****

Höhere Mathematik für Physiker
Teil II

F. Krause

Kapitel 9
Die äußere Algebra

****

Kapitel 9: **Die äußere Algebra**

Kapitel 9 **Äußere Algebra und Determinante.**

9.1 **Die äußere Algebra eines Vektorraumes**

9.1.0 **Vorbemerkung**

Was folgt alles aus einem Axiomensgstem, etwa dem für Vektoren? Und - ebenso wichtig - was kann man **nicht** folgern? Das sind schwer auszuschöpfende, aber, spannende und komplizierte Probleme. Man denke an den Klassiker dieses Fragetyps, das Parallelenaxiom. Man war sich intuitiv sicher, dass es aus den übrigen Axiomen folgen müsse, hielt die Alternative nicht für denkbar. Bis man zeigte, dass die Existenz der eindeutig bestimmten Parallele keineswegs ableitbar war. Das Denkbare muß keineswegs immer auch tatsächlich sein. In unserem Fall haben wir zunächst übliche Eigenschaften der Vektorrechnung gefolgert, etwa die Existenz der Dimension oder den Basisergänzungssatz. Aber es folgt auch die Existenz ganz neuer zugehöriger Objekte, wie etwa die des Dualraums. Wir haben es hier erneut mit einer Form von Determinismus zu tun. Größen wie ein Skalarprodukt oder eine Norm kann man dagegen nicht herleiten, man muss sie über zusätzliche Axiome einführen. Im vorliegenden Kapitel soll ein weiteres mathematisches Objekt besprochen werden, das zu jedem Vektorraum gehört, durch ihn determiniert wird, die äußere Algebra des Vektorraums. Das ist eine algebraisches Objekt, mit einer Reihe nützlicher Eigenschaften. Genauer gesagt ist sie eine Vergrößerung des Ausgangsraumes mit einer zusätzlichen Produktbildung. Die neuen Vektoren beschreiben so etwas wie die Teilräume desAusgangsraumes! Und die Multiplikation bildet eine Verallgemeinerung des Vektorproduktes, das in der ursprünglichen Form nur in drei Dimensionen definiert werden kann.

Im Zusammenhang mit der gedanklichen Analyse der Vektorrechnung sind noch einige Probleme offen: Welche der uns aus dem geometrischen Anschauungsraum geläufigen Eigenschaften folgen aus den Axiomen und welche tun das nicht? Wenn sie nicht folgen, dann müssen wir die Axiome geeignet ergänzen.

Dieses und das nächste Kapitel sollen hier weitere Klarheit bringen. Winkel und Längen etwa verlangen zusätzliche Axiome, wie wir in Kapitel 10 besprechen werden. Dagegen ist es möglich, bereits mit Hilfe der Vektorraumaxiome - genauer der jetzt einzuführenden äußeren Algebra - eine Inhalts- und Orientierungs**vergleich** vorzunehmen.

Die äußerer Algebra führt uns auf die *Determinante*, das ist eine Zahl. die einen Endomorphismus bzw. eine Matrix charakterisiert. Auf solche Determinanten stößt man zunächst häufiger beim Rechnen. Unsere Analyse zeigt, weshalb das so ist, gibt diesen Rechengrößen eine inhaltlich geometrische Bedeutung. Mit Hilfe der äußeren Algebra ist es weiter möglich, eine Reihe geometrischer Sachverhalte zu algebraisieren. Also geometrische Eigenschaften, die man üblicherweise mit Worten und langen Konstruktionsbeschreibungen formuliert, in Formeln umzuwandeln.

Aber die äußere Algebra hat nicht nur die Funktion, zu zeigen, was aus den Axiomen alles folgt. Im wichtigen Bereich der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten gewinnt sie unter dem Stichwort *Differentialformen* für die moderne Mathematik eine enorme Bedeutung. Auch dort erlaubt unser Vorgehen, benötigte Strukturen besser und inhaltsbezogener zu verstehen.

Eine weitere wichtige mathematische Struktur, die unmittelbar aus den Vektorraumaxiomen folgt, ist das *Tensorprodukt*. Wir führen es am Ende von Kapitel 9 **analog zur äußeren Algebra** ein. Mathematisch besteht zwischen beiden Objekten ein tieferer Zusammenhang, auf den wir hier aber nicht eingehen.

Abschließend sei auf eine allgemeine Botschaft verwiesen, die das vorliegende Kpitel übermittelt: Komplexe Fragen zu bestimmten Objekten, hier den Vektoren, werden mathematisch seltener direkt, durch direktes Rechnen, als über den Umweg neu konstruierter Strukturen gelöst und verstanden. Beispiele solcher Strukturen sind de Dualraum und die äuß ere Algebra und das Tensorprodukt.

9.1.1 *Algebren*: **Vektorräume mit zusätzlicher Multiplikation**

(1.1.1) Definition: Sei (V,+,·.∗) ein Vektorraum über dem (kommutativen) Körper K mit einer zusätzlichen inneren Multiplikation $*V \times V \to V$. Zusätzlich soll diese Verknüpfung multipliktiv bilinear sein. D.h., es soll gelten:

$(x+y)*z = x*z + y*z$	$x*(y+z) = x*y + x*z$	alle x,y,z$\in V$	Distributivgesetze
$(\lambda x)*y = x*(\lambda y) = \lambda(x*y)$	alle $\lambda \in K$ und x,y$\in V$		Homogenität

(1.1.2) Beispiele: 1) V^3 mit Vektorprodukt, das Paradebeispiel. 2) Mat_K(n,n) Ring der quadratischen Matrizen über K 3) Sei X nicht leere Menge und $\mathfrak{F}$(X)=$\mathfrak{F}$(X,K) die Menge aller Abbildungen X→K. Wertemengenübertragung macht daraus eine Algebra über K. Die Skalarfelder G→ $\mathbb{R}$ bilden einen wichtigen Spezialfall.

(1.1.3) Zusätzliche Eigenschaften der Produktbildung werden wie üblich dem Namen hinzugefügt: *Assoziative* Algebra, *kommutative* Algebra, *Algebra mit Eins* usw. Die Dimension einer Algebra ist die Dimension des zugehörigen Vektorraums. Auf die mit der Algebrastruktur verbundenen Routineprobleme - speziell die Ubertragungsprobleme (vgl. Kap.4.2) - gehen wir hier nicht ein.

(1.1.4) Der V^3 mit dem Vektorprodukt ist weder assoziativ noch kommutativ! Stattdessen hat man folgende Eigenschaften:

$\vec{x}\times\vec{y} = -\vec{y}\times\vec{x}$	Antikommutativität
$\vec{x}\times(\vec{y}\times z)+\vec{z}\times(\vec{x}\times\vec{y})+\vec{y}\times(\vec{z}\times\vec{x})\boxed{=0}$	Jakobi-Identität

(1.1.5) Definition: Eine Algebra, die antikommutativ ist und die Jacobi-ldentität erfüllt, heißt Lie-Algebra. Lie-Algebren haben für Mathematik und theoretische Physik enorme Bedeutung erlangt.

9.1.1a **Zur Existenz reeller Divisionsalgebren**

(1.1.6) Es liegt nahe, die Algebrastruktur mit der Körperstruktur zu vergleichen, insbesondere zu fragen: Wann ist eine Algebra zugleich Körper. Eine Algebra ist ja immer auch Ring, eventuell nicht assoziativer Ring. Man muss dazu ja nur die Multiplikation der Vektoren mit den Skalaren vergessen. Wann ergibt sich so sogar ein Körper?

Das ist sehr selten der Fall, wie das nachfolgende Beispiel der endlichdimensionalen Vektorräume über $\mathbb{R}$ zeigt.

(1.1.7) Oder auch: Sei V endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit dimV=n. Kann man auf V eine zusätzliche Multiplikation (analog zum Vektorprodukt) einführen, so daß V zu einem Körper wird? Der entscheidende Punkt ist die **Division**, also die Möglichkeit die Gleichungen $a*x=b$ und x*a=b für a$\neq$ 0 eindeutig zu lösen. *Teilen durch einen Vektor!* Die Antwort sieht wie folgt aus:

- Ist n ungerade, dann ist das ausschließlich für n=1 möglich und es entsteht der Körper der reellen Zahlen.
- Ist n gerade, dann ist das nur für n=2 und n=4 möglich. Für n=2 ergeben sich die komplexen Zahlen, für n=4 die nicht kommutativen Quaternionen.

Für n=8 ist die Division erfüllbar, aber das Produkt ist weder assoziativ noch kommutativ (Oktonionen).

(1.1.8) Der Satz liefert erneut ein anspruchsvolles Beispiel unseres Themas *Was wird durch was determiniert*? Der erstaunlich einfache Beweis wiederum illustriert den Nutzendes eingeführten Begriffsapparates der linearen Algebra.

(1.1.9) **Beweis für ungerade Dimension**. Der nicht besprochene Teil für gerade Dimension ist schwierig und anspruchsvoll.

Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, daß für V=$\mathbb{R}^{2n+1}$ eine Multiplikation $*$ gefunden sei, die (V,+,$*$) zu einem Körper macht. Für jedes a∈V definieren wir die Abbildung $\varphi_a=(V,x\mapsto a*x,V)$. Infolge der Bilinearität von $*$ ist das ein Vektorraumhomomorphismus. Da V aber auch Körper sein soll, ist diese Abbildung für a≠0 umkehrbar (y=a$*$x gibt x=$a^{-1}*$y für a≠0). D.h. φ_a ist für a≠0 ein Isomorphismus. Oder:

$$Kern\varphi_b \text{ nichttrivial impliziert b=0.} \qquad (*)$$

Jetzt setzen wir für φ_a das Eigenwertproblem an, suchen also $\lambda\in\mathbb{R}$ und x∈V mit x≠ 0, so daß $\varphi_a(x)=\lambda x$ gilt.

Die zu entwickelnde Theorie der Determinanten wird zeigen: Dies Problem hat für ungerade Dimension immer eine Lösung in $\mathbb{R}$. (Vgl.****). D.h. wir haben die gültige Gleichung $\varphi_a(x)=\lambda x$. Sei nun e∈V die Körpereins, die es ja geben muß und die Sie nicht mit 1∈ $\mathbb{R}$ verwecheslen sollten. Dann folgt $\varphi_a(x) = a * x = \lambda(e * x)$. Oder wegen der Bilinearität $(a - \lambda e) * x = 0$. Das heißt aber, dass $\varphi_b = \varphi_{a-\lambda e}$ einen nichttrivialen Kern hat. Wegen (*) ist dann $a = \lambda e$ für a$\neq$ 0. **Jeder Vektor a ist skalares Vielfaches der Körpereins!** Oder V ist eindimensional und somit isomorph zu $\mathbb{R}$.

