
Höhere Mathematik für Physiker

Teil II

F. Krause

Kapitel 10

Skalarprodukte

Euklidische, unitäre und orthogonale Geometrien

Copyright F.Krause

Inhalt Kap.10: Skalarprodukte

- **10.1 Bilinearformen**

- 10.1.0 Vorbemerkungen
- 10.1.1 Das grundlegende Begriffssystem
- 10.1.2 Quadratische Formen
 - * 10.1.2a Die zweite Ableitung
 - * 10.1.2b Der Trägheitstensor

- **10.2 Vektorräume mit euklidischer Geometrie**

- 10.2.1 Grundlegende Eigenschaften euklidischer Räume
- 10.2.2 Eigenschaften orthogonaler Vektoren im euklidischen Fall
- 10.2.3 Bemerkungen zu Nutzen und Bedeutung der Legendrepolynome
- 10.2.4 Die Multipolentwicklung einer Ladungsverteilung
- 10.2.5 Die Isometrien eines euklidischen Vektorraumes
- 10.2.6 Der Deformationstensor (Strain)

- **10.3 Unitäre Vektorräume**

- 10.3.0 Die Problematik bei komplexen Vektorräumen
- 10.3.1 Sesquilinearformen
- 10.3.2 Beispiele unitärer Räume
- 10.3.3 Die elementaren Eigenschaften unitärer Räume
- 10.3.4 Die Isometrien unitärer Räume
- 10.3.5 Der komplexe Winkel
- 10.3.6 Formeln zur Fouriertransformation
- 10.3.7 Übersicht

- **10.4 Orthogonale Geometrien**

- 10.4.0 Vorbemerkung
- 10.4.1 Grundbegriffe
- 10.4.2 Allgemeine Eigenschaften orthogonaler Geometrien
 - * 10.4.2a Basisdarstellung
 - * 10.4.2b Die Kürzungsregel
 - * 10.4.2c Die Identifikation des Dualraumes mit dem Grundraum
 - * 10.4.2d Das orthogonale Komplement eines nicht ausgearteten Teilraumes
- 10.4.3 Der Aufbau von V aus irreduziblen Teilräumen / Sylvesterklassifikation
- 10.4.4 Die Isomorphieklassen orthogonaler Räume
- 10.4.5 Die hyperbolische Ebene
- 10.4.6 Die Isometrien der hyperbolischen Ebene
 - * 10.4.6a Der Formalismus der Relativitätstheorie
- 10.4.7 Isometrien im orthogonalen, nicht ausgearteten Fall

- **10.5 Skalarprodukte und äußere Algebra**

- 10.5.1 Die Ausdehnung von Skalarprodukten auf die äußere Algebra
- 10.5.2 Die Ausdehnung des Skalarproduktes auf den dualen Bereich
- 10.5.3 Der euklidische Inhalt
- 10.5.4 Der $*$ -Isomorphismus

Kapitel 10: Skalarprodukte und Geometrien.

10.1 Bilinearformen

10.1.0 Vorbemerkungen

Schreibkonvention: *In diesem Kapitel schreiben wir Vektoren vielfach nach Art der Mathematiker ohne Pfeil. Nur in Fällen, wo wir den Vektorcharakter einer Größe besonders hervorheben wollen, setzen wir einen Pfeil!*

(1.0.1) In einem Vektorraum seien zwei Geraden g und h durch den Ursprung gegeben. Dann sind die Beziehungen zwischen den Geraden, die man mit Hilfe der Vektorraumaxiome erfassen kann, recht dürftig. Im wesentlichen können wir nur zwischen $g=h$ und $g \neq h$ unterscheiden. Oder zugespitzt: Alle verschiedenen Geraden sind gleich unterschiedlich. Auch die äußere Algebra liefert uns keine Hilfe. Andererseits ist die im V^3 vorhandene geometrische Struktur in dieser Hinsicht viel reichhaltiger. Beispielsweise

- Besitzen wir den "Winkel zwischen zwei Geraden" als Maß für die Unterschiedlichkeit der Geraden.
- Können wir Längenvergleiche auf verschiedenen Geraden vornehmen.
- Haben wir schließlich Folgendes: Es sei $g \neq h$ und E die von g und h erzeugte Ebene. Dann gibt es in E viele zu g supplementäre Geraden. Darunter ist genau eine, die die zu g unterschiedlichste ist. Sie steht **senkrecht** auf g .

(1.0.2) Wie kann man derartige Sachverhalte mathematisch erfassen? Das ist das Problem dieses Kapitels. Nach den Erfahrungen mit der äußeren Algebra könnte man versuchen, die Fragen erneut auf die Vektorraumaxiome selbst zurückzuführen. Es zeigt sich jedoch, dass das nicht möglich ist. Also wird man wie bei der Einführung des Normbegriffs vorgehen, der ja bereits einen Längenvergleich auf verschiedenen Geraden ermöglichte: Man fügt zu den Vektorraumaxiomen weitere geeignete Axiome hinzu. Das wollen wir tun und die Konsequenzen analysieren.

(1.0.3) Bei der Wahl der zusätzlichen Axiome bieten sich zwei Wege an:

- Weg 1: Wähle die Axiome so, daß sie im Wesentlichen genau die geometrische Struktur des euklidischen V reproduzieren.
- Weg 2: Wähle die Axiome so, daß sie möglichst nur das sicherstellen, was man unbedingt zum Einstieg in den angesprochenen Problemkreis benötigt, nicht aber mehr.

(1.0.4) Der erste Weg hat den Vorteil anschaulicher Vertrautheit. Der Nachteil: Ein Teil der zusätzlichen Forderungen wird nicht immer erfüllt sein. (Es wird Fälle geben, in denen man geometrisch argumentieren möchte, bei denen die Struktur aber anders aussieht als im V_0^3 . Das Paradebeispiel einer solchen nicht mehr voll passenden Struktur bildet die Relativitätstheorie. Als Körper kommen \mathbb{R} und \mathbb{C} in Frage. Die zugehörigen Strukturen heißen *euklidische* (\mathbb{R}) und *unitäre* (\mathbb{C}) *Geometrien*.

(1.0.5) Der zweite Weg hat den Vorteil, viel mehr Fälle zu erfassen und das wesentlich Gemeinsame herauszuarbeiten. (Grob gesagt ist das die eindeutige Existenz einer unterschiedlichsten, zur gegebenen Geraden orthogonalen Geraden in der Ebene, also die dritte oben genannte Eigenschaft.) Der Nachteil dieses Weges: Er ist viel abstrakter und wirkt auf viele daher zunächst fremdartig. Dafür erweist sich etwa der Formalismus der Relativitätstheorie als einfacher Spezialfall. Hier betrachten wir als Körper nur \mathbb{R} . Dann gibt es zwei zugehörige Strukturen, die *orthogonalen* und die *symplektischen Geometrien*. Die euklidische Geometrie ist ein Spezialfall der orthogonalen.

(1.0.6) Unser Vorgehen wird sein: Zunächst ein Stück Weg 2, um einige allgemeine Begriffe einzuführen bzw. zu wiederholen. Dann den Weg 1, wegen seiner großen Bedeutung und schließlich- parallel dazu- Weg 2 für den orthogonalen Fall.

10.1.1 Das grundlegende Begriffssystem

(1.1.1) Zunächst die einführende Wiederholung des benötigten allgemeinen Begriffsapparates, konzentriert um das Wort *bilinear*.

Definition: Es **SEIEN** U, V und W Vektorräume über demselben Körper K .
Dann heißt eine Abbildung $B: U \times V \rightarrow W$ *bilinear*, wenn gilt:
 $B(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \vec{v}) = \alpha B(\vec{x}, \vec{v}) + \beta B(\vec{y}, \vec{v})$ und $B(\vec{x}, \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha B(\vec{x}, \vec{v}) + \beta B(\vec{x}, \vec{w})$
für alle $\alpha, \beta \in K$ und $\vec{x}, \vec{y} \in U$ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$.
Ist $W=K$, so spricht man von einer *Bilinearform*.

(1.1.2) Beispiele: Das Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 , der Trägheitstensor, die Kegelschnitte, die zweite Ableitung eines Skalarfeldes. Die bilinearen Abbildungen waren schließlich auch grundlegend für die Algebren. Jetzt interessieren speziell die Bilinearformen, als Parallele zu den Linearformen der Dualräume.

(1.1.3) Wie immer beginnen wir mit der Fundamentalidentität. Hier die für eine Bilinearform $B: U \times V \rightarrow K$

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\sum_i \vec{E}_i x_i, \sum_k \vec{F}_k y_k) = \sum_{ik} x_i y_k B(\vec{E}_i, \vec{F}_k) = \sum_{ik} x_i y_k B_{ik}$$

mit $B_{ik} = B(\vec{E}_i, \vec{F}_k)$ Beschreibende Matrix von B bezüglich E und F .

Ist K der Index, der das zu den jeweiligen Basen E und F gehörige Koordinatensystem bezeichnet, so werden wir die beschreibende Matrix i.a. mit $B^K = (B_{ik}^K)$ bezeichnen. Im physikalischen Bereich ist meist der Buchstabe g als Bezeichnung üblich. Wir nennen B^K die B bezüglich K beschreibende Matrix. Sie stellt einen Spezialfall der Strukturkonstanten aus Kap.9.1 dar.

(1.1.4) **1. Lesart** der Identität: Die Bilinearform B sei gegeben. Dann ist die Matrix B^K eindeutig bestimmt. Die Fundamentalidentität liefert eine Quantifizierung von B durch diese Matrix.

(1.1.5) **2. Lesart** der Identität: Gebe irgendeine $n \times n$ -Matrix (B_{ik}) vor. Einsetzen in die Formel definiert eine zugehörige Bilinearform $B: (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow B(\vec{x}, \vec{y})$. Die Abbildung ist bilinear und ihre beschreibende Matrix bez. E und F ist die gegebene Matrix (B_{ik}) .

Beschreibende Matrizen und Bilinearformen erzeugen einen Isomorphismus.

(1.1.6) **Tensorarstellung von Bilinearformen:** Wir wiederholen die Argumentation aus Kap. 9.3.4a. Es sei $\mathcal{B}(V, W; K)$ der Raum aller bilinearen Abbildungen $V \times W \rightarrow K$. Wir haben soeben über die Isomorphie mit den beschreibenden Matrizen gezeigt, dass das einen Vektorraum der Dimension $n \cdot m$ ergibt. Jetzt haben wir folgendes Problem: Derartige Bilinearformen werden üblicherweise durch ihre Werte $B(\vec{x}, \vec{y}) \in K$ gegeben und diese Werte werden wie oben über eine Basisdarstellung festgelegt. Die Vektoren von $\mathcal{B}(V, W; K)$ sind aber die gesamten Abbildungstriplet, nicht die individuellen Werte. Man benötigt also einen Formalismus, um von Gleichungen zwischen den Werten auf Gleichungen zwischen den Abbildungstriplet zu schließen. Dualraum und Tensorprodukt zusammen ermöglichen das. Nochmals die zugehörige Rechnung:

$$\begin{aligned} B(\vec{x}, \vec{y}) &= \sum_{ik} B_{ik} x_i y_k = \sum_{ik} B_{ik} E_i^*(\vec{x}) F_k^*(\vec{y}) = \sum_{ik} B_{ik} E_i^* \otimes F_k^*(\vec{x} \otimes \vec{y}) \\ &= (\sum_{ik} B_{ik} E_i^* \otimes F_k^*)(\vec{x} \otimes \vec{y}) = (\sum_{ik} B_{ik} E_i^* \otimes F_k^*)(\tau(\vec{x}, \vec{y})). \end{aligned}$$

Zusammen gibt das

$$B = b \circ \tau = \sum_{ik} B_{ik} E_i^* \otimes F_k^*$$

(1.1.7) Gehen wir die Rechnung schrittweise durch: Im ersten Schritt wird die in (1.1.3) gegebene Basisdarstellung eingesetzt. Anschließend werden die Vektorkomponente x_i und y_k durch die dualen Basen ausgedrückt. Etwa $x_i = E_i^*(\vec{x})$. Dann wird der kanonische Isomorphismus zwischen $(V \otimes V)^*$ und $V^* \otimes V^*$ benutzt und der Wert $\vec{x} \otimes \vec{y}$ im Rahmen der Vektorraumstruktur von $(V \otimes W)^*$ ausgeklammert. Und schließlich im letzten Schritt wird der Charakterisierungssatz des Tensorproduktes benutzt, um zur zugehörigen bilinearen Abbildung $B = b \circ \tau$ zurückzukehren. Wir erinnern an unsere Vereinbarung, b und B gleich zu bezeichnen, was hier heißt im letzten Schritt das τ fortzulassen!

(1.1.8) Damit erhalten wir insgesamt:

$$B = \sum_{ik} E_i^* \otimes F_k^* B_{ik} \quad B(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{ik} E_i^* \otimes F_k^*(\vec{x}, \vec{y}) B_{ik} = \sum x_i B_{ik} y_k.$$

□ Wichtige Übung: Gegeben eine bilineare Abbildung $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Dazu zwei Basen a (alt) und b (neu) von V mit Transformationsmatrix T . Dazu eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$. Setze $g_{ik}^A = B(a_i, a_k)$

und $g_{rs}^N = B(b_r, b_s)$. Zeigen Sie $\boxed{g_{ik}^N = \sum^t T_{ir}^{-1} T_{ks}^{-1} g_{rs}^A}$. Das geht ohne Rechnung! Sei weiter $G_{ik}^A = B(\varphi(a_i)|\varphi(a_k))$ und $M = M_\varphi^A$ die zugehörige φ beschreibende Matrix. Zeigen Sie $\boxed{G^A = {}^t M G^A M}$. Folgern Sie daraus $\boxed{\det(G^A) = (\det M)^2 \det g^A}$. Die letzte Beziehung erweist sich als nützlich.

(1.1.9) Links steht eine Basisdarstellung für die Abbildung B , rechts steht die zugehörige Formel für die Werte. Mit Hilfe des Tensorformalismus können wir also wunschgemäß von den Werten zu den Abbildungstripeln überwechseln. Oder suggestiv: Wir dürfen die Koordinaten der Urbilder aus der Gleichung herauskürzen,

(1.1.10) **Orthogonalität:** Eine Bilinearform verknüpft Vektoren zweier Geraden g und h zahlenmäßig miteinander. Und zwar so, daß der Übergang zu einem anderen Vektor derselben Geraden rechnerisch gut kontrollierbar ist. Speziell genügt bilinear als Einstieg in einen sehr allgemeinen Orthogonalitätsbegriff: Man überträgt die Begriffsbildung, die im Zusammenhang mit den linearen Gleichungssystemen als Orthogonalität zwischen Raum und Dualraum eingeführt wurde.

Definition: Es Sei $B:U \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform. Weiter sei $x \in U$ und $y \in V$.
Dann heißt x orthogonal zu y bezüglich B , wenn $B(x,y)=0$ gilt.

(1.1.12) Ist g eine Gerade durch Null in U und h eine solche in V und ist x Richtungsvektor von g und y einer von h mit $B(x,y)=0$, dann sind auch alle anderen Vektoren der beiden Geraden zueinander orthogonal. Dies folgt sofort aus der Bilinearität. Wir sagen, *die beiden Geraden seien zueinander orthogonal*. Da wir hier immer noch den Fall $U \neq V$ zulassen, ist unser früherer Orthogonalitätsbegriff aus Kapitel 5 zwischen V und V^* mit erfaßt.

(1.1.13) Analog zu der damaligen Definitionen definieren wir mit etwas abgewandelter Schreibweise:

Sei $U_0 \subset U$ Teilraum: $U_0^\perp = \{y \in V \mid B(x,y) = 0 \text{ für alle } x \in U_0\}$.
 Sei $V_0 \subset V$ Teilraum: $V_0^\perp = \{x \in U \mid B(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in V_0\}$.

(1.1.14) Beachten Sie: Im Rahmen diese Begriffsapparates ist es durchaus zulässig, dass es im Falle $U=V$ - also beim Vorliegen eines Skalarproduktes - ein $x \neq 0$ gibt mit $B(x,x)=0$. Dies wäre ein Vektor, *der auf sich selbst senkrecht steht*. Ebenso könnte es einen Vektor geben, der auf allen Vektoren senkrecht steht. Schließlich kann es ein Paar von 2 Vektoren x und y geben, derart, daß x orthogonal zu y aber y nicht orthogonal zu x ist.

(1.1.15) Beim abstrakten Weg 2 beseitigt man solche anschaulich befremdlichen Eigenschaften nur sehr vorsichtig, indem man nur die dritte, besonders abstruse Eigenschaft eliminiert. Dann kommt man notwendig zu den orthogonalen und symplektischen Geometrien. Auf dem vorstellungsnahen Weg 1 abstrahiert man dagegen einige Forderungen, die alle drei aufgeführten Eigenschaften automatisch ausschließen.

10.1.2 Quadratische Formen

(1.2.1) Bevor wir den allgemeinen Weg verlassen, besprechen wir eine Struktur, die relativ häufig in den Anwendungsbereichen auftritt und die automatisch auf eine (symmetrische) Bilinearform führt. Das zu wissen, also zu bemerken, dass man in solchen Fällen auf die einschlägigen Resultate der Skalarprodukte zurückgreifen kann, ist nützlich.

In allen Fällen beschränken wir uns auf den Fall $U=V$.

(1.2.2) Wie sehen Anwendungssituationen aus, in denen man Bilinearformen begegnet? Das geschieht keineswegs immer über die Vorgabe eines geometrischen Skalarproduktes, sondern vielfach durch die rechnerische Vorgabe einer quadratischen Form, deren Umwandlung in ein Skalarprodukt dann eine geometrische Interpretation des Problems ermöglicht. Diese Vorgabe von Skalarprodukten durch quadratische Formen soll jetzt kurz besprochen werden.

(1.2.3) Wenn man eine Bilinearform auf gleiche Vektoren einschränkt, also $x \mapsto B(x,x)$ bildet, erhält man etwas, das man eine quadratische Form nennt. Der Name wird klar, wenn man diese Zuordnung mit Hilfe der Fundamentalidentität formuliert. Das gibt nämlich

$$B(x, x) = \sum x_i B_{ik} x_k. \quad \text{Matrixform:} \quad B(x, x) = {}^t \vec{x}^K B^K \vec{x}^K.$$

Also lauter Summanden, die quadratisch in den Koordinaten sind. Derartige Rechenausdrücke treten in Formeln ziemlich häufig auf. Wir nennen einige Beispiele: *Kegelschnitte* (oder Quadriken), *kinetische Energie*, *Trägheitstensor* und *Quadrupolmoment*. In der Relativitätstheorie formuliert man die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mit Hilfe einer quadratischen Form. Die 2. Ableitung eines Skalarfeldes ergibt eine quadratische Form usw.

(1.2.4) Ein konkretes Beispiel:

$V = \mathbb{R}^2$ mit $\vec{x} = (x_1, x_2)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Dann ist

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto B(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - 2x_2y_1 - 5x_2y_2$$

eine typische Bilinearform auf V . Die entstehende quadratische Form ist

$$\vec{x} \mapsto B(\vec{x}, \vec{x}) = 2x_1^2 + (3 - 2)x_1x_2 - 5x_2^2.$$

Die beschreibende Matrix von B bezüglich der benutzten kanonischen Basis ist $B^K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

(1.2.5) Jede Bilinearform B auf V ergibt also eine quadratische Form Q_B auf V vermöge $Q_B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Es handelt sich in gewisser Weise um eine Verallgemeinerung der Norm. Denn im euklidischen Fall haben wir $Q_B(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$. Allgemein läßt sich natürlich die Wurzel (in $K = \mathbb{R}$) nur ziehen, wenn $Q_B(\mathbf{x}) \geq 0$ gilt.

(1.2.6) Jetzt stellen wir die **Umkehrfrage: Wann definiert eine quadratische Form eine Bilinearform?** Wenn Q bezüglich einer Basis ($\mathbf{x} = \sum a_i x_i$) durch $Q(\mathbf{x}) = \sum B_{ik} x_i x_k$ gegeben ist, dann können wir zunächst verlangen, dass (B_{ik}) symmetrisch sein soll, da ein unsymmetrischer Teil zu Q nicht beiträgt. Und anschließend können wir $B = \sum a_i^* \otimes a_k^* B_{ik}$ setzen. Die hierzu gehörige quadratische Form Q_B ist gleich unserem vorgegebenen Q . (Das Vorgehen etwa beim Trägheitstensor ist genau von dieser Art. Kap. 10.1.2b.)

(1.2.7) Zur Schärfung der Wahrnehmung: $Q(x, y) = x^2 + 4xy + 7y^2$ ist eine quadratische Form in x und y ($V = \mathbb{R}^2$). Beachten Sie, daß hier $Q(x, y) = x^2 + 2xy + 2yx + 7y^2$ gilt. Dagegen ist $R(x, y) = 2x - x^2 + y^2 - xy^2 + 3x^2y^2$ keine quadratische Form, wegen der Terme $2x$, xy^2 und x^2y^2 . Q gehörige symmetrische Bilinearform ist gerade

$$\begin{aligned} B_Q(\vec{x}, \vec{y}) &= x_1y_1 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 7x_2y_2 \quad \text{oder} \\ B_Q &= e_1^* \otimes e_1^* + 2(e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*) + 7e_2^* \otimes e_2^*. \end{aligned}$$

Beachten Sie den Rollenwechsel für die Buchstaben x und y und dass aus $4xy$ der symmetrische Term $2(x_1y_2 + x_2y_1)$ wird.

Oder auch: $T = \frac{m}{2} \vec{v}^2$ für die kinetische Energie und $B_T(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{m}{2} (\vec{v} \cdot \vec{w})$ als zugehörige symmetrische Bilinearform.

Und schließlich: Der Term $3x + y - 2z$ beschreibt eine Linearform, der Term $3x^2 + 2yz - z^2$ dagegen eine Bilinearform.

(1.2.8) Die soeben gegebene Methode, aus einer quadratischen Form eine Bilinearform zu bilden, ist für die konkrete Arbeit meist passend, für das strukturelle Verständnis etwas unbefriedigend, da Q dabei basisabhängig über einen zugehörige Rechenausdruck der Koordinaten eingeführt wird. Besser wäre eine allgemeine Definition, die die für eine Bilinearform wesentlichen Eigenschaften basisfrei herausarbeitet. "Quadratisch" fordert sicher homogen in dem folgenden Sinne: $Q(\alpha \vec{x}) = \alpha^2 Q(\vec{x})$. Die oben gegebenen Beispiele erfüllen das. Aber diese Homogenität wird auch von Zuordnungen wie $(x, y) \mapsto \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ erfüllt, die sicher nicht akzeptabel sind. Eine zweite zusätzliche Forderung gibt uns im euklidischen Fall der **Cosinussatz**. Dort gilt ja:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 = 2(\vec{x} \cdot \vec{y}).$$

Die linke Seite enthält nur die Quadrate und rechts steht die zugehörige Bilinearform. D.h. man kann über diese Formel das Skalarprodukt auf die Quadrate zurückführen, es sei denn der Körper hätte die Charakteristik 2.

(1.2.9) Und diese Eigenschaft wollen wir allgemein fordern:

Definition: Sei V reeller Vektorraum und $Q:V \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann heißt Q eine *quadratische Form auf V* , wenn gilt:
 a) $Q(\alpha \vec{x}) = \alpha^2 Q(\vec{x})$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in V$ (Homogenität)
 b) $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto B(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} (Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y}))$ ist symmetrische Bilinearform.

(1.2.10) Der Q -Ausdruck ist offensichtlich symmetrisch, so dass *symmetrisch* keine weitere Einschränkung ist. Für das so definierte B ergibt sich $Q=Q_B$. (Der Fall eines Körpers mit der Charakteristik 2 ist hier offensichtlich ausgenommen!)

(1.2.11) Quadratische Formen sind ihrem Abbildungstyp nach Skalarfelder. Ihre zugehöriger Niveaumengen sind daher meist geometrisch wichtig. Wir setzen:

$$q_c(Q) = \{ \vec{x} \mid Q(\vec{x}) = c \}.$$

Die nicht leeren dieser Klassen erzeugen eine Partition des Urbildraumes, bei der die typischen Elemente aus Hyperflächen bestehen. Bekannte Beispiele sind die Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Hyperbel) sowie deren Verallgemeinerung auf drei Dimensionen sowie die Energiehyperflächen im Phasenraum. Kap.6 (3.3.19).

10.1.2a Die zweite Ableitung

(1.2.11) Wir betrachten das typische zur Ableitung gehörige Szenenbild: $F:U \rightarrow W$ mit $U \subset V$ offen und V und W reelle Vektorräume, die wir der Einfachheit halber endlichdimensional annehmen. $a \in U$ ein Aufpunkt. Der Körper ist $K=\mathbb{R}$ oder eventuell \mathbb{C} . Bisher haben wir F um a lokal durch eine lineare Abbildung, nämlich $DF(a)$ approximiert. Können wir diese Approximation durch einen weiteren Term verbessern? Für Kurven ist das in Kap 6.4 mit Hilfe des Taylorpolynoms 2. Ordnung geleistet. Jetzt wollen wir kurz zeigen, wie man das Problem allgemein angeht. Offensichtlich benötigen wir so etwas wie quadratische Abbildungen. Und ist F ein Skalarfeld, dann speziell quadratische Formen.

□ (1.2.12) Verallgemeinern Sie Definition (1.2.9) auf quadratische Abbildungen $Q:V \rightarrow W$.

(1.2.13) Anstelle von $Q(x)$ wollen wir $Q(x,x)$ schreiben, also gleich die Bezeichnung der zugehörigen bilinearen Abbildung verwenden.

(1.2.14) Dann **definieren** wir:

F ist im Punkte $a \in U$ **zweimal differenzierbar**, wenn es eine quadratische Abbildung $Q:V \rightarrow W$ gibt, die die folgende Zerlegung erlaubt:

$$F(\vec{a} + \vec{h}) = F(\vec{a}) + DF(\vec{a}) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2} Q(\vec{h}, \vec{h}) + \|\vec{h}\|^2 R(\vec{a}, \vec{h})$$

und R die übliche Resttermeigenschaft besitzt.

(1.2.15) Die Eindeutigkeit einer solchen Zerlegung beweist man in der üblichen Weise.. Sofern eine solche Zerlegung existiert, wird Q dann "zweite Ableitung von F im Punkte \vec{a} " genannt und mit Symbolen wie $F''(\vec{a})$ oder $D^2F(\vec{a})$ bezeichnet. Nochmals die Formel der Zerlegung:

$$F(\vec{a} + \vec{h}) = F(\vec{a}) + Df(\vec{a}) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2} D^2F(\vec{a}) \cdot (\vec{h}, \vec{h}) + \|\vec{h}\|^2 R(\vec{a}, \vec{h}) \quad \text{mit } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} R(\vec{a}, \vec{h}) = \vec{0}.$$

(1.2.16) **Der Bezug zur ersten Ableitung:** Jetzt nehmen wir an, die erste Ableitung $(U, \vec{a} \mapsto DF(\vec{a}), \text{Hom}(V, W))$ sei selbst eine stetig differenzierbare Abbildung in allen Punkten von U . Daraus folgt, dass $(U, \vec{a} \mapsto DF(\vec{a}) \cdot \vec{k}, W)$ differenzierbar ist, mit Ableitung $D(DF(\vec{a}) \cdot \vec{k})$. Und F selbst soll in U im beschriebenen Sinne zweifach differenzierbar sein. Dann können wir $F(a+h+k)$ auf **drei** Weisen zerlegen:

$$\begin{aligned} F(\vec{a} + \vec{h} + \vec{k}) &= F(\vec{a} + \vec{h}) + DF(\vec{a} + \vec{h}) \cdot \vec{k} + \frac{1}{2} D^2F(\vec{a} + \vec{h}) \cdot (\vec{k}, \vec{k}) + \dots \\ &= \left(F(\vec{a}) + DF(\vec{a}) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2} D^2F(\vec{a}) \cdot (\vec{h}, \vec{h}) + \dots \right) + \left(DF(\vec{a}) \cdot \vec{k} + D(DF(\vec{a}) \cdot \vec{k}) \cdot \vec{h} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} D^2(\vec{a}) \cdot (\vec{k}, \vec{k}) + \dots \end{aligned}$$

Die **zweite Zerlegung** ergibt sich, wenn man die Rollen von \vec{h} und \vec{k} vertauscht. Die fortgelassenen Terme erfüllen die Resttermeigenschaft, weil wir verlangt haben, daß die zweite Ableitung stetig ist. Das wird benötigt.

Die **dritte Zerlegung** ist die Zerlegung zweiter Ordnung um $\vec{h}+\vec{k}$. Also

$$F(\vec{a} + \vec{h} + \vec{k}) = F(\vec{a}) + Df(\vec{a}).(\vec{h} + \vec{k}) + \frac{1}{2}D^2F(\vec{a}).(\vec{h} + \vec{k}, \vec{h} + \vec{k}) + \dots$$

(1.2.17) Ersetzt man \vec{h} durch $\sigma\vec{h}$ und \vec{k} durch $\sigma\vec{k}$ und läßt σ nach Null gehen, dann sieht man in der üblichen Weise, dass Koeffizientenvergleich möglich ist und Folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}D^2F(\vec{a}).(\vec{h} + \vec{k}, \vec{h} + \vec{k}) &= \frac{1}{2}D^2F(\vec{a}).(\vec{h}, \vec{h}) + D(DF(\vec{a})).\vec{k}.\vec{h} + \frac{1}{2}D^2F(\vec{a}).(\vec{k}, \vec{k}) \\ \text{und} \quad D(DF(\vec{a})).\vec{k}.\vec{h} &= D(DF(\vec{a})).\vec{h}.\vec{k} \end{aligned}$$

(1.2.18) Die **erste Gleichung** zeigt uns, dass die Bedingung b) aus der Definition der quadratischen Abbildung tatsächlich erfüllt ist, dass die Quadrate eine bilineare Abbildung definieren. Denn nach Konstruktion ist $(\vec{k}, \vec{h}) \mapsto D(DF(\vec{a})).\vec{k}.\vec{h}$ bilinear. Und die **zweite Gleichung** zeigt, daß diese Abbildung auch symmetrisch ist.

(1.2.19) Schließlich sehen wir, dass selbst in diesem allgemeinen Rahmen die zweite Ableitung gleich der Ableitung der ersten Ableitung ist: $D^2F(\vec{a}) = D(DF(\vec{a}))$.

(1.2.20) Was die Gültigkeitsvoraussetzungen anbelangt, so muß man etwas vorsichtig sein. Man sollte auf jeden Fall zweifache stetige Differenzierbarkeit verlangen, also C^2 -Abbildungen. Wir wollen unsere Herleitung jedoch nicht genauer auf Voraussetzungen analysieren, sondern sie als typisch für den Idealfall betrachten. Ist die 2. Ableitung nicht stetig, kann es sein, dass die partiellen 2. Ableitungen nicht vertauschen. (E.1)

(1.2.21) **Basisbeschreibung:** Der nächste Schritt ist die Einführung von Basen in V und W und die Herleitung der so entstehenden Koordinatendarstellungen der zweiten Ableitungen mit Hilfe von partiellen Ableitungen. Wir verzichten hier auf diesen Routineteil.

□ Führen Sie die Basisbeschreibung für den Fall eines Skalarfeldes durch. Dieser Fall ist besonders wichtig und sollte sicher beherrscht werden. (E.2)

(1.2.22) **Stationäre Punkte eines Skalarfeldes:** Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich für $W = \mathbb{R}$. Dann ist F ein Skalarfeld. Besonders interessant sind stationäre Punkte, in denen die erste Ableitung verschwindet. Ist F ein physikalisches Potentialfeld, sind das die Punkte, in denen die Feldstärke - der Gradient - Null wird.

(1.2.23) Wie verhält sich ein Skalarfeld in der Umgebung eines solchen Punktes? Unsere Zerlegung ergibt die folgende quadratische Näherung:

$$s(\vec{a} + \Delta\vec{h}) \approx s(\vec{a}) + \frac{1}{2}D^2s(\vec{a}).(\Delta\vec{h}, \Delta\vec{h})$$

D.h. näherungsweise verhält sich die Funktion wie eine der zugehörigen quadratischen Formen dieses Raumes. Genaueres Verständnis und Klassifikation dieser Formen, wie wie wir sie in Kap.10.3 entwickeln werden, ergibt somit einen viel weitergehenden Nutzen. Ist e Basis von V, dann ist $D^2s(\vec{a}).(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$ hier gleich der üblichen zweifachen partiellen Ableitung $\partial_i\partial_k s(\vec{a})$. **Die zweite Ableitung wird also durch die quadratische Matrix dieser zweiten Ableitungen dargestellt.**

(1.2.24) Beispiel: $s(\vec{x}) = (\alpha^2 + \vec{x}^2)^{-1}$. Es folgt $Ds(\vec{x}).\Delta\vec{x} = \frac{-2(\vec{x}.\Delta\vec{x})}{(\alpha^2 + \vec{x}^2)^2}$ auf die übliche Weise.

