-1)^n \binom{n+1}{2} \qquad \text{(Binomialkoeffizient!)}$$

▼
(1) $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot k^2$ abkürzende Bezeichnung
(2) Für n=1,2,3,... haben wir die Aussage $\mathcal{A}(n)$:

$$S_n = (-1)^n \binom{n+1}{2} \quad \text{ist gültige Gleichung.}$$

(3) $\mathcal{A}(1)$ stimmt: $(-1)^1 1^2 = (-1)^1 \frac{2\cdot 1}{2}$.

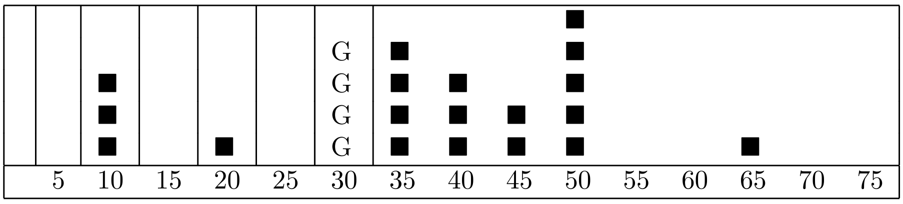
(4) Zu zeigen: " Aus $\mathcal{A}(1), \mathcal{A}(2), ..., \mathcal{A}(N-1)$ folgt $\mathcal{A}(N)$ " . Das formuliert man meist: Sei $\mathcal{A}(n)$ bis N-1 bewiesen. Dann ist zu $\mathcal{A}(N)$ zeigen.

Der Beweis: Wir haben

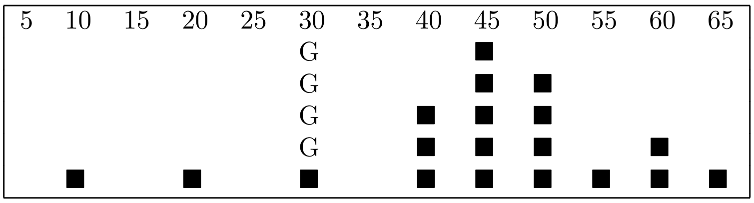
$$
\begin{aligned}
&S_N \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^N (-1)^k \cdot k^2 \overset{(r1)}{=} S_{N-1} + (-1)^N N^2\\
&\overset{(\mathcal{A}(N-1))}{=} (-1)^{N-1}\binom{N}{2} + (-1)^N N^2\\
&\overset{(r2)}{=} (-1)^{N-1}\frac{N(N-1)}{2} + (-1)^N N^2\\
&\overset{(r3)}{=} (-1)^N \frac{N}{2}\left((-1)(N-1)+2N\right) \overset{(r4)}{=} (-1)^N \frac{N(N+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Wie verlangt!
Dabei ist
(r1) Rechnen mit Summenzeichen
(r2) Binomialkoeffizientenformel
(r3) Gezielt ausklammern
(r4) elementar

Die diesjährige Punkteverteilung: G: Grenze des Bestehens . Punktezahl ohne Aufgabe 10.