Nochmals kurz ergänzt die routinemäßige **Bearbeitung des Eigenwertproblems**: Man führt eine Basis E. von V ein. Sei M die Matrix, die φ_a bezüglich dieser Basis beschreibt. Also $\varphi_a(E_i) = \Sigma_k E_k M_{ki}$. Dann führt $\varphi_a(x) = \lambda x$ auf das Gleichungssystem $\Sigma_i(M_{ki} - \lambda\delta_{ki})x_i = 0$.

Hierbei sind λ und die Komponenten x_i unbekannt. Oder: Gesucht ist ein λ, für das der Kern der Matrix $(M_{ki} - \lambda\delta_{ki})$ nichttrivial bzw. der Rang nicht maximal ist.

(1.1.10) Schauen wir uns das den ungeraden Fall n=3 konkret an:

$$(M_{ki} - \lambda\delta_{ki}) = \begin{pmatrix} M_{11} - \lambda & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} - \lambda & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} - \lambda \end{pmatrix}$$

Nicht maximaler Rang heißt:
Spaltenvektoren linear abhängig
Also deren Spatprodukt Null!

Ausrechnen des Spatproduktes $\vec{s}_1 \times (\vec{s}_2 \times \vec{s}_3)$ gibt folgende Gleichung, die als Bestimmungs gleichung für λ zu interpretieren ist:

$$\begin{aligned} 0 &= (-\lambda)^3 + (M_{11} + M_{22} + M_{33})\,(-\lambda)^2 \\ &\quad + ((M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}) + M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}) + (M_{22}M_{33} - M_{23}M_{32})) \\ &\quad + (M_{11}M_{22}M_{23} + M_{12}M_{23}M_{31} + M_{13}M_{21}M_{32} - M_{11}M_{23}M_{32} + M_{13}M_{22}M_{31} + M_{12}M_{21}M_{33}) \end{aligned}$$

Bezüglich λ ist das eine kubische Gleichung, **die immer eine reelle Nullstelle besitzt.** Und daher hat das eigenwertproblem die gewünschte Lösung. Die Koeffizienten des Polynoms sind übrigens sehr gesetzmäßig aufgebaut. Genauere Inspektion lohnt sich.

9.1.1b **Die basisabhängige Konstruktion von Algebren zu einem gegebenen Vektorraum**

(1.1.11) Es gibt also nur wenige Algebren, die Körper sind. Aber andererseits gibt es viel Algebren! Mit Hilfe der folgenden Konstruktion erhält man leicht alle Algebren für den endlichdimensionalen Fall. Das Vorgehen ist weitgehend analog zur Konstruktion alle Homomorphismen von Vektorräumen mit Hilfe der Fundamentalidentität:

(1.1.12) Sei (A,$*$) Algebra über K der Dimension n und E_1,...,E_n eine Basis des zugehörige Vektorraumes. Der Körper K sei kommutativ. Dann folgt mit *biliear* für X,Y$\in A$:

$$(x, y) \mapsto X * Y = (\Sigma_i E_i x_i) * (\Sigma_k E_k y_k) = \Sigma_{ik}(E_i * E_k)x_i y_k = \Sigma_{ik\ell} E_\ell c^\ell_{ik} x_i y_k$$

Der letzte Schritt enthält die übliche Argumentation: Da $E_i * E_k \in V$ ist, gibt es eine eindeutige Basisdarstellung dieses Elementes usw..

(1.1.13) Die auf diese Weise eindeutig bestimmten Körperelemente c^ℓ_{ik} *die* ***Strukturkonstanten*** *der Algebra bezüglich der Basis E.* Es sind n^3 Körperelemente - also eine *Würfelmatrix* - und sie sind durch Algebra und Basis eindeutig bestimmt.

(1.1.14) Von links nach rechts gelesen, erlaubt die Gleichung die Berechnung des Produktwertes bei einer vorgegebenen Algebra.

(1.1.15) Gibt man dagegen die Körperelemente c^ℓ_{ik} irgendwie vor und liest man von rechts nach links, dann erhält man eine innere Verknüpfung $(X, Y) \mapsto X * Y$ in V. Man verifiziert unmittelbar, dass sie bilinear ist, d.h. man hat eine Algebra konstruiert (deren Strukturkonstanten bezüglich der gegebenen Basis gerade die c sind). Damit hat man alle Algebren zum vorgegebenen Vektorraum konstruiert und das sind enorm viele.

(1.1.16) Überdies gilt, wie man sofort verifiziert:

- Ist $E_i * E_k = E_k * E_i$ für alle i,k, dann ist die Algebra kommutativ.
- Ist $(E_i * E_j) * E_k = E_i * (E_j * E_k)$ für alle i,j,k, dann ist die Algebra assoziativ.

- Gilt $E * E_k = E_k * E = E_k$ für alle k, dann ist E neutrales Element der Algebra.

□ Sei n=3. Wieviele Beziehungen sind daher zu prüfen, wenn man nachweisen will, dass $*$ assoziativ ist?

(1.1.17) Beispiel: Die Strukturkonstanten des Vektorproduktes bezüglich einer kartesischen Rechtsbasis bilden den ε-*Tensor der Physik*:

$$\boxed{c^{\ell}_{ik}=\varepsilon_{\ell ik}=\begin{cases} 1 & \text{(ikl) zyklische Permutation von (123)} \\ -1 & \text{(ikl) antizyklische Permutation von (123)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

Also hat man folgende wichtige Formel für das Kreuzprodukt:

$$\boxed{\vec{x} \times \vec{y} = \Sigma_\ell \vec{e}_\ell \varepsilon_{\ell ik} x_i y_k.}$$

(1.1.18) Ein Problem bleibt: Wie verhalten sich die Strukturkonstanten, wenn man die Basis wechselt? Diese Frage behandeln wir im Rahmen der Tensorrechnung.

Unser Etappenziel:

- ⧫ Gegeben der Vektorraum V der Dimension n mit Basis E.
- ⧫ Konstruiere dazu über die Strukturkonstantenmethode eine Algebra der Dimension 2^n, mit herausragenden Eigenschaften.
- ⧫ und zeige, dass diese Algebra unabhängig von der Basiswahl ist.

9.1.2 Die äußere Algebra eines Vektorraums

(1.2.1) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K. K sei immer kommutativ. dimV=n und l = {1,2,...,n} eine Indexmenge, genauer die Indexmenge, die wir zur Indizierung der Basiselemente von V verwenden.

(1.2.2) Sei $R \subset I$ eine Teilmenge. Wenn wir R durch Aufzählung der Elemente angeben, also $R = \{i_1, .i_2, ..., i_k\}$, dann nehmen wir jetzt grundsätzlich **wachsende Reihenfolge** an, also $i_1 < i_2 < ..... < i_k$. Wir werden solche Mengen R gerne in Wortform schreiben, als R=$i_1 i_2 ....i_k$ oder spezieller R=1246. Dagegen ist R=2164 unzulässig. Weiter sei |R| gleich der Anzahl der Elemente und R′ das Komplement von R in I. Es gibt 2^n Teilmengen von I. Darunter $\binom{n}{k}$ mit genau k Elementen.

(1.2.3) Beispiel für n=5und R={1,3,4}. Also R′={2,5} und |R|=3. Es gibt 10 Teilmengen R mit |R|=3. In der Wortschreibweise ist R=134.

(1.2.4) Jetzt sei (e_R) mit R$\subset I$ eine Familie von 2^n noch nicht weiter spezifizierten Objekten, die wir als Basis eines Vektorraumes über V interpretieren wollen. Wir bezeichnen diesen Raum mit ∧V. Er besteht mithin aus allen formalen Linearkombinationen der e_R.

$$\wedge V = \{\Sigma_R e_r \alpha_R | \alpha_R \in K, R \subset I\}$$

Das ergibt in der üblichen Weise ein Vektorraum über K mit Basis e_R und daher der Dimension 2^n.

(1.2.5) Um daraus eine Algebra zu machen, genügt es, die Produkte der Basisvektorer festzulegen. Wir wollen die Multiplikation mit ∧ bezeichnen (gelesen Dach) und müssen dazu festlegen, welchen Wert $e_R \wedge e_S$ haben soll.

(1.2.6) Die folgende genialische Konstruktion leistet eben dies. Nochmals: Es ist leicht eine Algebra anzugeben, aber schwer, eine zu finden, die herausragende Eigenschaften hat.

Für s,t∈I definieren wir eine Hilfsfunktion ε(s.t) durch

$$\boxed{\varepsilon(\text{s.t})=\begin{cases} 0 & \text{für s=t} \\ 1 & \text{falls s<t} \\ -1 & \text{falls s>t} \end{cases}}$$

Ettwa $\varepsilon(3,2) = -1$ und $\varepsilon(1,4) = 1$.

(1.2.7) Damit sei (Π steht für *Produkt aller...* analog zu Σ):

$$\boxed{e_R \wedge e_S=(\Pi_{r\in R, s\in S}\ \varepsilon(r,s))e_{R\cup S}.}$$

D.h. alle bis auf **höchstens eine** der Strukturkonstanten (R und S fest) sind Null. Und diese ist auch noch Null, falls R∩S≠ ∅. Denn dann enthält der Vorfaktor einen Faktor ε(r,r)=0 . Also

$$c_{RS}^T = 0 \text{ für } T \neq R \cup S \text{ oder } R \cap S \neq \emptyset.$$
$$e_R \wedge e_s = \varepsilon e_{R \cup S} \text{ für } R \cap S = \emptyset \text{ und } \varepsilon = \pm 1.$$

(1.2.2) Beispiele:

$$e_{\{1\}} \wedge e_{\{1\}} = 0 \quad e_{\{1,3\}} \wedge e_{\{2,4\}} = (1)(1)(-1)(1)e_{\{1234\}} \text{ usw.}$$

$e_\emptyset$ soll neutrales Element sein. Das ist mit der vorangegangenen Definition verträglich wegen R∪∅=R und R∩∅ = ∅.

Ist |R|+|S|>n, so haben R und S mindestens ein Element gemeinsam, so dass immer $e_R \wedge e_S$=0 ist.

(1.2.9) **Damit haben wir ∧V zu einer Algebra über K gemacht**.