Um die zweite Ableitung zu erhalten, sollten wir

$$Df(\vec{x} + \Delta\vec{y}).\Delta\vec{x} = \frac{-2((\vec{x} + \Delta\vec{y}) \cdot \Delta\vec{x})}{(\alpha^2 + (\vec{x} + \Delta\vec{y})^2)^2}$$

nach Potenzen von $\Delta\vec{y}$ sortieren. Der sich ergebende lineare Term gibt die gesuchte Bilinearform. Man findet:

$$\begin{aligned} D(Df(\vec{x}).\Delta\vec{x}).\Delta\vec{y} &= \frac{(-2)(\Delta\vec{y} \cdot \Delta\vec{x})}{(\alpha^2 + \vec{x}^2)^2} + \frac{(-2)(-4)(\vec{x} \cdot \Delta\vec{x})(\vec{x} \cdot \Delta\vec{y})}{(\alpha^2 + \vec{x}^2)^3} \\ &= (-2) \frac{(\alpha^2 + \vec{x}^2)(\Delta\vec{y} \cdot \Delta\vec{x}) - 4(\vec{x} \cdot \Delta\vec{x})(\vec{x} \cdot \Delta\vec{y})}{(\alpha^2 + \vec{x}^2)^3} \end{aligned}$$

Das ist die gesuchte, typisch aussehende Bilinearform der 2. Ableitungen. Sie ist gegeben durch eine Formel für die Werte. Also

$$D^2 f(x) \cdot (\vec{h}, \vec{h}) = D(Df(x) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h} = (-2) \frac{(\alpha^2 + \vec{x}^2) \Delta \vec{x}^2 - 6(\vec{x} \cdot \Delta \vec{x})^2}{(\alpha^2 + \vec{x}^2)^4}$$

Und speziell $D^2 f(\vec{0}) \cdot (\vec{h}, \vec{h}) = -2 \frac{\vec{h}^2}{\alpha^4}$

- Bestimmen Sie die 2. Ableitung für das Beispiel alternativ mit Hilfe partieller Ableitungen und vergleichen Sie!
- Um den Nullpunkt herum sollte das Feld des Beispiels sich näherungsweise wie folgt verhalten: $f(\vec{h}) \approx \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2} \frac{(-2)}{\alpha^4} \vec{h}^2$. Zeichnen Sie mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms für einige Werte von α den Graphen von f und diese Näherung ($n = \dim V = 2$).
- Wie wird man höhere Ableitungen definieren? Wie ist der Zusammenhang mit den partiellen Ableitungen?

10.1.2b Der Trägheitstensor

(1.2.25) In der elementaren Physik tritt folgendes Problem auf: Ein ausgedehnter starrer Körper rotiert um eine Achse. Wie groß ist die kinetische Energie dieser Drehbewegung? Die Formel, die die resultierende Energie liefert, muß offenbar aus zwei Typen von Bestandteilen aufgebaut werden: Einmal aus solchen, die den jeweiligen Bewegungszustand beschreiben und dann aus solchen, die sich auf die Geometrie des Körpers, auf dessen Massenverteilung, beziehen. Erstere nennen wir kinematische, letztere geometrische Größen. Zu ein und derselben Geometrie können ganz unterschiedliche kinematische Drehzustände gehören.

(1.2.26) Wir betrachten nur Drehbewegungen um eine zeitlich unveränderliche Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Dann wird die gesamte Kinematik durch den festen Vektor $\vec{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit sowie einen Aufpunkt für die Drehachse festgelegt. Als Aufpunkt nimmt man vielfach den Schwerpunkt, $\vec{\omega}$ gibt die Richtung der Drehachse und den Betrag ω der Winkelgeschwindigkeit.

(1.2.27) Wie steht es mit den geometrischen Größen? Zunächst liefert die elementare Physik für jede gegebene Drehachse ein zugehöriges Trägheitsmoment θ , mit dessen Hilfe man die gesuchte kinetische Energie erhält: $T = \frac{1}{2} \theta \omega^2$. Aber das Trägheitsmoment muß für jede Drehachse neu berechnet werden über die Formel $\theta = \sum m_\alpha r_\alpha^2$. Hierbei sei der Körper aus Massenpunkte aufgebaut gedacht, die durch α indiziert seien, mit jeweiliger Masse m_α und Abstand r_α von der Drehachse. (r_α ist also nicht die Länge des zugehörigen Ortsvektors!) Ändert man die Achsenrichtung, so muß neu gerechnet werden, da sich die Abstände r_α ändern können.

- In den 8 Eckpunkten eines Quaders mit Kantenlängen $2a, 2b$ und $2c$ befinde sich je eine Masse der Größe m . Legen Sie eine Drehachse durch zwei gegenüberliegende Flächenmittelpunkte. Bestimmen Sie für diese drei Achsen das Trägheitsmoment. Können Sie damit bereits das Trägheitsmoment bezüglich einer Raumdiagonalen bestimmen? Oder muß man völlig neu rechnen? Und wie steht es, wenn Sie die Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten legen?

(1.2.28) Wir gehen das Problem jetzt neu an. Dazu berechnen wir die kinetische Energie T für eine beliebige Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und zwar so, **dass wir kinematische und geometrische Größen gezielt trennen**. Dann fragen wir, was für ein mathematisches Objekt durch den geometrischen Anteil bestimmt wird. Es wird sich zeigen, daß eine quadratische Form vorliegt. Von dieser kennen wir aber die Quantifizierung, so daß wir wissen, wie wir durch endlich viele Zahlangaben alle Fälle erhalten.

(1.2.29) Jetzt die Rechnung. Dabei interpretieren wir den Körper als starres Massenpunktsystem. Er sei aufgebaut aus N Massenpunkten, die wir durch α indizieren. Der (α -te Massenpunkt besitze die Masse m_α und den Ortsvektor \vec{x}_α . Der Ursprung liege auf der Drehachse und die Winkelgeschwindigkeit sei $\vec{\omega}$. Wir wissen aus Kap. 6.1, daß die Massenpunkte dann die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$ besitzen. Das genügt zur Herleitung der Formel.

(1.2.30) Für die gesamte kinetische Energie des Systems erhalten wir

$$T = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} v_\alpha^2 = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \left(\vec{\omega}^2 \vec{x}_\alpha^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{x}_\alpha)^2 \right)$$

Hierbei haben wir die bekannte Formel $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ benutzt. Jetzt können wir daran gehen, kinematische und geometrische Größen zu trennen! Wir führen für unser koordinatenunabhängiges Resultat

Koordinaten ein - ein kartesisches Rechtssystem K - und schreiben alle Skalarprodukte in Komponentenform aus mit $\vec{x}_\alpha^K = (x_{\alpha i})$ und $\vec{\omega}^K = (\omega_i)$ und $(\vec{\omega}^K)^2 = \omega^2$:

$$\begin{aligned} T &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \left(\omega^2 (\vec{x}_\alpha^K)^2 - (\vec{\omega}^K \cdot \vec{x}_\alpha^K)^2 \right) \\ &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \left(\sum_{ik} \omega_i^K \omega_k^K \delta_{ik} (\vec{x}_\alpha^K)^2 - \omega_i^K \omega_k^K x_{\alpha i} x_{\alpha k} \right) \\ &\quad \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \sum_{ik} \left[(\vec{x}_\alpha^K)^2 \delta_{ik} - x_{\alpha i} x_{\alpha k} \right] \omega_i \omega_k \end{aligned}$$

Damit beide Skalarprodukte dieselbe Summationsstruktur \sum_{ik} erhalten, haben wir $\vec{\omega}^2 = \sum_{ik} \delta_{ik} \omega_i \omega_k$ geschrieben. Wir vertauschen die Summationsreihenfolge. Dann können wir $\omega_i \omega_k$ nach rechts ausklammern und erhalten die Koordinatendarstellung einer quadratischen Form (in den Komponenten von $\vec{\omega}^K$. Die beiden Indizes i und k sind übliche Vektorindizes, die von 1 nach 3 laufen:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{ik} \left(\sum_\alpha (\vec{x}_\alpha^K)^2 \delta_{ik} - x_{\alpha i} x_{\alpha k} \right) \omega_i \omega_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ik} \theta_{ik} \omega_i \omega_k = \frac{1}{2} \sum_{ik} \theta_{ik} e_i^*(\vec{\omega}) e_k^*(\vec{\omega}) \end{aligned}$$

- Wie steht es mit der Zeitabhängigkeit der beteiligten Größen? Begründen Sie, dass die θ_{ik} bei konstantem $\vec{\omega}$ zeitunabhängig sein müssen! Vgl. (2.5.2).

Nach den Regeln der Tensorrechnung können wir von der Wertgleichung zur Abbildungsgleichung übergehen. T ist die quadratische Form der folgenden Bilinearform

$$\Theta = \sum_{ik} \theta_{ik} e_i^* \otimes e_k^* \quad T = \frac{1}{2} \Theta(\vec{\omega}, \vec{\omega}) \quad \theta_{ik}^K = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{ik} \vec{x}_\alpha^2 - x_{\alpha i}^K x_{\alpha k}^K)$$

Dabei haben wir für die Komponenten von der überdies zeitabhängigen Größe \vec{x}_α den Koordinatenindex K wieder eingeführt.

(1.2.31) **Damit ist unser Problem gelöst:** θ_{ik}^K ist eine symmetrische 3×3 -Matrix. Zu ihrer Festlegung benötigt man 6 Zahlangaben. Hat man sich diese für irgendeine geeignete Basis verschafft, so verfügt man über T . D.h. man kann die kinetische Energie $T = T(\vec{\omega})$ für jede Drehachse (durch den Ursprung) berechnen. Entweder durch Darstellung von $\vec{\omega}$ in den Ausgangskordinaten oder indem man $\Theta \in V^{3*} \otimes V^{3*}$ in den neuen Koordinaten darstellt. Man nennt Θ den *Trägheitstensor des Körpers*, Wie angekündigt handelt es sich dabei um eine rein geometrische Größe, die durch die Massenverteilung im Körper festgelegt wird. Nochmals: Wendet man den Trägheitstensor auf die kinematische Größe Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ an, so ergibt sich die gesuchte kinetische Energie zu einfach zu $T = \frac{1}{2} \Theta(\vec{\omega}, \vec{\omega})$.

(1.2.32) **Unser ursprüngliches Ziel einer formelmäßigen Trennung von kinematischen und geometrischen Größen ist mit Hilfe der Tensorrechnung erreicht.**

- Berechnen Sie die Komponenten θ_{ik}^K für das Beispiel der Massen in den 8 Eckpunkten eines Quaders wie in der Frage zu (2.27). Bestimmen Sie dann die kinetische Energie bei Drehung um eine Raumdiagonale.

(1.2.33) Für Körper, die aus Massenpunkten aufgebaut sind, reicht der in (1.2.30) gegebene Formelapparat zur Bestimmung von Θ voll aus. Ist die Massenverteilung kontinuierlich, muß man die Summationen durch Integrationen ersetzen, wie das in den Büchern der Experimentalphysik schematisch durchgeführt wird. Eine Präzisierung und Rechtfertigung dieses Verfahrens werden wir in Kapitel 14 besprechen.

- Das **Trägheitsmoment** (eines starren Körpers bezüglich einer Drehachse). Setze $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, wo \vec{n} Einheitsvektor. Dann gilt $T = \frac{1}{2} \Theta(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \Theta(\vec{n}, \vec{n}) \omega^2$. Welche physikalische Interpretation hat $\Theta(\vec{n}, \vec{n})$? Wie kann man diese Größe berechnen?

10.2 Vektorräume mit euklidischer Geometrie

10.2.1 Grundlegende Eigenschaften euklidischer Räume

Wir gehen jetzt den ersten der beiden in (1.0.3) beschriebenen Wege. Entwickeln also für reelle Vektorräume ein Axiomensystem, das möglichst genau die Struktur des euklidischen V^3 reproduziert.

(2.1.1) Die Forderungen, die die vertrauten geometrischen Eigenschaften sicherstellen, sehen wie folgt aus:

Definition:	Sei V Vektorraum über \mathbb{R} . Dann heißt V ein <i>euklidischer Vektorraum über \mathbb{R}</i> , wenn (E.1-3) gilt:
(E1)	Auf V ist eine Bilinearform $B:V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. $B(x,y) \in \mathbb{R}$ heißt das Skalarprodukt von x und y .
(E2)	B ist symmetrisch, d.h. $B(x,y) = B(y,x)$ für alle $x,y \in V$
(E3)	B ist positiv definit. D.h. $B(x,x) > 0$ für alle $x \in V$ mit $x \neq 0$.

Wir werden nachfolgend aus diesen Forderungen weitgehend alle geometrischen Eigenschaften herleiten, die wir aus dem Umgang mit dem V^3 kennen. In der elementaren physikalischen Literatur wird häufig jeder Vektorraum automatisch als euklidischer Vektorraum interpretiert. Beachten Sie dabei, dass das viel mehr Eigenschaften sind als in einem normierten Raum.

(2.1.2) **Beispiel 1):** Der \mathbb{R}^n mit dem üblichen euklidischen Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_i x_i y_i$. Das ergibt offensichtlich einen euklidischen Vektorraum, denn wir \mathbb{R}^n mit der *kanonischen euklidischen Struktur* nennen werden.

(2.1.3) **Beispiel 2):** Der Polynomraum \mathcal{P} mit dem folgenden Skalarprodukt:

$$(p,q) \mapsto L(p,q) = \int_{-1}^1 dx p(x)q(x) \quad \text{Legendreprodukt}$$

L ist offensichtlich bilinear und symmetrisch. Für $p=q$ ist der Integrand nicht negativ und ungleich Null, sofern nicht das Nullpolynom genommen wird. **Es liegt also ein euklidischer Vektorraum vor.**

Es ist leicht, auf \mathcal{P} weitere euklidische Skalarprodukte einzuführen, indem man das Integral geeignet abändert.

□ Wieso darf man nicht $\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x)q(x)$ nehmen?

(2.1.4) Analog zum V^3 führen wir jetzt für jeden euklidischen Raum einige **abgeleitete Größen und Bezeichnungen** ein:

- $\|\vec{x}\| = \sqrt{B(\vec{x}, \vec{x})}$ = "Länge des Vektors $\vec{x} \in V$ "
- $\|\vec{x} - \vec{y}\|$ skalarer Abstand der Vektoren \vec{x} und \vec{y} aus V
- $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow B(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ (\vec{x} und \vec{y} stehen senkrecht aufeinander oder sind orthogonal)

(2.1.5) Es folgt

Satz: Mit $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ wird der euklidische Raum zu einem normierten Raum. Ist V endlichdimensional, ist V automatisch Banachraum.

Zum ersten Teil des Satzes sind die Normaxiome zu prüfen. Der zweite folgt, weil alle endlichdimensionalen normierten Räume vollständig sind.

- – Wegen (E3) ist $B(x,x) \geq 0$ und > 0 für $x \neq 0$. Also $\|x\| \in \mathbb{R}$ und $\|x\| > 0$ für $x \neq 0$.
- $\|\alpha x\| = \sqrt{B(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 B(x, x)} = |\alpha| \|x\|$ wegen der Bilinearität. Beachten Sie $|\alpha|$, nicht aber α . Das ist das zweite Normaxiom.
- Die Dreiecksungleichung. Den Beweis geben wir unten.

(2.1.6) Jeder euklidische Raum ist also automatisch normiert und im endlichdimensionalen Fall sogar Banachraum. Alle früheren zugehörigen Resultate sind gültig. Umgekehrt geht es meist nicht: **Normen kann man in der Regel nicht zu Skalarprodukten machen**, für die dann $\|x\| = \sqrt{B(x,x)}$ gilt.

(2.1.7) Um den angestrebten Geradenvergleich in V möglich zu machen, führen wir die folgende Korrelationsgröße ein:

$$C(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{B(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \quad \vec{x}, \vec{y} \in V, \quad \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}. \quad \text{Eigentlich } C_B.$$

(2.1.8) Wegen (E.3) ist dieser Term immer definiert. Ersetzt man \vec{x} durch $\alpha\vec{x}$ und \vec{y} durch $\beta\vec{y}$ mit $\alpha, \beta > 0$, so ändert sich infolge der Bilinearität der Wert von C nicht. Oder auch: **C ist eine Maßzahl, für die durch x und y erzeugten Halbgeraden und somit ein guter Kandidat für die Winkelbeschreibung.**

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz-Bunjakowski:

Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ gilt $|B(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.

Eine unmittelbare Folge: Ist $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$, folgt $-1 \leq C(\vec{x}, \vec{y}) \leq 1$. **D.h. man kann die Korrelationsgröße C immer als Cosinus eines Winkels interpretieren.**

(2.1.10) **Beweis:** Hierzu rechnen wir $B(\vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x} + \lambda\vec{y})$ distributiv aus. Mit (E2) finden wir

$$\|\vec{x}\|^2 + \lambda^2 \|\vec{y}\|^2 + 2\lambda B(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0 \quad \text{und wählen} \quad \lambda = -\frac{B(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|^2}$$

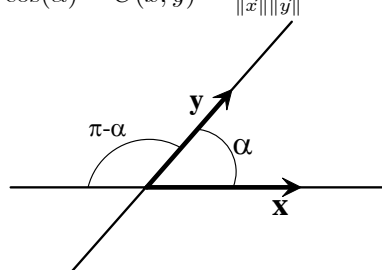
Durch Zusammenfassen ergibt sich $\|\vec{x}\|^2 - \frac{(B(\vec{x}, \vec{y}))^2}{\|\vec{y}\|^2} \geq 0$ Hieraus folgt die gewünschte Ungleichung für $\vec{y} \neq \vec{0}$. Für $\vec{y} = \vec{0}$ ist sie trivial.

Jetzt der fehlende Beweis der Dreiecksungleichung für die Norm mit Hilfe der CSB-Ungleichung:

$$\begin{array}{rcl} B(\vec{x} \pm \vec{y}, \vec{x} \pm \vec{y}) = \|\vec{x} \pm \vec{y}\|^2 & \stackrel{!}{\leq} & (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \\ \downarrow = & & = \uparrow \\ B(\vec{x}, \vec{x}) + B(\vec{y}, \vec{y}) \pm 2B(\vec{x}, \vec{y}) & \leq & \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \end{array}$$

Verfolgen Sie die Rechnung in Pfeilrichtung! In der unteren Zeile wird die CSB-Ungleichung benutzt. Das Ergebnis ist die zu beweisende obere Zeile, also die Dreiecksungleichung.

(2.1.11) Jetzt parametrisieren wir die Korrelationsgröße C um:

$\cos(\alpha) = C(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{B(\vec{x}, \vec{y})}{\ \vec{x}\ \ \vec{y}\ }$ 	<p>α ist der Winkel zwischen den Vektoren \vec{x} und \vec{y} ($\neq \vec{0}$). Gleich dem Winkel zwischen den von \vec{x} und \vec{y} erzeugten Halbgeraden.</p>
--	--

Für den Winkel zwischen zwei Geraden gibt es immer 2 Möglichkeiten, je nachdem, welche Halbgeraden man wählt. Ihr Cosinus unterscheidet sich durch ein Vorzeichen. Beide Winkel zusammen ergänzen sich zu π .

(2.1.12) **Beispiel:** Wir wählen den Vektorraum \mathcal{P} der Polynome mit dem in (2.1.3) eingeführten Skalarprodukt. Daraus die beiden Vektoren h_1 und h_2 . Wir finden sofort: $\|h_1\|^2 = \int_{-1}^1 dx x^2 = \frac{2}{3}$. Also $\|h_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Und $\|h_2\| = \sqrt{\frac{2}{5}}$. Schließlich $L(h_1, h_2) = 0$. Die beiden Vektoren h_1 und h_2 stehen aufeinander senkrecht. (Aber Vorsicht: h_1 und h_3 stehen nicht senkrecht aufeinander!) Zeichnen Sie einmal das rechtwinklige Dreieck

mit diesen beiden Kathetenlängen. (Einheit 10cm.) Messen Sie die Winkel sowie die Länge der dritten Seite h_1-h_2 . Und nun alles mit unserem Skalarprodukt berechnen! Für die Länge von $h_2 - h_1$ finden wir

$$\|h_2 - h_1\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 = \frac{16}{15}$$

Für den Winkel zwischen h_1 und h_1-h_2 etwa finden wir

$$\cos \alpha = \frac{L(h_1, h_2 - h_1)}{\|h_1\| \|h_2 - h_1\|} = -\frac{L(h_1, h_1)}{\|h_1\| \|h_2 - h_1\|} = -\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3} \frac{4}{\sqrt{15}}}} = -\frac{1}{4} \sqrt{10} (hh, -h,) / Il, llh - h, ll - \dots$$

10.2.2 Eigenschaften orthogonaler Vektoren im euklidischen Fall

Wir untersuchen jetzt die Eigenschaften der Orthogonalität im euklidischen Fall.

- (2.2.1) $x \perp 0$, da $B(x, 0) = 0$. Jeder Vektor steht auf dem Nullvektor senkrecht.
- (2.2.2) $x \perp y \implies y \perp x$ wegen der Symmetrie von B . D.h., wenn x auf y senkrecht steht, dann auch umgekehrt y auf x .
- (2.2.3) Angenommen $x \perp y$ für alle $y \in V$. Dann folgt $x = 0$. Diese Regel nennen wir *Kürzungsregel*:

$$(B(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in V) \implies \underline{\underline{x = 0}}$$

- Beweis der Kürzungsregel: Wähle $y = x$ und benutze positiv definit. Das erweist sich als wichtige Argumentationsfigur.

- (2.2.4) $(x \perp a \text{ und } x \perp b) \implies x \perp (\alpha a + \beta b)$. Folgt aus der Bilinearität von B . D.h., wenn x orthogonal zu zwei Vektoren unterschiedlicher Richtung ist, dann ist x auch orthogonal zu der von den beiden Vektoren erzeugten Ebene. Das ist eine typische Selbstverständlichkeit unserer euklidischen Erfahrungswelt, die wir aber im Geiste des Programms der analytischen Geometrie auf ihre Verallgemeinerbarkeit überprüfen müssen. Das Resultat läßt sich naheliegender weiter verallgemeinern. Wir verzichten auf die Formulierung.
- (2.2.5) Die Überlegungen aus (2.2.4) zeigen: In (2.2.3) genügt es, wenn y eine Basis durchläuft. D.h. man muß nur $\dim V$ Skalarprodukte überprüfen. Aber auch: Ist $\ell = a_1 \alpha_1 + \dots + a_r \alpha_r$ Linearkombination mit $B(\ell, \alpha_i) = 0$ für $i = 1, \dots, k \leq n$, dann ist erneut $\ell = 0$. (*Vereinfachte Kürzungsregel*)
- (2.2.6) *Die Zerlegungsformel*. Es seien $\vec{x}, \vec{y} \in V$ mit $\vec{y} \neq 0$. Dann läßt sich \vec{x} eindeutig zerlegen in eine zu \vec{y} parallele und eine dazu senkrechte Komponente. Also $\vec{x} = \vec{p} + \vec{s}$ mit $\vec{p} \parallel \vec{y}$ und $\vec{s} \perp \vec{y}$. Dabei gilt, wie man sofort verifiziert:

$$\vec{p} = \vec{y} \frac{B(\vec{y}, \vec{x})}{B(\vec{y}, \vec{y})} \quad \vec{s} = \vec{x} - \vec{p} = \vec{x} - \vec{y} \frac{B(\vec{y}, \vec{x})}{B(\vec{y}, \vec{y})}$$

□ Von welcher Größe ging man daher im Falle des Beweises der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung aus?

- (2.2.7) Eine naheliegende Verallgemeinerung besteht in folgendem Problem: Gegeben eine Hyperebene H und ein Vektor \vec{x} . Zerlege \vec{x} in eine zu H parallele und eine zu H senkrechte Komponente. Wir werden darauf zurückkommen. Und noch allgemeiner: Gegeben irgendein Teilraum U . Zerlege x in eine zu U parallele und eine senkrechte Komponente. Durch die Einführung des Begriffs der reziproken Basis werden diese Fragen (im endlichdimensionalen Fall) zu Routineproblemen.
- (2.2.8) **Der Pythagoras**: $x \perp y \iff \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2$ Folgt aus bilinear.

- (2.2.9) Im euklidischen V gibt es einen bestimmten Typ ausgezeichneter Basen, die **Orthonormalbasen**, die zu kartesischen Koordinaten führen. Können wir diesen Sachverhalt verallgemeinern? Die Antwort ist positiv. Wir benötigen dazu allerdings drei Schritte.
- (2.2.10) Zunächst ein vorbereitender Schritt, der Skalarprodukte und lineare Abhängigkeit einer Familie miteinander in Beziehung setzt.
- (2.2.11) Es seien $a_1, \dots, a_n \in V$. Bilde dazu $g_{ik} = B(a_i, a_k)$ und damit die Matrix $g = (g_{ik})$. Dies g ist quadratisch vom Typ $n \times n$, wobei n nicht gleich $\dim V$ sein muß. Wie groß ist der Rang von g ?

$$\text{Rang}(g) = n \iff \text{Die Familie } a_1, \dots, a_n \text{ ist linear unabhängig} \iff \det g \neq 0.$$

Zu beweisen ist nur noch die letzte Äquivalenz. Dazu gehen wir wie folgt vor (Details nachvollziehen) :

Angenommen eine Linearkombination der Spaltenvektoren von g ist Null. Also $\sum g_{ki} \alpha_i = 0$ für alle k . D.h. $\sum B(a_k, a_i) \alpha_i = B(a_k, \sum a_i \alpha_i) = 0$ für $k=1, 2, \dots, n$. Dann zeigt (2.2.5), dass $\sum a_i \alpha_i = 0$ sein muß. D.h. aber, dass die Familie linear abhängig ist.

Die Überlegung läuft auch in der anderen Richtung.

(2.2.12) Nachfolgend vereinfachen wir unsere Schreibweise etwas, indem wir $a \cdot b$ oder ab anstelle von $B(a, b)$ schreiben, sofern keine Gefahr einer Verwechslung besteht. Beachten Sie: Für B gelten ja genau dieselben Rechenregeln wie für unser übliches Skalarprodukt in V^3 : Bilinearität und Kommutativgesetz.

- (2.2.13) Jetzt zum zweiten Schritt der Konstruktion unserer ausgezeichneten Basen: **Die Existenz reziproker Basen.**

Sei	a_1, \dots, a_n Basis von V und V euklidischer Raum.
Dann	gibt es eine zweite Basis a'_1, \dots, a'_n von V mit der Eigenschaft $a_i \cdot a'_k = B(a_i, a'_k) = \delta_{ik}$ ($=1$ für $i=k$ und $=0$ für $i \neq k$.) Diese zweite zur ersten <i>reziproke Basis</i> ist durch die erste eindeutig bestimmt. Reziproke Basis der reziproken ist die Ausgangsbasis.

(2.2.14) Beweis: Wir machen den Ansatz $a'_i = \sum a_k \alpha_{ki}$ mit α_{ki} gesucht und $i=1, 2, \dots, n$. Diese n Gleichungen multiplizieren wir jeweils von links mit a_r , wobei r ein neuer freier Index ist. Links ergibt sich $\delta_{ri} = a_r \cdot a'_i$. Rechts $\sum (a_r \cdot a_k) \alpha_{ki}$. Insgesamt also

$$\delta_{ri} = \sum_k g_{rk} \alpha_{ki} \quad r, i = 1, 2, \dots, n \quad \alpha_{ki} \quad \text{unbestimmt.}$$

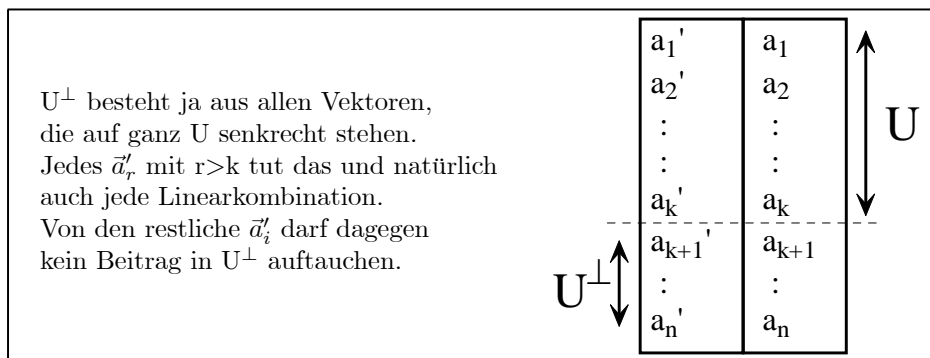
Als Matrixgleichung: $1_n = g\alpha$. D.h. es liegt die Bestimmungsgleichung für die inverse Matrix von g vor. Da nun die a_i eine Basis bilden, ist nach (2.2.11) der Rang von g gleich n und die Matrix ist invertierbar. α ist gleich der inversen Matrix g^{-1} und deren Spalten bestimmen über den Ansatz die Vektoren a'_i .

Der Ansatz kann nach den a_k aufgelöst werden, da auch α invertierbar ist. Also bilden die a'_k auch eine Basis von V , die zur Ausgangsbasis reziproke. Bilden wir die zugehörige Matrix g' mit $g'_{ik} = a'_i \cdot a'_k$, so gibt Einsetzen des Ansatzes sofort $g' = g^{-1}$.

(2.2.15) Insbesondere gilt $\det g' = \frac{1}{\det g}$.

(2.2.16) **Die Geometrische Interpretation der reziproken Basis:** Sei a_1, \dots, a_n die Ausgangsbasis. Nimmt man einen Vektor fort, sagen wir a_k so spannen die restlichen Vektoren eine Hyperebene H_k auf. (Vgl. Kap.5.2.8.) Der Vektor a_k steht im allgemeinen nicht senkrecht auf H_k , sondern ragt schräg in einen der Halbräume hinein. Anders dagegen steht es mit a'_k , dem entsprechenden Vektor der reziproken Basis. Dieser hat Normalenrichtung zu H_k . Und seine Länge ist reziprok zur Länge der Projektion von a_k auf die Normalenrichtung. Hat man a'_k , so kann man jeden Vektor sofort in eine zu H_k senkrechte und eine dazu parallele Komponente zerlegen. (Formel selbst aufstellen!)

(2.2.17) Allgemein gilt: Es sei U ein k -dimensionaler Teilraum von V . Wir wählen eine Basis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ von U und ergänzen sie zu einer Basis a von V . Hierzu bilden wir die reziproke Basis a' . Dann spannen a'_{k+1}, \dots, a'_n den zu U orthogonalen Teilraum U^\perp auf.



Wir kennen dieses Bild bereits aus der Behandlung des Dualraums. (Kap.5 (2.9.11)). Jetzt liegen beide Räume U und U^\perp jedoch in ein und demselben Raum V .

(2.2.18) Wegen positiv definit ist $U \cap U^\perp$ immer der Nullraum. Dann folgt aus dem Dimensionssatz für Teilräume, dass $V = U \oplus U^\perp$ gilt. D.h. für jeden Teilraum U von V ist V die direkte Summe aus U und seinem eindeutig bestimmten orthogonalen Komplement U^\perp . **Jeder Vektor kann eindeutig in eine zu U parallele und eine zu U senkrechte Komponente zerlegt werden.**

$$V = U \oplus U^\perp$$

(2.2.19) **Der Wechsel zur reziproken Basis.** Wir können in V natürlich von der Ausgangsbasis zur reziproken Basis wechseln. (In der Physik sagt man dazu, man ginge zu den kovarianten Komponenten eines Vektors über.) Hierzu benötigen wir nach dem allgemeinen Schema nur die zugehörige Transformationsmatrix und diese lesen wir aus obigem Beweis ab. Wir haben:

$$a' = a g^{-1} \quad \text{und} \quad a = a' g$$

Interpretieren wir daher die Ausgangsbasis a als *alte Basis*, dann ist die beschreibende Matrix g der Bilinearform die Transformationsmatrix. Damit können wir alle zugehörigen Rechnungen, insbesondere alle Zerlegungen in parallele und senkrechte Komponente ausführen.

(2.2.20) Die uns interessierenden Basen sind die, die mit ihrer reziproken Basis übereinstimmen. D.h für sie ist $g = 1 = (\delta_{ik})$.

Definition Sei V euklidischer Vektorraum und e eine Basis von V .
Dann heißt e eine *Orthogonalbasis* von V , wenn $B(e_i, e_k) = 0$ für alle $i \neq k$.
 D.h. die Basisvektoren stehen paarweise aufeinander senkrecht.
 Eine *Orthonormalbasis* liegt vor, wenn zusätzlich $B(e_i, e_i) = 1$ für alle i .
 D.h. alle Basisvektoren sind zusätzlich Einheitsvektoren.

Eine Orthonormalbasis stimmt mit ihrer reziproken Basis überein!

(2.2.21) Weshalb sind Orthonormalbasen und reziproke Basen so nützlich? Mit ihrer Hilfe kann man die Koeffizienten von Linearkombinationen gezielt und als Formeln bestimmen, ohne Umweg über die Lösung eines Gleichungssystems! Multipliziert man die Gleichung $\vec{x} = \sum \vec{a}_i \alpha_i$ skalar mit a'_k , so folgt unmittelbar: $\alpha_k = \vec{a}'_k \cdot \vec{x} = B(\vec{a}'_k, \vec{x})$.

Zusammengefasst:

Ist a Basis und a' zugehörige reziproke Basis von V , dann gilt für die Komponenten des Vektors $\vec{x} \in V$ bezüglich der Basis a die Formel
 $x_i = (\vec{a}'_i \cdot \vec{x}) = B(\vec{a}'_i, \vec{x})$ Oder $\vec{x} = \sum \vec{a}_i (\vec{a}'_i \cdot \vec{x})$
 Und für eine Orthonormalbasis sogar
 $x_i = (\vec{a}_i \cdot \vec{x}) = B(\vec{a}_i, \vec{x})$ Oder $\vec{x} = \sum \vec{a}_i (\vec{a}_i \cdot \vec{x}) = \sum \vec{a}_i B(\vec{a}_i, \vec{x})$

□ Wie sehen die entsprechenden Formeln für die reziproke Basis aus?

(2.2.22) **Gibt es immer Orthonormalbasen?** Im dritten in (2.2.9) angekündigten Schritt behandeln wir diese Frage für den Fall von Vektorräumen mit höchstens abzählbarer Dimension. Wir führen den Existenzbeweis konstruktiv und induktiv. Dabei geht man aus von einer Basis a von V und bildet damit eine Orthogonalbasis E , die durch Normierung zu einer Orthonormalbasis e von V wird. Der Einschub zeigt, wie dieser Prozeß abläuft. Die Idee ist, die Zerlegungsformel (2.2.6) auf den jeweils nachfolgenden Basisvektor anzuwenden und die zu den bereits berechneten orthonormierten Vektoren parallele Komponente fortzulassen.

Das Erhard-Schmidtsche-Orthonormierungsverfahren.