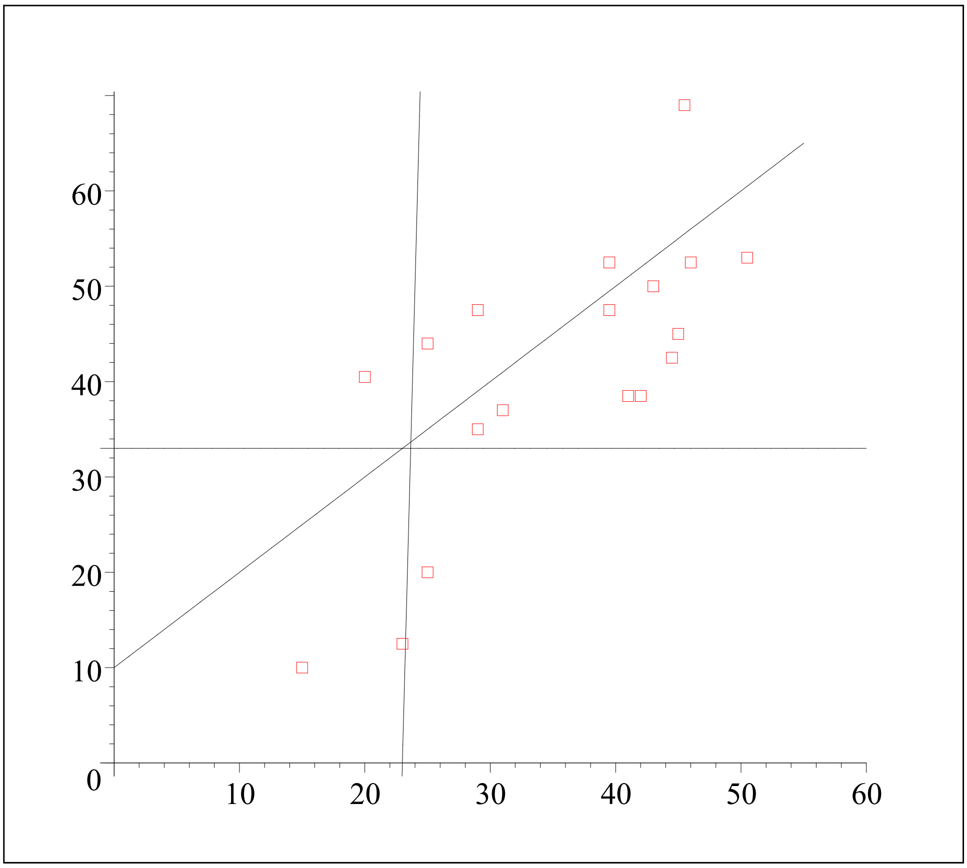


Die Verteilung vergangenes Jahr:



Leistung relativ zur Probeklausur mit dem Lob, das ich nicht hätte aussprechen sollen!

Horizontal : Probeklausur / Vertikal Endklausur / Punktezahl ohne Aufgabe 10! Deutlich oberhalb der diagonalen Kurve: Verbesserung; darunter Verschlechterung. Man sieht wie in einigen Fällen die ERmahnungen nach der Probeklausur wirkten und was umgekehrt das Lob für die anderen bewirkte.



Und noch einige vielfach wiederkehrende Fehlerquellen oder Defizite, bei denen der Kampf gegen das Vergessen verloren wurde:

★"Winkel werden im Bogenmaß gemessen"
★ Die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist ln|x| und nicht ln(x)
★ Soll eine Nullstelle (etwa einer Ableitung bestimmt werden) zuerst ausklammern! (Produktform)
★ $3\frac{1}{2}$ statt $\frac{7}{2}$ sollte man nicht verwenden
★ Wenn Kommastellen, dann auf die Genauigkeit achten. In Aufgabe (1a) kann man α sicher nicht auf 2 Nachkommastellen schätzen.

★ "Rechnen wie im Reellen". Wie lösen Sie "x+2=3" , dann "$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = 2$" und dann "$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$" ?? Immer zunächst die Summanden ohne x auf der rechten Seite zusammenfassen. Die Hauptnennerbildung ist nur bei Gleichungen wie "$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} = 3$" nötig. Ist die Trennung erfolgt, den Kehrwert bilden usw. Entsprechend sollte man bei

$$\frac{2}{z-i} + \frac{1}{3+i} = \frac{1}{2}$$

vorgehen!!!

★

$$J = \int_0^a dx\ x^5(a^6 - \frac{1}{2}x^6)^5 = \boxed{\tfrac{-1}{3}} \int_0^a dx \boxed{(-\tfrac{6}{2}x^5)} (a^6 - \frac{1}{2}x^6)^5$$

denn (Jetzt Probe!!) $\frac{d}{x}\left(a^6 - \frac{1}{2}x^6\right) = -\frac{6}{2}x^5$. Das muss dastehen!

Jedoch anstelle des korrekten voranzustellenden Faktors $-\frac{1}{3}$, der in 5 Arbeiten auftaucht, finden sich folgende Faktoren:

$$+\frac{1}{3}, \frac{1}{18}(zweimal), -\frac{1}{18}, \frac{1}{6}, 1, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}(zweimal), -12, \frac{5}{3}$$

Ein sich anschließendes Proble ist die Vereinfachung von $\left(a^6\right)^6$. Dort findet sich a, a^{12} und a^{30}.