(1.2.10) Die Algebra hat die Dimension 2^n. Welches sind ihre weiteren Eigenschaften? Hierzu gehen wir die üblichen Fragen durch (vgl. Kap 3.1):

(1.2.11) **Vertauschen von Faktoren.**

$$e_R \wedge e_S = \Pi\varepsilon(r,s)e_{R\cup S} \qquad e_S \wedge e_R = \Pi\varepsilon(s,r)e_{S\cup R} \qquad R \cup S = S \cup R.$$

Man sieht: Enthält der eine Vorfaktor eine Null, etwa ε(k,k)=0, so der andere auch. Enthält der eine ein +1=ε(i,j), so der andere ein -1=ε(j,i). Folglich gilt immer

$$\boxed{e_R \wedge e_S = (-1)^{pq} e_S \wedge e_R \quad \text{wobei r=|R| und q=|S|.}}$$

Ist p oder q gerade, so vertauschen die beiden Faktoren. Sind p und q beide ungerade, so antikommutieren sie. Durch Linearkombinationsbildung kann man das Problem der Vertauschung beliebiger Vektoren behandeln. Etwa $(e_{\{34\}}+e_{\{4\}})\wedge e_{\{1\}}=e_{\{1\}}\wedge(e_{\{34\}}-e_{\{4\}})$.

(1.2.12) **Assoziativität**. Wir rechnen beide Seiten aus:

$$e_R \wedge (e_S \wedge e_T) = e_R \wedge (\Pi_{st}\varepsilon(s,t))e_{S\cup T} = (\Pi_{st}\varepsilon(s,t))(\Pi_{rn}\varepsilon(r,n))e_{R\cup R\cup T}$$

Das ist Null für S∩T≠ ∅. Sonst wegen n∈S∪T, also n∈ S oder n∈T ...... $= (\Pi\varepsilon(s,t))(\Pi\varepsilon(r,s))(\Pi\varepsilon(r,t))$. Die Rechnung für die andere Seite ergibt offensichtlich dasselbe. **Das eingeführte Produkt ∧ ist assoziativ.**

(1.2.13) **Neutrales Element / Inverse Elemente**.

$e_\emptyset$ ist neutral, wie bereits erwähnt. Inverse Elemente kann es in der Regel nicht geben. Wir werden dies noch genauer verstehen.

(1.2.14) **Multiplikative Generatoren** (*Atome*). Wir betrachten die einelementigen Teilmengen von I. Ist allgemein R={i_1,.....,i_k} mit $i_1 < i_2 < ... < i_k$, so gilt R={i_1}∪{i_2} ∪ ...... ∪ $\{i_k\}$. Nach unserer Regel ist

$$e_{\{i_1\}} \wedge e_{\{i_2,....i_k\}} = \varepsilon(i_1,i_2)......\varepsilon(i_1,i_k)e_R = e_R.$$

Setzt man das induktiv fort, so ergibt sich folgende Formel:

$$\boxed{e_R = e_{\{i_1....i_k\}} = e_{\{i_1\}} \wedge e_{\{i_2\}} \wedge .... \wedge e_{\{i_k\}}}. \qquad i_1 < i_2 < ... < i_k \text{ nicht vergessen}$$

(1.2.15) Man kann also alle Basisvektoren mit Hilfe der Dachmultiplikation auf die $e_{\{i\}}$ zurückführen. Ist |R|=k, so hat man genau k dieser atomaren Faktoren. Jede Produkt mit mehr als n derartigen Faktoren ist Null.

(1.2.16) Wir verallgemeinern und formalisieren diesen Sachverhalt wie folgt: **Die Gradierung von ∧V:**

♦ Es sei k eine ganze Zahl mit 0≤k≤n. Dann gibt es genau $\binom{n}{k}$ Basisvektoren e_R mit |R|=k.

Diese spannen einen Teilraum von $\wedge V$ auf, den wir mit $\overset{k}{\wedge}$V bezeichnen.

♦ Die Elemente dieses Teilraumes nennen wir auch k-Vektoren.

♦ /\V selbst ist die direkte Summe dieser (n+1) Teilräume.

♦ Jeder k-Vektor mit k>n ist derfinitionsgemäß Null.

Die Zahl k entspricht dem Grad bei Polynomen.

(1.2.17) Als Beispiel stellen wir die Struktur von $\wedge V$ für V=V^3 genauer dar. Also $\wedge V = \left(\overset{0}{\wedge} V\right) \wedge \left(\overset{1}{\wedge} V\right) \wedge \left(\overset{2}{\wedge} V\right) \wedge \left(\overset{3}{\wedge} V\right)$.

Grad k	Raum	Basis	Allgemeiner k-Vektor
0	$\overset{0}{\wedge} V \cong K$	$e_\emptyset$	$e_\emptyset \alpha$
1	$\overset{1}{\wedge} V \cong V$	$e_{\{1\}}, e_{\{2\}}, e_{\{3\}}$	a=$e_{\{1\}}\alpha_1 + e_{\{2\}}\alpha_2 + e_{\{2\}}\alpha_2$
2	$\overset{2}{\wedge} V$	$e_{\{12\}}, e_{\{23\}}, e_{\{13\}}$	z=$e_{\{12\}}\alpha_{12} + e_{\{23\}}\alpha_{23} + e_{\{13\}}\alpha_{\{13\}}$
3	$\overset{3}{\wedge} V$	$e_{\{123\}} = e_{\{1\}} \wedge e_{\{2\}} \wedge e_{\{3\}}$	$e_{\{1\}} \wedge e_{\{2\}} \wedge e_{\{3\}}\alpha_{123}$

(1.2.18) Die Zerlegung von $\wedge$V in die Teilräume der k-Vektoren ist kanonisch, nicht weitgehend willkürlich wie die übliche Zerlegung von Vektorräumen in direkte Summen. Bildet man das Dachprodukt eines p Vektors mit einem q-Vektor, so entsteht laut Konstruktion ein (p+q)-Vektor. Ist dabei p+q>n, so entsteht notwendig der Nullvektor. Der Nullvektor ist der einzige Vektor, der in Räumen mit unterschiedlichem k liegt.

(1.2.19) Im Schema haben wir bereits zwei kanonische Isomorphismen angedeutet. Der Raum der Nullvektoren ist isomorph zum Körper K. Man hat $(e_\emptyset\alpha)\wedge(e_\emptyset\beta)=e_\emptyset(\alpha\beta)$. Man identifiziert die beiden Räume. Ebenso identifiziert man e_i mit $e_{\{i\}}$, **was eine Identifikation von V mit dem Raum der Einsvektoren bedeutet. Damit sind der Körper K und der Ausgangsraum V beide als Teilräume in $\wedge$V enthalten,** darin *eingebettet*.

♦	**Zusammenfassung:**
♦	Zu gegebenem Vektorraum V der Dimension n haben wir eine Algebra $\wedge$V der Dimension 2^n konstruiert. Sie ist direkte Summe der Räume der k -Vektoren.
♦	Die Algebra wird äußere oder Grassmannsche Algebra von V genannt.
♦	$\wedge$V ist eine assoziative Algebra mit neutralem Element.
♦	$\wedge$V enthält K als Teilraum der Nullvektoren und V als Teilraum der Einsvektoren.

(1.2.20) Das zur formalen Seite unserer Konstruktion. Was aber soll sie inhaltlich intuitiv bedeuten? Sei wieder R$\subset I$ mit R=$\{i_1,......,i_k\}$. Zu dieser Indexmenge gehört die Familie $(e_{i_1}, e_{i_2}, ...e_{i_k})$ von Basisvektoren. Und hierzu gehört *einerseits* unser Vektor $e_R = e_{\{i_1\}} \wedge ... \wedge e_{\{i_k\}} = e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}$ der äußeren Algebra und andererseits der von diesen Vektoren aufgespannte k-dimensionale Teilraum von V, den wir analog mit V_R bezeichnen wollen. Überdies spannen die Vektoren ein k-dimensionales Parallelepiped Q_R in V_R auf. **Intuitiv soll e_R eine Algebraisierung von V_R nebst darin enthaltenem Parallelepiped darstellen**. So wäre $e_1 \wedge e_2$ eine Algebraisierung der von e_1 und e_2 aufgespannten Ebene mit dem darin durch die unabhängigen Kantenvektoren e_1 und e_2 erzeugten Parallelogramm. Und $e_1\wedge e_2\wedge e_3$ beschreibt den gesamten Raum vermittels Vorgabe eines Einheitsspates.

Wir erreichen das, indem wir das formale Objekt $e_{\{i\}}$ mit dem Basisvektor e_i für i=1,2,...,n identifiziert haben.

9.1.2a **Felder**

(1.2.21) Per Wertemengenübertragung kann man problemlos **Felder mit Werten in der äußeren Algebra** bilden. D.h. jedem Punkt eines Konfigurationsraumes wird ein Vektor der äußeren Algebra zugeordnet. Als Beispiel wählen wir die drei Basisfelder $\vec{\partial}_r.\vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\varphi$ aus Kap. 6.1, die die Geometrie der räumlichen Polarkooradinaten beschreiben.

☐ Berechnen Sie die Vektorfelder $\vec{\alpha} \mapsto \vec{\partial}_\theta \wedge \vec{\partial}_\varphi(\vec{\alpha})$ und $\vec{\alpha} \mapsto \vec{\partial}_r \wedge \vec{\partial}_\theta(\vec{\alpha})$ sowie $\vec{\alpha} \mapsto \vec{\partial}_r \wedge \vec{\partial}_\theta(\vec{\alpha}) \wedge \vec{\partial}_\varphi(\vec{\alpha})$. Hierbei ist $\vec{\alpha}$=(r,θ,φ). Es handelt sich um Felder über der Polarparametrisierung.

9.1.3 **Das Rechnen in der äußeren Algebra**

(1.3.1) Jetzt zum Rechnen in $\wedge$V. Laut Konstruktion kann man in $\wedge$V distributiv rechnen. D.h. beispielsweise: Sei $a, b \in \wedge V$ mit a=$e_1 2 + e_3 3$ und b=$e_1 4 - e_2 7 + e_3$. Dann ist

$$\begin{aligned} a\wedge b &= (e_1 2 + e_3 3) \wedge (e_1 4 - e_2 7 + e_3) \\ &= e_1\wedge e_2(-14) + e_1\wedge e_3(2) + e_3\wedge e_1(12) + e_3\wedge e_2(-21) \\ &= e_1\wedge e_2(-14) + e_1\wedge e_3(-10) + e_3\wedge e_2(-21) \end{aligned}$$

Nach der Vertauschungsregel ist ja $e_3 \wedge e_1(12) = -e_1 \wedge e_3(-12)$. Die Rechnung ist typisch. Insbesondere beweist man auf diese Weise sofort:

(1.3.2) $\boxed{\text{Sind a,b}\in\text{V zwei 1-Vektoren, so gilt a}\wedge\text{b = -b}\wedge a}$. Infolge der Assoziativität der Algebra kann man so auch sukkzessive sehen, was beim Vertauschen beliebiger Faktoren geschieht. Eine leichte, aber nützliche Folgerung ist:

(1.3.3) $\boxed{\text{Ist a}\in\text{V ein 1-Vektor, so ist stets a}\wedge\text{a=0}}$.

Und allgemeiner:

> Enthält ein größeres Produkt A$\wedge$..... $\wedge\, a \wedge B \wedge .... \wedge\, a \wedge .... \wedge\, C$ zweimal denselben **Einsvektor** a als Faktor, dann ist das Produkt Null!