$\vec{a}_1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$	$\vec{E}_1 = \vec{a}_1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$	$\vec{e}_1 = \frac{\vec{E}_1}{\ \vec{E}_1\ }$
$\vec{a}_2, \vec{e}_1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$	$\vec{E}_2 = \vec{a}_2 - \vec{E}_1 \frac{(\vec{E}_1 \cdot \vec{a}_2)}{\ \vec{E}_1\ ^2} \rightarrow \rightarrow \rightarrow$	$\vec{e}_2 = \frac{\vec{E}_2}{\ \vec{E}_2\ }$
$\vec{a}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rightarrow \rightarrow$	$\vec{E}_3 = \vec{a}_3 - \vec{E}_1 \frac{(\vec{E}_1 \cdot \vec{a}_3)}{\ \vec{E}_1\ ^2} - \vec{E}_2 \frac{(\vec{E}_2 \cdot \vec{a}_3)}{\ \vec{E}_2\ ^2} \rightarrow \rightarrow \rightarrow$	$\vec{e}_3 = \frac{\vec{E}_3}{\ \vec{E}_3\ }$
$\vec{a}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rightarrow$	$\vec{E}_4 = \dots \dots$ usw.	

Jedes \vec{e}_i steht nach Konstruktion auf allen Vorgängern senkrecht. Alle Vektoren die durch die a -Vektoren erzeugt werden, werden offensichtlich auch durch die e -Vektoren erzeugt.

Beachten Sie, dass die entstehende Orthonormalbasis sogar von der **Reihenfolge** der Vektoren der a -Basis abhängt.

(2.2.23) Bei der konkreten Ausführung einer Orthonormierung sollte man in der mittleren Spalte mit den Vektoren E , nicht mit den e arbeiten. Dadurch erspart man sich viele unnötige Faktoren.

(2.2.24) **Auf jeden Fall gibt es immer Orthonormalbasen und wir haben im endlichen und im abzählbaren Fall sogar ein konstruktives Gewinnungsverfahren.**

(2.2.25) Ist jetzt $U \subset V$ ein Teilraum der Dimension k , so können wir eine Basis von U wählen und diese zu einer Basis von V ergänzen. Wendet man auf diese Basis das Orthonormierungsverfahren an, so bilden die ersten k Vektoren e_i eine Basis von U und die restlichen eine von U^\perp . Dies gilt, da Basis und reziproke Basis übereinstimmen. D.h. man kann mit Hilfe einer solchen Orthonormalbasis jeden Vektor sofort in seine zu U parallele und senkrechte Komponente zerlegen. Vgl. die Figur in (2.2.17).

$$\vec{x} = \vec{p} + \vec{s} = \sum_{i=1}^k \vec{e}_i x_i + \sum_{i=k+1}^n \vec{e}_i x_i$$

(2.2.26) **Beispiel:** Wir wählen den Raum \mathcal{P} der Polynome mit dem in (2.1.13) eingeführten Skalarprodukt L . Als Ausgangsbasis nehmen wir h_0, h_1, h_2, \dots . Die h_i stehen bezüglich L **nicht** aufeinander senkrecht. Z.B. ist

$$L(h_{2k}, h_{2r}) = \int_{-1}^1 dx x^{2(k+r)} = \frac{2}{2k + 2r + 1}$$

Die entstehenden orthonormierten Vektoren bezeichnen wir nicht mit e sondern mit \hat{P} . Denn P ist das übliche Symbol für die **nur orthogonalen Legendrepolynome**:

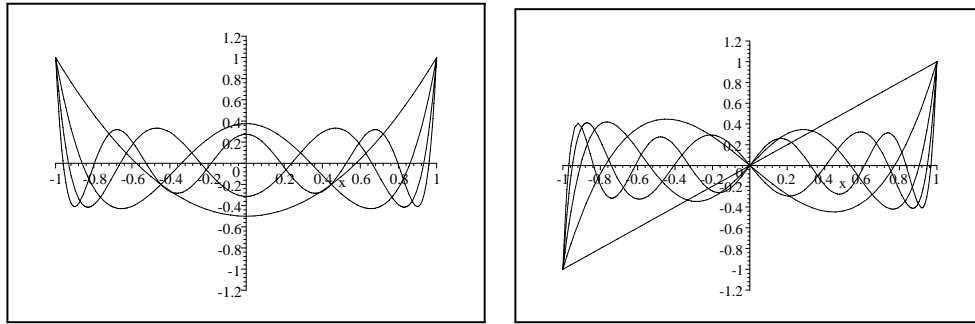
h_0	$L(h_0, h_0) = 2$	$\hat{P}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} h_0$
h_1, h_0	$E_1(x) = x - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx x \cdot 1 \quad \ E_1\ ^2 = \frac{2}{3}$	$\hat{P}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} h_1$
h_2, h_1, h_0	$E_2(x) = x^2 - 0x - \frac{1}{3}$	$\hat{P}_2 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (h_2 - \frac{1}{3} h_0)$

Die \hat{P}_ℓ bilden eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarproduktes L für den Raum aller Polynome. Üblicherweise spaltet man noch einen Faktor ab und definiert:

$P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \hat{P}_n(x)$	<i>Legendrepolynome 1. Art.</i> $n=0,1,2,3,\dots$
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \lambda_n$	mit $\lambda_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 dx P_n(x) f(x) = \frac{2n+1}{2} L(P_n, f)$

Der untere Teil der Formel gibt die Berechnungsformel für die Koeffizienten λ_n gemäß (2.2.21), wenn f irgendein Polynom ist.

Wir geben noch die Graphen der ersten Legendrepolynome im betrachteten Bereich. Links die mit geradem Indx ($2n=2,4,6,8$) und rechts die mit ungeradem ($2n+1=1,3,5,7,9$):



- Mit Hilfe dieser Bilder können Sie bereits eine Vielzahl von Vermutungen über allgemeine Eigenschaften der Legendrepolynome aufstellen. Tun Sie das.
- Berechnen Sie als Beispiel die Darstellung von $p(x)=x^2 + 2x + 3$ durch Legendrepolynome.

10.2.3 Bemerkungen zu Nutzen und Bedeutung der Legendrepolynome

(2.3.1) Angenommen man betrachtet eine Funktion des Winkels θ zwischen zwei Halbgeraden. Vielfach ist hat die die Form einer Zusammensetzung

$$\theta \mapsto z = \cos \theta \mapsto f(z) = f(\cos \theta)$$

wobei f die interessantere oder einfachere Funktion ist. Im Falle räumlicher Polarkoordinaten hat man $z=r\cos\theta$ für die z -Koordinate. Wie soll man diese Funktion f nach z entwickeln? Eine Taglorreihe um $z=0$ bevorzugt den Nullpunkt gegenüber den anderen, ist lokal. Eine globale Approximation, die im gesamten z -Bereich einen bestimmten Fehler nicht überschreitet, wäre vorzuziehen. Liefert die Approximation durch die Legendrepolynome eine solche?

(2.3.2) Zunächst einmal formulieren wir das Skalarprodukt in der Winkelvariablen. Die gestellte Frage wird dann durch die daran anschließenden Bemerkungen beantwortet.

$$L(p, q) = \int_{-1}^1 dz p(z)q(z) = \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) p(\cos \theta) q(\cos \theta).$$

(2.3.3) Sei $U \subset V$ ein Teilraum eines euklidischen Raume V und $a \in V$ ein fester Vektor. Wir können a nach (2.2.25) in eine zu U parallele und eine dazu senkrechte Komponente zerlegen: $a=p+s$. **Dann ist s der Vektor des kürzesten Abstands von a zum Teilraum U .**

Beweis: Jeder andere Endpunkt auf U hat einen Ortsvektor $b=p+z$ mit $z \in U$. Aus $z \in U$ folgt $s \cdot z = 0$. Der Abstandsvektor ist $a-b = a-p-z = s-z$ wegen $a=p+s$. Das gibt für den Abstand selbst

$$\|a - b\|^2 = \|s\|^2 + \|z\|^2 \quad \text{wegen } s \cdot z = 0$$

Also gehört zu $z=0$ der kürzestmögliche Abstand von a und einem Vektor aus U .

Mit einer Norm ist die Argumentation des Beweises nicht möglich!

- Fertigen Sie eine Skizze der im Beweis verwendeten Konfiguration.
- Bestimmen Sie im \mathbb{R}^2 den kürzesten Abstand des Punktes $(0,a)$ von der Geraden $y=2x$ für die drei üblichen Normen. Skizzieren Sie das Resultat geometrisch.

(2.3.4) Jetzt betrachten wir wieder den Polynomraum \mathcal{P} mit dem Skalarprodukt L . Es sei e eine Orthonormalbasis, wie die oben zu den Legendrefunktionen gehörige. Dann bestehe $\bar{\mathcal{P}}$ aus allen Funktionen $f = \sum_{n=0}^\infty e_n \alpha_n$, für die $\sum_n |\alpha_n|^2$ konvergiert. Das erlaubt unendliche Linearkombinationen der Basisvektoren!

Da die e_n paarweise orthogonal sind, folgt $\|f\|^2 = \sum_n |\alpha_n|^2$. Nach dem Cauchy Kriterium ist f absolut konvergent bezüglich der von L erzeugten Norm. Es ist klar, dass $\bar{\mathcal{P}}$ sehr viele Funktionen enthält, die kein Polynom sind.

Sei $f \in \bar{\mathcal{P}}$. Wir haben $f = \sum_{n=0}^N e_n \alpha_n + R_N$. R_N ist der Rest. Die e_n bis N erzeugen einen Teilraum U . Im Falle der Legendrepolynome ist das der Raum aller Polynome vom Grade höchstens N mit der Dimension $N+1$. **Da R_N laut Konstruktion senkrecht auf U steht, ist R_N nach (2.3.3) der Vektor des kürzesten Abstandes von f zu U .**

(2.3.5) D.h. $\|f - \sum_{n=0}^N e_n \alpha_n\|^2$ wird minimal bezüglich $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. Oder auch: $p_N = \sum_{n=0}^N e_n \alpha_n$ ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grade höchstens N , für das der Abstand $\|f - p_N\|$ minimal wird! Schreiben wir die Abstandsgröße für den Legendrefall einmal aus:

$$\|f - p_N\|^2 = \int_{-1}^1 dx (f(x) - p_N(x))^2 = \text{Minimum}$$

D.h. aber, dass p_N in einem gewissen Sinne eine **optimale globale Polynomapproximation** von f auf dem Intervall $[-1, +1]$ ist!

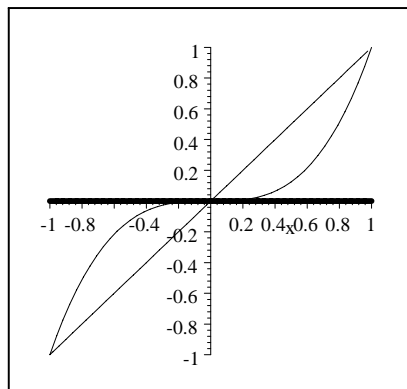
(2.3.6) Die Approximationsbedingung ist die, die man üblicherweise nehmen wird. Das Quadrat beseitigt eventuelle Vorzeichen der Abweichung und das Integral summiert über den gesamten Integrationsbereich. Arbeitet man mit der Winkelvariablen, so bewirkt der Faktor $\sin(\theta)$, dass die Bereiche in der Nähe der Pole, also $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ schwächer gewichtet werden, als die am Äquator mit $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(2.3.7) Andere Skalarprodukte oder Normen gewichten die Punkte unterschiedlicher Abweichung anders. Es ist leicht, zahlreiche weitere Beispiele für Skalarprodukte anzugeben. Aber in jedem Fall erhält man eine globale Approximation!

(2.3.8) Die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten α_n zu vorgegebenem f erfolgt über die Formel, die für jede Orthonormalbasis gilt: $\alpha_n = B(f, e_n)$. Die Legendrefunktionen P_n sind nicht normiert, aber orthogonal. Daher hat man wegen $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ die folgenden Entwicklungsformeln:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x) \quad \text{mit} \quad \alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x) P_n(x)$$

Beispiel (zur Illustration des Unterschiedes von lokal und global): Für $f(x) = x^3$ ist die lokale Taylorapproximation zweiter Ordnung um $x=0$ die Nullfunktion, da ja die ersten beiden Ableitungen bei $x=0$ Null sind. Das ist gut bei $x=0$, schlecht bei $x = \pm 1$. Für die Legendreapproximation ergibt sich für die 2. Ordnung $0P_0 + 1P_1 + 0P_2$. Die beiden geraden Polynome P_0 und P_2 geben keinen Beitrag. Das ist bei Null schlechter, aber im gesamten Bereich viel besser! x



Die beste globale Approximation von $f(x) = x^3$ durch ein Polynom vom Grade höchstens 2 im Bereich $-1 \leq x \leq 1$.

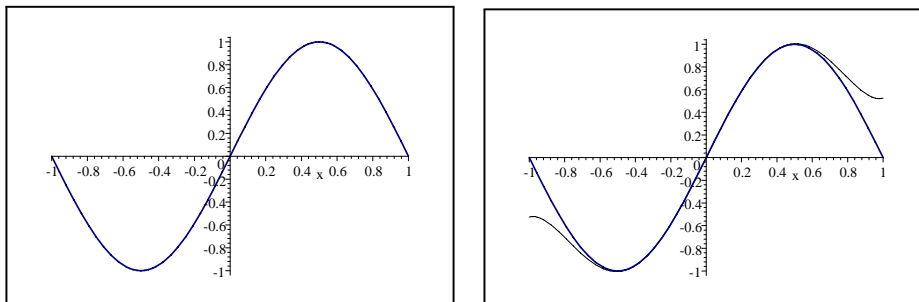
(2.3.9) Was uns noch fehlt, ist eine von der Definition unabhängige Charakterisierung der zu $\bar{\mathcal{P}}$ gehörigen Funktionen. Liegen etwa alle auf $[-1, 1]$ stetigen Funktionen in diesem Funktionsraum? Ist das überhaupt ein Vektorraum? Und weiter: Kann man auch das Skalarprodukt von den Polynomen auf ganz $\bar{\mathcal{P}}$ ausdehnen? In welchem Sinne konvergieren die Partialsummen gegen die Grenzfunktion? Konvergieren Sie überhaupt? Usw. Wir kommen in Kapitel 14 aus einer anderen Richtung auf diese Fragen zurück und werden sie dort beantworten.

(2.3.10) Zur ersten Orientierung nennen wir ohne Beweis das folgende Ergebnis:

Genügt f einer Lipschitzbedingung auf [-1,1], d. h. speziell, ist f differenzierbar mit beschränkter Ableitung, dann gilt $f \in \tilde{\mathcal{P}}$. Dh. die Entwicklungskoeffizienten existieren und erfüllen $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$. Die Legendrereihe konvergiert dann **punktweise** gegen f. Auf abgeschlossenen Intervallen im Innern von [-1,1] schließlich ist die Konvergenz gleichmäßig.

Es gibt jedoch noch viele weitere hierdurch nicht erfaßte Funktionen, für die man auch Konvergenz erhält.

(2.3.11) Als erstes Beispiel wählen wir $f(x)=\sin(\pi x)$. Diese Funktion hat eine durch π beschränkte Ableitung, erfüllt die also Bedingung. Weiter ist sie ungerade, woraus $\alpha_{2n}=0$ folgt. Für die ersten nicht verschwindenden Terme findet man $\alpha_1 = \frac{2}{\pi} \approx 0.9549$ und $\alpha_3 = 7 \frac{\pi^2-15}{\pi^3} \approx -1.1582$ und $\alpha_5 \approx 0.2193$ usw. Diese Beiträge geben bereits eine sehr gute globale Approximation der Funktion durch ein Polynom (5.Grades). Der absolute Fehler liegt im gesamten Intervall unter 1.5% (Supremumsnorm). Die entsprechende Taylorapproximation $\sin(\pi x) \approx \pi x - \frac{\pi^3}{6} x^3 + \frac{\pi^5}{120} x^5$ ist über das gesamte Intervall genommen viel schlechter. Am Rande ergibt sich ein absoluter Fehler von etwa 50%. der Unterschied zwischen lokaler und globaler Approximation wird hierdurch sehr deutlich.



- Eine Konkretisierung von (2.3.5). Es sei U der von P_1 und P_3 aufgespannte Teilraum mit allgemeinem Element $p=P_1 a + P_3 b$. Weiter f mit $f(x)=\sin(\pi x)$. Berechnen Sie mit einem Computeralgebraprogramm die Größe $\|f - p\|^2$. Bestimmen Sie dann die Werte von a und b. für die diese Größe minimal wird und vergleichen Sie.

(2.3.12) Beispiel: Sei $\vec{A} \in V^3$ ein fester Vektor ungleich $\vec{0}$. Weiter sei $\vec{a} \in V^3$ mit $a=\|\vec{a}\| < A = \|\vec{A}\|$. Uns interessiert die Größe $\frac{1}{\|\vec{A}-\vec{a}\|}$, die beispielsweise im Potential der Coulombkraft auftritt. Wir rechnen wie folgt:

$$\frac{1}{\|\vec{A}-\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + a^2 - 2aA \cos \theta}} = \frac{1}{A} \frac{1}{\sqrt{1 + h^2 - 2hz}} \quad \text{mit } h = \frac{a}{A} \quad \text{und } z = \cos \theta.$$

Man kann zeigen, dass die folgende Entwicklung nach Legendrepolyomen gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{1+h^2-2hz}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z)$$

Für die ersten n rechnet man das leicht explizit nach.

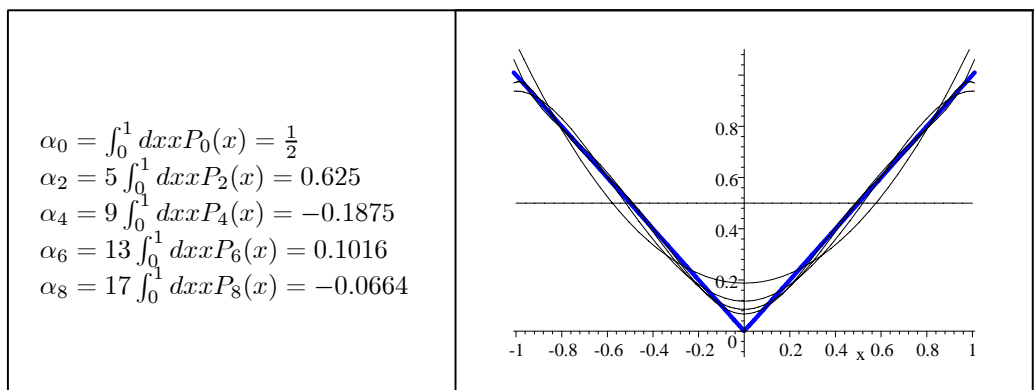
- Dazu kann man man die Taylorentwicklung bezüglich h um $h=0$ verwenden, die nur für $|h|<1$ gilt.
 □ Benutzen Sie alternativ die Binomifformel für $n = -\frac{1}{2}$.

Wir haben $\alpha_n = h^n \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$ wegen der Normierung. Die oben geforderte Bedingung war $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$. Das verlangt $h < 1$, was nach der gesamten Herleitung der Formel zu erwarten war. Für $h < 1$ ist auch die Lipschitzbedingung erfüllt, nicht aber für $h = 1$.

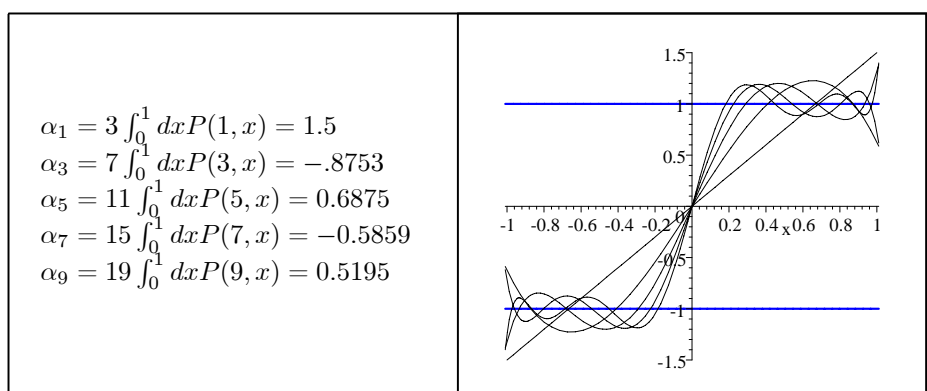
(2.3.13) Ist die Bedingung $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$ nicht erfüllt, dann kann die zugehörige Reihe immer noch auf andere Weise konvergieren. Als Beispiel kann man in (2.3.12) etwa $h=1$ nehmen, was auf die Funktion $g(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$ führt, die offensichtlich nicht quadratintegabel ist.

- Studieren Sie das Verhalten der Entwicklung aus (2.3.12) für $h=1$ mit Hilfe eines Computeralgebrasystems graphisch.
 □ Was ist mit $h > 1$? Entgegen einer möglichen ersten Erwartung ist die Lipschitzbedingung wieder erfüllbar. Aber die Formel aus (2.3.12) kann nicht gelten, da $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$ verletzt ist. Jetzt ist Genauigkeit des Denkens angesagt: Formen Sie den Rechenausdruck $\frac{1}{\sqrt{1+h^2-2hz}}$ so um, dass das alte Resultat für $h < 1$ anwendbar ist. Bestimmen sie dann die neu entstehenden Folge von Entwicklungskoeffizienten α_n . Kurz : Je nach Wert von h ist für die α_n eine Fallunterscheidung erforderlich.

Wir geben noch die Approximation von je einer geraden und einer ungeraden Funktion durch die Legendrepolynome. Beide Funktionen sind nicht glatt. Zunächst die Entwicklung für $f(x)=|x|$. Da alle Legendrepolynome mit ungeradem Index ungerade und mit geradem gerade sind, verschwinden alle α_{2n+1} . Gezeigt werden die ersten 5 Approximationen



Jetzt betrachten wir die unstetige Funktion $f(x)=1$ für $x>1$ und $=-1$ für $x<1$. In diesem Fall tragen nur die ungeraden Indizes bei und wir finden. Auch hier ist gut zu erkennen, wie sich die Polynome mit zunehmendem Grad immer besser der Vorgabefunktion anpassen.



10.2.4 Die Multipolentwicklung einer Ladungsverteilung

(2.4.1) Wir betrachten das folgende physikalische Szenenbild, für das Sie selbst eine Skizze fertigen sollten.

In einem Bereich $G \subset V_0^3$ des Konfigurationsraumes befinden sich felderzeugende Punktladungen, etwa Massenpunkte oder elektrische Ladungen. Man kann diese Ladungen selbst jedoch nicht beobachten, nur das von ihnen erzeugte Gesamtfeld außerhalb von G ausmessen. Und das auch nicht mathematisch exakt, sondern nur mit einer physiktypischen Unsicherheit. **Was kann man so über Lage und Art der Massenpunkte in G herausbekommen?** Das ist unser Problem: **Wie kann man aus der ungenauen Feldbestimmung außerhalb von G auf Eigenschaften der felderzeugenden Materieverteilung in G schließen?**

Die Verteilung der elektrisch geladenen Protonen in einem Atomkern bildet eine Realisierung dieses Problems.

(2.4.2) In G sollen sich genauer N Materiepunkte befinden. ($N=2,3,..$ bis sehr groß.) Wir legen den Ursprung in G hinein. Der α -te Massenpunkt habe den Ortsvektor \vec{r}_α . Unser Beobachtungspunkt, der *Aufpunkt*, an dem wir das erzeugte Feld außerhalb von G beobachten, habe den Ortsvektor \vec{X} .

(2.4.3) Wir nehmen an, dass Superposition gilt und betrachten den elektrischen Fall. Der α -te Massenpunkt trage eine Punktladung q_α . Er erzeugt damit ein Potentialfeld $V_\alpha(\vec{X}) = K \frac{q_\alpha}{\|\vec{X} - \vec{r}_\alpha\|}$. Superposition liefert das Potential des resultierende Gesamtfeldes am Orte X zu:

$$V(\vec{X}) = K \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{\|\vec{X} - \vec{r}_\alpha\|}.$$

Summation über α bedeutet immer Summation über alle N Massenpunkte. Das ist zwar eine exakte Formel, aber sie ist für die Analyse der Beobachtungen wenig geeignet: \vec{r}_α , N und q_α sind gesucht. \vec{X} ist unabhängig veränderlich.

(2.4.4) Wir benutzen die in (2.3.12) gegebene Entwicklung nach Legendrepolyomen :

$$\frac{1}{\|\vec{X} - \vec{r}_\alpha\|} = \sum_{\alpha n} \frac{1}{R} \left(\frac{r_\alpha}{R}\right)^n P_n(\cos \theta_\alpha) \quad \text{mit} \quad \cos \theta = \frac{(\vec{X} \cdot \vec{r}_\alpha)}{R r_\alpha} \quad R = \|\vec{X}\| \quad r_\alpha = \|\vec{r}_\alpha\|.$$

Unser Szenenbild sichert die verlangte Konvergenzbedingung $h = \frac{r}{R} < 1$.

(2.4.5) Einsetzen, Vertauschen der Summationsreihenfolgen - erlaubt infolge absoluter Konvergenz - und Reorganisieren gibt:

$$V(\vec{X}) = K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} [\sum_\alpha q_\alpha r_\alpha^n P_n(\cos \theta_\alpha)]$$

(2.4.6) Unser Ziel muß sein, die Systembeschreibungsgrößen q_α und \vec{r}_α von der Kontrollgröße \vec{X} der Beobachtung zu trennen. In der Ausgangsformel für V ist das sehr schwierig. Durch unsere Umformung wird das in Angriff genommen. Vor der geschweiften Klammer stehen Potenzen von $\frac{1}{R}$ des Kontrollbereichs. In der Klammer stehen die Systemgrößen. Eine Ausnahme bilden nur die Winkel θ_α . Diese enthalten über das Skalarprodukt $(\vec{X} \cdot \vec{r}_\alpha)$ noch beide Typen. Aber in den individuellen Summanden (bezüglich n) können wir die angetriebte Trennung mit Tensormethoden ausführen. Wir nehmen die ersten drei Summanden und finden durch Einsetzen der Legendrepolynome und der Skalarproduktarstellung der θ_α :

$$\frac{1}{K} V(\vec{X}) = \frac{Q}{R} + \frac{(\vec{D} \cdot \vec{X})}{R^3} + \frac{1}{R^5} \sum_{r,s=1}^3 Q_{rs} X_r X_s + \dots$$

(2.4.7) Die entstehende Reihe ist also **nach reziproken Potenzen von R** geordnet. Der erste Term geht wie $\frac{1}{R}$, der zweite wie $\frac{1}{R^2}$, da im Skalarprodukt des Nenners noch ein R enthalten ist und der dritte wie $\frac{1}{R^3}$. Derartige Anteile (mit unterschiedlichem Abfallsverhalten) lassen sich aber aus den Meßdaten isolieren. Die Summe über α ist überall in die geometrischen Größen $Q, D, Q_{rs} \dots$ hineingewandert.

(2.4.8) Schauen wir uns die ersten geometrischen Koeffizienten genauer an.

$$Q = \sum_\alpha q_\alpha \quad \vec{D} = \sum_\alpha q_\alpha \vec{r}_\alpha \quad Q_{rs} = \sum_\alpha q_\alpha (3x_r^\alpha x_s^\alpha - \delta_{rs} r_\alpha^2)$$

Zunächst ist Q einfach die Gesamtladung. Der erste Term beschreibt somit das Feld eines Massenpunktes für den die **Gesamtladung** Q im Ursprung vereinigt ist. Der zweite sich aus dem Legendrepolynom P_1 ergebende Beitrag beschreibt einen aus den Ladungen gebildeten mathematischen **Dipol** mit Dipolmoment \vec{D} , der sich ebenso im Ursprung befindet. Vgl. Kap. 6.

(2.4.9) Den dritte Term (für $n=2$) leiten wir ausführlicher her ($P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$):

$$\sum_\alpha q_\alpha r_\alpha^2 P_2(\cos \theta_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_\alpha q_\alpha r_\alpha^2 \left(3 \frac{(\vec{r}_\alpha \cdot \vec{X})^2}{r_\alpha^2 R^2} - 1 \right) = \frac{1}{2R^2} \sum_\alpha q_\alpha (3(\vec{r}_\alpha \cdot \vec{X})^2 - r_\alpha^2 R^2).$$

Einführen der Komponenten gibt sofort die oben gegebene Darstellung mit

$$Q_{rs} = \frac{1}{2} \sum_\alpha q_\alpha (3x_{\alpha r} x_{\alpha s} - r_\alpha^2 \delta_{rs})$$

Das definiert uns eine symmetrische Bilinearform $(\vec{X}, \vec{Y}) \mapsto Q(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_{rs} Q_{rs} X_r Y_s$ mit zugehöriger quadratischer Form $\vec{X} \mapsto Q(\vec{X}, \vec{X})$. Der Beitrag zum Potential ist koordinatenfrei gerade $K \frac{Q(\vec{X}, \vec{X})}{R^5}$. Die Bilinearform ist symmetrisch und spurfrei.

(2.4.10) Insgesamt liefert uns (2.4.6) eine Folge von Modellbeschreibungen für unser System, die (mit zunehmendem R) abnehmenden Einfluß haben. Oder auch: Man muß immer genauer und näher bei G messen, wenn man mehr dieser Beiträge aufspüren will.

- Überlegen Sie selbst, ob und wie die Modellgrößen von der Wahl des Ursprungs abhängen.
- Wie sieht ein einfacher **physikalischer** Quadrupol aus? Bestimmen Sie dazu gemäß (2.4.9) den Quadrupoltensor. Was ist sein Dipolmoment und seine Gesamtladung?
- Schreiben Sie den Quadrupoltensor als mathematischen Tensor.

10.2.5 Die Isometrien eines euklidischen Vektorraumes

(2.5.1) Es seien V und W zwei euklidische Vektorräume und $\lambda:V \rightarrow W$ linear. Wann ist λ strukturerhaltend? Sei B das Skalarprodukt von V und C das von W . Die übliche Diagrammkommutativität verlangt hier $B(x,y)=C(\lambda(x),\lambda(y))$. **Der Wert des Skalarproduktes soll sich unter der Abbildung nicht ändern.** Das ist sachlich vernünftig, denn hierdurch wird sichergestellt, dass sich unter λ Längen und Winkel nicht ändern. (Vgl. Kap.3.2.6).

- Schreiben Sie die Gleichung als kommutatives Diagramm.

(2.5.2) Das motiviert die folgende **Definition**: bedeutet:

Eine lineare Abbildung $\lambda:V \rightarrow W$ zweier euklidischer Vektorräume heißt *Isometrie von V nach W* , wenn für alle $x,y \in V$ gilt: $B(x,y)=C(\lambda(x),\lambda(y))$.
Ist $V=W$, so besagt das $B(x,y)=B(\lambda(x),\lambda(y))$.

(2.5.3) Eine Isometrie ist immer injektiv - also Isomorphismus von V auf $\text{Bild}\lambda$, denn $x \in \text{Kern}\lambda$ bedeutet $B(x,x)=C(\lambda(x),\lambda(x))=0$. Also $x=0$. Zwei in diesem Sinne isomorphe Räume nennt man isometrisch.

- Die gegebene Definition einer Isometrie läßt sich noch vereinfachen, indem man eine der Voraussetzungen fortläßt. Man kann leicht zeigen, dass sie aus den übrigen folgt. Nehmen Sie diese Vereinfachung vor und beweisen Sie ihre Gültigkeit.
- Eine Drehbewegung mit fester Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ liefert für jeden Zeitpunkt eine Isometrie. zeigen Sie, dass der in (1.2.30) eingeführte Trägheitstensor zeitunabhängig ist, wie es von einer geometrischen Größe zu erwarten ist.

(2.5.3) Uns interessiert der Fall $V=W$. Wir bezeichnen mit $O(V)$ die Menge aller Isometrien $V \rightarrow V$. Die Endomorphismen von V bilden den Endomorphismenring $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)=\text{End}(V)$. Die meisten seiner Elemente sind **keine** Isometrien. Die umkehrbaren Endomorphismen bilden die Automorphismengruppe oder lineare Gruppe $\text{Aut}(V)$. Im endlichdimensionalen Fall folgt aus $\text{Kern}\lambda=\{0\}$ die Umkehrbarkeit. **Also bilden die Isometrien eine Teilmenge der Automorphismengruppe.**

(2.5.4) Erwartungsgemäß gilt der wichtige:

Satz: Sei V endlichdimensionaler euklidischer Raum.
Dann ist $O(V)$ eine Untergruppe der linearen Gruppe $\text{Aut}(V)$.
Man nennt $O(V)$ die *orthogonale Gruppe von V* .

Beweis: Untergruppenkriterium.

Eigentlich müßte man $O_B(V)$ schreiben, da die Gruppe vom jeweiligen Skalarprodukt abhängt. Und zu ein und demselben Vektorraum V sind durchaus mehrere Skalarprodukte denkbar. Meist ist jedoch klar, welches Skalarprodukt in Frage kommt.

- Die Gruppe $O(V)$ operiert auch der Potenzmenge $\mathfrak{P}(V)$, also den Figuren in V . Wie sehen die zugehörigen Bahnen aus?
- Wir betrachten jetzt etwas allgemeinere Abbildungen $V \rightarrow V$, die die Bedingung $B(x,y)=\alpha B(x,y)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ erfüllen. Wodurch sind diese Abbildungen geometrisch charakterisiert, wie sehen die Bahnen im Figurenraum aus?

(2.5.5) **Jetzt möchten wir eine Charakterisierung der Isometrien auf dem Niveau der Abbildungstripel.** Die definierende Gleichung verlangte ja immer die Abbildungswerte $\lambda(x)$ und $\lambda(y)$. Dazu müssen wir den Begriff der transponierten Abbildung auf den Fall der Skalarprodukte verallgemeinern.

Satz: Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt B und $\lambda:V \rightarrow V$ linear.
Dann gibt es genau eine lineare Abbildung ${}^t\lambda:V \rightarrow V$, die folgende Eigenschaft besitzt: $B(\vec{x},\lambda(\vec{y}))=B({}^t\lambda(\vec{x}),\vec{y})$. Dies ${}^t\lambda$ heißt *die zu λ bezüglich B adjungierte oder transponierte Abbildung*.