Denn bei jeder Vertauschung erhält man nur irgendwelche Vorzeichen, die man beim Partnerfaktor belassen kann. Schließlich treffen die beiden a-Faktoren aufeinander und geben eine Null.

(1.3.4) Bei Rechnungen geht man gerne so vor, dass man möglichst alles auf Rechnungen für die Atome e_i zurückführt.

(1.3.5) Noch eine Rechnung dieser Art : V=V^4 und A=$e_1\wedge e_2$+$e_3 \wedge e_4$. A ist ein sog. *Zweivektor.* Wir berechnen A$\wedge$A:

$$\begin{aligned} A\wedge A &= (e_1\wedge e_2 + e_3\wedge e_4) \wedge (e_1\wedge e_2 + e_3\wedge e_4) \\ &= (e_1\wedge e_2) \wedge (e_3\wedge e_4) + (e_3\wedge e_4) \wedge (e_1\wedge e_2) \\ &= 2e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4 \neq 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die in (1.2.11) gegebene Vertauschungsregel benutzt. Also: Ein Quadrat in der äußeren Algebra ist nicht notwendig Null. Nur für Quadrate von 1-Vektoren gilt das.

(1.3.6) Nochmals: Bemerkenswerterweise ist hier A$\wedge$A **nicht Null**. Das ist kein Widerspruch, da in (1.3.3) "Einsvektor" verlangt wurde, was A nicht ist.

(1.3.7) Wann ist allgemeiner als oben X$\wedge$X=0?

Diese Frage führt uns auf eine für das Rechnen mit Tensoren sehr wichtige Begriffsbildung, die gegenüber dem Zahlrechnen, aber auch der üblichen Vektorrechnung neuartig ist.

> **Definition:** Ein Vektor Z$\in \wedge$V heißt *zerlegbar*, wenn es 1-Vektoren $a_1, a_2, ..., a_k$ gibt, derart, dass Z=$a_1 \wedge a_2 \wedge ....\wedge a_k$ gilt. D.h. wenn er sich als Dachprodukt geeigneter Atome schreiben läßt.

Dann gilt offenbar:

(1.3.8) **Sätzchen**: Ist A zerlegbar, dann ist A$\wedge$A=0.

(1.3.9) Der oben gegebene Vektor A=$e_1\wedge e_2 + e_3\wedge e_4$ ist demnach unzerlegbar, was auch die (naheliegende) Frage beantwortet: Gibt es denn unzerlegbare Vektoren? Und natürlich können zerlegbare Vektoren in nicht zerlegter Form dargestellt sein. Etwa $e_1\wedge e_2 - 3e_2 \wedge e_3 = (e_1 + 3e_3) \wedge e_2$.

(1.3.10) Jeder äußere Vektoren läßt sich andererseits als Summe zerlegbarer Vektoren schreiben, etwa über die gegebene Basisdarstellung. Hiermit folgt sofort: (Denn nach dem distributiven Ausmultiplizieren der Basisdarstellungen enthält jeder Summand r+s der e_i, von denen es aber nur n verschiedene gibt.)

(1.3.11) **Sätzchen** : Ist a ein r-Vektor und b ein s-Vektor mit r+s>n=dimV, dann is a$\wedge$b=0.

(1.3.12) Das Resultat aus (1.3.2) besitzt eine wichtige Verallgemeinerung:

Hilfssatz: Es seien $A_1, A_2, \ldots A_n \in V$ irgendwelche Einsvektoren, die sogar linear abhängig sein können. Für $R = i_1 i_2 \ldots i_k$ bilden wir analog zu E_R den Vektor $\boxed{A_R = A_{i_1} \wedge \ldots\ldots \wedge A_{i_k}}$. Dann gilt: $\boxed{A_R \wedge A_S = A_{R\cup S}\ c_{R,S}^{R\cup S}}$ wobei $c_{R,S}^{R\cup S}$ die Strukturkonstante aus (1.2.8) ist.

(1.3.13) Beweis: Die A_R sind zerlegbar. Man schreibe untereinander:

$$(A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \ldots) \wedge (A_{j_1} \wedge A_{j_2} \wedge \ldots) \overset{???}{=} A_{R\cup S} \Pi \varepsilon(r,s)$$
$$(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots) \wedge (e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \ldots) = e_{R\cup S} \Pi \varepsilon(r,s)$$

Die obere Gleichung ist zu zeigen. Die untere Gleichung kann man auch gewinnen, indem man paarweise Faktoren e vertauscht und jeweils ein Vorzeichen hinzufügt. Man erhält so insgesamt notwendig die korrekte Strukturkonstante. Im oberen Produkt führe man genau dieselben Vertauschungen aus. Das gibt dieselben Vorfaktoren, also insgesamt (1.3.11).

(1.3.14) Damit können wir ein zentrales Problem unserer Konstruktion beantworten:

Satz: Die Konstruktion der äußeren Algebra ist unabhängig von der Basiswahl. D.h. unabhängig von der Basiswahl kommt dasselbe Dachprodukt heraus.

(1.3.15) Beweis: Sei $f_1, \ldots f_n$ eine zweite Basis von V. Wir führen mit ihr dieselbe Konstruktion einer äußeren Algebra durch wie mit der Basis e. Das dabei entstehende Produkt bezeichnen wir mit $\overline{\wedge}$A . Die Strukturkonstanten haben dann denselben Wert.

Es gilt:

$$f_R \overline{\wedge} f_S = f_{R\cup S} c_{RS}^{R\cup S} = f_R \wedge f_S.$$

Das erste "=" nach Konstruktion von $\overline{\wedge}$, das zweite wegen (1.3.12), da die f bezüglich $\wedge$ zerlegbar sind. Damit stimmen die beiden Dachprodukte auf einer Basis überein und das bedeutet wegen der Bilinearität, dass sie überall übereinstimmen. **Die Multiplikation hängt nicht von der Basiswahl ab.**

9.1.4 Basiswechsel

(1.4.1) Wir können jetzt auch das Problem des Basiswechsels in $\wedge$V in einem vorläufige Anlauf besprechen. Seien dazu e und f zwei Basen von V. Die zugehörig Transformationsmatrix sei T. Genauer $e_i = \Sigma f_k T_{ki}$. Dann seien e_R und f_R die daraus konstruierten Basen von $\wedge$V.

(1.4.2) Nach unseren allgemeinen Vereinbarungen gehört zum Basiswechsel in $\wedge$V jetzt eine eindeutig bestimmt Transformationsmatrix (T_{SR}) mit:

$$e_R = \Sigma_S\ f_S T_{SR} \qquad \text{mit } |S|=|R|.$$

Dies T erhält man, indem man e atomar zerlegt, die Atome e_i durch die f_j ausdrückt und den resultierenden Ausdruck nach den Rechenregeln der äußeren Algebra in die gesuchte Endform bringt

$$\begin{aligned} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} &= (\Sigma f_{k_1} T_{k_1 i_1}) \wedge (\Sigma f_{k_2} T_{k_2 i_2}) \wedge \ldots\ldots \wedge \left(\Sigma f_{k_p} T_{k_p i_p}\right) \\ &= \Sigma_{k_1 k_2 \ldots k_p}\ f_{k_1} \wedge f_{k_1} \wedge \ldots \wedge f_{k_p} T_{k_1 i_1} T_{k_2 i_2} \ldots\ldots T_{k_p i_p} \\ &= \ldots\ldots \end{aligned}$$

Im letzten Schritt muß jetzt noch durch Faktorvertauschung die Indexreihenfolge korrigiert werden - wachsende Indizes bei den f_k - und gleiche Terme müssen zusammengefaßt werden. Was das allgemein ergibt, werden wir später in Kap.9.2.9 genauer sehen. Einfache Fälle lassen sich jedenfalls problemlos durchrechnen.

(1.4.4) Beim konkreten Auswerten derartiger Produkte sollte man die spezifischen Rechenregeln der äußeren Algebra nutzen. Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} & (a2 + b3 + c4) \wedge (a - b - c3) \\ = \ & \underline{a \wedge a2} + a \wedge b(-2) + a \wedge c(-6) + b \wedge a(3) + \underline{b \wedge b(-3)} + b \wedge c(-9) \\ & + c \wedge a(4) + c \wedge b(-4) + \underline{c \wedge c(-12)} \\ = \ & a \wedge b(-2-3) + a \wedge c(-6-4) + b \wedge c(-9+4) \end{aligned}$$

Bilineares rechnen ergibt zunächst 9 Terme. Drei sind Quadrate, also Null. Die restlichen 6 lassen sich paarweise zusammenfassen. das ist die Endform.

(1.4.5) Eine eventuelle weitere (dritte) Multiplikation wird dann noch kürzer, weil man immer nur den fehlenden Faktor zu suchen hat. Zu a∧b etwa trägt nur noch ein Summand mit c bei:

$$(a2+b3+c4)\wedge(a-b-c3)\wedge(a\alpha+c\gamma) = a\wedge b\wedge c(-5\gamma-5\alpha). \quad \text{Fertig.}$$

(1.4.6) Das Auswerten derartiger Produkte von Summen nennen wir *multilineares Rechnen.* Haben Sie die Frage zu (1.2.21) behandelt? Dort schliessen sich Rechnungen dieser Art an, wenn Sie die Basisfelder $\vec{\partial}$ mit Hilfe der zugehörigen kartesischen Basis e darstellen wollen .

(1.4.7) Einen Punkt sollte man im Zusammenhang mit Transformationsmatrix beachten: Beim Einsetzen der Basisdarstellungen entstehen immer wieder nur k-Vektoren mit k=|R|, so dass es genügt, die Summe in (1.4.2) wie angegeben nur über die S mit |S|=|R| zu nehmen .

(1.4.8) Die so entstehende Matrix T=(T_{RS}) nennt man die *Ausdehnung der Transformationsmatrix T auf die äußere Algebra von V.*

(1.4.9) Nochmals: Diese Ausdehnung ist kanonisch durch die Ausgangsmatrix (T_{ij}) festgelegt. Nur eine zugehörige allgemeine Berechnungsformel ist noch offen. Rein formal ist (1.4.2) die für jeden Vektorraum gültige Formel. Nur die Indexmenge ist anders. Statt des Zählindex 1,2,....,N haben wir jetzt bestimmte Worte $i_1i_2...i_r$ als Indizes.

In (1.4.2) wird nach Fortlassen unnötiger Nullen über alle S mit |S|=|R| summiert. Dabei ist ja R und damit |R| gegeben.