Mit Hilfe von ${}^t\lambda$ kann man Homomorphismen wie Zahlfaktoren von einem Vektorfaktor des Skalarproduktes auf den anderen herüberwälzen. Bitte das nicht mit der Symmetrie verwechseln. Die Symmetrie besagt ja $B(\vec{x}, \lambda(\vec{y})) = B(\lambda\vec{y}, \vec{x})$.

(2.5.6) Beweis: Sei e eine Orthonormalbasis von V . (Gibt es!). Für sie gilt stets $x = \sum e_i B(e_i, x)$. Speziell ${}^\lambda\lambda(e_i) = \sum e_k B(e_k, {}^t\lambda(e_i))$. Natürlich kennen wir die Zahlkoeffizienten rechts noch nicht. Wenn es aber eine transponierte Abbildung gibt, dann haben wir für diese Zahlen nur eine einzige Wahl, nämlich $B(e_k, {}^t\lambda(e_i)) = B(\lambda(e_k), e_i)$. Diese Zahlen sind durch das vorgegebene λ festgelegt. Sie bestimmen in der üblichen Weise eindeutig eine lineare Abbildung ${}^t\lambda: V \rightarrow V$, von der man sofort nachprüft, dass sie die Bedingung des Satzes allgemein erfüllt.

(2.5.7) Welche Beziehung besteht zwischen den beschreibenden Matrizen von λ und ${}^t\lambda$? Dazu müssen wir die Matrixelemente als Skalarprodukt ausdrücken. Das ist nicht schwer.

Satz: Sei a eine Basis des euklidischen Raumes V und a' die zugehörige reziproke Basis. Sei weiter $\lambda: V \rightarrow V$ linear und $M = M_\lambda$ die zugehörige beschreibende Matrix.

Dann gilt $M_{ik} = B(a'_i, \lambda(a_k))$.

Beweis: Folgt sofort aus $\lambda(a_k) = \sum a_i M_{ik}$ und den Eigenschaften der reziproken Basis.

(2.5.8) Ist insbesondere e eine Orthonormalbasis, so folgt $M_{ik} = B(e_i, \lambda(e_k))$. Das ist das Kochrezept aus Kap. 4.

(2.5.9) Jetzt sei M die Matrix, die λ , und N die, die ${}^t\lambda$ beschreibt. Dann folgt unter Ausnutzung der Symmetrie von B :

$$N_{ik} = B(e_i, {}^t\lambda(e_k)) = B(\lambda(e_i), e_k) = B(e_k, {}^t\lambda(e_i)) = M_{ki}.$$

(2.5.10) Also:

Satz: Sei $\lambda: V \rightarrow V$ linear. Sei weiter e eine Orthonormalbasis von V und M die beschreibende Matrix von λ bezüglich e .

Dann wird ${}^t\lambda$ durch die transponierte Matrix tM bezüglich e beschrieben.

Beachten Sie, dass für eine allgemeine Basis obige Rechnung nicht gilt.

(2.5.11) Jetzt sind wir in der Lage, die angestrebte Charakterisierung der Isometrien als Abbildungstrippel vorzunehmen.

Satz: Sei V endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $\lambda: V \rightarrow V$ linear

Dann ist λ genau dann Isometrie, wenn ${}^t\lambda = \lambda^{-1}$ gilt. Oder gleichwertig $\lambda \circ {}^t\lambda = {}^t\lambda \circ \lambda = id_V$.

(2.5.12) Beweis: $B(x, y) = B(\lambda x, \lambda y) = B(x, {}^t\lambda(\lambda y))$. D.h. $B(x, y - {}^t\lambda \circ \lambda(y)) = 0$ für alle x und y . Nach der Kürzungsregel folgt $y - {}^t\lambda \circ \lambda(y) = 0$ für alle y . D.h. aber ${}^t\lambda \circ \lambda = id_V$. Die Überlegung erlaubt beide Richtungen.

(2.5.13) Aus den beiden letzten Sätzen folgt:

Satz: Sei V endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, e eine Orthonormalbasis und $\lambda: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung mit beschreibender Matrix M bezüglich e .

Dann ist M genau dann eine Isometrie, wenn ${}^tM = M^{-1}$ gilt. Solche Matrizen heißen *orthogonale Matrizen*.

Beispiel: $d(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ und $s(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$ sind beides orthogonale Matrizen.

(2.5.14) **Folgerung:** Alle Isometrien bzw. orthogonalen Matrizen haben die Determinante $+1$ oder -1 . Im Beispiel ist $\det d(\varphi) = 1$ und $\det s(\varphi) = -1$.

Beweis: $1 = \det({}^t\lambda \circ \lambda) = \det({}^t\lambda) \cdot \det \lambda = (\det \lambda)^2$.

Achtung: **Die Umkehrung des Satzes ist falsch. Aus $\det M=1$ folgt keineswegs, daß M orthogonal ist.** Etwa $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \neq {}^tM$.

(2.5.15) **Folgerung:** Die Isometrien mit Determinante +1 bilden eine Untergruppe der , orthogonalen Gruppe, die man die Spezielle Orthogonale Gruppe nennt und mit $SO(V)$ bezeichnet. Diese Untergruppe hat nur zwei Nebenklassen. Ist $\tau \in O(V)$, aber $\tau \notin SO(V)$, dann sind $SO(V)$ und $\tau SO(V) = SO(V)\tau$ diese beiden Nebenklassen. Die zweite Nebenklasse besteht aus allen Isometrien mit Determinante -1, den Spiegelungen.

Beweis: Untergruppenkriterium und Determinanteneigenschaften. Zusätzlich ist $SO(V)$ der Kern der Abbildung $(O(V), \lambda \mapsto \det(\lambda), \{+1, -1\})$.

Im Beispiel für \mathbb{R}^2 haben wir $\det(d(\varphi))=1$ und $\det(s(\varphi))=-1$. Für $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $\text{Iod}(\varphi) = s(\varphi)$.

(2.5.16) Orthogonale Matrizen sind zunächst aufgetaucht als beschreibende Matrizen von Isometrien. Sie treten aber noch in einer zweiten wichtigen Rolle auf, die der folgende Satz beschreibt:

Satz: Sei V endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum

a) Weiter seien e und f zugehörige Orthonormalbasen. Es gelte $e_i = \sum f_k T_{ki}$.
T ist die Transformationsmatrix. Dann ist T orthogonale Matrix.

b) Es sei e eine Orthonormalbasis und T eine ortho Matrix.
Dann ist f mit $f_k = \sum e_i T_{ik}$ auch eine Orthonormalbasis.

(2.5.17) Zusammengenommen können wir sagen: Die Gruppe $O(V)$ operiert von rechts auf der Menge aller Orthonormalbasen von V durch $e=fT$. Allgemein operiert $\text{Aut}(V)$ auf der Menge aller Basen. Es entsteht nur eine einzige Bahn, da man je zwei Basen durch einen Automorphismus ineinander überführen kann. Schränkt man die Gruppe auf $O(V)$ ein, so entstehen viele Bahnen. Eine davon besteht aus allen Orthonormalbasen. Schränkt man erneut auf $SO(V)$ ein, so zerfällt die Bahn erneut in die Bahnen der Basen mit Rechtsorientierung bzw. mit Linksorientierung. Beweis: Reine Verifikation.

(2.5.18) Bisher haben wir einen festen euklidischen Vektorraum betrachtet und nach den Konsequenzen gefragt, die aus den Axiomen folgen. Man kann aber auch versuchen, verschiedene euklidische Räume miteinander zu vergleichen. Wann sind diese isomorph, d.h. können durch eine reine Umbenennung ineinander umgewandelt werden? Hierzu noch einige Resultate. Besonders der endlichdimensionale Fall erweist sich als sehr durchsichtig.

(2.5.19) Zwei euklidische Vektorräume V und W heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Isometrie zwischen ihnen gibt. In geometrischer Hinsicht sind V und W dann nicht unterscheidbar. Genauer: Nicht unterscheidbar in allem, was sich durch das Skalarprodukt und die Vektorrechnung ausdrücken läßt.

(2.5.20) Wir haben folgendes zentrales Resultat:

Satz: Jeder n -dimensionale euklidische Vektorraum ist isomorph zum euklidischen \mathbb{R}^n , aber nicht kanonisch isomorph.

(2.5.21) Beweis: Es sei e_i die kanonische Basis von \mathbb{R}^n . Das ist eine Orthonormalbasis (ONB). Weiter sei \vec{E}_i irgendeine ONB von V . Eine solche gibt es immer. Nun betrachte man die lineare Abbildung $\lambda: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(e_i) = \vec{E}_i$. Das ist offensichtlich eine Isometrie, die aber manifest von der Wahl der Basis in V abhängt, also nicht kanonisch ist.

(2.5.22) Entsprechend sind k -dimensionale Teilräume von V per Restriktion des Skalarproduktes selbst euklidische Räume und somit isomorph zum euklidischen \mathbb{R}^k . **Insbesondere sind alle Ebenen automatisch isomorph zur euklidischen Ebene V_0^2 .** Alle Resultate der üblichen euklidischen Geometrie - soweit sie mit Hilfe des Skalarproduktes folgen - gelten daher für jeden zweidimensionalen Teilraum eines beliebigen euklidischen Vektorraumes.

(2.5.23) So muß beispielsweise die Winkelsumme in einem Dreieck immer π betragen. Damit ist das Resultat 10.2(12) keineswegs mehr verwunderlich. Weitere eigenständige Tests dieser Art sind zu empfehlen.

(2.5.54) Fassen wir die Resultate zu den Isometrien zusammen:

▼	Isometrien sind Abbildungen, die den Wert des Skalarproduktes nicht ändern, also insbesondere Werte von Längen und Winkeln fest lassen. (2.5.2)
▼	Mit Hilfe der transponierten Abbildung kann man Isometrien als Abbildung bzw. Matrix charakterisieren. (2.5.11) und(2.5.13)
▼	Die Gesamtheit der Isometrien eines Vektorraumes bildet ein Gruppe. (2.5.15)
▼	Genau die Isometrien führen Orthonormalbasen wieder in Orthonormalbasen über.
▼	Der Isometriebegriff erlaubt eine Klassifikation aller euklidischen Räume. Jeder n-dimensionale euklidische Raum ist isomorph zum euklidischen \mathbb{R}^n . (2.5.20)

10.2.6 Der Deformationstensor (Strain)

(2.6.1) Wir betrachten das Szenenbild eines elastischen Körpers in Kontinuumsidealisierung, das wir bereits in Kap.1.2.7a eingeführt haben. Jedem Punkt $\vec{X} \in G$ wird ein materieller Punkt zugeordnet. \vec{X} ist die Lage dieses Punktes im entspannten Zustand. Im gespannten, verzerrten Zustand geht dieser Punkt nach $\vec{x} = \varphi(\vec{X})$ über. φ soll glatt und invertierbar sein. Bringt man jetzt auf dem Körper irgendwelche Markierungen in Form von Figuren an, so werden diese durch φ mittransformiert. (Große Buchstaben: entspannt, kleine: deformiert). Dabei ändern sich in der Regel Längen und Winkel. **Wir müßten jetzt in der Lage sein, diese Änderungen mit Hilfe des Skalarproduktes zu formalisieren und quantitativ zu beschreiben.**

(2.6.2) In $G \subset V$ können wir alle Längen und Winkel mit Hilfe des zugehörigen euklidischen Skalarproduktes beschreiben.

(2.6.3) Nun werden aus Strecken bei der (i.a. nichtlinearen) Deformation in der Regel gekrümmte Kurven. Nach der Deformation müssen wir die Winkel daher mit Hilfe geeigneter Tangentenvektoren bestimmen.

Hierzu gehen wir so vor, dass wir alle Winkel als Schnittwinkel glatter Kurven berechnen, genauer der beiden Tangentenvektoren des Schnittpunktes. Und Längenänderungen bestimmen wir auch lokal als Verhältnis der Längen von Tangentenvektoren (vor und nach der Deformation).

Sobald man dieses Konzept festgelegt hat, ist klar, wie rechnerisch vorzugehen ist.

(2.6.4) Wir wählen einen festen Punkt mit Ortsvektor \vec{X}_0 . Durch diesen legen wir zwei glatte Kurven Γ_1 und Γ_2 mit $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) = \vec{X}_0$ und Tangenten $\vec{V}_1 = \Gamma_1'(0)$ und $\vec{V}_2 = \Gamma_2'(0)$. Wie immer beschreiben große Buchstaben den entspannten Zustand und kleine den gespannten.

Was geschieht bei der Deformation $\vec{X} \mapsto \vec{x} = \varphi(\vec{X})$? Nun die beiden Kurven gehen über in die Kurven $\gamma_1 = \varphi \circ \Gamma_1$ und $\gamma_2 = \varphi \circ \Gamma_2$. Deren Tangenten, Schnittwinkel und zugehörige Längen können wir aber bestimmen. Per Kettenregel finden wir: $\vec{v}_1 = \gamma_1'(0) = D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{V}_1$ und $\vec{v}_2 = \gamma_2'(0) = D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{V}_2$. Das damit gebildete Skalarprodukt liefert uns alle interessierenden Größen für den gespannten Zustand. Also

$$(\vec{v}_1 | \vec{v}_2) = (D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{V}_1 | D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{V}_2)$$

Zur Verdeutlichung schreiben wir hier (a|b) statt $a \cdot b = (a \cdot b)$ für das euklidische Skalarprodukt.

(2.6.5) Diese Formel ergibt die Zuordnung

$$\boxed{(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \mapsto (D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{V}_1 | D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{V}_2)}$$

mit der folgenden inhaltlichen Interpretation:

Durchdenken und einprägen: Gebe 2 Tangentenvektoren V und W zum Punkte \vec{X} im entspannten Zustand (über zugehörige Kurven) vor. Als Folge der Deformation geht \vec{X} nach \vec{x} und die beiden Tangentevektoren werden zu \vec{v} und \vec{w} , den Tangentenvektoren der deformierten Kurven. Dann liefert obige Zuordnung das Skalarprodukt $(\vec{V}, \vec{W}) \mapsto v \cdot w = (\vec{v} | \vec{w})$, das die Geometrie des deformierten Zustandes beschreibt.

(2.6.6) **Die Zuordnung ist offensichtlich bilinear, symmetrisch und positiv definit.** Letzteres, sofern wir verlangen, daß $D\varphi(\vec{X})$ ein Isomorphismus ist, d.h. dass φ um X lokal invertierbar ist. Kurz, die Zuordnung bildet erneut ein euklidisches Skalarprodukt.

(2.6.7) Aber beachten Sie: Das Skalarprodukt hängt vom gewählten Ort \vec{X} ab. Geht man zu einem anderen Aufpunkt über, so wird man i.a. auch ein anderes Skalarprodukt erhalten, da sich die Deformation von Punkt zu Punkt ändert. Formal liegt also ein **Skalarproduktfeld** vor.

(2.6.8) Besonders interessant ist der **Unterschied** zwischen entspanntem und deformiertem Zustand. Um ihn zu beschreiben, bilden wir die Differenz der beiden Skalarprodukte :

$$S : (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \mapsto (D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{V}_1 | D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{V}_2) - (\vec{V}_1 | \vec{V}_2).$$

(2.6.9) Das ist zwar kein euklidisches Skalarprodukt mehr, aber immer noch eine symmetrische Bilinearform (auf den Vektoren des entspannten Zustandes.) Führen wir in G eine feste kartesische Basis E. ein, so folgt in Tensorschreibweise:

$$S = 2 \sum \vec{E}_i \otimes \vec{E}_k \Sigma_{ik} \quad \text{mit} \quad 2\Sigma_{ik}(\vec{X}) = (D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{E}_i | D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{E}_k) - \delta_{ik} = (\vec{\partial}_i | \vec{\partial}_k) - (\vec{E}_i | \vec{E}_k)$$

Dabei sind die $\vec{\partial}_i = \vec{\partial}_i(\vec{X})$ die in Kap.6.4.4b eingeführten Basisfelder.

(2.6.10) Die letzte Form verdeutlicht nochmals die geometrisch-physikalische Bedeutung der Komponenten von S. Die Komponente $2\Sigma_{ik}$ ist der Unterschied der Skalarprodukte der beiden Koordinateneinheitsvektoren \vec{E}_i und \vec{E}_k nach und vor der Deformation. Wird beispielsweise der Körper nur rotiert, so muß $\Sigma_{ik} = 0$ sein.

(2.6.11) Das eingeführte S ist der Deformationstensor, genauer der *Lagrangsche Deformationstensor der Elastizitätstheorie*. Beachten Sie nochmals, dass diese Größe in der Regel ortsabhängig sein wird, dass also ein Skalarprodukt- bzw. Tensorfeld $\vec{X} \mapsto S_{\vec{X}}$ vorliegt. $S_{\vec{X}}$ legt fest, wie die Materie, die entspannt bei \vec{X} liegt, lokal verzerrt ist, wenn sie im deformierten Zustand nach x gebracht ist.

(2.6.12) Etwas unschön an diesem Tensor S ist, dass der Deformationszustand durch die Punkte X des entspannten Ausgangszustandes parametrisiert wird. Man würde sich eher eine Parametrisierung durch die Punkte x des gespannten Zustandes wünschen. Also eine Größe am Orte x, die angibt, wie sich Winkel und Längen bei Entspannung ändern.

(2.6.13) Hierzu setzen wir $\Phi = \varphi^{-1}$. Also $\vec{X} = \Phi(\vec{x})$. Damit können wir die Überlegungen ganz entsprechend durchführen und finden:

$$\begin{aligned} s & : (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \mapsto (D\Phi(\vec{x}_1) \cdot \vec{v}_1 | D\Phi(\vec{x}_2) \cdot \vec{v}_2) - (\vec{v}_1 | \vec{v}_2) \\ s & = 2 \sum \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k \sigma_{ik} \quad \text{mit} \quad 2\sigma_{ik} = (D(D\Phi(\vec{x}_1)) \cdot \vec{e}_i | D\Phi(\vec{x}_2) \cdot \vec{e}_k) - \delta_{ik} = (\vec{\nabla}_i | \vec{\nabla}_k) - (\vec{e}_i | \vec{e}_k). \end{aligned}$$

Hierbei ist e ein konstantes kartesisches Basisfeld für den Bildbereich (gespannter Zustand). Für $D\Phi(\vec{x}) \cdot \vec{e}_i$ fehlt zunächst der der $\vec{\partial}$ entsprechende Großbuchstabe. Wir wählen $\vec{\nabla}$, was den letzten Teil der Formel erklärt.

(2.6.14) Nochmals die Interpretation: Die σ_{ik} beschreiben zu einem Punkt x des gespannten Zustandes, wie sich Winkel und Längen lokal an diesem Punkte ändern, wenn man den Körper entspannt. Dieser Tensor heißt der *Eulersche Deformationstensor* - erneut ein Feld.

(2.6.15) Angenommen Γ ist eine Kurve durch $\vec{X} = \Gamma(0)$ mit Bildkurve $\gamma = \varphi \circ \Gamma$ und $\vec{V} = \Gamma'(0)$ sowie $\vec{v} = \gamma'(0) = D\Phi(0) \cdot \vec{V}$. Wir betrachten das kleine durch $0 \leq t \leq \Delta T$ bestimmte Kurvenstück von Γ . Wählt man ΔT so klein, dass Tangentenapproximation möglich ist, dann können wir das Kurvenstück durch die Strecke $t \mapsto \vec{X} + t\vec{V}$ ersetzen ($0 \leq t \leq \Delta T$). Und das zugehörige Bildkurvenstück durch $t \mapsto \vec{x} + \vec{v}t$.

Die Länge ΔL des Urbildkurvenstückes wird dann bestimmt durch $\Delta L^2 = (\vec{V} \Delta T | \vec{V} \Delta T) = (\vec{V} | \vec{V}) \Delta T^2$. Und die der Bildstrecke durch $\Delta \ell^2 = (\vec{v} | \vec{v}) \Delta T^2$

(2.6.16) Also $\Delta \ell^2 - \Delta L^2 = (\vec{v} | \vec{v}) \Delta T^2 - (\vec{V} | \vec{V}) \Delta T^2 = S(\vec{V}, \vec{V}) \Delta T^2 = 2\Sigma S_{ik} V_i V_k$. Umstellen gibt wegen $(\frac{\Delta \ell}{\Delta T})^2 = (\vec{V} | \vec{V})$

$$\frac{\Delta \ell}{\Delta L} = \sqrt{1 + \frac{S(\vec{V}, \vec{V})}{(\vec{V} | \vec{V})}}$$

(2.6.17) Die von S erzeugte quadratische Form $\vec{V} \mapsto S(\vec{V}, \vec{V})$ legt über diese Formel fest, welche relative Längenänderung um den Punkt X herum stattfindet, wenn man in Urbildraum in Richtung \vec{V} weiter geht. Diese relative Längenänderung ist eine wichtige Beobachtungsgröße.

(2.6.18) **Beispiel:** Wir betrachten die Abbildung $z \mapsto z^2$ komplexer Zahlen. In kartesischen Koordinaten ist das $\varphi : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X^2 - Y^2 \\ 2XY \end{pmatrix}$. Wir bestimmen den zugehöriger Lagrangeschen Tensor S . Links das allgemeine Schema, rechts das Beispiel.

$\vec{X} \mapsto \varphi(\vec{X})$	$\varphi : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X^2 - Y^2 \\ 2XY \end{pmatrix}$
$\vec{\partial}_i = D\varphi(X) \cdot \vec{E}_i$	$\begin{pmatrix} 2X & -2Y \\ 2Y & 2X \end{pmatrix} = (\vec{\partial}_1, \vec{\partial}_2)$
$2S_{ik} = (\vec{\partial}_i \vec{\partial}_k) - \delta_{ik}$	$2(S_{ik}) = \begin{pmatrix} 4(X^2 + Y^2) & 0 \\ 0 & 4(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$S(\vec{V}, \vec{W}) = 2 \sum S_{ik} V_i W_k$	$S(\vec{V}, \vec{W}) = (4(X^2 + Y^2) - 1)(\vec{V} \vec{W})$

(2.6.19) Für das Beispiel ergibt sich über (2.3.16) folgende relative Längenänderung

$$\frac{\Delta \ell}{\Delta L} = 2\sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Diese Änderung ist richtungsunabhängig, aber ortsabhängig. Art und Größe der Ortsabhängigkeit entsprechen voll der Erwartung. Allgemein wird die Längenänderung durchaus von der Richtung abhängen.

(2.6.20) Was wir hier erleben, ist in gewisser Weise typisch. Die Tensoren treten auf, weil ihre mathematischen Eigenschaften besonders günstig sind. Mit ihnen kann man Modelle bilden und allgemeine Überlegungen anstellen. Ihre Komponenten lassen sich physikalisch interpretieren, mit meßbaren Größen in Bezug setzen, wie hier der relativen Längenänderung. Aber vielfach erfordert das einigen rechnerischen Aufwand. Oder anders ausgedrückt: Da s bzw. S symmetrisch ist, genügen in drei Dimensionen 6 Zahlangaben, um den Deformationszustand um den Punkt \vec{x} herum vollständig zu beschreiben. D.h. alle physikalischen Größen, die den Deformationszustand lokal beschreiben, lassen sich auf diese 6 Größen zurückführen. Globale Größen erhält man schließlich durch geeignete Integrationen.

(2.6.21) $\det(D\varphi(\vec{X}))$ gibt die **Änderung des Inhaltes** (Fläche, Volumen) kleiner rechteckiger Figuren am Orte \vec{X} wieder. Auch das läßt sich sofort durch den Tensor ausdrücken:

$$\det(D\varphi(\vec{X})) = \sqrt{\frac{\det(2\Sigma_{ik} + g_{ik})}{\det(g_{ik})}} \quad \text{wobei } g_{ik} = (\vec{E}_i | \vec{E}_k) \text{ ist.}$$

Zur Herleitung benötigt man das Resultat aus der Frage zu (1.1.8).

(2.6.22) **Wie steht es mit Winkeln?** Wir nehmen als Beispiel für den ebenen Fall den Winkel zwischen den beiden Koordinatenrichtungen. Wie ändert sich dieser rechte Winkel unter der Transformation? Der neue Winkel ergibt sich über die Formel

$$\cos \gamma = \frac{(\vec{\partial}_1 | \vec{\partial}_2)}{\|\vec{\partial}_1\| \|\vec{\partial}_2\|} = \frac{2S_{12}}{\sqrt{(1 + 2S_{11})(1 + 2S_{22})}} \approx 2S_{12}$$

Die Näherung gilt für kleine Werte von S_{11} und S_{22} , also kleine Deformationen. Wir setzen $\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$. D.h. δ ist die Änderung des Winkels, bei der Deformation. Dann folgt $\cos(\gamma) = \sin(\delta)$. Und das bedeutet für kleinen Deformationswinkel $S_{12} \approx \frac{1}{2}\delta$.

Die Tensorkomponente S_{12} ist für kleine Deformationen näherungsweise gleich dem halben Deformationswinkel der beiden Achsen. In unserem gerechneten Beispiel war $S_{12} = 0$. D.h., dass der rechte Winkel erhalten bleibt. Analog läßt sich jeder Winkel zwischen zwei Bildvektoren ausrechnen und mit dem Ausgangswinkel vergleichen.

□ Stellen Sie die Formel für den Winkel zwischen zwei beliebigen Bildrichtungen, also zwischen $D(\varphi(\vec{X})) \cdot \vec{V} = \vec{v}$ und $D(\varphi(\vec{X})) \cdot \vec{W} = \vec{w}$ auf. Zeigen Sie damit: Gilt wie im Beispiel $(D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{V} | D\varphi(\vec{X}) \cdot \vec{W}) = \mu(\vec{X})(\vec{V} | \vec{W})$ mit $\mu(\vec{X}) > 0$, dann ändert sich der Winkel nie.

10.3 Unitäre Vektorräume

10.3.0 Die Problematik bei komplexen Vektorräumen

(3.0.1) Unser Geometrisierungsprogramm ist bisher auf reelle Vektorräume beschränkt. Kann man es auch auf komplexe ausdehnen? Sei also jetzt $K=\mathbb{C}$ und V Vektorraum über \mathbb{C} .

Inspektion der Axiome für eine euklidische Geometrie zeigt die folgende Schwierigkeit:

Sei $x \neq 0$. Positiv definit verlangt $S(x,x) > 0$. Nun ist aber $i \in \mathbb{C}$. Dann ist wegen bilinear $S(ix,ix) = i^2 S(x,x) = -S(x,x) < 0$, was positiv definit widerspricht.

(3.0.2) **Es ist also nicht möglich, die Axiome des euklidischen Vektorraumes widerspruchsfrei auf den komplexen Fall auszudehnen.**

10.3.1 Sesquilinearformen

(3.1.1) Als Ausweg wird man versuchen, die Axiome abzuändern. Im euklidischen Fall war positiv definit unerlässlich. Also sollte man versuchen, die anderen Forderungen zu modifizieren. In der Unfug produzierenden Überlegung wurde noch "bilinear" benutzt.

Und damit sind wir bei der Ursache des Problems: In \mathbb{C} ist $z^2 \neq |z|^2$. Stattdessen gilt $\bar{z}z = |z|^2$. Die Bilinearität liefert aber Faktoren z^2 statt $\bar{z}z$. Im Falle der L^2 -Normen haben wir bereits $\bar{z}z$ gebildet. Können wir solche Faktoren aus einem Ausdruck mit zwei Faktoren herleiten? Ja, als $\bar{z}w$. Aber so etwas ist dann nicht mehr ganz bilinear.

(3.1.2) Wir definieren neu - und das ist die entscheidende Idee:

Definition: Sei V Vektorraum über \mathbb{C} . Eine Abbildung $S:V \times V \rightarrow \mathbb{C}$	
heißt Sesquilinearform auf V , falls gilt:	
$S(x+y,w) = S(x,w) + S(y,w)$	$S(\alpha x, w) = \bar{\alpha} S(x, w)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}, x, y, w \in V$
$S(x, v+w) = S(x, v) + S(x, w)$	$S(x, \alpha y) = \alpha S(x, y)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}, x, v, w \in V$

Das ist bilinear bis auf das $\bar{\alpha}$ der zweiten Bedingung. Daher auch der Name. Statt zweilinear bedeutet er "anderthalbilinear".

(3.1.3) Also: Zieht man aus dem linken Vektorfaktor ein Skalar heraus, so ist eine zusätzliche komplexe Konjugation anzubringen. Herausziehen von $2+3i$ gibt den Außenfaktor $2-3i$.

(3.1.4) Sesquilinear und positiv definit sind vereinbar, da $\bar{z}z \geq 0$ gilt. Obige Rechnung liefert für $x \in V$ jetzt $S(ix,ix) = (-i)S(x,x) = iS(x,x) > 0$ wie gewünscht. Mit x hat auch ix positives Quadrat. Für voneinander verschiedene Vektorfaktoren können die Werte der Form komplex sein. $S(-ix,x) = iS(x,x)$ oder auch $S(-ix,ix) = -S(x,x)$.

(3.1.5) Damit ist es möglich, das Axiomensystem auf den komplexen Fall zu übertragen, wobei wir auch noch symmetrisch so abändern müssen, dass Verträglichkeit mit sesquilinear entsteht.

Definition: Sei V Vektorraum über \mathbb{C} mit der folgenden zusätzlichen Struktur:

(U1) Auf V ist eine Sesquilinearform $S:V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ vorgegeben.

(U2) S erfüllt $S(x, y) = \overline{S(y, x)}$ für alle $x, y \in V$. Man sagt S sei *hermitesch*.

(U3) S erfüllt $S(x,x) > 0$ für alle $x \in V$ mit $x \neq 0$. D.h. S ist positiv definit

Dann sagt man, V sei ein *unitärer Raum*. Oder auch *ein Vektorraum mit unitärer Geometrie*.

(3.1.6) Kurz: Ein unitärer Raum ist ein komplexer Vektorraum mit einer hermiteschen positiv definiten Sesquilinearform.

10.3.2 Beispiele unitärer Räume

(3.2.1) Wie steht es mit Beispielen? Die endlichdimensionalen Fälle werden durch die Räume \mathbb{C}^n erfaßt. Für $\vec{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $\vec{y}=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ mit $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n = \sum_i \bar{x}_i y_i.$$

Hierdurch wird offensichtlich eine unitäre Geometrie auf \mathbb{C}^n erklärt, die wir auch *die kanonische Geometrie* dieses Raumes nennen. Natürlich kann man auf \mathbb{C}^n noch weitere unitäre Geometrien einführen. Beachten Sie, dass $S(\vec{x}, \vec{x}) = \sum |x_i|^2$ zur bereits eingeführten L^2 -Norm auf diesen Räumen führt.

(3.2.2) Noch einige nicht endlichdimensionale Fälle. Sei \mathcal{P} jetzt der Raum aller **komplexwertigen** Polynome $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Hat man dazu ein reelles Skalarprodukt des Integraltyps, so muss man einfach beim linken Polynomfaktor eine komplexe Konjugation anbringen. Nehmen wir das Skalarprodukt, das zu der Legendrepolyomen führte, als Beispiel:

$$L(p, q) = \int_{-1}^1 dt \overline{p(t)} q(t)$$

$$\text{etwa } L(h_0 + ih_1, (1+i)h_2) = (1+i)L(h_0, h_2) - i(1+i)L(h_1, h_2)$$

Damit wird \mathcal{P} unitärer Raum!

□ Bilden die Legendrepolyome auch für diesen Raum eine Orthogonalbasis?

(3.2.3) Sei schließlich \mathcal{T}_T der Raum aller trigonometrischen Polynome zur Periode T:

$$\mathcal{T}_T = \left\{ p = \sum \alpha_n e_n \mid \alpha_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}, \text{ nur für endlich viele } n \text{ ist } \alpha_n \neq 0 \right\}$$

$$e_n = \left(\mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t}, \mathbb{C} \right) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad T > 0.$$

(3.2.4) Ein typisches Element des Raumes sieht so aus :

$$\sqrt{T}p(t) = (2-i)e^{-2i\omega t} + 5i + 3e^{4i\omega t} \quad \text{also } \alpha_{-2} = 2-i, \quad \alpha_0 = 5i \quad \alpha_4 = 3$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt lauter Sinus- und Cosinusbeiträge. \mathcal{T}_T bildet offensichtlich einen unendlichdimensionalen komplexen Vektorraum.

(3.2.6) Die folgende wichtige Konstruktion (*Fourierprodukt*) macht daraus einen unitären Raum, wie man unmittelbar sieht:

$$(p, q) \mapsto F(p, q) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \overline{p(t)} q(t)$$

Beachten Sie: Der Integrationsbereich geht genau über eine Periode der Funktionen.

Auch hier sind es wieder die unendlichen Linearkombinationen die eigentlich interessant sind. Wir werden hierzu in Kap.10.3.6 eine Reihe wichtiger Formeln zusammenstellen.

10.3.3 Die elementaren Eigenschaften unitärer Räume

(3.3.1) Jetzt muß man alle im euklidische Fall besprochenen Punkte durchgehen. Und der Leser sollte das systematisch tun. Dabei hat man sowohl auf Übereinstimmung mit als auch auf Abweichungen gegenüber dem euklidischen Fall zu achten. Wir besprechen hier hauptsächlich *Abweichungen*. Beim Durcharbeiten sollten Sie immer die entsprechende Formel für den euklidischen Fall aufsuchen.

(3.3.2) Die Fundamentalidentität enthält eine zusätzliche komplexe Konjugation.

$$\begin{array}{l} S(x, y) = \sum \bar{x}_i S_{ik}^K y_k \\ S(x, y) = \dagger \bar{x}^K S^K \bar{y}^K \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{wobei } S_{ik}^K = S(e_i, e_k) \quad e \text{ zu } K \text{ gehörige Basis} \\ \text{Vereinbarung: } \dagger \bar{x}^K = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \end{array}$$

(Matrixform)

(3.3.3) Die hier eingeführte Operation \dagger wandelt nicht nur Zeilenvektoren in Spaltenvektoren um und umgekehrt, sondern bewirkt zusätzlich eine komplexe Konjugation aller Komponenten. Analog zum reellen Fall sollte \dagger die Beziehung zwischen Vektoren und Dualraumelementen in der Matrixdarstellung regeln.