(1.4.10) **Zusammenfassung der Rechenregeln für die äußere Algebra**

♦	**Addition**: Wie im Vektorraum. Insbesondere ist an die Basisdarstellung zu denken und den Basiswechsel. Neu ist das Vorhandesein des Grades.
♦	**Multiplikation:** Assoziativ und bilinear. Beim Vertauschen der Faktor $(-1)^{pq}$. Multilinear.
♦	**Division:** I.a. unzulässig!

9.1.5 Einige mathematische Eigenschaften der äußeren Algebra

Mit Hilfe der äußeren Algebra kann man einige Eigenschaften der Vektorrechnung, die man sonst nicht mit Formeln, sondern über mehr oder weniger aufwendige Prozeduren erfaßt, algebraisieren. Die nachfolgenden beiden Sätze liefern hierzu Beispiele.

(1.5.1) Beispielrechnung: Sei c=2a+3b. Dann ist a∧b∧c=a∧b∧(2a+3b)=2a∧b∧a+3a∧b∧b=0. Das ist kein Zufall.

Satz: Sei $a_1, a_2, ...a_p \in V$. Dann gilt $a_1 \wedge a_2 \wedge .... \wedge a_p = 0$ genau dann, wenn die Familie der a_i linear abhängig ist.

(1.5.2) Beweis: a) Sei $a_1,..,a_p$ linear abhängig. O.B.d.A sei $a_p = a_1\alpha_1+...+a_{p-1}\alpha_{p-1}$. Das ist für a_p in $a_1 \wedge ... \wedge a_p$ einzusetzen. Über bilinear und Vertauschen der 1-Vektoren folgt, dass das Produkt Null ist.

b) $a_1, ..,a_p$ sei linear unabhängige Familie. Ergänze zu einer Basis $a_1, ..,a_n$ von V. Dann ist $a_1 \wedge ... \wedge a_p$ einer der zugehörigen Basisvektoren von ∧V und muß als solcher notwendig ungleich Null sein.

(1.5.3) Beispielrechnung: Seien a,b∈V unabhängig und c=7a-5b, d=a-3b. Dann spannnen c und d dieselbe Ebene in V auf wie a und b. Andererseits gilt:

$$c\wedge d{=}(7a-5b)\wedge(a-3b) = -21a\wedge b - 5b \wedge a = -16a \wedge b.$$

Die beiden Zweivektoren haben dieselbe Richtung. Auch das ist kein Zufall:

Satz: Die Familie $a_1,...,a_p$ aus V sei linear unabhängig. Weiter sei $b_1,..,b_p$ eine beliebige Familie aus V. Dann gilt $b_1 \wedge ... \wedge b_p = \alpha a_1 \wedge ... \wedge a_p$ mit $\alpha \in$K und $\alpha \neq 0$ genau dann, wenn beide Familien denselben Teilraum von V aufspannen.

(1.5.4) Beweis: a) a und b spannen denselben Teilraum auf. Also $b_i = \Sigma a_k \gamma_{ki}$. Das ist in $b_1 \wedge ... \wedge b_p$ einzusetzen und auszurechnen (bilinear!), was die behauptete Formel zuletzt ergibt. Dabei ist $\alpha \neq 0$ nach dem ersten Satz, wenn die b_i linear unabhängig sind.

b)Sei $b_1 \wedge ... \wedge b_p = \alpha a_1 \wedge ... \wedge a_p$ mit $\alpha \neq 0$. Nach dem ersten Satz ist b unabhängige Familie. Multipliziere von rechts mit a_i. Das ergibt für die rechte Seite eine Null. Also ist nach dem ersten Satz die Familie $a_i, b_1, ...b_p$ linear abhängig. Oder $a_i\lambda + b_1\beta_1 + ... + b_p\beta_p = 0$. Nun ist $\lambda = 0$ nicht möglich, da sonst die Familie a abhängig wäre. Damit liegt $a_i = -\frac{1}{\lambda}\left(b_1\beta_1 + ... + b_p\beta_p\right)$ in dem von b erzeugten Teilraum. Nach dem üblichen Dimensionsargument sind die beiden erzeugten Räume dann aber gleich.

(1.5.5) Ein nützliches Resultat:

> **Satz:** $\boxed{\text{Jeder (n-1)-Vektor ist zerlegbar. n=dimV.}}$ (Insbesondere gibt es im physikalischen V^3 keine unzerlegbaren Vektoren!)

Beweis: 1) Betrachte die Abbildung α= (V,x$\mapsto$x$\wedge$H , $\wedge$V). Dabei sei H$\neq$ 0 ein (n-1)-Vektor. α **ist linear und hat Rang 1** (=Dimension des Bildes). Der Dimensionssatz für Homomorphismen erlaubt Rang 1 oder 0. Rang Null geht nicht: Eine beliebige Basisdarstellung von H ergäbe sofort H=0. Dazu immer x gleich einem Basisvektor von V wählen. Für (n-2)-Vektoren gibt es eine analoge Einschränkung des Ranges nicht, so daß eine analoge Argumentation für n-2 scheitert.

2)Sei $a_1,....,a_{n-1}$ Basis von Kernα. Ergänze mit a_n zu einer Basis von V. Also $a_i\wedge$H=0 für i=1,2,..,n-1.

3) Dann ist $E_j = a_1 \wedge .... \wedge \check{a}_j \wedge ... \wedge a_n$ Basis von $\overset{n-1}{\wedge}$ V. Hierbei besagt $\check{a}_j$, dass dieser Faktor auszulassen ist. Offenbar gilt $a_k \wedge E_j = 0$ für k$\neq$ j.

4) Damit existiert für H eine Darstellung: $H=E_1h_1+E_2h_2+.....+E_nh_n$. Multiplikation mit a_i gibt $h_i = 0$ für i=1,2,...,n-1. D.h $\boxed{H=E_nh_n}$.

H ist zerlegbar wie behauptet.

5) Der Beweis zeigt noch, wie der Teilraum vom Typ der Hyperebene aussieht, der zu H gehört: H ist so etwas wie ein Bezugsparallelepiped für Kernα. Bildet man die zu a duale Basis, dann ist der zu H gehörige Teilraum gerade der Annihilator Kern(a_n^*).

☐ Zerlegen Sie $e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_1$ durch direkte Rechnung. Benutzen Sie dazu Rechentricks wie $e_2 \wedge e_3 = e_2 \wedge (e_2 + e_3)$.

☐ Angenommen in $\wedge$V existiert wenigstens ein unzerlegbarer Vektor. Dann ist notwendig dimV>3 und die Menge der zerlegbaren Vektoren bildet keinen Teilvektorraum. Beweis?

9.2 Algebrahomomorphismen und die Determinante.

9.2.1 Die kanonische Erweiterung von Vektorraumhomomorphismen

(2.1.1) Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Algebren über demselben Körper K. Uns interessieren die strukturerhaltenden Abbildungen $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$. Das sind einerseits Vektorraumhomomorphismen und andererseits strukturerhaltende Abildungen bezüglich der Algebramultiplikation. Also:

> (2.1.2) **Definition**: Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Algebren über dem Körper K. Eine Abbildung $\lambda : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ heißt ein *Algebrahomomorphismus von* $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$, wenn gilt:

⧫a) X ist Vektorraumhomomorphismus

⧫b) $\lambda(x * y)$=λ(x)$\circ\lambda(y)$ für alle x,y$\varepsilon\mathcal{A}$.

(2.1.3) Eine Drehung R:$V_0^3 \rightarrow V_0^3$ ist Algebrahomomorphismus für * mit dem Vektorprodukt. Die physikalisch geometrische Bedeutung der Beziehung $R(\vec{a} \times \vec{b})$=$R(\vec{a})\times R(\vec{b})$ sollte unmittelbar klar sein.

(2.1.4) Algebrahomommorphismen sind wegen der zusätzlichen Forderung b) **viel seltener** als einfache lineare Abbildungen. Das nachfolgende Beispiel und der daran anschließende Satz verdeutlichen beide diesen Sachverhalt.

(2.1.5) Beispiel: Es sei $\mathcal{P}$ die Algebra der reellen Polynome (Algebramultiplikation sei die übliche Multiplikation (p,q)$\mapsto$pq, nicht die Zusammensetzung). Das ist eine assoziative, kommutative Algebra mit Eins.

Wir kennen bereits viele lineare Abbildungen für Polynome, etwa die Multiplikation mit einem festen Polynom, die Ableitung, das Herausprojizieren gerader Potenzen usw. Aber das sind alles keine Algebrahomomorphismen, wie man sofort sieht.

Nur zwei triviale Beispiele fallen einem zunächst ein, die identische Abbildung und die Nullabbildung. Und letztere ist unschön, weil sie die Eins nicht auf sich abbildet.

Forderung b) ist so restriktiv, dass wir über sie leicht alle Algebrahomomorphismen $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ finden. Dazu argumentieren wir wie folgt: Sei $\lambda:\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ Algebrahomomorphismus und $p \in \mathcal{P}$ beliebig. D.h. $p=a_0h_0 + ...a_nh_n$ mit $h_k(x)=x^k$. Die Linearität von λ gibt

$$\lambda(p) = a_0\lambda(h_0) + a_1\lambda(h_1) + ... + a_n\lambda(h_n)$$

. Mit b) folgt wegen $h_k=(h_1)^k$ weiter $\lambda(h_k)=(\lambda(h_1))^k$. Also:

$$\lambda(p) = a_0\lambda(h_0) + a_1\lambda(h_1) + a_2 (\lambda(h_1))^2 + ... + a_n (\lambda(h_1))^n .$$

D.h. aber, dass λ vollständig durch die beiden Werte $\lambda(h_0)$ und $\lambda(h_1)$ bestimmt ist.

Weiter ist $\lambda(h_1) = \lambda(h_0h_1) = \lambda(h_0)\lambda(h_1)$. Für $\lambda(h_1) \neq 0$ folgt daraus $\lambda(h_0) = 1$. Soll der Algebrahomomorphismus nicht trivial sein, folgt daher $\lambda(h_0) = h_0$. Nur $\lambda(h_1)$ kann als beliebiges Polynom vorgeben werden und das ergibt einen zugehörigen Algebrahomomorphismus. Oder auch: Generatoren der Algebra sind nur h_0 und h_1, wogegen die Vektorraumbasis alle h_k erfordert.

(2.1.6) Im Falle der äußeren Algebra wird die gesamte Algebra bereits durch eine Basis von V - den Atomen - erzeugt. Wir erwarten, dass die Werte auf den Atomen den Algebrahomomorphismus festlegen und das ist tatsächlich auch der Fall. Zunächst ein Beispiel und dann der allgemeine Satz.

(2.1.7) Beispiel: Gegeben $\lambda:V^3 \to V^3$ mit Basis e und zugehöriger Darstellungsmatrix.