(3.3.4) Die Matrix $S^K = (S_{ik}^K)$ ist erneut nicht beliebig. Damit die Hermitizität erfüllt ist, muss offenbar $S_{ik} = \overline{S_{ki}}$ für alle Komponenten (anstelle der Symmetrie $S_{ik} = S_{ki}$ im euklidischen Fall) gelten. Wir führen die \dagger -Operation jetzt generell für Matrizen ein:

$$\text{Für } M = (M_{ik}) \text{ sei } M^\dagger = (\dagger M_{ik}) = (\overline{M_{ki}}) \quad \text{Man nennt } M^\dagger \text{ die zu } M \text{ adjungierte Matrix.}$$

(3.3.5) Dann gilt für die beschreibende Matrix eines unitären Skalarproduktes stets $S=S^\dagger$. Die beschreibende Matrix ist notwendig gleich ihrer Adjungierten. Man sagt auch, sie sei *selbstadjungiert*. Diese Eigenschaft verallgemeinert symmetrisch des euklidischen Falles.

□ Welche -Beziehung besteht bei reellen Matrizen zwischen selbstadjungiert und symmetrisch.

(3.3.6) Natürlich ist es auch im unitären Fall nicht so, dass man durch Vorgabe einer selbstadjungierten Matrix automatisch ein unitäres Skalarprodukt erhält. Positiv definit muss noch nicht erfüllt sein und ist schwerer zu sichern.

□ Suchen Sie ein Beispiel.

(3.3.7) Alle weiteren Überlegungen zur *Fundamentalidentität*, zu *orthogonal* und zur *Norm* können übernommen werden.

(3.3.8) Erst bei der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gibt es eine wichtige Änderung. Man kann aus ihr nicht mehr die Ungleichung $-1 \leq C(x, y) \leq 1$ für die Korrelationsgröße herleiten. Denn $S(x, y)$ ist jetzt *komplexwertig*, so dass man nur noch $0 \leq |C(x, y)| \leq 1$ folgern kann. Die erste Form war aber für die Winkeleinführung entscheidend.

(3.3.9) Wir können aber folgern

$$\boxed{C(x, y) = e^{i\varphi} \cos \alpha \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}}.$$

D.h. zur Beschreibung der Korrelation bzw. der relativen geometrischen Lage zweier komplexer Geraden benötigen wir zwei reelle Parameter, von denen einer - α - dem reellen Winkel entspricht. Auf die geometrische Interpretation der beiden Größen gehen wir später noch etwas ein.

(3.3.10) Die Kürzungsregel ist unproblematisch. Bei der Zerlegungsformel muss man auf die **Reihenfolge der Faktoren** achten, da ja symmetrisch durch hermitesch ersetzt ist.

(3.3.11)b Folgende zwei REgeln sollte man einhalten, um auch im unitären Fall korrekte Formeln zu erhalten

- Rechtsvektorschreibweise verwenden
- Gleiche Vektoren sollten aneinander grenzen.

(3.3.12) Bei Beachtung dieser Regeln kann man die alte Formel übernehmen:

$$\vec{x} = \vec{y} \frac{S(\vec{y}, \vec{x})}{S(\vec{y}, \vec{y})} + \left[\vec{x} - \vec{y} \frac{S(\vec{y}, \vec{x})}{S(\vec{y}, \vec{y})} \right].$$

Also $\vec{y}S(\vec{y}, \vec{x})$, nicht aber $\vec{y}S(\vec{x}, \vec{y}) = s(\vec{x}, \vec{y})\vec{y} = \overline{\vec{y}S(\vec{y}, \vec{x})}$. Das enthält eine zusätzliche komplexe Konjugation. Also $\vec{y}S(\vec{y}, \vec{x})$, nicht aber $\vec{y}S(\vec{x}, \vec{y}) = S(\vec{x}, \vec{y})\vec{y} = \vec{y}S(\vec{y}, \vec{x})$. Hier ist eine zusätzliche komplexe Konjugation erforderlich.

(3.3.13) Beim Erhard-Schmidtschen Verfahren muß man diese Regeln beachten. Dann können alle Aussagen übernommen werden. Insbesondere gibt es auch im unitären Fall stets Orthonormalbasen.

(3.3.14) Die oben für den Raum der trigonometrischen Polynome eingeführte Basis e bildet eine Orthonormalbasis. Insbesondere sichert der Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{T}}$ die Normierung. $F(e_{n\omega}, e_{m\omega}) = \delta_{nm}$.

(3.3.15) Und schließlich: Jeder Teilraum U der Dimension k besitzt eine eindeutige Normale U^\perp , für die $V = U \oplus U^\perp$ gilt. Ist V endlichdimensional, so gilt $\dim U^\perp = (n-k)$. Die zugehörige Zerlegung eines Vektors in parallele und senkrechte Komponente kann über geeignete Orthonormalbasen realisiert werden.

(3.3.16) Eine solche Zerlegung wiederum liefert den kürzesten Abstand eines Punktes zum Teilraum U , so dass man erneut eine Lösung eines globalen Approximationsproblems erhält.

10.3.4 Die Isometrien unitärer Räume

(3.4.1) Die Isometriedefinition kann vom euklidischen Fall übernommen werden. Die Gesamtheit aller Isometrien bildet wieder eine Gruppe, die *unitäre Gruppe des Vektorraumes*. Wir bezeichnen Sie mit $U(V)$. Eigentlich wäre eine Schreibweise wie $U_S(V)$ erforderlich, um die Abhängigkeit vom Skalarprodukt S anzudeuten. $SU(V)$ bedeutet, dass zusätzlich die Determinante gleich Eins sein soll. (*Spezielle unitäre Gruppe von V*). Das ergibt eine Untergruppe von $U(V)$. Für $\dim V = 2$ kann man diese Gruppen in Matrixform relativ leicht konstruieren.

(3.4.2) Wie steht es mit dem Hinüberwälzen von Homomorphismen im Skalarprodukt aus? Es ist klar, dass eine zusätzliche komplexe Konjugation auftritt. Wir bezeichnen die Operation des Hinüberwälzens jetzt durch das Sgmbol \dagger , die Adjunktion.

(3.4.3) Es müßte also gelten:

$$S(x, \lambda(y)) = S(\lambda^\dagger x, y) \quad \text{und} \quad S(\lambda(x), y) = S(x, \lambda^\dagger(y))$$

Die eine dieser Beziehungen folgt aus der jeweils anderen über hermitesch. Es genügt also A^\dagger derart zu konstruieren, dass die zweite Bedingung erfüllt ist.

(3.4.4) Man findet mit der in (3.3.4) eingeführten Matrixadjunktion \dagger und der definierenden Gleichung $\lambda^\dagger(e_k) = \sum e_r X_{rk}$ für die gesuchte beschreibende Matrix X von λ^\dagger :

$$S(y, \lambda^\dagger(x)) = \dagger \bar{y}^K S X \bar{x}^K \quad \text{und} \quad S(\lambda(y), x) = \dagger \bar{y}^K M^\dagger S \bar{x}^K.$$

Kürzungsregel und Auflösen geben $X = S^{-1} M^\dagger S$. Also $M_{\lambda^\dagger} = S^{-1} M^\dagger S$.

(3.4.5) Das ist die gewünschte Formel. Sie drückt die beschreibende Matrix von λ^\dagger durch die beschreibende Matrix M von λ aus. Man überzeugt sich leicht, dass das so definierte $\lambda^\dagger \in \text{Hom}(V, V)$ tatsächlich die gewünschten Eigenschaften hat.

(3.4.6) Beachten Sie: **Liegt eine Orthonormalbasis vor**, so ist $S=1_V$ und mithin **wird λ^\dagger im Fall unitärer Geometrien einfach durch die adjungierte Matrix** beschrieben.

Fassen wir zusammen: Auch im unitären Skalarprodukt kann man Homomorphismen stets von einer Seite auf die andere hinüberwälzen. Man muss dabei nur den Operator durch seinen adjungierten ersetzen. Dessen Matrixdarstellung bezüglich einer Basis wird durch obige Formel (3.4.4) gegeben.

(3.4.7) Nun können wir die **Isometrien des unitären Falles auf der Abbildungsebene charakterisieren**. Man erhält völlig analog zum euklidischen Fall:

Ein Vektorraumisomorphismus $\lambda: V \rightarrow V$ des unitären Raumes V ist genau dann Isometrie, wenn $\lambda^\dagger = \lambda^{-1}$ gilt. Oder gleichwertig:

$$\lambda \circ \lambda^\dagger = \lambda^\dagger \circ \lambda = id_V$$

(3.4.8) Bildet man von der letzten Gleichung die Determinante, so folgt wegen

$$\det M^\dagger = \det {}^t \bar{M} = \det \bar{M} = \overline{\det M} \quad \text{sofort} \quad \det \lambda \cdot \overline{\det \lambda} = 1.$$

Also

Ist λ eine unitäre Isometrie, also $\lambda \circ \lambda^\dagger = id_V$, dann ist $\det \lambda$ eine komplexe Zahl vom Betrag 1. Oder $\det \lambda = e^{i\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3.4.9) Und schließlich

Ist V endlichdimensionaler unitärer Vektorraum über \mathbb{C} mit $\dim V = n$, dann ist V isomorph zum kanonischen C^n aus (3.2.1).

10.3.5 Der komplexe Winkel

(3.5.1) Wir haben gesehen, dass im unitären Fall die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung nicht auf die übliche Winkelformel führt, sondern dass jetzt zwei reelle Parameter vom Winkeltyp auftreten:

$$S(x, y) = \|x\| \|y\| C(x, y) = \|x\| \|y\| e^{i\varphi} \cos \alpha$$

Beachten Sie : Ersetzt man y durch $e^{i\gamma} y$, so bleibt α fest, wogegen φ zu $\varphi - \gamma$ wird.

Phasenfaktoren beeinflussen φ .

(3.5.2) Welche geometrische Bedeutung haben φ und α ? zunächst zerlegen wir x in die zu y parallele und senkrechte Komponente. $x = \pi + \sigma$. Wir bilden also das Analogon zu einem rechtwinkligen Dreieck. Für dessen Seitenlängen gilt - wie wir wissen - der Satz des Pythagoras. Wegen $\pi = y \frac{S(y,x)}{S(y,y)}$ folgt aber $\|\pi\| = \|x\| \cos \alpha$. Die φ -Abhängigkeit fällt heraus. Entsprechend folgt $\|\sigma\| = \|x\| \sin \alpha$. Somit hat der Winkel α die folgende vertraute Bedeutung: $\sin(\alpha)$ gibt an, um welche Entfernung man sich senkrecht zu der von y erzeugten Geraden bewegen muss, um auf die von x erzeugte Gerade zu treffen. α ist ein Maß für den senkrechten Abstand der Geradenpunkte wie es der euklidische Winkel im Reellen auch ist!

□ Was besagt die hergeleitete Gleichung für $\cos \alpha$ entsprechend?

(3.5.3) Was bedeutet dann φ ? Aus obiger Gleichung folgt, da S hermitesch ist:

$$S(x+y) + S(y+x) = 2 \cos \varphi \cos \alpha \quad \text{und} \quad S(x,y) - S(y,x) = 2i \sin \varphi \cos \alpha$$

Die 2. Gleichung legt die folgende Interpretation nahe: Wähle x und y fest. Diese beiden Vektoren spannen eine komplexe Ebene auf. Wir können aber auch ihre rein reellen Linearkombinationen $E = \{x\alpha + y\beta, \beta \in \mathbb{R}\}$ bilden. Das gibt eine **reelle Ebene** (=zweidimensionaler Vektorraum über \mathbb{R}). Wir fragen: **Wann liefert die Einschränkung des unitären Skalarproduktes auf E uns eine euklidische Ebene?** D.h. wann kann man geometrisch nicht erkennen, dass man Teil einer komplexen Welt ist? Gehen wir die Axiome durch: Für reelle Skalare ist sesqui- gleich bilinear. Positiv definit gilt immer. Bleibt symmetrisch. Und da zeigt obige Gleichung: Das Skalarprodukt S genau dann symmetrisch, wenn entweder $\cos(\alpha) = 0$ ist, die beiden Vektoren also orthogonal sind und dann ist φ unbestimmt oder wenn $\sin(\varphi) = 0$ ist. D.h. φ ist ein Maß dafür, wie stark in E die Abweichung vom euklidischen Verhalten ist.

(3.5.4) Diese Interpretation können wir uns mit Hilfe der Gleichung für $S(x,y) + S(y,x)$ weiter verdeutlichen: Dazu betrachten wir das von x und y erzeugte (reelle) Dreieck. Das i.a. nicht rechtwinklig ist. Wir rechnen wie bei der Herleitung des Cosinussatzes.

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= S(x-y, x-y) = S(x,x) + S(y,y) - S(x,y) - S(y,x) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos \alpha \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

Das ist wegen des Faktors $\cos \varphi$ für $\varphi \neq 0$ nicht der übliche Cosinussatz. In E herrscht für $\varphi \neq 0$ nicht die übliche reelle Geometrie, die Länge der dem (durch das Lot bestimmten) Winkel gegenüberliegenden Seite etwa hat einen anderen Wert als im Euklidischen.

(3.5.5) **Fassen wir zusammen:** α bestimmt die Entfernungen für rechtwinklige Zerlegungen ebenso wie es der reelle Winkel tut. φ beschreibt die Stärke der Abweichung von der euklidischen Geometrie in der durch Einschränkung erzeugten reellen Ebene.

10.3.6 Formeln zur Fouriertransformation

(3.6.1) \mathcal{F}_T sei wieder der Raum der trigonometrischen Polynome zur Grundperiode T . Weiter sei $\bar{\mathcal{F}}_T$ ein geeigneter (später genauer zu bestimmender) Raum periodischer Funktionen, die sich geeignet - etwa über eine Norm - durch trigonometrische Polynome aus \mathcal{F}_T approximieren lassen. Oder anders ausgedrückt: Die sich durch ihre Fourierreihe darstellen lassen. Meist wird man für die in (3.2.3) gegebene Darstellung $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$ verlangen.

(3.6.2) Wir wollen den zugehörigen Formelapparat zusammenstellen, ohne - wie gesagt - genauer auf die zugehörigen Konvergenzprobleme einzugehen.

(3.6.3) Als Grundintervall wählen wir $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Achtung: Manche Texte nehmen $[0, T]$, dann ändern sich einige Formeln. Auf \mathcal{F}_T verwenden wir das (offensichtlich) unitäre Skalarprodukt

$$(f, g) \mapsto F(f, g) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \overline{f(t)} g(t)$$

Dieses Skalarprodukt sollte auch für einen Kernbereich von $\bar{\mathcal{F}}_T$ existieren, d.h. die entsprechenden Integrale sollten bildbar sein.

(3.6.4) Die Konstruktion liefert ein unitäres Skalarprodukt, wie man leicht verifiziert. Und man kann eine gut handhabbare Orthonormalbasis einführen:

$$t \mapsto e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die e_n sind periodische komplexwertige Funktionen mit der gewünschten Periode T . **Beachten Sie**, dass n nicht wie sonst bei Folgen üblich aus \mathbb{N} ist, sondern ganz \mathbb{Z} durchläuft. Man verifiziert leicht, dass $F(e_n, e_m) = \delta_{nm}$ gilt. D.h. es liegt bezüglich F eine Orthonormalbasis vor.

(3.6.5) Die endlichen Linearkombinationen dieser Basisvektoren sind die trigonometrischen Polynome. Also (nach Ergänzung eventueller Nullen und N gleich *Grad* des trigonometrischen Polynoms):

$$p_N(t) = \sum_{n=-N}^N e_n(t) F(e_n, p) = \sum_{n=-N}^N e^{in\omega t} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} ds e^{-in\omega s} p(s)$$

Die beiden Wurzeln sind zu $\frac{1}{T}$ zusammengefaßt. Beachten Sie das negative Zeichen in $\exp(-in\omega s)$, das durch die komplexe Konjugation im Skalarprodukt entsteht.

$F(p, e_n)$ wäre hier nicht korrekt, man benötigt die angegebene Reihenfolge.

(3.6.6) Wir setzen

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} ds e^{-in\omega s} p(s) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

$$p_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{in\omega t} \alpha_n$$

(3.6.7) Jetzt können wir noch in Real- und Imaginärteil zerlegen und erhalten so die sin-cos-Darstellung von p_N :

$$\begin{aligned} p_N(t) &= \beta_0 + \sum_{n=1}^N \beta_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^N \gamma_n \sin(n\omega t) \\ \text{mit } \beta_0 &= \alpha_0 & \beta_n &= \alpha_n + \alpha_{-n} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} ds \cos(n\omega s) p(s) \\ & & \gamma_n &= i(\alpha_n - \alpha_{-n}) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} ds \sin(n\omega s) p(s) \end{aligned}$$

- Verifizieren Sie die Formeln für β_n und γ_n
- Welche weiteren Vereinfachungen ergeben sich, wenn p gerade oder ungerade ist?
- Was geschieht, wenn man den Entwicklungsterm $\sum_{n=-N}^N e^{int} \alpha_n$ über $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ hinaus fortsetzt?
- Wie ändern sich die Formeln, wenn man die Funktionen nicht im Bereich $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$, sondern im Bereich $0 \leq t \leq T$ betrachtet?

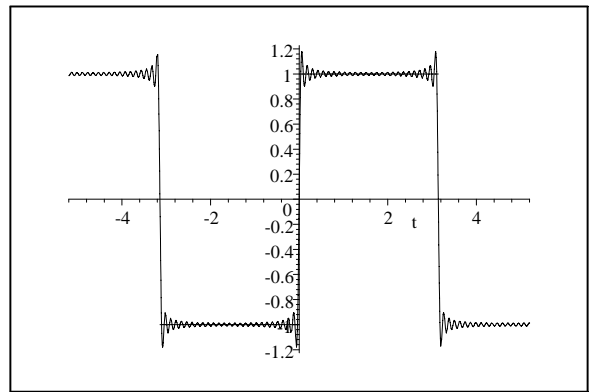
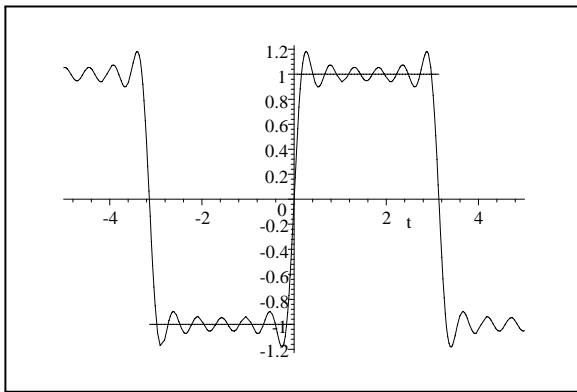
Es verbleiben zwei Probleme, die wir nur bewußt machen wollen, nicht aber zu beantworten versuchen:

1) Gegeben eine T -periodische Funktion p . Bestimme über (3.6.6) oder (3.6.7) die Koeffizienten für alle n und bilde die zugehörige Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int}$. **Kann man aus dieser Reihe f rekonstruieren?** Etwa über die Norm des Skalarproduktes? oder erhält man zumindest eine nahe verwandte Funktion, die höchstens in Unstetigkeitsstellen von der Ausgangsfunktion abweicht?

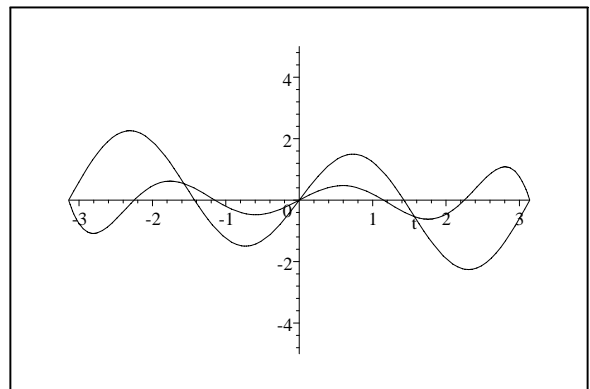
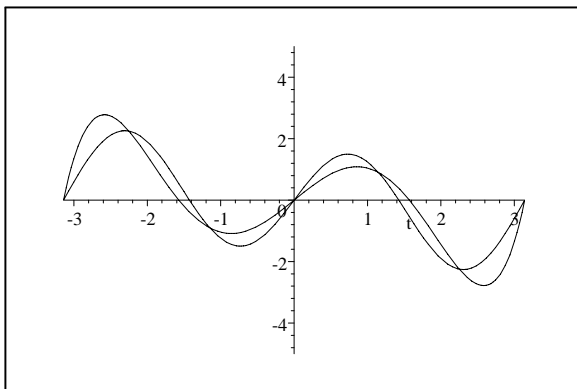
2) Wähle eine Folge $n \mapsto \alpha_n$ komplexer Zahlen für $n \in \mathbb{Z}$. Bilde damit die Fourierreihe. Definiert das eine periodische Funktion f für die man dann wieder das in 1) beschriebene Programm durchführen kann? Dieselbe Idee haben wir in Kap. 6.4.4 für die Potenzreihen benutzt.

Diese Fragen lassen sich zunächst für einen Kernbereich positiv beantworten, den wir später einführen werden. Als Einschränkung bleibt das erwähnte Problem mit den Unstetigkeitsstellen. Überdies ist es durch vielfältige Modifikation der benutzten Konvergenz (für die Funktionsfolge) möglich, den Anwendungsbereich auf viele weitere periodische Funktionen auszudehnen.

Beispiel: Sei $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ -1 & \text{für } t < 0 \end{cases}$ Dazu $T=2\pi$ und $\omega = 1$. Wir entwickeln dazu die Fourierdarstellung dieser bei 0 unstetigen Funktion. Klar ist $\beta_n = 0$ und $\gamma_n = \frac{4}{T} \int_0^\pi dt 1 \sin nt = \frac{4}{\pi n} [-\cos(nt)]_0^\pi = \frac{4}{\pi n} [1 - (-1)^n]$. Das Bild zeigt links die entstehende Approximation bis $2n+1=11$ und rechts bis $2n+1=51$. Gleichmäßige Konvergenz ist offensichtlich nicht zu erwarten. .



- Was geschieht hier mit der Approximation bei $t=0$. Beachten Sie, für diesen Punkt ist das ursprüngliche f nicht erklärt. Aber die Approximationen konvergieren in diesem Punkt.
- Es sei f eine ungerade Funktion mit 5 etwa gleichmäßig verteilten Nullstellen. Sagen wir $f(t)=t(t^2 - \pi^2)(4t^2 - \pi^2)$ oder $g(t)=\sin(\sin 2t)$ und erneut $-\pi \leq t \leq \pi$. Welche der γ_n werden besonders groß werden, also in der Entwicklung besonders stark beitragen? Bestimmen Sie die ersten Koeffizienten auch mit einem Computeralgebrasystem numerisch und diskutieren Sie die Ergebnisse



:

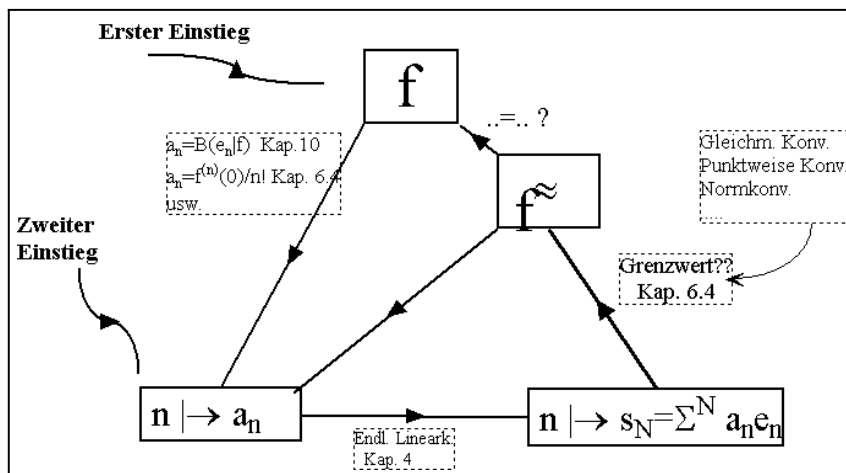
10.3.7 Übersicht

(3.7.1) Wie sehen die Probleme aus, die im Zusammenhang mit einer Orthonormalbasis für Funktionsräume auftreten? Wir geben eine Übersicht, die dazu dienen soll, einerseits in Anwendungen entstehende Probleme an die Mathematik anzukoppeln und andererseits einschlägige mathematische Fragestellungen und Resultate sinnvoll zu nutzen.

(3.7.2) Wir starten mit einem Grundraum \mathcal{G} von Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ bzw. $D \subset \mathbb{C}$. Für diesen Grundraum soll es eine Orthonormalbasis bezüglich eines geeigneten Skalarproduktes B in Form einer Folge $n \mapsto e_n$ geben. D.h. alle Elemente aus \mathcal{G} lassen sich als **endliche Linearkombination** der Basisvektoren darstellen. Beispiel: Alle Polynome sind als endliche Linearkombination der Legendrepolynome darstellbar.

(3.7.3) Was geschieht, wenn man von endlichen Linearkombinationen zu unendlichen übergeht? Es entsteht ein Konvergenzproblem. Hat die Folge der Partialsummen in einem geeigneten Sinn einen Grenzwert? Wir knüpfen an die in Kap. 6.4.4 im Zusammenhang mit den Potenzreihen geführte Diskussion an.

Das nachfolgende Schema gibt einen Überblick über die Zusammenhänge.



(3.4.7) Zunächst startet man mit einer in D definierten Funktion f . Diese sollte gewisse Glattheitsbedingungen erfüllen, so dass zugehörige Skalarprodukte existieren. Jedenfalls soll $\alpha_n = B(e_n, f)$ bildbar sein. Das ergibt eine Folge $n \mapsto \alpha_n$ von Körperelementen, also die Folge der Komponenten von f bezüglich e . Oder wenn man will, einen unendlichdimensionalen Koordinatenvektor \vec{f}^K .

Im Falle der Taylorreihe werden die α_n durch die Formel $\alpha_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ gegeben.

(3.7.5) Der zweite alternative Einstieg besteht darin, diese Folge einfach vorzugeben.

(3.7.6) Jetzt bilden wir die endlichen Linearkombinationen $s_N = e_1 \alpha_1 + e_2 \alpha_2 + \dots + e_N \alpha_N$ vom Partialsummentyp. D.h. ohne Lücken in der Indexfolge. Dann erhält man durch $n \mapsto s_N$ eine Folge von Vektoren im Grundraum \mathcal{G} . Das ist Vektorrechnung aus Kap.4.

(3.7.7) Damit sind wir beim eigentlichen Problem angelangt: **Wie verhält sich die Partialsummenfolge für N nach Unendlich?** Für die Behandlung der Frage haben wir mehrere Typen von Konvergenz zur Auswahl. Wir nennen drei besonders wichtige:

- Konvergenz im Sinne der vom Skalarprodukt erzeugten Norm,
- punktweise Konvergenz,
- gleichmäßige Konvergenz.

In Kap. 14 werden wir noch weitere Möglichkeiten besprechen. Die Behandlung dieser Frage ist der schwierige Punkt, eine Art jeweils zu bezwingender Steilwand.

(3.7.8) Angenommen die Folge $n \mapsto s_N$ konvergiert gegen einen Grenzwert f^\approx . Dann entsteht sofort die folgende Frage: **Wie hängen f und f^\approx zusammen.** Im Idealfall werden die beiden Funktionen übereinstimmen, ansonsten können mehr oder weniger komplizierte Beziehungen zwischen den beiden bestehen.

Und was ist, wenn man den Rundweg mit f^\approx startet? erhält man dieselben Komponenten α_n ? Und am Ende erneut Konvergenz gegen f^\approx ?

□ Diskutieren Sie den Rundweg für den Fall der Taylorentwicklung. Was ist abzuändern? Welche allgemeinen Resultate sind dazu in Kap.6.4 hergeleitet?

(3.7.9) Und das ist natürlich generell der Zweck des gegebenen Schemas: Einen in die Lage zu versetzen, einschlägige Sätze der Analysis richtig zu interpretieren und einzuordnen. Und einen in die Lage zu versetzen, Fragen des Typs "Was leistet dieser Satz" sinnvoll zu beantworten.

(3.7.10) Viele zugehörige mathematische Sätze haben von vornherein eine Gestalt, die eine Einordnung in das Schema nahelegt. Einige derartige Formen:

- Wenn die Folge (a) die Eigenschaft E1 hat, dann konvergieren die Partialsummen (s) im Sinne von ...gegen eine Funktion f^\approx , die folgende Eigenschaften besitzt:.....
- Wenn f die Eigenschaft E2 hat, dann gilt für das zugehörige (a) ...und (s) konvergiert im Sinne von

(3.7.11) Ein Beispiel eines Satzes, der auf den Legendre- und auf den Fourierfall anwendbar ist, liefert der in Kap. 6.4.4 bewiesene Weierstraßsche Satz über die Konvergenz von Funktionsfolgen.

Wir nehmen folgende Rollenzuweisung vor: $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Weiter sei $\|e_n\|_\infty = \sup_t |e_n(t)| \leq 1$. Das ist im Fourierfall erfüllt. Und im Legendrefall für die unnormierten P_n .

Nun wählen wir $f_n = e_n \alpha_n$. Es folgt $|f_n(t)| \leq |\alpha_n|$. Damit können wir die M_n des Satzes gleich $|\alpha_n|$ wählen. Wir benötigen (als Voraussetzung des Satzes): $\sum |\alpha_n| < \infty$ (ist konvergent). Falls das der Fall ist, gelten die Resultate des Satzes, d.h. $\sum e_n \alpha_n$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion. Und sind die e_n in D stetig, dann ist auch diese Grenzfunktion erneut stetig.

Folgerung: Sei $n \mapsto \alpha_n$ Zahlfolge, für die $\sum |\alpha_n|$ konvergiert. Es seien P_n die Legendrepolynome und $e_{n\omega}$ die Fourierbasis. **Dann** konvergieren $\sum \alpha_n P_n(x)$ und $\sum \alpha_n e_{n\omega}(t)$ in ihren jeweiligen Konvergenzbereichen gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion.

□ Als Beispiel wählen wir $a_0 = 0$ und $a_n = \frac{1}{n^2}$ für $n > 0$. Hierfür ist die gestellte Bedingung erfüllt. Testen Sie das Verhalten mit einem Computeralgebrasytem.

(3.7.12) Rasche Annäherung der Koeffizienten an Null bedeutet Konvergenz. D.h. es ist zu erwarten, dass die Probleme schwieriger werden, wenn die Koeffizienten nicht so rasch nach Null gehen. Wir nennen vier Orientierungspunkte zur Stärke des gegen Null gehens der Folgenglieder, die alle mit qualitativ neuen Eigenschaften der des Grenzprozesses verbunden sind:

- $\sum |a_n|$ ist konvergent
- $\sum |a_n|^2$ ist konvergent
- a_n ist Nullfolge
- $|a_n|$ ist beschränkt.

Man sollte in dieser Hierarchie meist so weit wie möglich nach oben gehen. Die mathematischen Resultate werden typischerweise schwieriger und komplizierter, je weiter man in dieser Hierarchie nach unten kommt.

□ Denken Sie sich zu jedem dieser Typen ein Beispiel aus und und testen Sie das Verhalten der zugehörigen Fourierreihe mit einem Computeralgebrasytem.

10.4 Orthogonale Geometrien.

10.4.0 Vorbemerkung

Bisher haben wir *positiv definit* als unabdingbar angesehen. Für Längen- und Winkelmessungen war diese Eigenschaft entscheidend. Was ist, wenn man positiv definit nicht verlangt? Es zeigt sich, dass man dann immer noch mit etwas mehr Aufwand eine reichhaltige geometrische Struktur vorfindet. Allerdings gibt es zu einer festen Dimension (>1) dann mehrere nicht mehr isomorphe Geometrien. Für viele - in der Regel über quadratische Formen laufende - Anwendungen (etwa Relativitätstheorie, Taylorentwicklung zweiter Ordnung) werden die Resultate zu den orthogonalen Geometrien benötigt. Meist ist dabei positiv definit nicht erfüllt.

Also: **Was bleibt an Geometrie wenn man positiv definit nicht fordert?**

10.4.1 Grundbegriffe

(4.1.1) In diesem Teil betrachten wir nur endlichdimensionale reelle Vektorräume. Also stets $\dim V = n$ und $K = \mathbb{R}$.

(4.1.2) Definition:

Sei V Vektorraum über \mathbb{R} . Auf V sei eine symmetrische Bilinearform $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.
 Dann heißt V *orthogonaler Raum* oder *Raum mit orthogonaler Geometrie*.

Statt $B(x,y)$ werden wir vielfach einfach $x \cdot y$ oder xy schreiben. Die Orthogonalität ist wie üblich definiert: $x \perp y \iff xy = 0$. Die Symmetrie bewirkt $x \perp y \implies y \perp x$. Die beiden anderen in (1.1.14) beschriebenen Phänomene dagegen sind noch möglich.

(4.1.3) Wichtig wird der Begriff des **orthogonalen Komplementes**. Zur Erinnerung:

Sei $M \subset V$ Teilmenge. Dann ist $M^\perp = \{y \mid y \in V, xy = 0 \text{ für alle } x \in M\}$

Die Bilinearität des Skalarproduktes bewirkt in der üblichen Weise (vgl. Theorie der linearer Gleichungssysteme in Kap.5), dass M^\perp stets ein Teilraum ist. M und M^\perp liegen beide in V und man sollte sich vor Verwechslungen mit den Annihilatoren des Dualraumformalismus hüten: Der Annihilator ${}^\perp M$ ist Teilraum von V^* , nicht von V selbst.

(4.1.4) Zur Durchführung der benötigten Überlegungen benötigt man den folgenden ergänzenden Begriff:

Sei $U \subset V$ Teilraum von V . V orthogonaler Raum.
 definiere man
 Dann $\text{Rad} U = \{y \mid y \in U \text{ und } yx = 0 \text{ für alle } x \in U\} = U \cap U^\perp$
 $\text{Rad} U$ heißt *das Radikal von U*.

Das Radikal ist stets ein Teilraum von U und von V . Eigentlich muss es $\text{Rad}_B U$ heißen, um die Abhängigkeit vom Skalarprodukt anzudeuten.

(4.1.5) Jeder euklidische Raum ist erst recht orthogonal. (D.h. alle nachfolgenden Überlegungen gelten auch für euklidische Räume.) Im euklidischen Fall ist das Radikal stets trivial der Nullraum. Denn $x \in \text{Rad}(U)$ steht auf allen Vektoren aus U senkrecht, insbesondere auf sich selbst. Das ist - sofern positiv definit gilt - nur für $x=0$ möglich.

□ Sei U Teilraum von V . Welcher Unterschied besteht zwischen $\text{Rad}(U)$ und U^\perp ?

(4.1.6) Von besonderem Interesse ist $\text{Rad}(V) = V^\perp$. D.h. für U wird der triviale Teilraum V von V gewählt:

Der orthogonale Raum heißt *ausgeartet*, wenn $\text{Rad}(V) \neq \{0\}$ gilt.

□ Für \mathbb{R}^3 sei $R(\vec{x}, \vec{y}) = x_3 y_3$ für $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Das ergibt eine orthogonale Geometrie mit einem Radikal. Bestimmen Sie $\text{Rad}(\mathbb{R}^3)$.

(4.1.7) In einem ausgearteten Raum gibt es daher Vektoren $\neq 0$, die auf allen andere Vektoren senkrecht stehen! Diese Vektoren sind geometrisch vom Rest völlig entkoppelt und können unter dem geometrischen Aspekt fortgelassen werden. Das Fortlassen kann man entweder dadurch erreichen, dass man $V = \text{Rad}(V) \oplus U$ zerlegt und nur noch U betrachtet oder indem man zum Faktorraum $V/\text{Rad}(V)$ übergeht.

(4.1.8) **Uns interessieren die nicht ausgearteten Räume.** Also $\text{Rad}(V) = \{0\}$. Beachten Sie, dass V dann durchaus noch ausgeartete Teilräume haben kann. Ein Vektor eine solche Teilraums kommuniziert zwar nicht mit den Vektoren aus U , aber mit irgendwelchen anderen aus V .

10.4.2 Allgemeine Eigenschaften orthogonaler Geometrien

10.4.2a Basisdarstellung

(4.2.1) Bei Basisvorgabe haben wir die übliche Matrixbeschreibung von B. Dann sei B^K die B bezüglich der gewählten Basis beschreibende Matrix. Also $B_{ik}^K = B(e_i, e_k)$

(4.2.2) Es gilt folgendes Kriterium für nicht ausgeartet:

Satz: $\text{Rad}(V) = \{0\} \iff \det B^K \neq 0$ Zum Beweis wählen wir $x \in \text{Rad}(V)$. Also $B(x, y) = 0$ für alle $y \in V$.

Einsetzen der Basisdarstellungen gibt $\sum B_{rs}^K x_r y_s$ für alle y -tupel. Mit $y_s = \delta_{st}$ folgt $\sum B_{rt}^K x_r = 0$ für $t = 1, \dots, n$. Das ist eine lineare Abhängigkeit der Zeilen von B^K , so dass die Determinante verschwindet. Die Linearkombination ist genau dann nichttrivial, wenn man ein nichttriviales x aus $\text{Rad}(V)$ hat.

(4.2.3) Bei Basiswechsel $a_i^A = \sum a_k^N T_{ki}$ ergibt sich:

$$B^N = {}^t T^{-1} B^A T^{-1} \quad \text{oder} \quad B_{rs}^N = \sum {}^t T_{ri}^{-1} {}^t T_{sk}^{-1} B_{ik}^A$$

Damit folgt sofort $\det B^A = (\det T)^2 \cdot \det B^N$

(4.2.4) D.h. die Determinante ist **basisunabhängig** entweder Null oder ungleich Null. Und Null bedeutet ausgeartet. Im nichtausgearteten Fall ist die beschreibende Matrix daher immer invertierbar, was wir häufig verwenden werden. Ebenso ist klar, daß B^K nicht generell als beschreibende Matrix eines (für jede Basiswahl festen) Homomorphismus aufgefaßt werden sollte: Denn für einen solche ist die Determinante völlig basisunabhängig.

(4.2.5) Wie steht es mit der konstruktiven **Vorgabe** orthogonaler Geometrien? Man sieht:

Die Vorgabe einer symmetrischen Matrix B^K mit $\text{Rang} < n$ liefert uns über $B = \sum B_{rs}^K e_r^* \otimes e_s^*$ sofort ein Beispiel einer ausgearteten Geometrie. Ist der Rang n , so erhält man nicht ausgeartete Geometrien. Wie immer ist diese Konstruktion basisbezogen, liefert aber alle orthogonalen Geometrien.

10.4.2b Die Kürzungsregel

(4.2.6) Welchen Nutzen hat die Forderung nicht ausgeartet? Nun, positiv definit wurde benötigt, um die Kürzungsregel (2.2.3) zu beweisen. Und das können wir jetzt auch. Denn $ax=0$ für alle x heißt ja $a \in \text{Rad} V$!

Kürzungsregel **Sei** $\text{Rad} V = \{0\}$, also V nicht ausgeartet.
 Weiter sei $a \in V$ mit $ax=0$ für alle $x \in V$.
Dann ist $a=0$

(4.2.7) Natürlich kann man in V mit Hilfe des Skalarproduktes i.a. keine Norm mehr einführen, $x^2 = B(x, x) = 0$ ist auch für $x \neq 0$ möglich, sogar $x^2 < 0$. Folglich läßt sich auch die Cauchy - Schwarzsche Ungleichung nicht folgern. Die Korrelationsgröße $C(x, y)$ kann man (als u.U. komplexe Zahl) einführen, aber es läßt sich daraus kein Winkel konstruieren. $C(x, y)$ beschreibt (für $x, y \neq 0$) immer noch eine Beziehung zwischen den von den beteiligten Vektoren erzeugten Halbgeraden. Was bleibt überhaupt noch an geometrischer Struktur?

10.4.2c Die Identifikation des Dualraumes mit dem Grundraum

Der folgende Satz liefert einen ersten entscheidenden Sachverhalt: Die Vorgabe einer nicht ausgearteten Geometrie erlaubt es, den Dualraum kanonisch mit dem Grundraum zu identifizieren. D.h. man hat immer eine Möglichkeit, in eindeutiger geometrieabhängiger, aber basisunabhängiger Weise lineare Bedingungen durch Vektorpfeile im Konfigurationsraum darzustellen.

(4.2.8) **Der Identifikationssatz:**

Sei V nicht ausgearteter orthogonaler Raum.
Dann sind V und sein Dualraum V^* kanonisch isomorph. Der Isomorphismus wird gegeben durch $\iota = (V, \vec{x} \mapsto \iota_{\vec{x}}, V^*)$ mit $\iota_{\vec{x}} = (V, \vec{a} \mapsto \iota_{\vec{x}}(\vec{a}) = \langle \iota_{\vec{x}} | \vec{a} \rangle = B(\vec{x}, \vec{a}) \in \mathbb{R}$
 Ist \vec{a}_i Basis von V und a_i^* die zugehörige duale Basis, dann ergibt $\iota^{-1}(a_i^*)$ die zu \vec{a}_i reziproke Basis.

(4.2.9) Natürlich gilt dieser Sachverhalt **insbesondere für euklidische Geometrien** und ganz speziell für den V^3 .

(4.2.10) Die den Isomorphismus definierende Beziehung ist $\langle \iota_{\vec{x}} | \vec{a} \rangle = B(\vec{x}, \vec{a})$. Sie bestimmt mit Hilfe von B den Wert der Linearform $\iota_{\vec{x}}: V \rightarrow \mathbb{R}$ und macht den Beweis zur reinen Routine.

□ Sei V der euklidisch \mathbb{R}^3 der Spaltenvektoren. Zeigen Sie dass ι dann einfach die Transposition ist, dass also $\iota_{\vec{x}} = {}^t \vec{x}$ gilt.

Beachten Sie, dass der Satz u.a. besagt: ist λ irgendeine Linearform auf V , dann kann man ein $\vec{x} = \iota^{-1}(\lambda)$ finden, so dass λ gleich der Einschränkung des Skalarproduktes auf \vec{x} ist.

(4.2.11) Im orthogonalen Raum darf man daher V und V^* bei Bedarf miteinander identifizieren. Insbesondere soll von jetzt ab a^* immer die zu a gehörige reziproke Basis bedeuten. Also $a' = a^*$.

(4.2.12) Beachten Sie auch den folgenden Punkt: Zu einem gegebenen Teilraum U von V haben wir den Annihilator in V^* . Wir bezeichnen ihn jetzt mit $U' \subset V^*$. Seine Dimension ist $n-k$ wie wir aus Kap.5 wissen. $\iota^{-1}(U')$ ist Teilraum von V . Man zeigt sofort, daß dies gerade der in (4.1.3) eingeführte Raum U^\perp ist. Folglich hat U^\perp die Dimension $n-k$ in V , aber wir wissen noch nicht, ob beide Räume U und U^\perp zusammen ganz V aufspannen. Oder auch: Ergeben Teilraum und zugehörige Normale den gesamten Raum? (Daher ist die Bezeichnung orthogonales *Komplement* problematisch.) Diese wichtige Frage werden wir in (4.2.19-27) untersuchen.

□ Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit orthogonaler Geometrie gegeben durch $B^K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der kanonischen Basis. U sei die von \vec{e}_1 erzeugte Gerade. Zeigen Sie $\boxed{U = U^\perp = \text{Rad}U}$. Oder auch: U ist seine eigene Normale und $U + U^\perp = U \neq V$.

(4.2.13) Aus dem Satz folgt sofort die Verallgemeinerbarkeit einiger früherer Resultate: Die reziproke Basis existiert stets und die Vektorfamilie a ist genau dann linear unabhängig, wenn $\det(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_k) \neq 0$ gilt.

(4.2.14) **Wie hängen Ausgangsbasis und reziproke Basis zusammen?** Wie sieht die Transformationsmatrix aus? Wir setzen an: $\boxed{\vec{a}_i^* = \sum \vec{a}_k X_{ki}}$ mit gesuchter Matrix X . Nun gilt aber per Definition der reziproken Basis $\vec{a}_i^* \cdot \vec{a}_r = \delta_{ir}$. Einsetzen des Ansatzes gibt

$$\delta_{ir} = \sum (\vec{a}_k \cdot \vec{a}_r) X_{ki} = \sum g_{kr} X_{ki} \quad \text{mit} \quad g_{kr} = (\vec{a}_k \cdot \vec{a}_r) = B(\vec{a}_k, \vec{a}_r) = g_{rk}.$$

D.h. aber $X = g^{-1}$ wie im euklidischen Fall! Das ist ein bemerkenswertes Resultat. Die Matrix $g = g^K$, die die Bilinearform bezüglich der Basis a beschreibt, transformiert zugleich die reziproke Basis in die Ausgangsbasis.

(4.2.15) Damit verallgemeinert sich (2.2.19):

$$\boxed{a^* = a g^{-1} \quad \text{und} \quad a = a^* g}$$

(4.2.16) Überlegen wir uns ein einfaches Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$ mit kanonischer Basis. $g = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.

Damit folgt $g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Also $\vec{e}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2^* = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$. Denken Sie daran: Die Bildungen $\vec{e}_i^* \cdot \vec{e}_k$ sind nach der Identifikation nicht mehr als Matrixprodukt zu lesen, sondern als Skalarprodukt.

(4.2.17) Die Linearform e_i^* aus V^* wird in der Beispielgeometrie durch einen Vektor repräsentiert, der die Richtung der 2-Achse hat. Wählt man dagegen die euklidische Geometrie, so wird er durch \vec{e}_1 , repräsentiert, wie man es erwartet.

(4.2.18) Die übliche **naive** Identifikation von Linearformen mit Vektorpfeilen geschieht mittels ι nur im Falle der euklidische Geometrie. Bei anderen Wahl der Geometrie entspricht die jeweilige Identifikation nicht den naiven Erwartungen.

10.4.2d Das orthogonale Komplement eines nicht ausgearteten Teilraumes

(4.2.19) Jetzt kehren wir zur Analyse der Eigenschaften der orthogonalen Geometrie zurück. Und zwar betrachten wir die Bildung des orthogonalen Komplementes von Teilräumen.

(4.2.20) Im euklidischen Fall gilt -wie wir wissen- stets $V=U\oplus U^\perp$. Der gesamte Raum wird durch U in **eindeutiger** Weise direkt zerlegt. Das ist eine wichtige geometrische Eigenschaft, die in abstrakten Vektorräumen gerade fehlte.

(4.2.21) Wie sieht das jetzt im orthogonalen Fall aus? Was ist $U+U^\perp$? Sei also U Teilraum des nicht ausgearteten orthogonalen Raumes V und U^\perp das zugehörige orthogonale Komplement. Welche Dimension hat U^\perp ? Da U^\perp über ι isomorph zum Annihilator von U in V ist (vgl. (4.2.12)), zeigt unser altes Dualraumresultat:

$$\boxed{\dim U + \dim U^\perp = \dim V}$$

(4.2.22) Weiter: Was ist $U^{\perp\perp}$? Sicherlich ist $U \subset U^{\perp\perp}$. Mit dem Dimensionsargument ($\dim V$ endlich!) folgt

$$\boxed{U^{\perp\perp} = U.}$$

(4.2.23) Nun fragen wir nach $\text{Rad}(U) = U \cap U^\perp$. Denken Sie an den Dimensionssatz für Teilräume aus Kap.4.1. Also $\dim U + \dim U^\perp = \dim(U+U^\perp) + \dim(U \cap U^\perp) = \dim V$. Letzteres nach (4.2.21). Man sieht

$$\boxed{U+U^\perp = V \quad \text{genau dann, wenn} \quad \text{Rad}U = \{0\}.}$$

(4.2.24) Wegen $\text{Rad}U = U \cap U^\perp$ gilt überdies

$$\boxed{\text{Rad}U = \{0\} \quad \text{genau dann, wenn} \quad \text{Rad}U^\perp = \{0\}.}$$

(4.2.25) Das sind wichtige Resultate. Sie besagen:

Ist U ein nicht ausgearteter Teilraum, dann ist V die direkte Summe von U und U^\perp . U besitzt also ein orthogonales Komplement, eine verallgemeinerte Normale. Und U^\perp ist umgekehrt die Normale zu U .

Die folgende Definition vereinigt diese Eigenschaften (direkte Summe und paarweise senkrecht):

(4.2.26) Definition:

Seien U und W Teilräume von V mit $U \cap W = \{0\}$ und $u \cdot w = 0$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.
Dann schreiben wir $U \perp W$. Das ist die *orthogonale Summe* der beiden Teilräume.
 Die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Summanden ist klar.

(4.2.27) Mit dieser Definition formuliert sich das Ergebnis aus (4.2.23) wie folgt:

$$\boxed{\text{Sei } V \text{ nicht ausgearteter orthogonaler Raum. } U \text{ ein Teilraum. **Dann** ist } V \text{ genau dann orthogonale Summe von } U \text{ und } U^\perp, \text{ wenn } U \text{ nicht ausgeartet ist. Dann ist auch } U^\perp \text{ nicht ausgeartet.} \quad \boxed{V = U \perp U^\perp}}$$

10.4.3 Der Aufbau von V aus irreduziblen Teilräumen Sylvesterklassifikation

(4.3.1) **Können wir V als orthogonale Summe einfacher Räume aufbauen?** Dieser Art Fragestellung sind wir in der Algebra bereits mehrfach begegnet. *Wie sehen für orthogonale Geometrien Atome (besser atomare Teilräume) aus?*

(4.3.2) Definition

$$\boxed{\text{Sei } V \text{ nicht ausgearteter orthogonaler Raum und } U \text{ ein Teilraum. **Dann** heißt } U \text{ unzerlegbar bezüglich der Bilinearform des Raumes, wenn es nicht möglich ist, } U \text{ in als orthogonale Summe } U = W_1 \perp W_2 \text{ zu schreiben mit **nichttrivialen** Summanden. D.h. mit } W_1, W_2 \neq \emptyset.}$$

(4.3.3) Unsere Strategie wird sein, zu versuchen, V als orthogonale Summe unzerlegbarer Teilräume darzustellen. Wir müssen nach der Anzahl und Art der Summanden - also der Atome - fragen. Im euklidischen Fall erwarten wir, dass jede solche Zerlegung gerade der Vorgabe einer Orthogonalbasis entspricht und dass alle unzerlegbaren Räume eindimensional - also Geraden - sind.

(4.3.4) Was bedeutet *zerlegbar*? Sei $V=U \perp W$ und V nicht ausgeartet. **Kann U ausgeartet sein? Kann W von U^\perp verschieden sein?** Diese beiden Möglichkeiten gilt es auszuschließen.

(4.3.5) Wegen orthogonal ist $\dim(U \cap W)=0$. Nach dem Dimensionssatz ist dann $\dim V = \dim(U+W) = \dim U + \dim W$. Also $\dim W = \dim U^\perp$. Andererseits ist sicher $W \subset U^\perp$. Mit dem Dimensionsargument folgt $W=U^\perp$. D.h. aber $\text{rad}(U) = U \cap U^\perp = U \cap W = \{0\}$. U ist nicht ausgeartet. Und das heißt wegen (4.2.27):

(4.3.6) V sei nicht ausgeartet, besitze aber eine orthogonale Zerlegung $V=U \perp W$. **Dann** ist $W=U^\perp$ (Eindeutigkeit der Zerlegung) und U und U^\perp sind beide nicht ausgeartet. Nach (4.2.23) existiert eine solche Zerlegung sicher dann, wenn V einen nicht ausgearteten Teilraum U enthält. **V ist dann zerlegbar.**

(4.3.7) Das bedeutet, dass die vom Euklidischen her vertraute geometrische Zerlegung in Teilraum und orthogonales Komplement auch im orthogonalen Fall gilt, sofern der Teilraum nicht ausgeartet ist. Im Rahmen des Programms der analytischen Geometrie ist das ein zentrales Resultat.

(4.3.8) Wie sehen nun im orthogonalen Fall die unzerlegbaren Teilräume aus? Diese Frage gehen wir in zwei Schritten an.

(4.3.9) **Hilfssatz:** V nicht ausgeartet. $\{0\} \neq U \subset V$ **Sei** unzerlegbar und nicht ausgeartet. **Dann** gibt es $a \in U$ mit $a^2 = aa \neq 0$. ($aa=B(a,a)$).

(4.3.10) Den **Beweis** führen wir indirekt: Angenommen $xx=0$ für alle $x \in U$. Sei $x,y \in U$. Bilde $(x+y)^2 - x^2 - y^2 = 2xy$. Die linke Seite ist Null, also auch die rechte. U ist haushoch ausgeartet: $U=\text{Rad}(U)$. Das widerspricht der Annahme.

(4.3.11) Jetzt sei U unzerlegbar und nicht ausgeartet, also eines unserer Atome. Wähle nach Hilfssatz (4.3.9) a mit $a^2 \neq 0$. Die von a erzeugte Gerade $\langle a \rangle$ ist daher nicht ausgeartet. Wegen 4.1 gilt $U = \langle a \rangle \perp \langle a \rangle^\perp$. Wegen "unzerlegbar" muß $\langle a \rangle^\perp \neq \{0\}$ sein. Also ist $U = \langle a \rangle$. **Unzerlegbare Teilräume sind im orthogonalen Fall nicht ausgeartete Geraden.**

(Zur Erinnerung: Mit $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ bezeichnen wir den von der Familie a aufgespannten Teilraum von V .)

(4.3.12) Es gilt daher immer $V = \langle a_1 \rangle \perp \langle a_2 \rangle \perp \dots \perp \langle a_n \rangle$ mit $a_i^2 \neq 0$. Das entspricht der Vorgabe einer Orthogonalbasis im euklidischen Fall. Da a_i^2 sowohl positiv als auch negativ sein kann, **können wir nicht mehr zu Einheitsvektoren übergehen**. Wir können jedoch stattdessen die folgenden Vektoren e_i bilden: einführen.

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{|a_i^2|}} a_i \quad i=1,2,\dots,n$$

Diese Vektoren stehen paarweise aufeinander senkrecht und haben Quadrate $+1$ oder -1 . Sie bilden zusammen eine Basis von V . **Basen dieser Art verallgemeinern die Orthonormalbasen des euklidischen Falles.** Wir nennen solche Basen *Sylvesterbasen*. Beachten Sie: Ein wichtiges charakteristisches Merkmal einer solche Sylvesterbasis ist die Anzahl der Vektoren e mit Quadrat $+1$. Diese Anzahl kann im Prinzip von 0 bis n laufen.

- Wieso dürfen wir hier keinesfalls $|a_i^2| = |a_i|^2$ schreiben?
- Wie sehen die Sylvesterbasen im euklidischen Fall aus?

(4.3.13) Was ist, wenn V ausgeartet ist? Dann bilden wir zunächst $\text{Rad}V$ und wählen dazu eine Basis. Diese ergänzen wir zu einer Basis von V und erhalten eine offensichtlich orthogonale Zerlegung $V = \text{rad}U \perp V'$. Und V' ist nicht ausgeartet, so dass wir die soeben durchgeführte Überlegung anwenden können. Die Für die Basisvektoren von $\text{Rad}V$ gilt natürlich $a_i^2 = 0$!

(4.3.14) Jetzt sind wir fast am Ziel. Dises besteht in dem folgenden **Sylvesterschen Klassifikations-**

theorem für symmetrische Bilinearformen:

Sei V orthogonaler Raum über \mathbb{R} mit $\dim V = n$ und $\dim \text{Rad} V = s$.
Dann gibt es eine natürliche Zahl $r \leq n - s$ und Vektoren e_1, e_2, \dots, e_n für die gilt
 $V = \langle e_1 \rangle \perp \langle e_2 \rangle \perp \dots \perp \langle e_n \rangle$ mit $e_i^2 = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq i \leq r \\ -1 & \text{für } r+1 \leq i \leq n-s \\ 0 & \text{für } n-s+1 \leq i \leq n \end{cases}$
Jede andere Sylvesterbasis von V hat dasselbe r und s .

Bis auf die Eindeutigkeit von r haben wir bereits alles bewiesen. Beachten Sie, die letzten s Basisvektoren bilden eine Basis von $\text{Rad} V$.

(4.3.15) **Beweis der Eindeutigkeit** von r :

$s = \dim \text{Rad} V$ ist eindeutig. ObdA V nicht ausgeartet, also $s=0$. Angenommen man hat zwei Basen der angegebenen Art: $a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_q, b_{q+1}, \dots, b_n$, wobei die ersten r bzw. q Vektoren positive Quadrate haben. Alle restlichen Vektoren der Basis haben ein Quadrat ≤ 0 . **Ist dann notwendig $r=q$?** Wir dürfen $r \geq q$ annehmen. Wir bilden die Familie $a_1, \dots, a_r, b_{q+1}, \dots, b_n$. Falls $r > s$ ist, ist diese Familie linear abhängig! Angenommen man hätte eine Linearkombination, die Null ergibt, also $a_1 \alpha_1 + \dots + a_r \alpha_r + b_{q+1} \alpha_{q+1} + \dots + b_n \alpha_n = 0$. Da die b linear unabhängig sind, ist im nichttrivialen Fall mindestens ein α_i mit $i \leq r$ ungleich Null. Das ergibt durch Umstellen und Quadrieren:

$$(a_1 \alpha_1 + \dots + a_r \alpha_r)^2 = (-b_{q+1} \alpha_{q+1} - \dots - b_n \alpha_n)^2.$$

Und da beide Seiten zu einer Sylvesterbasis gehören:

$$a_1^2 \alpha_1^2 + \dots + a_r^2 \alpha_r^2 = b_{q+1}^2 \alpha_{q+1}^2 + \dots + b_n^2 \alpha_n^2.$$

Laut Voraussetzung steht links im nichttrivialen Fall eine Zahl > 0 und rechts eine ≤ 0 . Das ist nur möglich, wenn beide Seiten verschwinden und dies nur, wenn alle α Null sind. D.h., nur die triviale Linearkombination ist möglich und damit ist $r > q$ ausgeschlossen. $r=q$ liefert die behauptete Eindeutigkeit.

□ In welchem Sinne liefert der Satz eine Klassifikation der quadratischen Formen? (Das erweist sich als eine der hauptsächlichsten Anwendungen)

(4.3.16) **Wie sieht die beschreibende Matrix B^S im Falle einer Sylvesterbasis S aus?** Es ist ein Diagonalmatrix mit zunächst r mal der 1 und dann $(n-s)-r$ mal der -1. Der Rest sind Nullen. Oder auch

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = B(\vec{x}, \vec{y}) = x_1^s y_1^s + \dots + x_r^s y_r^s - x_{r+1}^s y_{r+1}^s - \dots - x_{n-s}^s y_{n-s}^s \quad V \text{ nicht ausgeartet.}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = B(\vec{x}, \vec{y}) = x_1^s y_1^s + \dots + x_r^s y_r^s - x_{r+1}^s y_{r+1}^s - \dots - x_{n-s}^s y_{n-s}^s \quad \dim \text{Rad} V = s$$

Im Komponententerm der Fundamentalidentität treten also nur die Diagonalelemente auf. Oder auch: **Bei Wahl einer Sylvesterbasis wird die Bilinearform diagonalisiert.** Man sagt auch, die Bilinearform sei in einem Hauptachsensystem dargestellt. Oder intuitiv: Die Koordinatenachsen sind geometrisch entkoppelt, beeinflussen sich nicht.

(4.3.17) Es ist noch eine andere Interpretation unseres Resultates möglich, wobei wir uns auf den nicht ausgearteten Fall beschränken. Sei e ein Sylvesterbasis. Wählt man nur die Basisvektoren mit positivem Quadrat und betrachtet man den davon erzeugten Teilraum, so ist das Skalarprodukt auf diesem Teilraum positiv definit, also euklidisch. Entsprechend ist es auf einem Teilraum aus Basisvektoren m negativem Quadrat negativ definit, was, wie wir sehen werden auch eine euklidische Geometrie ergibt. Beide Räume stehen aufeinander senkrecht, sind das jeweilige orthogonale Komplement oder die Normale des anderen. Ergebnis:

Sylvesterzerlegungen: Sei V orthogonaler nicht ausgearteter Raum mit Skalarprodukt B .
Dann besitzt V eine Zerlegung $V = V_+ \perp V_-$ derart, dass B auf V_+ positiv definit und auf V_- negativ definit ist. Dabei ist $r = \dim V_+$ eindeutig bestimmt. Überdies ist $V_- = V_+^\perp$.

(4.3.19) Beachten Sie : $\dim V_+$ ist durch die Geometrie eindeutig festgelegt, keineswegs aber V_+ selbst. Wählt man eine andere Sylvesterbasis, so wird man in der Regel auch eine andere Zerlegung bekommen.

Positiv bzw. negativ definit bedeutet, dass man **innerhalb** beider Räume über die Korrelationsgröße ein Winkelmaß einführen kann.

Ist insbesondere $r=n$, so liegt ein euklidischer Vektorraum vor. Die Sylvesterbasen stimmen dann mit den Orthogonalbasen überein. Und man hat $V=V_+$ und $V_-=\{0\}$.

10.4.4 Die Isomorphieklassen orthogonaler Räume

(4.4.1) Den Begriff der *Isometrie* führen wir im orthogonalen Fall analog zum euklidischen Fall ein. In einem späteren Teil geben wir die eine Reihe zugehöriger Resultate kurz an. Hier stellen wir uns zunächst die Frage, wann zwei orthogonale Räume V und W isometrisch sind.

Seien also V und W zwei nicht ausgeartete orthogonale Räume und $\sigma:V \rightarrow W$ eine Isometrie zwischen V und W . Also insbesondere $\text{Bild}\sigma = W$. Das Skalarprodukt von V sei B , das von W sei C . Also gilt stets: $B(x,y)=C(\sigma x,\sigma y)$, wobei wir wieder σx statt $\sigma(x)$ schreiben. Sei weiter e eine Sylvesterbasis von V . Dann ist σe eine ebensolche von $\text{Bild}\sigma = W$. Damit folgt aber $\dim V_+ = \dim W_+$. Haben umgekehrt zwei orthogonale gleichdimensionale Räume dasselbe r , so wählen wir in jedem Raum eine Sylvesterbasis. Ordnet man die Basisvektoren einander zu, so erzeugt das offensichtlich eine Isometrie. Ergebnis:

(4.4.2) Wann sind orthogonale Räume isomorph?

Satz: Zwei nicht ausgeartete orthogonale Räume sind genau dann isometrisch, wenn sie
a) dieselbe Dimension haben und
b) ihre Sylvesterbasen dasselbe r haben.

(4.4.3) Für $n=4$ beispielsweise gibt es 5 Typen nicht gleichwertiger Geometrien, $r=4$ ergibt dabei den euklidischen Fall und $r=0$ den entgegengesetzten negativ definiten Fall. $r=1$ führt zur beschreibenden Matrix

$$B^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Das ist der Fall der Relativitätstheorie.}$$

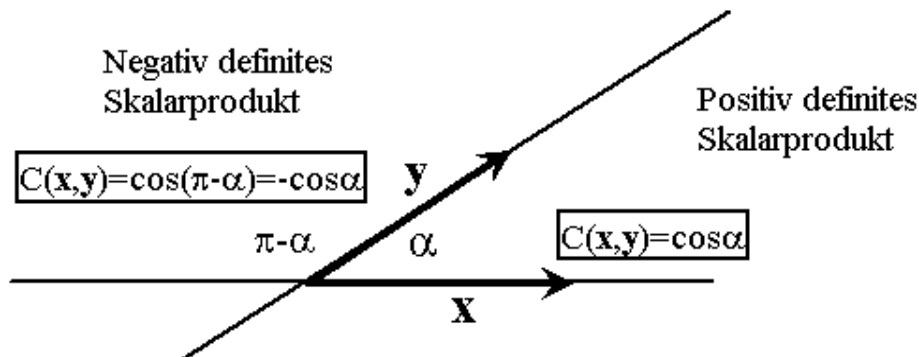
(4.4.4) Wie unterscheiden sich $r=0$ und $r=4$ bzw. $r=1$ und $r=3$? Immer nur dadurch, dass die positiv definite und die negativ definiten Anteile ausgetauscht werden. Formal indem man die Bilinearform B durch $-B$ ersetzt. Um das besser zu verstehen, wollen wir den negativ definiten Fall genauer analysieren:

(4.4.5) Gehen wir unsere alte Argumentation (zum euklidischen Fall) für den negativ definiten Fall bis zu Winkeinführung durch, so sehen wir, dass die gesamten Überlegungen zur euklidischen Geometrie übertragbar sind, sofern wir einfach $\|\vec{x}\|^2 = -B(x,x)$ und $\cos(\varphi) = -C(x,y)$ setzen.

(4.4.6) Oder auch: **Der Winkel zwischen zwei Halbgeraden wird über dieses $C(x,y)$ durch den jeweiligen Nebenwinkel beschrieben!** Es gilt ja $B(x,x)=\|x\|^2 \cos \pi = -\|x\|^2$ usw. Dreht man in einer Ebene von zwei parallelen Einheitsvektoren zu den antiparallelen, so wächst $C(x,y)$ jetzt monoton von -1 nach $+1$ an, anstatt wie üblich von $+1$ auf -1 zu fallen. Man arbeitet also immer mit dem Nebenwinkel $\pi - \varphi$ anstatt mit φ .

Oder auch: **Positiv und negativ definit unterscheiden sich weniger geometrisch, als durch die Art der gewählten Winkelbeschreibungsmethode!**

(4.4.7) Ein und dieselbe euklidische Konfiguration zweier gerichteter Geraden läßt sich durch zwei Geometrien mit entgegengesetztem Skalarprodukt beschreiben, je nachdem ob man die Korrelationsgröße C auf α oder den Nebenwinkel $\pi - \alpha$ bezieht!



(4.4.8) Ist also (V, B) ein orthogonaler Raum, so ist auch $(V, -B)$ ein orthogonaler Raum, der gerade die zu (V, B) gehörige Nebenwinkelbeschreibung erfasst. In der Sylvesterklassifikation gehört $(V, -B)$ zu $n-r$, wenn (V, B) zu r gehört. Bei geometrischen Aufgaben wird man meist Geometrie und zugehörige Nebenwinkelgeometrie nicht unterscheiden. In unserem Beispiel des vierdimensionalen Raumes verbleiben dann nur noch die drei zu unterscheidenden Fälle, nämlich $r=0, 1$ und 2 . Bei anderen Problemen - sagen wir Extremwertaufgaben von Skalarfeldern - wird man die beiden Fälle dagegen auseinanderhalten, da in einem Fall ein Minimum und im anderen ein Maximum vorliegt.

- Klassifizieren Sie (mit Hilfe des Sylvesterschen Satzes) die quadratischen Formen der Ebene (also die Kegelschnitte, aber auch die Flugbahnen eines Massenpunktes im Gravitationsfeld). Dasselbe für drei Dimensionen. Zur Erinnerung: Die quadratische Form bestimmt eine symmetrische Bilinearform. Ausartung ist möglich, also eventuelles Radikal abspalten, dann mögliche Fälle aufzählen und geometrisch veranschaulichen.

10.4.5 Die hyperbolische Ebene

(4.5.1) Bisher bestand unsere Strategie, die Geometrie eines orthogonalen Raumes zu verstehen, darin, alles auf den euklidischen Fall zurückzuführen. Unsere Zerlegung $V=V_+ \perp V_-$ leistet ja letztlich eben das: Jeder Vektor wird in zwei Komponenten zerlegt, bei der die erste Komponente unmittelbar euklidisch ist und die zweite es wird, sobald man das auf V_- allein irrelevante Vorzeichen fortläßt.