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{also } \lambda(e_1) = e_2, \quad \lambda(e_2) = e_1a + e_3 \quad \lambda(e_3) = e_12 + e_2 + e_3$$

Die Basis von $\wedge V^3$ bezeichnen und numerieren wir wie folgt: $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_{23}, e_{13}, e_{12}, e_{123})$. Nun ist $\lambda(e_i)$ für i=1,2,3 nach Voraussetzung bereits bekannt. Weiter ist

$$\lambda(e_{23})=\lambda(e_2\wedge e_3)=\lambda(e_2)\wedge\lambda(e_3)=(e_1a+e_3)\wedge(e_12+e_2+e_3)=e_{12}a+e_{13}(a-2)+e_{23}(-1).$$

Analog findet man $\lambda(e_{13})$ und $\lambda(e_{12})$ und schließ lich $\lambda(e_{123})=....=e_{123}(2-a)$.

Zusätzlich fordern wir noch $\lambda(e_0)=e_0$. Dann können wir insgesamt die folgende beschreibende Matrix (bezüglich der angegebenen Basis) für den vom ursprünglichen $\lambda : V \to V$ erzeugten Algebrahomomorphismus aufstellen:

$$\overline{M_\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -2 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\text{2-a}} \end{pmatrix}$$

☐ Wieso hat diese Matrix "Blockdiagonalform"?

(2.1.8) Und jetzt das allgemeine Resultat:

Theorem	**über die kanonische Ausdehnung einer linearen Abbildung V→W auf die zugehörigen äußeren Algebren.**
Es seien	V und W zwei (endlichdimensionale) Vektorräume über K und $\lambda : V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus. V und W seien mit den Räumen der 1-Vektoren ihrer äußeren Algebren identifiziert.
Dann	Dann gibt es genau einen Algebrahomomorphismus $\bar{\lambda} : \wedge V \to \wedge W$ der λ fortsetzt und für den $\bar{\lambda}(e_{0V}) = e_{0W}$ gilt, der also das neutrale Element von V auf das von W abbildet. Zusätzlich bildet $\bar{\lambda}$ für jedes p den Raum der p-Vektoren von V auf den Raum der der p-Vektoren von W ab. Für zerlegbare Vektoren gilt $\bar{\lambda}(a_1 \wedge a_2 \wedge .... \wedge a_p) = \lambda(a_1) \wedge \lambda(a_2) \wedge .... \wedge \lambda(a_p) \qquad (*)$

(2.1.10) Beweis: a) **Eindeutigkeit**: e_i sei Basis von V und e_R zugehörige Basis von $\wedge$V. Wegen linear genügt es, die Werte von $\bar{\lambda}$ auf einer Basis festzulegen. $\bar{\lambda}(e_i) = \lambda(e_i)$ liegt fest. Und die übrigen Basiselemente sind zerlegbar, folgen aus $(*)$.

b) **Existenz:** $(*)$ legt die Werte für die Basisvektoren fest. Also liegt sicher ein Vektorraumhomomorphismus vor. Ist das auch ein Algebrahomomorphismus ? Es genügt, zerlegbare Vektoren zu betrachten. Wir benutzen das frühere Resultat (1.3.12). Ja, es genügt bereits , $\bar{\lambda}(x\wedge y)=\bar{\lambda}(x)\wedge\bar{\lambda}(y)$ für die Elemente einer Basis zu zeigen. Dann ist diese Relation für alle Vektoren erfüllt, wie man sofort mit Hilfe der Linearität sieht.

Sei jetzt $e_1, ..., e_n$ die Basis von V, mit deren Hilfe $\bar{\lambda}$ festgelegt werden soll. Wir setzen $A_i = \lambda(e_i) = \bar{\lambda}(e_i)$ und bilden dazu $A_R = A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge .... \wedge A_{i_p}$ wie üblich. Laut Konstruktion ist das $\bar{\lambda}(e_R)$. Nun wenden wir (1.3.12) an:

$$\bar{\lambda}(e_R)\wedge\bar{\lambda}(e_S) = A_R\wedge A_S = A_{R\cup S}c_{RS}^{R\cup S} = \bar{\lambda}(e_{R\cup S})c_{RS}^{R\cup S}$$

Nun ist $\bar{\lambda}$ aber linear. Damit folgt: .... $=\bar{\lambda}(e_{R\cup S}c_{RS}^{R\cup S}) = \bar{\lambda}(e_R \wedge e_S)$

Die verlangte Relation für alle Basiselemente ist gezeigt! $\bar{\lambda}$ ist wirklich ein Algebrahomomorphismus. Die wichtige Relation $(*)$ folgt induktiv.

(2.1.11) Achtung: Der wesentliche Punkt des Beweises ist, dass die Ausdehnung von λ auf $\wedge$V konsistent, also widerspruchsfrei möglich ist. Denn man kann jeden Wert immer auf viele unterschiedliche Weisen ausrechnen! Betrachten wir etwa einen Zweivektor $x\wedge y$. Wegen $(*)$ ist $\bar{\lambda}(x\wedge y) = \bar{\lambda}(x) \wedge \bar{\lambda}(y) = \lambda(x) \wedge \lambda(y)$. Der Wert ist über $(*)$ durch λ festgelegt. Führen wir andererseits Basisdarstellungen ein, so folgt:

$$\bar{\lambda}(x\wedge y) = \bar{\lambda}((\Sigma e_i x_i)\wedge(\Sigma e_k y_k) = \Sigma\bar{\lambda}(e_i\wedge e_k)x_i y_k = \Sigma\lambda(e_i)\wedge\lambda(e_k)x_i y_k$$

Das ist eine zweite Festlegung des Wertes durch das gegebene λ. Aber wegen der Linearität von X ist das gleich dem ersten Resultat und unser Beweis zeigt, daß generell Gleichheit gilt.

9.2.2 Die Determinante: Motivation, Definition und geometrische Interpretation.

(2.2.1) Das Volumen von Körpern, der Flächeninhalt ebener Figuren haben einige charakteristische Eigenschaften, die genau durch die Rechenregeln der äußeren Algebra wiedergegeben werden und so auf beliebige endlichdimensionale reelle Vektorräume übertragen werden können. Im Sinne des Programmes der analytischen Geometrie werden diese geometrischen Eigenschaften durch die äußere Algebra algebraisiert, zumindest für reelle Vektorräume.

(2.2.2) Um das zu sehen, wählen wir eine Basis e_i von V. Sie definiert uns einen einen n-dimensionalen Spat mit Kanten e_i. (Ist der Körper K$\neq\mathbb{R}$, haben wir Probleme, da uns das Intervall [0,1] zur Spatbeschreibung fehlt!) Wir interpretieren den Spat als unser n-dimensionales Referenzvolumen oder als Maßeinheit.

(2.2.3) Erzeugt man einen neuen Spat, indem man die Kantenlängen um Faktoren $\lambda_i > 0$ verändert, so sollte sich das Volumen um den Faktor $\lambda_1\lambda_2.....\lambda_n$ ändern. In der äußeren Algebra rechnen wir:

$$(e_1\lambda_1)\wedge(e_2\lambda_2)\wedge....\wedge(e_n\lambda_n) = e_1\wedge....\wedge e_n(\lambda_1\lambda_2....\lambda_n)$$

Das ist genau der richtige Faktor.

(2.2.4) Ist eines der $\lambda_.$ negativ, so ändert sich die Orientierung des Spates. In der äußeren Algebra gibt das ein (-1) im Zahlwert vor der Einheit.

(2.2.5) **Prinzip des Cavalieri**. Im dreidimensionalen Raum definiert jeder Kantenvektor e_i über $e_k\alpha_k$ zwei Oberflächenelemente des Spates, ein unteres ($\alpha_K = 0$) und ein oberes ($\alpha_k = 1$). **Verschiebt man das obere parallel zum unteren, so soll sich das Volumen nicht ändern**. Diese Scherungsoperation läßt sich leicht vektoriell beschreiben. Die Kanten e_i für $i\neq k$ bleiben fest und e_k geht über in $e_k+\Sigma_{r\neq k}e_r\alpha_r$. **Das sind die Kanten des neuen Spates.** In der äußeren Algebra rechnen wir

$$e_1\wedge e_2\wedge .... \wedge (e_k + \Sigma_{r\neq k}e_r\alpha_r)\wedge ....\wedge e_n = e_1\wedge .....\wedge e_n.$$

Also keine Änderung des Vorfaktors.

(2.2.6) Natürlich ist (2.2.5) der wichtigste Sachverhalt. Allgemein argumentieren wir jetzt wie folgt:

> Gegeben ein Spat mit Kanten $a_1,...,a_n$ wobei n=dimV ist. Dessen n-dimensionales Volumen soll mit dem Referenzspat verglichen werden. Mit Hilfe von (2.2.5) können wir die Kanten des Spates verändern, bis sie parallel zu den Kanten des Referenzspates sind. Dann vergleichen wir die Kantenlängen und wenden (2.2.3) an. Das ist der geometrische Weg. Rechnerisch bilden wir $a_1\wedge a_2\wedge ....\wedge a_n$. Da der Raum der n-Vektoren eindimensional ist, ist dieser Vektor proportional zu $e_1\wedge ....\wedge e_n$. **Die Proportionalitätskonstante ist die uns interessierende Größe**: Ihr Vorzeichen gibt die relative Orientierung der beiden Spate, ihr Betrag das gesuchte Volumenverhältnis (im Falle K=ℝ).

☐ Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2_K$ ein nicht achsenparalleles Parallelogramm und wandeln Sie es durch Scherungsoperationen in ein flächengleiches achsenparalleles Rechteck um. Bestimmen Sie auch die Kantenvektoren und führen Sie die zugehörige algebraische Rechnung zur Bestimmung des Flächeninhaltes aus.

(2.2.7) Bei der Ausführung der Scherungen des dritten Schrittes müssen wir natürlich festlegen, welche a-Kanten in Richtung welcher e-Kante gebracht werden soll. Jede e-Kante muß einen a-Partner erhalten, d.h. wir haben eine Zuordnung $e_i \mapsto a_{k_i} = \lambda(e_i)$. Da die e_i eine Basis bilden, definiert dies eine lineare Abbildung $\lambda : V \to V$.

(2.2.8) Hieraus abstrahieren wir:

> **Basisfreie Definition der Determinante:**
> Es Sei λ:V→V ein Endomorphismus. dimV=n endlich. Das Theorem liefert uns eine eindeutige Ausdehnung $\bar{\lambda}$:∧V→ ∧V auf die äußere Algebra. Insbesondere wird der eindimensionale Raum der n-Vektoren auf sich abgebildet. D.h. es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl c∈ K mit $\bar{\lambda}(x) = cx$ für alle n-Vektoren. Also x∈ $\overset{n}{\wedge}$V.
> Diese Zahl heißt die **Determinante des Endomorphismus**, geschrieben det(λ) oder detλ.

(2.2.9) Bemerkung: Eine lineare Abbildung eines eindimensionalen Raumes in sich ist immer Multiplikation mit einer festen Zahl wegen λ(xe)=xλ(e)=xαe=α(xe). Dabei soll e eine Basis sein und λ(e)=αe. Oder auch: die beschreibende Matrix ist vom Typ 1×1, hat nur eine Komponente.

(2.2.10) Die Determinante ist also formal eine Abbildung det=(End(V),λ ↦det(λ), K). **Jedem Endomorphismus wird eine Zahl zugeordnet** und die hat für K=ℝ die beschriebene geometrische Interpretation. Ihr Wert bestimmt ("determiniert") wichtige mathematische Eigenschaften von λ, wie wir noch sehen werden, und gibt ihnen vielfach auch eine geometrische inhaltliche Bedeutung.

(2.2.11) Bemerkenswert ist weiter, dass die gesamte Konstruktion vollständig im Bereich der Vektorräume abläuft. Eine zusätzliche Struktur wird nicht benötigt. Allerdings gilt das nur für die Inhaltsmessung von Spaten, die **dieselbe Dimension** wie der Raum V haben. Ein kanonischer Flächenvergleich (statt Volumenvergleich) im V^3 ist mit unserer Konstruktion nicht möglich! Dazu benötigt man zusätzliche Struktur.

(2.2.12) Jetzt ergänzen wir unser Begriffssystem noch etwas.

> **Die Determinante einer quadratischen Matrix.** Jede n×n Matrix M über K kann als lineare Abbildung M:K→K interpretiert werden. Dann ist die Determinante der Matrix M gleich der Determinante dieses Endomorphismus.

Beachten Sie: Die Matrix muß quadratisch sein.

(2.2.13) Matrizen treten insbesondere bei Basisdarstellungen linearer Abbildungen auf Dafür erhalten wir:

Basisunabhängigkeit der Determinante: Es sei λ:V$\rightarrow$V linear und $e_1, ..., e_n$ eine Basis von V. Weiter sei M_λ die beschreibende Matrix von λ bezüglich dieser Basis. Dann ist $\det(M_\lambda) = \det(\lambda)$. Insbesondere ist der Wert der Determinante unabhängig von der Wahl der Basis. Ist speziell $M'_\lambda = TM_\lambda T^{-1}$ die beschreibende Matrix bezüglich einer anderen Basis, so ist notwendig $\det(M'_\lambda)$=$\det(M_\lambda)$.

(2.2.14) Zum Beweis in (2.2.18) verwenden wir das folgende allgemeine Resultat, das sich sachlich an Theorem (2.2.8) anschließt:

Satz: Es seien $\lambda : U \rightarrow V$ und $\mu : V \rightarrow W$ Vektorraumhomomorphismen. Für deren Ausdehnung auf die äußeren Algebren gilt $\boxed{\overline{\mu \circ \lambda} = \bar{\mu} \circ \bar{\lambda}}$.

(2.2.15) Beweis: Alle drei Abbildungen existieren eindeutig. Für zerlegbare Vektoren folgt über (∗) aus (2.2.8) sofort Gleichheit der Werte. Dann gilt die Gleichheit aber für alle Werte der Abbildungen.

(2.2.16) **Folgerung**: Ist λ:V$\rightarrow$V ein Isomorphismus, so ist auch $\bar{\lambda}$ Isomorphismus mit $\left(\bar{\lambda}\right)^{-1} = \overline{\lambda^{-1}}$. Überdies ist $\overline{id_V} = \mathrm{id}_{\wedge V}$.

Der zweite Teil folgt wieder sofort mit(∗) aus (2.2.14). Und der erste durch Anwenden des Satzes auf $\lambda \circ \lambda^{-1} = id$.

(2.2.17) **Folgerungen für die Determinanten**:

a) Sind λ und μ Endomorphismen V$\rightarrow$V, dann gilt $\det(\lambda \circ \mu)$=$\det(\lambda)\cdot\det(\mu)$

b) Ist λ:V$\rightarrow$V Isomorphismus, dann gilt $\det(\lambda^{-1}) = \frac{1}{\det \lambda}$ und insbesondere $\det\lambda \neq 0$.

Beweis: Folgt aus dem Satz.

(2.2.18) Ausgelassener **Beweis** von (2.2.13): Es sei λ: V$\rightarrow$V und e_i Basis von V mit Linearkombinationsabbildung L_e:$K^n \rightarrow V$. Weiter sei M_λ die zugehörige beschreibende Matrix von λ. Dann gilt M_λ= $L_e^{-1} \circ \lambda \circ L_e$. Es folgt mit (2.2.17):

$$det(M_\lambda) = det(L_e^{-1} \circ \lambda \circ L_e) = det(L_e^{-1}) \det(\lambda) \det(L_e) = \det \lambda.$$

Und daher auch $\det M_\lambda = \det M'_\lambda$ wie in (2.2.13) angegeben.

(2.2.15) Beachten Sie: Das Matrixprodukt kann man nicht vertauschen, so daß sich L_e und L_e^{-1} in $L_e^{-1} \circ \lambda \circ L_e$ i.a. nicht fortheben. Bildet man die Determinante und nutzt man (2.2.14), dann ist das anders. Jetzt liegen Körperelemente vor und diese vertauschen, da unser Körper kommutativ war.

(2.2.16) Zusammenfassend erhalten wir folgende **geometrische Interpretation der Determinante eines Endomorphismus**:

> Sei $\lambda : V \rightarrow V$ Endomorphismus und a_i eine Basis von V über $\mathbb{R}$. Die Basisvektoren spannen einen Referenzspat in V auf. Die Bildvektoren $b_i = \lambda(a_i)$ spannen einen zweiten Spat in V auf. Dann ist $\det(\lambda)$ dasVolumverhältnis der beiden Spate. D.h. $|\det(\lambda)|$ gibt an, wivielfach der b-Spat im a-Spat enthalten ist. Und das Vorzeichen von $\det(\lambda)$ gibt die relative Orientierung der beiden Spate, sofern $\det(\lambda) \neq 0$ ist..

Das verallgemeinert die geometrische Interpretation des Spatproduktes für 3 Dimensionen.

9.2.3 Die Berechnung von Determinanten (1)

(2.3.1) Entsprechend obiger Definition kann man zur Berechnung von Determinanten wie folgt vorgehen, auch wenn das nicht immer die effektivste Methode ist:

(1)	Wähle eine Basis e_1,....e_n von V.
(2)	Bilde $\lambda(e_1), ...\lambda(e_n)$ und damit $\lambda(e_1) \wedge .... \wedge \lambda(e_n)$.
(3)	Bringe diesen Ausdruck mit den Rechenregeln der äußeren Algebra in die Form $ce_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_n$ ("Multilineares Rechnen")
Dann	ist c die gesuchte Determinante. Ist M Matrix, mit Spaltenvektoren S_i, dann folgt aus $S_1 \wedge ... \wedge S_n = ce_1 \wedge .... \wedge e_n$ entsprechend detM=c.

(2.3.2) Beispiel: M=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $S_1 = e_1 a + e_2 c$ und $S_2 = e_1 b + e_2 d$. Damit folgt

$$S_1 \wedge S_2 = (e_1 a + e_2 c) \wedge (e_1 b + e_2 d) = (ad - bc) e_1 \wedge e_2. \quad \boxed{\text{Also detM=ad-bc}}.$$

Ein vertrauter Rechenausdruck für 2×2 Matrizen.

(2,3.3) Analog beweist man $\boxed{det(id_V) = 1,\ det(0) = 0.}$

(2.3.4) Und jetzt ein einfaches Rechenbeispiel

$$\det M \quad = \quad ? \text{ für M=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{det M=16,}} \text{ denn:}$$

$$\begin{aligned} & ((e_1 + e_3 3) \wedge (e_2 2 + e_4 4)) \wedge ((-e_1 - e_3 5) \wedge (-e_2 2 - e_6 6)) \\ = \ & (e_1 \wedge e_2 2 + e_1 \wedge e_4 4 + e_2 \wedge e_3 (-6)) + e_3 \wedge e_4 12) \wedge (e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_4 6 - e_2 \wedge e_3 5 + e_3 \wedge e_4 30 \\ = \ & e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 (60 - 20 - 36 + 12) \end{aligned}$$

(2.3.5) Noch ein allgemeines Resultat: Es sei D eine "Dreiecksmatrix", etwa

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ a & \beta & 0 & 0 \\ b & c & \gamma & 0 \\ d & e & f & \delta \end{pmatrix}$$

Das Verfahren liefert sofort deetD=$\alpha\beta\gamma\delta$.

Denn der letzte Faktor im Dachprodukt der Spalten ist gibt e_4. Dann muss man im vorletzten e_3 wählen oder man erhält einen Nullbeitrag usw.

Das Dachprodukt einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente.

Bevor wir weitere Methoden zur Berechnung von Determinanten besprechen, leiten wir einige Resultate her, die zeigen, wozu Determinanten nützlich sind.

9.2.4 Einige Anwendungen des Determinantenbegriffes.

(2.4.1) **Satz:** λ:V→V ist genau dann Isomorphismus, wenn det(λ)≠0 gilt.

(2.4.2) Beweis: a) Sei λ Isomorphismus. Dann gibt $\lambda(e_i)$ erneut eine Basis, also eine linear unabhängige Familie. Nach (2.21) ist $\lambda(e_1)\wedge.....\wedge\lambda(e_n) \neq 0$, also auch det($\lambda$)≠0.

b) Sei λ kein Isomorphismus, so dass es E∈ $Kern\lambda$ mit E≠ 0 gibt. Ergänze E zu einer Basis. Dann ist $\lambda(E) \wedge \lambda(E_2) \wedge ... \wedge \lambda(E_n)$ Null,da $\lambda(E) = 0$.

(2.4.3) Folgerung: Wann ist das lineare Gleichungssgstem A$\vec{x}$=$\vec{b}$ mit n×n-Matrix A eindeutig lösbar? Genau dann, wenn det(A)≠ 0 gilt. Das Resultat ist unabhängig vom Inhomogenitätenvektor $\vec{b}$. Genau dann ist A invertierbar.