(4.5.2) Aber man kann sich natürlich auch die Aufgabe stellen, Teilräume geometrisch zu analysieren, die beide Komponenten (einen positiv definiten und einen negativ definiten Teil) enthalten. Die Dimension eines solchen Raumes ist mindestens zwei. Wir bekommen solche Räume, indem wir aus einer Sylvesterbasis je mindestens ein Element mit positivem und negativem Quadrat auswählen. Natürlich ist das nur für $r \neq 0, n$ möglich. Man nennt das Skalarprodukt solcher Räume *indefinit*. A sprachliche Ergänzung zu positiv definit und negativ definit

(4.5.3) **Definition** *Hyperbolische Ebene*:

V sei orthogonaler Raum. Ein Teilraum H von V heißt *hyperbolische Ebene von V* , wenn H eine Sylvesterbasis e_1, e_2 mit $r=1$ besitzt. D.h. $e_1^2 = 1, e_2^2 = -1$ und $e_1 e_2 = 0$.

(4.5.4) Für eine hyperbolische Ebene kann man neben den Sylvesterbasen noch einen zweiten Typ ausgezeichneter Basen konstruieren. Und zwar bilden wir $e_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ und $e_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$. Man verifiziert sofort: $e_+^2 = e_-^2 = 0$ und $e_+ e_- = 1$.

Die zugehörige B beschreibende Matrix ist folglich $B^L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4.5.5) Wir nennen eine derartige Basis nach ihrer Interpretation in der Relativitätstheorie eine *Lichtkegelbasis*. Die zugehörige reziproke Basis erhält man einfach durch Vertauschen der Indizes: $e_+^* = e_-$ und $e_-^* = e_+$.

(4.5.6) Wir werden sehen: Die indefinite Geometrie der hyperbolischen Ebene bestimmt die Richtungen der beiden Basisvektoren e_+ und e_- - also die der davon erzeugten beiden Geraden - **eindeutig**. Dagegen können Sylvesterbasisvektoren unterschiedlichste Richtungen annehmen.

(4.5.7) Das ist nach unseren bisherigen Erfahrungen mit Vektorräumen ein ganz ungewöhnliches Resultat! Bisher fanden wir immer viele geometrisch gleichwertige Basen auch eines bestimmten Typs vor. Jetzt finden wir zum ersten Mal eine bis auf Längenänderungen eindeutige Basis. Die Festlegung erfolgt durch die indefinite Bilinearform. Der Einwand, im \mathbb{R}^n habe man aber doch die ausgezeichnete kanonische Basis, trifft nicht, weil der \mathbb{R}^n ja letztlich basisabhängig über diese Basis konstruiert ist. Sie ist **durch die Konstruktion, nicht durch die Geometrie** ausgezeichnet. Dagegen werden die Richtungen der Lichtkegelbasis durch die basisunabhängig formulierte indefinite Bilinearform geometrisch festgelegt.

Oder: In einer euklidischen Ebene bestimmen die Orthonormalbasen den Einheitskreis. Die Länge der Basisvektoren ist fixiert, ihre Richtung ist frei. In der hyperbolischen Ebene ist es genau umgekehrt.

(4.5.8) Beginnen wir mit der geometrischen Analyse, die uns zum genannten Eindeutigkeitsresultat führen soll. Die bemerkenswerte Eigenschaft unserer beiden Lichtkegelvektoren war, dass ihr Quadrat Null ist: $e_+^2 = e_-^2 = 0$. Wir definieren allgemein: Ein Vektor $x \in V$ heißt *isotrop*, wenn $x^2 = 0$ gilt. (Also: Die isotropen Vektoren stehen auf sich selbst senkrecht.) Uns interessieren hier natürlich von Null verschiedene isotrope

Vektoren. Im definiten Fall gibt es keine isotropen Vektoren $\neq 0$). Im indefiniten dagegen gibt es solche. Wir beweisen:

(4.5.9) **Satz:**

Sei H nicht ausgeartete Ebene mit orthogonaler Geometrie. In H gebe es einen isotropen Vektor $x \neq 0$. **Dann** kann man zwei Vektoren $K, L \in H$ finden, mit $K^2 = L^2 = 0$ und $KL=1$. D.h. jeder K, L ist eine Lichtkegelbasis. Und jeder isotrope Vektor aus H liegt auf einer der von K und L erzeugten Geraden.

D.h., hat man eine nicht ausgeartete Ebene mit einem isotropen Vektor, so liegt eine hyperbolische Ebene mit eindeutig bestimmten Lichtkegel (= die beiden von K und L erzeugten Geraden) vor.

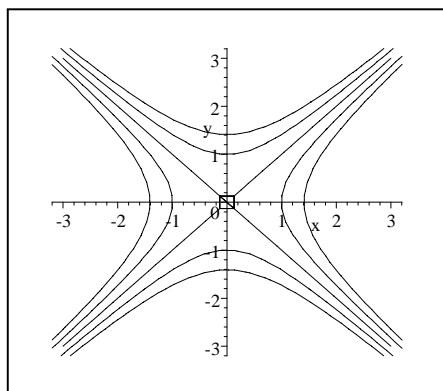


(4.5.10) Beweis: Wir haben $x \neq 0$ mit $x^2 = 0$. Da H nicht ausgeartet ist, gibt es ein $m \in H$ mit $mx = \alpha \neq 0$. Sonst läge x im Radikal von H . Setze $n = \frac{1}{\alpha}m$. Es folgt $nx=1$. Setze jetzt $K = \beta x + n$. Für $\beta = -\frac{1}{2} \frac{n^2}{x}$ folgt $K^2=0$. D.h. K ist isotrop. $Kx = (\beta x + n)x = 1$ bleibt. Mit $L=x$ haben wir unsere Lichtkegelbasis. K und L können nicht abhängig sein, denn dann wäre $KL=0$. Sei schließlich $y \in H$ irgendein isotroper Vektor. Man hat $y = \alpha K + \beta L$, da K, L Basis von H . Quadrieren gibt $y^2 = \alpha^2 K^2 + \beta^2 L^2 + 2\alpha\beta KL = 2\alpha\beta$. Das wird nur Null für $\alpha=0$ oder $\beta=0$. D.h., y muß wie behauptet auf dem Lichtkegel liegen.

(4.5.11) Man sieht: Alle weiteren Lichtkegelbasen erhält man durch Umskalierung: $K' = K\lambda$ und $L' = L\frac{1}{\lambda}$ mit $\alpha \neq 0$ und Vertauschung von K und L . Dass bedeutet: Für die beiden Geraden des Lichtkegels gibt es keine kanonische Längeneinheit. Legt man auf einer der beiden Geraden eine solche fest, dann ist eine Längeneinheit auf der anderen mit festgelegt.

(4.5.12) Hat man eine Lichtkegelbasis K, L von H , dann kann man über $E = \frac{K+L}{\sqrt{2}}$ und $F = \frac{K-L}{\sqrt{2}}$ daraus leicht eine Sylvesterbasis von H (mit $r=1$) bilden. Auch das ist ein bemerkenswertes Resultat: Zwischen Lichtkegel- und Sylvesterbasen (von H) besteht eine bijektive, rechnerisch leicht durchzuführende Beziehung.

(4.5.13) Der Lichtkegel zerlegt H in Bereiche, die sich durch den Wert des Quadrates ihrer Vektoren unterscheiden. Die Figur verdeutlicht das. Man kann auch die Niveaumengen $N_c = \{x | x^2 = c\}$ betrachten. Ihre Form erklärt die Bezeichnung "hyperbolische Ebene". Die N_c sind die Niveauebenen der quadratischen Form $x \mapsto x^2 = B(x, x)$.



Welche Niveauebenen sind gezeichnet? D.h. für welche c -Werte?

10.4.6 Die Isometrien der hyperbolischen Ebene

(4.6.1) Die Gesamtheit der Isometrien eines orthogonalen Raumes bildet eine Gruppe, die orthogonale Gruppe $O(V)$. Besser wäre $O(V, B)$. Wie sieht die orthogonale Gruppe $O(H)$ einer hyperbolischen Ebene aus? Das interessiert uns im Augenblick. Sei $\sigma \in O(H)$. Dann wird aus einer Lichtkegelbasis K, L durch

Anwenden von σ notwendig eine zweite derartige Basis $\sigma K, \sigma L$. Nach obigem Resultat folgt $\sigma K = K\alpha$ und $\sigma L = L\frac{1}{\alpha}$ oder aber $\sigma K = L\alpha$ und $\sigma L = K\frac{1}{\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Der erste Typ hat Determinante +1, der zweite die Determinante -1. Der erste bildet mithin die spezielle orthogonale Gruppe $SO(H)$ der hyperbolischen Ebene. $SO(H)$ ist also als Gruppe isomorph zu (\mathbb{R}^*, \cdot) , der multiplikativen Gruppe der reellen Zahlen ungleich Null.

(4.6.2) Nun kann man leicht ausrechnen, wie sich die zugehörigen Sylvesterbasen unter diesen Transformationen verhalten.

(4.6.3) Wir betrachten nur den ersten Typ und verlangen zusätzlich $\alpha > 0$. Also $K' = K\alpha$ und $L' = L\frac{1}{\alpha}$. Damit folgt für die zugehörigen Sylvesterbasen:

$$\begin{aligned} E' &= \sigma.E = (K' + L') \frac{1}{\sqrt{2}} = (K\alpha + L\frac{1}{\alpha}) \frac{1}{\sqrt{2}} = E \frac{\alpha + \frac{1}{\alpha}}{2} + F \frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{2} \\ F' &= \sigma.F = (K' - L') \frac{1}{\sqrt{2}} = (K\alpha - L\frac{1}{\alpha}) \frac{1}{\sqrt{2}} = E \frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{2} + F \frac{\alpha + \frac{1}{\alpha}}{2} \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung erhält man offensichtlich, indem man α durch $\frac{1}{\alpha}$ ersetzt. Das ergibt die folgende Transformationsmatrix ($e = e'\Lambda$) für den Basiswechsel:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \frac{1}{\alpha} & -\alpha + \frac{1}{\alpha} \\ -\alpha + \frac{1}{\alpha} & \alpha + \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\varphi & -sh\varphi \\ -sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha = e^\varphi > 0.$$

(4.6.4) Die zweite Form erlaubt über den Vergleich mit der üblichen Drehmatrix der Ebene sofortiges Merken.

(4.6.5) Die Menge all dieser durch $\Lambda = \Lambda(\alpha), \alpha > 0$ beschriebenen Isometrien bildet eine Untergruppe der Gruppe $SO(H)$. Dasselbe gilt für die zugehörigen beschreibenden Matrizen $\Lambda(\alpha)$. Für die Anwendungen in der Relativitätstheorie ist eine dritte Parametrisierung derselben Matrizen wichtig. Dazu setzt man $\frac{\alpha + \frac{1}{\alpha}}{2} = ch(\varphi) = \gamma$ und $\frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{2} = sh(\varphi) = \beta\gamma$. Umgestellt besagt das $\gamma = ch(\varphi)$ und $\beta = th(\varphi)$.

(4.6.6) Damit folgt sofort mit $-1 < \beta < 1$:

$$\left| \begin{array}{|l|} \hline e^\varphi = \alpha = (1 + \beta)\gamma \\ e^{-\varphi} = \frac{1}{\alpha} = (1 - \beta)\gamma \\ \hline \end{array} \right| \quad \left| \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \right| \quad \left| \Lambda = \Lambda(\beta) = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \right|$$

(4.6.7) Bei der jetzt eingeführten dritten Parametrisierung ist β der Parameter. **β übernimmt in der Relativitätstheorie die Rolle der Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugssysteme, wie wir unten zeigen werden.**

(4.6.8) Beachten Sie: Alle diese Formeln und Ergebnisse sind eine unmittelbare Konsequenz von Satz (4.5.9). Sie folgen also alle rein mathematisch und elementar aus der Existenz eines isotropen Vektors in H .

10.4.6a Der Formalismus der Relativitätstheorie

(4.6.9) In der Relativitätstheorie betrachtet man *Ereignisse*. Das sind physikalische Phänomene, die zu ihrer Beschreibung die Angabe eines Ortes und eines Zeitpunktes verlangen - und eventuell weitere Größen, die aber zur Lagebeschreibung nicht relevant sind. Die Quantifizierung durch einen Beobachter erfordert mithin vier Zahlangaben. Die Ereignisse bilden mathematisch den vierdimensionalen Vektorraum V_0^4 , den Ereignisraum mit indefinitem Skalarprodukt. Er übernimmt die Rolle des Konfigurationsraumes. Es ist üblich, in diesem Raum die Koordinatenindizes von $i=0$ bis $i=3$ laufen zu lassen! $i=0$ gehört dabei zur Zeitrichtung.

(4.6.10) Wir beschränken uns auf den Fall, bei dem alle Ereignisse entlang einer festen Geraden im Ortsraum V_0^3 stattfinden, so dass zur Festlegung nur zwei Zahlangaben erforderlich werden (1-Richtung). Etwa: "Der Scheitel der (senkrechten) Flugbahn wird zur Zeit T in der Höhe H angenommen" Dann ist $\vec{x}^K = (T, H) = (x_0^K, x_1^K)$ eine typische Ereignisquantifizierung durch einen Beobachter.

Zu erwarten ist, dass in vielen Fällen die Differenz solcher Ereignistupel physikalisch relevanter ist, als die Tupel selbst. Die Willkür der Ursprungswahl fällt dann heraus. Als Beispiel denke man an eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Wird der Bewegungsvorgang zweimal als Ereignis fixiert, etwa als (T_1, H_1) und (T_2, H_2) mit $T_2 > T_1$ so ergibt $\frac{H_2 - H_1}{T_2 - T_1}$ die Relativgeschwindigkeit gegenüber dem Beobachter.

(4.6.11) Bitte halten sie immer auseinander: "Zwei verschiedene Ereignisse werden durch denselben Beobachter beschrieben" und "Ein und dasselbe Ereignis wird durch zwei verschiedene Beobachter beschrieben". Soeben lag der erste Fall vor.

(4.6.12) Nun haben wir das experimentell gefundene anschaulich unverständliche Phänomen, dass die Lichtgeschwindigkeit für jeden Beobachter konstant ist. Wir wählen unsere Zeiteinheit so, dass die Lichtgeschwindigkeit den konstanten Wert 1 annimmt. Formal setzen wir dazu $x_0 = ct$. Beschreiben wir dann einen Lichtweg durch zwei Ereignisse, deren Differenzvektor für den Beobachter A durch $(\Delta x_0^A, \Delta x_1^A)$ gegeben ist, so muß notwendig $\Delta x_0^A - \Delta x_1^A = 0$ gelten. Oder $(\Delta x_0^A)^2 - (\Delta x_1^A)^2 = 0$. Der Beobachter N beobachtet dieselben zwei Ereignisse und quantifiziert den Differenzvektor durch $(\Delta x_0^N, \Delta x_1^N)$. Dann muss wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit $(\Delta x_0^N)^2 - (\Delta x_1^N)^2 = 0$ gelten.

Es sieht daher so aus, als würde die quadratische Form $(x_0, x_1) \mapsto x_0^2 - x_1^2$ eine koordinatenunabhängige Bedeutung haben. Das führt in der üblichen Weise zu einer symmetrischen Bilinearform $((x_0, x_1), (y_0, y_1)) \mapsto x_0 y_0 - x_1 y_1$.

(4.6.13) **Der zugehörige absolute zweidimensionale Ereignisraum enthält notwendig einen isotropen Vektor, die Lichtstrahldifferenz.** Andererseits darf er - der Raum - nicht ausgeartet sein. Daher liegt nach unseren Resultaten eine hyperbolische Ebene H vor und alle oben hergeleiteten Resultate können übernommen werden.

Jedes Ereignis (auf der räumlichen 1-Achse) legt ein Element $x \in H$ fest. Zu jedem Beobachter A gehört eine Sylvesterbasis e_0, e_1 mit $x = e_0 x_0^A + e_1 x_1^A$, wobei der Koordinatenvektor $\vec{x}^A = {}^t(x_0^A, x_1^A)$ die Zeit- und Raumkoordinate des Ereignisses für diesen Beobachter A bilden. Oder auch: e_0 beschreibt eine Zeitrichtung (=die Zeitrichtung des Beobachters A) und e_1 beschreibt die eine (festgelegte) Raumrichtung (= die Raumrichtung des Beobachters A).

(4.6.14) Ist N ein zweiter Beobachter der das Ereignis beobachtet mit $\vec{x}^N = {}^t(x_0^N, x_1^N)$, so gehört zu ihm eine zweite Sylvesterbasis e'_0, e'_1 derart, dass gilt

$$x = e_0 x_0^A + e_1 x_1^A = e'_0 x_0^N + e'_1 x_1^N \quad \text{und} \quad \vec{x}^A = \begin{pmatrix} x_0^A \\ x_1^A \end{pmatrix} \quad \vec{x}^N = \begin{pmatrix} x_0^N \\ x_1^N \end{pmatrix}.$$

Da ein Basiswechsel zwischen Sylvesterbasen vorliegt, gilt $\vec{x}^N = \Lambda(\beta) \vec{x}^A$ mit $\Lambda(\beta)$ aus (4.6.5). Das ist die gesuchte Übersetzungsabbildung zwischen den Beobachtungsergebnissen (=Beschreibung ein und desselben physikalischen Ereignisses) der beiden Beobachter. Alle überprüften Konsequenzen dieser Übersetzungsabbildung - und das sind sehr viele - wurden experimentell bestätigt.

Für das relativistische Skalarprodukt schließlich gilt

$$g(x, y) = (x_0^A)^2 - (x_1^A)^2 = (x_0^N)^2 - (x_1^N)^2 \quad g^A = g^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dabei müssen zu A und N beides Sylvesterbasen gehören!

(4.6.15) Jetzt fragen wir nach der physikalischen Bedeutung des eingeführten Parameters β mit Werten zwischen -1 und +1.

(4.6.16) Dazu nehmen wir folgendes **Gedankenexperiment** vor.

Im Ursprung des Beobachters N finden zwei Ereignisse statt. N beschreibt sie durch $(T_1^N, 0)$ und $(T_2^N, 0)$. Die Ereignisdifferenz durch $\Delta \vec{x}^N = {}^t(\Delta T^N, 0)$. Für der Beobachter A bewege sich der Ursprung von N mit der konstanter Geschwindigkeit V. Er beobachtet dieselben Ereignisse und findet (T_1^A, H) und $(T_2^A, H + V(T_2^A - T_1^A))$ und damit $\Delta \vec{x}^A = {}^t(\Delta T^A, V \Delta T^A)$ als Differenzvektor.

Andererseits wissen wir $\Delta \vec{x}^N = \Lambda \Delta \vec{x}^A$ oder ausgeschrieben:

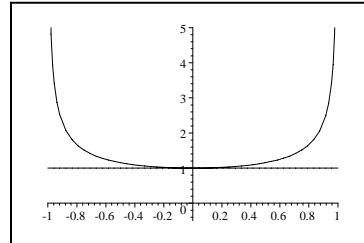
$$\begin{pmatrix} \Delta T^N \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T^A \\ V \Delta T^A \end{pmatrix} \quad \text{D.h.} \quad \begin{aligned} \Delta T^N &= \gamma(1 - \beta V) \Delta T^A \\ 0 &= \gamma(-\beta + V) \Delta T^A \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $\beta = V$.

(4.6.17) Das bedeutet: **Der Parameter β ist gleich der Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme.**

(4.6.18) Die erste Koordinatengleichung unseres Gedankenexperimentes gibt: $\Delta T^N = \gamma(1 - \beta^2)\Delta T^A = \frac{1}{\gamma}\Delta T^A$. **D.h die Zeitdifferenz ΔT^N zwischen den beiden Ereignissen im Ruhesystem N der Ereignisfolge ist kleiner als die, die vom bewegten System aus (für die Ereignisdifferenz) gemessen wird.** Letztere muss wegen des Faktors $\frac{1}{\gamma} \leq 1$ einen größeren Wert haben. Zeitdifferenzmessungen hängen vom Bewegungszustand des Beobachters ab, ein typisch relativistischer Effekt. "Im Ruhesystem (N=Ruhe) erscheint der Herzschlag am langsamsten".

$$\begin{aligned} \Delta T^{Bewegt} &= \gamma \Delta T^{Ruhe} \\ N=Ruhe, A=bewegt \\ \gamma &= \gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \gamma(0.9) &= 2.24 \end{aligned}$$

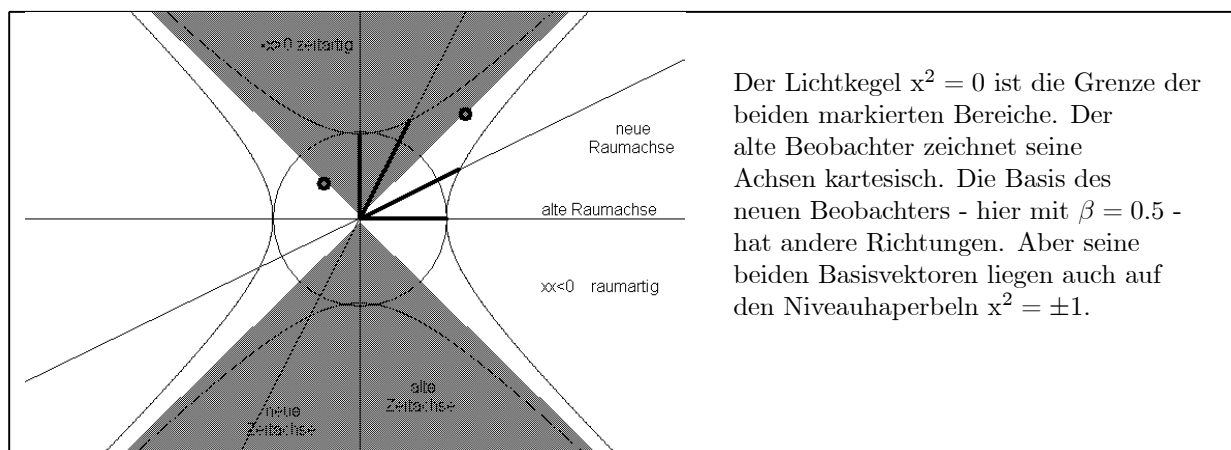


Ein Herzschlag im Ruhesystem verbraucht 2.24 Herzschläge des Bruders im bewegten System (Zeitdilatation! $\beta = 0.9$). Der Graph rechts gehört zu $\beta \mapsto \beta(\gamma)$.

Durch Integration obiger Gleichung über die Zeit bei veränderlichem β kann man das bekannte Zwillingssparadoxon rechnerisch erfassen.

(4.6.19) Und allgemein: Will man die Zeitkoordinate eines Ereignisses, wie sie der neue Beobachter sieht, vorhersagen, so benötigt man dazu die alten Raum- **und** Zeitkoordinaten. Die alte Zeitkoordinate allein reicht nicht. Das ist von der Alltagserfahrung mit kleinen Geschwindigkeiten völlig ungewohnt. Aber gedanklich logisch ist es möglich und die experimentellen Erfahrungen zeigen, dass diese Kenntnis erforderlich ist.

(4.6.20) **Der Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse läßt sich nicht absolut geometrisch einführen.** Gleichzeitigkeit ist (bei relativistischen Geschwindigkeiten) beobachterabhängig. Denn aus $\Delta T^A=0$ folgt natürlich keineswegs $\Delta T^N = 0$. Ja ΔT^N kann sowohl positiv als auch negativ sein. Sind zwei Ereignisse E_1 und E_2 für einen Beobachter gleichzeitig, so beobachtet ein zweiter, dass E_1 vor E_2 stattfindet und ein dritter, dass E_2 vor E_1 stattfindet. Dabei ist die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, die als Träger der Signale verwendet werden kann, bei der Interpretation genau zu beachten.



Der Lichtkegel $x^2 = 0$ ist die Grenze der beiden markierten Bereiche. Der alte Beobachter zeichnet seine Achsen kartesisch. Die Basis des neuen Beobachters - hier mit $\beta = 0.5$ - hat andere Richtungen. Aber seine beiden Basisvektoren liegen auch auf den Niveauhaperbeln $x^2 = \pm 1$.

(4.6.20) Schränkt man den Raum bzw. die Bewegungsmöglichkeiten nicht auf eine Gerade ein, kommen zwei weitere Raumdimensionen hinzu. Der Ereignisraum wird zu einem vierdimensionalen Vektorraum V^4 mit einem nicht ausgearteten symmetrischen Skalarprodukt g , dem Minkowskiraum. Die zugehörige Sylvesterzerlegung hat $r=1$.

Jede Sylvesterbasis dieses Raumes liefert eine Zerlegung $V = V_+ \perp V_-$. Dabei ist V_+ eindimensional. Die zugehörige Koordinate ist die Zeitkoordinaten des betreffenden Beobachters. Dieser Raum ist mit g positiv definit. V_- dagegen ist der geometrische Raum des Beobachters. Er ist negativ definit. Läßt man das Minus

fort, so erhält man das übliche euklidische Skalarprodukt. Wählt man einen anderen Beobachter, so erhält man eine entsprechende ($r=1$) Aufspaltung **mit u.U. anderen Teilräumen**.

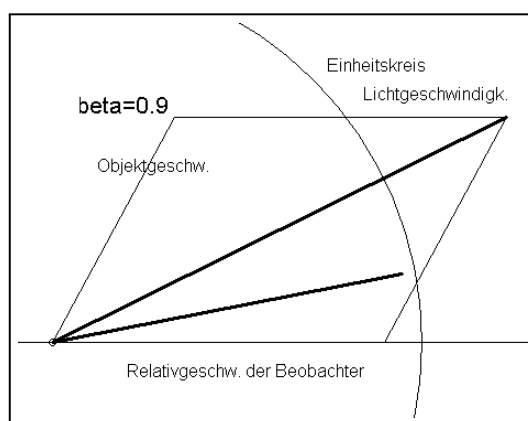
(4.6.21) Die Menge aller Vektoren mit $x^2 = 0$ bildet einen basisunabhängigen dreidimensionalen Kegel im vierdimensionalen Raum, den Lichtkegel. Der Lichtkegel als **Niveaumenge der quadratischen Form ist beobachterunabhängig**, nicht dagegen die Zeitachse des Beobachters

Die beschreibende Matrix g^S von g bezüglich einer Sylvesterbasis S hat die berühmte Form:

$$g^S = (g_{\mu\nu}^S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es ist üblich, Indizes zu V^4
die über 0,1,2,3 laufen mit
kleinen griechischen Buchstaben
zu bezeichnen.

- Leiten Sie das Additionstheorem für Geschwindigkeiten der Relativitätstheorie her. Arbeiten Sie dazu in einer hyperbolischen Ebene. Beide Geschwindigkeiten sollen die 1-Richtung haben. Diskutieren sie das Resultat, speziell hinsichtlich der Frage der Unüberschreitbarkeit der Lichtgeschwindigkeit. Nachfolgendes Bild illustriert die Verhältnisse etwas allgemeiner. Man wählt ein β . Die Relativgeschwindigkeit βN gegen A sei in 1-Richtung aufgetragen. Das Objekt habe gegen N eine Relativgeschwindigkeit in der Zeichenebene. Dann zeichnet das Computerprogramm die klassische Relativgeschwindigkeit des Objektes gegen A und die relativistische, die immer im Einheitskreis liegt.x



10.4.7 Isometrien im orthogonalen, nicht ausgearteten Fall

(4.7.1) Wir setzen $g_{ik} = B(a_i, a_k)$. Da V bezüglich B nicht ausgeartet sein soll, existiert g^{-1} . Sei jetzt $\lambda: V \rightarrow V$ irgendeine lineare Abbildung. Wir benötigen die bezüglich B zu λ adjungierte Abbildung. Also eine zweite, durch λ festgelegte lineare Abbildung $\lambda^\dagger: V \rightarrow V$, die Herüberwälzen gestattet: $B(x|\lambda(y)) = B(\lambda^\dagger(x)|y)$.

(4.7.2) Wie üblich zeigen wir Existenz und Eindeutigkeit von λ^\dagger über eine Basisdarstellung. Sei $M = M_\lambda$ die λ beschreibende Matrix bezüglich einer Basis a . Die gesuchte Matrix von λ^\dagger sei X . Dann folgt ohne Benutzung der Symmetrie von g , also von $g_{rk} = g_{kr}$:

$$B(a_i, \lambda a_k) = \sum g_{ir} M_{rk} = (gM)_{ik} \quad \text{und} \quad B(\lambda^\dagger a_i, a_k) = \sum X_{ri} g_{rk} = ({}^t X g)_{ki} = {}^t ({}^t X g)_{ik}$$

(4.7.3) Gleichsetzen und Auflösen nach X gibt analog zum unitären Fall (3.4.4):

$$\boxed{X = {}^t g^{-1} {}^t M {}^t g = {}^t (g M g^{-1}) \quad g_{ik} = B(a_i, a_k) \quad X = M_{\lambda^\dagger} = \text{beschr. Matrix von } \lambda \text{ bezüglich } a.}$$

Hieraus folgt sofort, dass die gewünschte Relation für alle Vektoren gilt und ebenso die Eindeutigkeit der Abbildung λ^\dagger . Überdies zeigt die Formel: **X ist das transponierte der beschreibenden Matrix von λ bezüglich der reziproken Basis zu a .** (Denn g ist die zugehörige Transformationsmatrix!) Das

ist verständlich, denn die transponierte Matrix beschrieb die transponierte Abbildung bezüglich der dualen Basis und deren Bild unter ι ist die reziproke.

- Man kann X über eine viel kürzere Rechnung bestimmen. Dazu gehe man von der Gleichung $B(a_i^*, \lambda^\dagger \cdot a_k) = B(\lambda \cdot a_i^*, a_k)$ aus. Zeigen Sie, dass sie zur Festlegung von λ^\dagger ausreicht und bestimmen Sie damit erneut $X = M_{\lambda^\dagger}$.

(4.7.4) Bitte beachten Sie, dass selbst für eine Sylvesterbasis die Matrix X i.a. nicht einfach gleich der transponierten Basis ist! Im nicht positiv definiten Fall treten noch Vorzeichenwechsel auf. Nehmen wir etwa eine Lorentztransformation $\Lambda(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \Lambda(\varphi) &= \begin{pmatrix} ch\varphi & -sh\varphi \\ -sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix} & g = g^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \Lambda^\dagger(\varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch\varphi & -sh\varphi \\ -sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}(\varphi) \end{aligned}$$

Es lohnt sich, sich genau zu verdeutlichen, wie der Vorzeichenwechsel der beiden sh -Komponenten entsteht, der ja hier gerade nötig ist, um die inverse Abbildung zu erzeugen.

(4.7.5) Jetzt können wir die Abbildungsbeschreibung der Isometrien herleiten. Die übliche Rechnung unter Verwendung der Kürzungsregel ergibt für einen orthogonalen nicht ausgearteten Raum V

$$\boxed{\sigma \text{ ist Isometrie von } V \iff \sigma^{-1} = \sigma^\dagger} \quad \text{Also insbesondere } \det \sigma = \pm 1.$$

(4.7.6) Von der individuellen Isometrie geht man wie üblich zu Gesamtheit aller Isometrien über:

Die Orthogonale Gruppe (des nicht ausgearteten orthogonalen Vektorraumes V mit Skalarprodukt B) besteht aus allen Isometrien $V \rightarrow V$. Sie wird mit $O(V, B)$ bezeichnet. Die Untergruppe aller Isometrien mit $\det(\sigma) = +1$ heißt die spezielle orthogonale Gruppe $SO(V, B)$.

Ist $V = V_+ \perp V_-$ eine Aufspaltung in positiv definiten und negativ definiten Teil mit $\dim V_+ = r$ und $\dim V_- = s = n - r$, dann bezeichnet man diese Gruppen auch gerne mit $O(r, s)$ bzw. $SO(r, s)$. Insbesondere steht dann $O(1, 3)$ für die übliche Lorentzgruppe und $SO(3, 0) = SO(3)$ für die Drehgruppe des physikalisch geometrischen V^3 .

(4.7.7) Die beschreibende Matrix einer Isometrie (=orthogonale Transformation) heißt orthogonale Matrix. Die angegebenen Lorentztransformationen sind spezielle Matrizen dieser Art. Natürlich muß bei dieser Benennung immer klar sein, um welches Skalarprodukt es dabei geht, was also *orthogonal* jeweils bedeuten soll.

(4.7.8) Diese orthogonalen Matrizen haben die üblichen zwei Bedeutungen:

- Sie sind einmal die darstellenden Matrizen der zugehörigen Isometrien.
- Und bei Basiswechsel erzeugen sie aus einer Sylvesterbasis erneut eine Sylvesterbasis

(4.7.9) Für die Relativitätstheorie bedeutet das: Der Übergang von einem zulässigen Bezugssystem zu einem anderen erfolgt durch eine Lorentztransformation als Transformationsmatrix.

10.5 Skalarprodukte und äußere Algebra

10.5.1 Die Ausdehnung von Skalarprodukten auf die äußere Algebra

(5.1.1) Sei $B:V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform. Also ein Instrument, mit dessen Hilfe man geometrische Beziehungen, insbesondere Orthogonalität, zwischen Geraden von V formalisiert. Kann man dann dieses Skalarprodukt auf die gesamte äußere Algebra $\wedge V$ erweitern? D.h., kann man die geometrischen Bezüge auf beliebige Teilräume ausdehnen? Wir werden sehen, dass eine solche Ausdehnung auf kanonische Weise möglich ist. Aus dem V^3 sind uns entsprechende Ausdehnungen für einfache Fälle vertraut. Z.B wissen wir, dass man dort den Winkelbegriff auch auf Ebenen ausdehnen kann. *Winkel zwischen zwei Ebenen ist Winkel zwischen deren Normalen.*

(5.1.2) Zentraler Einstieg in den Problemkreis ist der folgende

Satz: Sei V endlichdimensionaler Vektorraum und $B:V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform. **Dann** ist B kanonisch erweiterbar zu einer Bilinearform $\bar{B}: \wedge V \times \wedge V \rightarrow K$, wobei für zerlegbare Vektoren x_R und x_S mit $|R|=|S|=p$ gilt

$$\bar{B}(x_R|x_S) = \det B((x_{r_i}|x_{s_j})_{i,j=1,2,\dots,p})$$

Für $|R| \neq |S|$ ist das Skalarprodukt Null, d.h. die Vektoren sind orthogonal.

(5.1.3) Wie sieht die durch den Satz und die Formel festgelegte Konstruktion aus? Die Formel liefert den Wert des Skalarproduktes für alle zerlegbaren Vektoren, insbesondere für die einer festen Basis a_R . Rechts steht die Determinante einer $p \times p$ -Matrix. Ihre Elemente sind die Skalarprodukte von 1-Vektoren und damit durch das vorgegebene B bestimmt.

Schreibt man $\vec{a} \cdot \vec{b}$ statt $B(a|b)$ so sieht eine derartige Determinante für $p=2$ und $p=3$ folgendermaßen aus:

p=2	p=3
$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \end{vmatrix} = \bar{B}(\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2, \vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2)$	$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3 \end{vmatrix} = \bar{B}(\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3, \vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \vec{b}_3)$

(5.1.4) Determinanten dieses Typs nennen wir auch *Gramsche Determinanten*.

(5.1.5) **Beweis:** a) Wohldefiniertheit und Existenz folgen wie bei der entsprechenden Ausdehnung der kanonischen Bilinearform in Kap.10 (2.7.5).

b) Für $p=1$ ergibt sich das Skalarprodukt auf V . D.h. \bar{B} ist eine Erweiterung von B wie behauptet. (Eindeutigkeit wurde nicht behauptet, ist also auch nicht zu beweisen).

(5.1.6) Rechnen wir eine Konkretisierung im \mathbb{R}_K^3 für $\vec{a}_1=(1,1,2)$ und $\vec{a}_2=(1,0,-1)$ sowie $\vec{b}_1=(2,1,0)$ und $\vec{b}_2=(0,1,-2)$. Das Skalarprodukt sei euklidisch.

$$(\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) \cdot (\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \quad \text{Eine Zahl!}$$

Andererseits ergeben die Kreuzprodukte $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2=(-1,3,-1)$ und $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2=(-2,4,2)$. Das Skalarprodukt dieser beiden Normalenvektoren ist $2+12-2=12$. Das sieht vertrauenserweckend aus.

□ Zeigen sie, dass allgemein gilt $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) \cdot (\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2)$

(5.1.7) Wie steht es jetzt mit der Übertragung weiterer Eigenschaften des Skalarproduktes? Man hat folgendes Resultat:

Sei \bar{B} die in (5.1.2) definierte Erweiterung des Skalarproduktes auf $\wedge V$.

Dann gilt:

- a) Ist B symmetrisch, so ist auch \bar{B} symmetrisch.
- b) Ist B nicht ausgeartet, so ist auch \bar{B} nicht ausgeartet.
- c) Ist B euklidisch, so ist auch \bar{B} euklidisch.

(5.1.8) D.h. insbesondere: Ist V euklidischer oder orthogonaler Raum, so gilt für $\wedge V$ dasselbe. Alle zugehörigen geometrischen Resultate lassen sich somit auf die äußere Algebra übertragen. So kann man im euklidischen Fall die relative Lage zweier Teilräume stets durch einen Winkel beschreiben. Oder: Man kann im Vierdimensionalen ein Dreieck aus drei Ebenen bilden und die Winkelsumme bestimmen.

(5.1.9) Zum **Beweis** von a): Vertauscht man in der Matrix der Gramschen Determinanten die Vektoren a und b , so erhält man wegen der Symmetrie von B die transponierte Matrix und die hat dieselbe Determinante.

(5.1.10) Zum Beweis von b) führen wir folgende Zusatzüberlegung durch:

(5.1.11) Ist V nicht ausgeartet, so existiert zu jeder Basis a_i die zugehörige reziproke Basis a^{*i} von V .

Dann ist a^{*R} reziproke Basis zu a^R in $\wedge V$ bezüglich \bar{B} .

Nach obiger Formel ist nämlich $\bar{B}(a^{*R} | a^S)$ immer Null für $R \neq S$ und 1 für $R=S$. In der zugehörigen Matrix wird ja stets ein a^* mit einem a gepaart. (Liegt etwa $i=1$ in S , nicht aber in R , dann ist $\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_{r_i}$ immer Null, d.h. die erste Zeile der Matrix ist Null.)

(5.1.12) Hieraus folgt sofort, daß auch $\wedge V$ nicht ausgeartet ist: Sei $A = \sum a_R \alpha_R$ aus $\text{Rad}(\wedge V)$. Paart man diesen Vektor nacheinander mit den Vektoren a^{*R} , so folgt $A=0$.

(5.1.13) Zum Beweis von c) schließlich führen wir eine ähnliche Argumentation durch:

(5.1.14) Ist \vec{e}_i eine Orthonormalbasis von V , dann ist e_R eine Orthonormalbasis von $\wedge V$ bezüglich \bar{B} . Dies folgt sofort durch Inspektion der Gramschen Determinanten für diesen Fall. D.h. $\bar{B}(e_R, e_S) = \delta_{RS}$. Besitzt aber ein Raum eine Orthonormalbasis, so ist das Skalarprodukt notwendig positiv definit. Aus $w = \sum e_R \alpha_R$ folgt ja $\bar{B}(w|w) = \sum \alpha_R^2$.

(5.1.15) Damit haben wir gezeigt, daß sich die wichtigsten Eigenschaften zusammen mit dem Skalarprodukt auf $\wedge V$ ausdehnen.

(5.1.16) Man kann eine nützliche Formel herleiten, die im euklidischen Fall die Positivdefinitheit zerlegbarer Vektoren unmittelbar zeigt.

(5.1.17) Sei dazu \vec{e}_i eine Orthonormalbasis von V . Weiter seien $\vec{a}_i = \sum \vec{e}_r A_{ri}$ für $i=1, \dots, r$ und $\vec{c}_k = \sum \vec{e}_s C_{sk}$ für $k=1, \dots, r$ zwei Familien von je r Vektoren. $r \neq \dim V$ ist zulässig. Ihre Koeffizienten bilden die beiden $n \times r$ -Matrizen A und C . Wir berechnen $\bar{B}(a_R | b_S)$ nach dem üblichen Schema. Dabei benutzen wir $B(\vec{e}_r | \vec{e}_s) = \delta_{rs}$.

$$B(\vec{a}_i | \vec{c}_k) = \sum \delta_{rs} A_{ri} C_{sk} = \sum {}^t A_{ir} C_{rk} = ({}^t AC)_{ik} \quad \text{Oder } (B_{ik}) = {}^t AC$$

Beachten sie: $B = {}^t AC$ ist eine $r \times r$ -Matrix, ist quadratisch. Dies Resultat hat erlaubt zahlreiche nützliche Spezialisierungen und Folgerungen wie wir gleich sehen werden.

(5.1.18) Bilden wir die Determinante, so folgt

$$\bar{B}(a_R | c_S) = \det(B(\vec{a}_i | \vec{c}_j)) = \det({}^t AC).$$

(5.1.19) Ist nun $r=n$, so sind A und B quadratische Matrizen. Setzt man noch $\vec{a}_i = \vec{c}_i$ also $A=C$, so folgt nach den Rechenregeln für die Determinante:

$$\bar{B}(a_I | a_I) = (\det(A))^2 = (\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n))^2$$

Hieraus kann man die Positivdefinitheit für n -Vektoren unmittelbar ablesen.

(5.1.20) Setzt man dagegen $\vec{c}_i = \vec{e}_i$ (Orthonormalbasis), d.h. $C = \mathbb{I}_n$, so folgt

$$\bar{B}(a_I | e_I) = \det A = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n).$$

(5.1.21) Aber was ist, wenn $r < n$ gilt? Dann spannen die \vec{a}_i einen Teilraum U von V auf. Wir bilden U^\perp . Da V euklidisch ist, haben wir $V = U \perp U^\perp$. Wir ergänzen die \vec{a}_i durch **orthonormale** Vektoren aus U^\perp bis wir eine Familie b_i von n Vektoren haben.

Darauf wenden wir obige Formeln an. Also $\vec{b}_i = \vec{a}_i$ für $i=1, \dots, r$ und $\vec{b}_i = \vec{e}_i$ für $i=r+1, \dots, n$. Offenbar ist $\bar{B}(b_I | b_I) = \bar{B}(a_R | a_R)$ mit $R = \{1, 2, \dots, r\}$ und wir bekommen:

$$\bar{B}(a_R|a_R) = (\det B)^2 = (\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r, \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n))^2.$$

Auch hier ist die Positivdefinitheit manifest. Auf die geometrische Bedeutung dieser Konstruktion werden wir noch zurückkommen.

(5.1.22) Man kann die Rechnung aus (5.1.17) noch anders interpretieren. Wieder wählen wir $r=n$. Wir nehmen an, dass $a=c$ sei und a sogar Basis. Dann haben wir $\vec{a}_k = \sum \vec{e}_j T_{jk}^{-1}$ wobei T die zugehörige Transformationsmatrix ist. e ist (alte) orthonormale Basis

Dann ergibt (5.1.20) mit T^{-1} in der Rolle von A :

$\det T^{-1} = \varepsilon \sqrt{\det B(\vec{a}_i \vec{a}_k)} = \varepsilon \sqrt{\bar{B}(a_I a_I)} = \varepsilon \ a_I\ $ $\det T = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\det B(\vec{a}_i \vec{a}_k)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\bar{B}(a_I a_I)}} \quad \varepsilon \text{ Orientierungsvorzeichen}$
--

(5.1.23) Diese Beziehungen folgen auch sofort aus $B^N = {}^t T^{-1} B^A T^{-1}$, wenn man beachtet, daß die alte Basis eine Orthonormalbasis sein soll, d.h. $B^A = \mathbb{I}$.

(5.1.24) Die Formeln aus (5.1.22) sind aus folgendem Grunde bemerkenswert: Die linke Seite benötigt zu ihrer Bestimmung - wegen T - zwei Basen. Die rechte Seite dagegen läßt sich - vom Vorzeichen abgesehen - mit der einen Basis a alleine über das Skalarprodukt berechnen. Man kann mit einer einzigen festen Basis arbeiten, was ja rechnerisch vorteilhaft ist. Somit kann man über diese Formel gewisse Rechnungen, die zwei Basen verlangen in solche mit nur einer umwandeln. Die zweite Basis verflüchtigt sich dabei gleichsam in die abstrakte Existenz irgendeiner Orthonormalbasis, sobald man von der Orientierung absieht.

(5.1.25) Nochmals (5.1.8): Der Leser sollte sich an dieser Stelle unbedingt bewußt machen, dass mit einer Aussage wie " $\wedge V$ wird durch unsere Konstruktion zu einem euklidischen Raum" die Gültigkeit einer großen Menge an Formeln und Resultaten mit impliziert ist. Insbesondere gelten alle Resultate aus 10.2.1.

□ Überlegen Sie sich, was die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Dreiecksungleichung für p -Vektoren besagen.

10.5.2 Die Ausdehnung des Skalarproduktes auf den dualen Bereich

(5.2.1) Hat man auf V ein Skalarprodukt, so kann man es isometrisch auf den Dualraum übertragen und alsdann auf ganz $\wedge V^*$ ausdehnen. Da $\iota: V \rightarrow V^*$ ein **kanonischer** Vektorraumisomorphismus ist, muß man nach der üblichen Methode das Skalarprodukt B^* auf V^* mittels der Gleichung

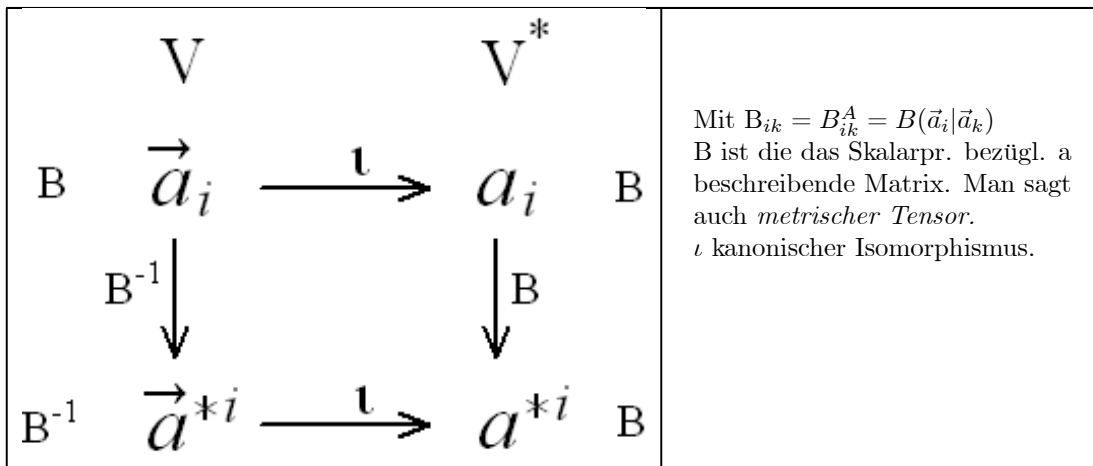
$$B^*(a^*|b^*) = \bar{B}(\iota^{-1}(a^*)|\iota^{-1}(b^*)) \quad \text{oder}$$

definieren.

(5.2.2) Von jetzt ab werden wir für das Skalarprodukt in V und V^* dasselbe Zeichen benutzen. Also B statt B^* schreiben. Voraussetzung für die Gültigkeit der Konstruktion ist, dass ι existiert und das verlangt, dass das Skalarprodukt nicht ausgeartet ist.

(5.3.3) Damit können wir sagen: Ist auf V oder alternativ V^* ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt erklärt, so ist dieses nach Art der kommunizierenden Röhren kanonisch auf ganz $\wedge V$ und $\wedge V^*$ fortsetzbar.

(5.3.4) Da auch die Existenz der reziproken Basis aus *nicht ausgeartet* folgte, hat man dann bei Vorgabe einer Basis insgesamt vier miteinander kommunizierende Basen. Das Diagramm stellt alle zugehörigen Resultate zusammen.



Auf den Diagonalen stehen sich gerade die zueinander dualen Basen gegenüber. Für die Rechnungen benötigt man den Inhalt dieses Diagramms.

(5.3.5) Beachten Sie: der metrische Tensor hat hier eine Doppelrolle: Einmal beschreibt B bzw. B^{-1} das Skalarprodukt bezüglich der zugehörigen Basis. (In der Figur das B oder B^{-1} neben der jeweiligen Basis.) Zum anderen hat B die Rolle einer Transformationsmatrix, die Basiswechsel beschreibt. (In der Figur am jeweiligen Abbildungspfeil). Die Figur stellt das zusammen.

Die erste Rolle ergibt sich aus der Definition von B , die zweite läßt sich leicht verifizieren: Man macht den Ansatz $\vec{a}_i = \sum \vec{a}^{*k} X_{ki}$ (alt durch neu). Skalare Multiplikation mit \vec{a}_m gibt sofort $B(\vec{a}_m | \vec{a}_i) = X_{mi}$, wie im Diagramm angegeben.

10.5.3 Der euklidische Inhalt

(5.3.1) In einem abstrakten Vektorraum können wir immer nur Inhalte (Volumina) von Spalten maximaler Dimension miteinander vergleichen. In drei Dimensionen können wir ebensowenig die Längen zweier Strecken auf nicht parallelen Geraden wie die Flächeninhalte zweier Parallelogramme nicht paralleler Ebenen zueinander in Beziehung setzen.

Mit der Einführung eines Skalarproduktes geht das zunächst für den Längenvergleich von Strecken. Und wir erwarten, dass die Erweiterung auf die äußere Algebra solche Vergleiche ganz allgemein ermöglicht. Ja, nach etwas Überlegung sieht man, dass wir hier viel mehr Struktur zu erwarten haben, als uns anschaulich vertraut ist.

(5.3.2) Als wichtiges Hilfsmittel für den allgemeinen Inhaltsvergleich erweist sich eine spezielle n -Form, die euklidische Volumenform, die wir jetzt besprechen wollen.

(5.3.3) V sei euklidischer Raum mit Skalarprodukt B und $\dim V = n$. Wie wird man die Inhaltsmessung angehen? Offenbar ist diese ihrer Struktur nach ein Funktional. Man hat n Kantenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ und will diesen eine Zahl zuordnen, ihr euklidisches Volumen. Ist \vec{e}_i eine Orthonormalbasis mit Rechtsorientierung, so sei wie üblich e^{*i} die zugehörige Dualbasis. Wir bilden $e^{*I} = e^{*1} \wedge e^{*2} \wedge \dots \wedge e^{*n}$ und wissen:

$$\langle e^{*I} | \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_n \rangle = \langle e^{*I} | x_I \rangle = \det(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \text{orientiertes Spatvolumen.}$$

Diese Zahl gibt das Spatvolumen als Vielfaches des von der Orthonormalbasis aufgespannten Einheitswürfels und sie ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis.

(5.3.4) D.h. e^{*I} ist die gewünschte Größe. Wir setzen $\tau^* = e^{*I} \in (\wedge V)^*$.

(5.3.5) Wie bereits oft haben wir auch hier das Problem, dass eine basisbezogene Konstruktion vorliegt. Wie sieht dasselbe τ in einer anderen Basis dargestellt aus und was geschieht, wenn man dieselbe Konstruktion mit einer anderen Basis beginnt?

(5.3.6) Sei \vec{a}_i eine zweite Basis von V mit $\vec{e}_k = \sum \vec{a}_m T_{mk}$. a muß im Gegensatz zu e keine Orthonormalbasis sein. Wir wissen, dass dann $e^* = a^* {}^t T^{-1}$ gilt. Damit folgt $e^{*I} = \det(T^{-1}) a^{*I}$. Die eventuelle

Basisabhängigkeit der Konstruktion manifestiert sich darin, dass man zur Berechnung der rechten Seite T benötigt und zur Berechnung von T benötigt man Größen beider Basen.

(5.3.7) Aber wir haben das Resultat (5.1.22), das die Determinante der Transformationsmatrix durch die Gramsche Determinante ausdrückt. Wir setzen wie üblich $B^A = (B_{ik}^A) = (B(\vec{a}_i | \vec{a}_k))$. A sei der Index für die Basis. Weiter ist $B_{ik}^E = \delta_{ik}$ für die Orthonormalbasis. Schließlich sei von jetzt ab:

$$\boxed{G^A = \det(B^A) = \det(B(\vec{a}_i | \vec{a}_k))} \quad \text{die zu } A \text{ gehörige Gramsche Determinante.}$$

(5.3.8) Damit schreibt sich unser Resultat (5.1.22) $\boxed{\det T^{-1} = \varepsilon \sqrt{G^A}}$ und $\boxed{\det T = \frac{\varepsilon}{\sqrt{G^A}}}$, wobei daran zu denken ist, dass die Ausgangsbasis orthonormal zu sein hat. Damit wird $e^{*I} = \varepsilon a^{*I} \sqrt{G^A}$. Und die rechte Seite kann in jeder Basis allein mit Hilfe der Basis bestimmt werden, sofern wir das Vorzeichen ε unberücksichtigt lassen.

(5.3.9) Beachtet man noch, daß $a^{*I} = a_I \det B^A$ gilt, so folgt:

$$\boxed{\tau^* = e^{*I} = \varepsilon a^{*I} \sqrt{G^A} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{G^A}} a_I = \text{euklidisches Volumenmaß auf } \wedge V}$$

Diese Gleichung gilt für jede Basis. Zur Berechnung von τ benötigt man nur die Basis und das Skalarprodukt! Was ε anbelangt, so vereinbaren wir: Für ein Rechtssystem ist $\varepsilon=1$ und für ein Linkssystem ist $\varepsilon=-1$ zu wählen.

(5.3.10) Anwendung von τ^* auf irgendeine Familie von n Vektoren aus V ergibt das zugehörige euklidische Spatvolumen.

(5.3.11) Andererseits folgt mit dem Entwicklungssatz für die reziproke Basis und die Bilinearität von B für jede n -Form σ^* die folgende Rechnung:

$$\sigma^* = a_I B(a^{*I} | \sigma^*) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{G^A}} a_I B(\varepsilon a^{*I} \sqrt{G^A} | \sigma^*) = \tau^* B(\tau^* | \sigma^*)$$

Beachten Sie, dass hier anders als sonst beim tensoriellen Rechnen nicht $t^* \otimes t$, sondern $t^* \otimes t^*$ auftritt.

(5.3.12) Damit erhalten wir die bemerkenswerte Formel:

$$\boxed{\sigma^* = \tau^* B(\tau^* | \sigma^*)} \quad \text{Darstellung einer beliebigen } n\text{-Form} \\ \text{als Vielfaches der Volumenform!}$$

Wir können somit ein und dieselbe Volumenform mit Hilfe beliebiger Basen darstellen, ohne die Transformationsmatrix zu benötigen.

(5.3.13) Bisher haben wir die Volumenform im Dualraumbereich dargestellt. Mit Hilfe von ι können wir in den Grundraumbereich wechseln und finden dort (\vec{a}^{*i} reziproke Basis zu a_i):

$$\boxed{\tau = \iota^{-1}(\tau^*) = \vec{a}_I^* \sqrt{G^A} = \vec{a}_I \frac{1}{\sqrt{G^A}}}$$

(5.3.14) Wie steht es nun mit dem eigentlich zu behandelnden Problem, die Inhaltsmessung auch auf die niedrigeren Dimensionen auszudehnen? Im uns anschaulich zugänglichen euklidischen Raum gilt ja folgendes geometrische Prinzip der Inhaltsmessung: Ist U Teilraum und U^\perp zugehöriges orthogonales Komplement, so bestimmt sich der Inhalt eines Körpers nach der Regel

$$\text{Volumen} = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} = \text{Inhalt in } U \times \text{Inhalt in } U^\perp. \quad (\text{Vgl. auch Kap. 9.2.2}).$$

Dieses Prinzip des Cavalieri läßt sich mit Hilfe der euklidischen Inhaltsform verallgemeinern.

(5.3.15) Sei dazu $U \subset V^*$ ein k -dimensionaler Teilraum mit Basis a_1^*, \dots, a_k^* . Sei weiter U^\perp das zugehörige orthogonale Komplement mit Basis a_{k+1}^*, \dots, a_n^* . Die Indexmenge für U ist $K = \{1, 2, \dots, k\}$. Entsprechend $K' = \{k+1, \dots, n\}$. Dann wird U durch a_K^* und U^\perp durch $a_{K'}^*$ beschrieben. Die beschreibende Matrix B hat Blockdiagonalform und erfüllt mit selbsterklärender Schreibweise:

$$G^A = \det B^A = B_{II} = B_{KK} B_{K'K'} = G_U^A \cdot G_{U^\perp}^A$$

(5.3.16) Wir setzen:

$$\tau_U^* = a_K^* \sqrt{B_{KK}^A} = a_K^* \sqrt{G_U^A} \quad \text{und} \quad \tau_{U^\perp}^* = a_{K'}^* \sqrt{B_{K'K'}^A} = a_{K'}^* \sqrt{G_{U^\perp}^A}$$

(5.3.17) Diese beiden Formen leisten alles, was wir erwarten: Im Falle einer Orthonormalbasis $a=e$ liefern sie das euklidische k - bzw. $(n-k)$ -dimensionale Volumen. Ist U eine Ebene im Raum, so erhält man den euklidischen Flächeninhalt. Usw.

(5.3.18) Und zusammen ergeben sie wegen der angegebenen Aufspaltung von GA durch Dachproduktbildung gerade die Volumensform:

Inhalt gleich
Grundfläche \times Höhe

$$\tau^* = \tau_U^* \wedge \tau_{U^\perp}^*$$

(5.3.19) Überdies ist es auch hier so, daß die Bestimmungsformel nur die Kenntnis der jeweiligen Basis verlangt. Ja, um τ_U^* zu bekommen, benötigt man nur die Kenntnis der Basis von U , nicht von ganz V !

10.5.4 Der *-Isomorphismus

(5.4.1) Es sei V endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit euklidischem Skalarprodukt B , das wir gleich auf die äußere Algebra $\wedge V$ erweitern. Zu jedem k -dimensionalen Teilraum U von V gibt es dann das eindeutig bestimmte $(n-k)$ -dimensionale orthogonale Komplement U^\perp . Geometrisch die "Normale zu U ". Vertraut ist uns im dreidimensionalen Fall das Paar Ebene/Normale. Besonders in der Physik ist es üblich, diese Kopplung auf die zugehörigen Inhaltsmaße auszudehnen: Man wählt in der Ebene zwei Kantenvektoren \vec{a} und \vec{b} , die eine Flächeneinheit festlegen und bestimmt dazu den Normalenvektor $\vec{a} \times \vec{b}$, dessen Länge gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms in der Ebene ist. Das erweist sich für den Formelbau als sehr nützlich. Man denke an Termkonstruktionen wie $\Delta \vec{D} \cdot \vec{v}$, zur Mengenerfassung einer durch eine Fläche hindurchströmenden Materie. U gehört in der äußeren Algebra zum Raum der k -Vektoren und U^\perp zum Raum der $(n-k)$ -Vektoren. Beide Räume haben dieselbe Dimension, sind also auf jeden Fall isomorph. Kann man einen Isomorphismus konstruieren, der die Inhaltsmaße koppelt, also das Vektorprodukt des dreidimensionalen Raumes verallgemeinert? Die Antwort ist positiv, wie wir sehen werden. Gemäß der gegebenen Problemstellung führen wir den Isomorphismus hier im Grundraum V ein und vermeiden den Dualraum. (Also im Raum der Konfigurationen, nicht der Messoperationen.)

(5.4.2) Sei \vec{a}_i eine Basis von V und \vec{a}_i^* die zugehörige reziproke Basis. Wir definieren eine lineare Abbildung $*\wedge V \rightarrow \wedge V$ wie folgt über die Basiswerte.

$\begin{aligned} * \vec{a}_R^* &= \varepsilon \frac{\varepsilon_R}{\sqrt{G^A}} \vec{a}_{R'} \\ a_I &= \varepsilon_R a_R \wedge a_{R'} \quad (\text{Kap.9:(2.20.1)}) \end{aligned}$	$\vec{e}_R \wedge \vec{e}_{R'} = \varepsilon_R \vec{e}_I$	$* \vec{e}_R = \varepsilon \vec{e}_R \vec{e}_{R'} \quad (\text{für Orthonormalbasen})$
--	---	--

Die Werte dieser Abbildung werden immer $*x$ anstelle $*(x)$ geschrieben. ε ist der früher eingeführte Vorzeichenfaktor, 1 für ein Rechts- und -1 für ein Linkssystem.

Inspektion dieser Formel zeigt: $*$ bildet für jedes k den Raum der k -Vektoren isomorph auf den der $(n-k)$ -Vektoren ab. Besonders einfach wird die Konstruktion im Falle einer Orthonormalbasis mit $\det(B^E) = G^E = 1$ und $e = e^*$. Bis auf ein eventuelles Vorzeichen ist der Wortindex einfach durch sein Komplement zu ersetzen. Beachten Sie, dass der Vorzeichenfaktor ε_R sich auf die Teilmenge R bezieht und nicht auf deren Komplement R' .

□ Verifizieren Sie, dass $\varepsilon_R \varepsilon_{R'} = (-1)^{k(n-k)}$ gilt und dass daher für ungerade Dimension n $\varepsilon_R = \varepsilon_{R'}$ gilt.

(5.4.3) Im allgemeinen Fall ist unbedingt zu beachten, dass für Urbild und Wert verschiedene Basen genommen werden. Ein Element der reziproken Basis etwa wird auf ein Ausgangsbasiselement abgebildet. Nur so läßt sich der Wert einfach - ohne Summation - schreiben. Inhaltlich ist das klar: Die reziproken Vektoren legen die jeweilige Normale fest.

(5.4.4) Wir wiederholen kurz die zugehörige Interpretation des Vektorproduktes aus 9.2.11.

Beispiel: Im V^3 sei eine Orthonormalbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ mit Rechtsorientierung gegeben. Durch $*$ wird der Nullraum auf den Dreiraum abgebildet:

$$\alpha \mapsto * \alpha = \alpha * e_\emptyset = \alpha \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$$

Eine reine Zahl wird zu einer Volumendichte.

Und der Raum der 2-Vektoren wird auf den der 1-Vektoren abgebildet vermöge

$$*\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad * \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \quad * \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

Oder in Indexschreibweise

$$*(\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) = \Sigma \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad * \vec{e}_k = \frac{1}{2} \Sigma \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j$$

Setzt man $\vec{a} = \Sigma \vec{e}_i a_i$ und $\vec{b} = \Sigma \vec{e}_k b_k$, so folgt

$$\begin{aligned} *(\vec{a} \wedge \vec{b}) &= *(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) + *(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3)(a_1 b_3 - a_3 b_1) + *(e_2 \wedge \vec{e}_3)(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ &= \vec{e}_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) + (-\vec{e}_2)(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{e}_1 = \vec{a} \times \vec{b}. \end{aligned}$$

Man erhält über $*$ tatsächlich das Vektorprodukt der beiden Eingabevektoren. Als (restringierte) Abbildung:

$$* = (V \wedge V, \vec{a} \wedge \vec{b} \mapsto *(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}, V).$$

Beachten Sie die Vorzeichenentstehung im mittleren Term.

(5.4.5) Welcher Zusammenhang besteht mit der in 10.5.3 eingeführten Volumenform τ aus (5.3.13)?

Satz: Es sei $*$ der eingeführte Isomorphismus und $\tau = a_I \sqrt{G^A}$ der zugehörige Volumeneinheitsvektor. **Dann** gilt folgende Beziehung

$$\boxed{B(\mu \wedge \lambda | \tau) = B(*\mu | \lambda)}$$

(5.4.6) Über diese Beziehung folgen sofort Eindeutigkeit und Basisunabhängigkeit des $*$ -Isomorphismus. (Für zwei angenommene Isomorphismen $*$ und $\bar{*}$ die Gleichungen subtrahieren und nicht ausgeartet benutzen.)

(5.4.7) **Beweis** des Satzes: Es genügt, die behauptete Beziehung für die Elemente einer Basis zu beweisen. Die meisten der entstehenden Skalarprodukte sind Null. Für die verbleibenden rechnen wir beide Seiten aus und zeigen, dass sie übereinstimmen. ($\mu = \vec{a}_R^*$ und $\lambda = \vec{a}_{R'}^*$)

$$\begin{aligned} B(*\vec{a}_R^* | \vec{a}_{R'}^*) &= B\left(\varepsilon \frac{\varepsilon_R}{\sqrt{G^A}} \vec{a}_{R'} | \vec{a}_{R'}^*\right) = \frac{\varepsilon \varepsilon_R}{\sqrt{G^A}} \\ B(\vec{a}_R^* \wedge \vec{a}_{R'}^* | \tau) &= \varepsilon_R B(\vec{a}_I^* | \tau) = \varepsilon_R^A B(a_I^* | \frac{\varepsilon}{\sqrt{G^A}} a_I) = \frac{\varepsilon \varepsilon_R}{\sqrt{G^A}} \quad \text{mit (5.3.16)} \end{aligned}$$

(5.4.8) Bisher haben wir den $*$ -Isomorphismus über die Werte der reziproken Basis bestimmt. Aber man möchte natürlich auch die Werte auf der Ausgangsbasis kennen.

Satz: Es gilt:

$$\boxed{*\vec{a}_S = \varepsilon \varepsilon_S \sqrt{G^A} \vec{a}_{S'}^*}$$

(5.4.9) Beispiel: Es sei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ eine Basis in V_0^3 . Wir haben nach der Formel (5.5.8) $*(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{c}^* \text{Vol}$, wobei $\text{Vol} = \sqrt{G^A}$ das Spatvolumen bezeichnet. Aber es gilt hier $\vec{c}^* = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})}$. Und eben das folgt wegen $*(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$ aus unserer Formel.

(5.4.10) Beweis von (5.5.8) unter Verwendung von (2.10.4) aus Kap.9:

$$\begin{aligned} * \vec{a}_S &= *(\Sigma \vec{a}_T^* B_{TS}) = \Sigma \frac{\varepsilon \varepsilon_T}{\sqrt{G^A}} \vec{a}_{T'} B_{TS} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{G^A}} \Sigma \varepsilon_T \vec{a}_{T'} (\varepsilon_T \varepsilon_S G^A B_{S'T'}^{-1}) \\ &= \varepsilon \sqrt{G^a} \Sigma \varepsilon_S \vec{a}_{T'} B_{T'S'}^{-1} = \varepsilon \sqrt{G^A} \varepsilon_{S'} \vec{a}_S^* \end{aligned}$$

(5.4.11) Es folgt $** \vec{a}_S = \varepsilon_S \varepsilon_{S'} \vec{a}_S$. Das wieder gibt:

$** \vec{a}_S = (-1)^{k(n-k)} \vec{a}_S$	Ist $n = \dim V$ ungerade, dann gilt $** = id_V$
--	---

Es war $a_S \wedge a_{S'} = (-1)^{k(n-k)} a_{S'} \wedge a_S = (-1)^{k(n-k)} \varepsilon_{S'} a_I$, wenn S genau n Elemente hat und $n = \dim V$ ist. Hiermit folgt $\varepsilon_S \varepsilon_{S'} = (-1)^{k(n-k)}$ und das ist für ungerades n immer +1.

(5.4.12)

Satz: * ist eine Isometrie von $\wedge V$. D.h. Es gilt $B(*X | *Y) = B(X | Y)$.

D.h. * überträgt tatsächlich die Inhaltseinheiten auf die jeweiligen Normalen.

(5.4.13) Beweis: Wieder genügt der Gültigkeitsnachweis für die Basiswerte. Dabei verwenden wir die Formel (2.10.4) für die inverse Matrix aus Kap.9. und die Symmetrie des Skalarproduktes.

$$B(*\vec{a}_R | *\vec{a}_S) = \varepsilon_R \varepsilon_S G^A B(a_{R'}^* | \vec{a}_{S'}) = \varepsilon_R \varepsilon_S G^A B_{R'S'}^{-1} = B_{SR} = B(\vec{a}_R | \vec{a}_S)$$