(2.4.4)

(2.4.5) **Folgerung**: *Das charakteristische Polynom eines Eigenwertproblems.* Wann hat da Eigenwertproblem M.x=λx eine nichttriviale Lösung? Für alle λ ∈K, für die Kern(M-λid) nichttrivial ist. Und das heißt, für die det(M-λid)=0 gilt. (Beachten Sie was so erreicht wurde: Zunächst hat man eine Bedingung für $\lambda \in K$ und x∈ V, durch die Umformung wird der unbekannte Vektor x jedoch eliminiert.) Wir schreiben di Determinante einmal für den Fall einer allgemeinen 3×3-Matrix nach dem in (2.3.1) beschriebenen Verfahren aus:

$$\text{M=} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{M-}\lambda id = \begin{pmatrix} M_{11} - \lambda & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} - \lambda & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} - \lambda \end{pmatrix}$$

Die Forderung ist

$$(e_1(M_{11} - \lambda) + e_2 M_{21+} \wedge e_3 M_{31}) \wedge (e_1 M_{12} + \wedge e_2 (M_{22} - \lambda) + e_3 M_{31}) \wedge (e_1 M_{13} + e_2 M_{23+} \wedge e_3 (M_{33} - \lambda)) = 0$$

Die weitere Auswertung nach den Regeln der äußeren Algebra ergibt $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \times$ (Polynom vom Grade 3) , welches wir in 9.1.3a bereits angegeben haben. **Dessen Nullstellen sind die gesuchten Eigenwerte.** Und die Konstruktion zeigt: Ist dimV=n, dan entsteht ein Polynom vom Grade n.

(2.4.6) **Cramers Regel.** Für den Lösungsvektor eines n×n-Systems $M.\vec{x}=\vec{b}$ mit eindeutiger Lösung kann man mit Hilfe von Determinanten eine **Lösungsformel** angeben. Für konkrete Rechnungen ist sie allerdings meist wenig hilfreich, da die Berechnung der auftretenden Determinanten zu aufwendig ist. Diese Formel leiten wir jetzt her. Eindeutige Lösbarkeit bedeutete ja det(M)$\neq 0$.

Es seien $\vec{M}_1, \vec{M}_2,....,\vec{M}_n$ die Spaltenvektoren der Matrix M. Die Gleichung $M.\vec{x} = \vec{b}$ schreibt sich in Spaltenform: $\boxed{\vec{M}_1 x_1 + \vec{M}_2 x_2 + ... + \vec{M}_n x_n = \vec{b}}$. Wir multiplizieren von rechts mit $....\wedge \vec{M}_2 \wedge .... \wedge \vec{M}_n$. Dann bleibt auf der linken Seite nur der erste Summand mit x_1 stehen. Wir verwenden unsere Determinantendefinition und finden:

$$x_1 (\det M) e_1 \wedge .... \wedge e_n = \det(\vec{b}, \vec{M}_2, ..., \vec{M}_n)$$

In der letzten Klammer sind die Spalten der zugehörigen Matrix angegeben. Koeffizientenvergleich gibt die gesuchte Formel:

$$\boxed{x_1 = \frac{\det(\vec{b}, \vec{M}_2, ..., \vec{M}_n)}{\det M}}$$

Analog erhält man die übrigen Unbestimmten. Etwa

$$\boxed{x_2 = \frac{\det(\vec{M}_1, \vec{b}, \vec{M}_3, ..., \vec{M}_n)}{\det M}}$$

9.2.5 Die Berechnung konkreter Determinanten (2)

(2.5.1) Hierzu hat man einen Satz von 6-7 Regeln und Methoden, die man fallspezifisch einsetzen muß. Meist sollte man mehrere Regeln geschickt kombinieren, um so den Rechenaufwand auf ein vernünftiges Maß zu reduzieren. Der Aufwand bei der Berechnung spezieller Determinanten ist vielfach sehr groß. Durch zugehörige Erfahrung und überlegtes Vorgehen kann man viel Arbeit sparen. Zwar nehmen einem Computeralgebrasysteme die Rechenarbeit weitgehend ab, aber man sollte trotzdem wissen, welche unterschiedlichen Wege man zur Berechnung von Determinanten gehe kann, und beurteilen, welcher Rechenaufwand jeweils dazugehört.

(2.5.2) Der Beweis der Mehrzahl der benötigten Regeln mit Hilfe der äußeren Algebra ist leicht. Nur zwei dieser Regeln erfordern zusätzlichen Beweisaufwand, durch den aber unsere Kenntnis der äußeren Algebra erweitert werden wird. Die Regeln selbst kann man unabhängig von der äußeren Algebra lernen. Sie gelten alle entsprechend für Endomorphismen. Wir formulieren Sie für Matrizen.

(2.5.3) **M sei quadratische Matrix, deren Determinante zu berechnen ist.**

D1	Addiert man zu einer Zeile (oder Spalte) von M eine Linearkombinatior der übrigen Zeilen (Spalten), so ändert sich der Wert der Determinanten nicht
D1a	Sind insbesondere die Zeilen oder Spalten linear abhängig, so ist der Wert der Determinante Null
D2	Die Determinante ist in jeder Zeile oder Spalte linear.
D2a	Insbesondere kann ein gemeinsamer Faktor einer Spalte vorgezogen werden. Haben alle Matrixkomponenten einen gemeinsamen Faktor α, so ist dieser als α^n mit n=dimV vorzuziehen.
D3	Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten einer Determinante gibt ein Vorzeichen (-1).
D4	Man kann nach einer **Zeile oder Spalte entwickeln**. Das ist besonders zu empfehlen, wenn viele Komponenten der Zeile (Spalte) Null sind. Formeln unter (2.5.5).
D5	Matrix und **transponierte Matrix** haben dieselbe Determinante.
D6	Die **Determinante eines Produktes** ist das Produkt der Determinanter: det(MN)=detM·detN
D7	Der **Entwicklungssatz**: Stellt die Determinante als Summe von n! Termen dar, die aus den Matrixkomponenten aufgebaut sind. Formeln unter (2.7.3).

☐ Formulieren und rechnen Sie für jede dieser Regeln ein einfaches einschlägiges Korikretisierungsbeispiel.

(2.5.4) Zum Beweis: Dl folgt für Spalten sofort aus der Bilinearität der äußeren Algebra und a∧a=0. Etwa $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 = (S_1 - 2S_2 + 5S_3) \wedge S_2 \wedge S_3$. Für Zeilen folgt die Regel über D4.

D2 geht analog. Etwa (2A-3B)∧S_2∧S_3= 2(A∧$S_2 \wedge S_3$)-3(B∧S_2∧S_3) usw. D3 folgt für Spalten unmittelbar aus den Vertauschungsregeln der äußeren Algebra. Beachten Sie: Die Spalten müssen keineswegs benachbart sein. D4 folgt für Spalten, indem man die gewählte Spalte als Linearkombination der kanonischen Basis ausdrückt und D2 anwendet. Angenommen wir wollen nach der k-ten Spalte entwickeln: $S_k = \Sigma e_i M_{ik}$. Das ist einzusetzen in

$$\begin{aligned} N &= S_1 \wedge ... \wedge S_k \wedge .... \wedge S_n = S_1 \wedge ... \wedge (\Sigma_r e_r M_{rk}) \wedge .... \wedge S_n = \Sigma_r M_{rk} (S_1 \wedge ... \wedge e_r \wedge .... \wedge S_n \\ &= \Sigma_r (-1)^{k-1} M_{rk} (e_r \wedge S_1 \wedge ... \wedge \check{S}_k \wedge .... \wedge S_n). \qquad \check{\mathrm{S}} \text{ "auslassen".} \end{aligned}$$

Nun darf man in keiner weiteren Spalte mehr e_r wählen, falls ein Beitrag ungleich Null entstehen soll. (Das ist die zentrale Idee!) Wir können die Werte der r-ten Zeile daher in den anderen Spalten einfach Null setzen. Es entsteht eine (n-1)×(n-1)-Matrix, die wir mit $M^{(rk)}$ bezeichnen. (Streiche in M die r-te Zeile und die k-te Spalte. Das gibt $M^{(rk)}$.) Hierfür ist die Determinante zu berechnen.

Schließlich muß man den Faktor $\vec{e}_r$ (mit r$\neq k$) noch von der ersten Stelle an die korrekte (r-te) kommutiert werden, was einen Faktor $(-1)^{r-1}$ erfordert. Entwickeln des so entstandenen Dachproduktbeitrages

$$e_r \wedge \left(S_1 \wedge ... \wedge e_r \wedge .. \check{S}_k \wedge ... \wedge S_n\right) = e_r \wedge \det M^{(rk)} e_1 \wedge .. \wedge (\check{k}) ... \wedge e_n = (-1)^{r-1} \det M^{(rk)} e_1 ... \wedge e_n$$

(2.5.5) Insgesamt ergibt das die *Entwicklung der Determinante nach der k-ten Spalte:*

$$\boxed{\det M = \Sigma_{r=1}^{n} (-1)^{r+k} M_{rk} \det(M^{(rk)})}$$

Die Determinante von M wird als Linearkombination von n Unterdeterminanten des Typs (n-1)×$(n-1)$ dargestellt.

☐ Konkretisieren Sie die Formel für die Fälle n=2,3,4. Schreiben Sie c Vorzeichenverteilung in Matrixform.

Analog lautet die Formel für die *Zeilenentwicklung*:

$$\boxed{\det M = \Sigma_{k=1}^{n} M_{rk} \det M^{(rk)}.}$$

Diese Gleichung, also D5, beweisen wir in (2.7.7) über ein allgemeines Resultat. Damit folgt dann generell D1-4 für Zeilen.

D6 ist bereits in (2.2.14) bewiesen. Durch diesen Satz werden beachtliche Identitäten wiedergegeben, wie nachfolgendes Beispiel illustriert.

(2.5.6) Nehmen wir für D6 den Fall n=2.

$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$N=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$	$MN=\begin{pmatrix} aA+bC & aB+bD \\ cA+bC & cB+dD \end{pmatrix}$	$NM=\begin{pmatrix} Aa+Bc & Ab+Bd \\ Ca+Dc & Cb+Dd \end{pmatrix}$

Daher besagt beispielsweise detMdetN=det(MN) folgendes:

$$(ad - bc)(AD - BC) = (aA + bC)(cB + dD) - (aB + bD)(cA + bC)$$

☐ Verifizieren Sie das. Dasselbe für die für det(NM) entstehende Identität.

(2.5.7) Man sollte sich aber davor hüten, det(A+B) analog auszurechnen. Das ist fas immer ungleich det(A)+det(B). Gültig ist stattdessen die in D2 erfaßte Spaltenlinearität.

(2.5.8) Zu D7: Für n=2 und n=3 ist der Entwicklungssatz bekannt bzw. leicht mit Hilfe von (2.5.5) abzuleiten:

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$	$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{pmatrix} = asz + btx + cry - aty - brz - csx$

Für n=3 ist das das Spatprodukt der drei Spalten. Für allgemeines n werden wir den Entwicklungssatz in (2.7.11) formulieren und beweisen.

Für konkrete Determinantenberechnungen benutzt man den allgemeinen Entwicklungssatz fast immer nur für n=2 oder 3. Determinanten höherer Ordnung werden über (2.5.5) hierauf zurückgeführt.

(2.5.9) Zur Schreibweise: Will man die Determinante einer Matrix berechnen, so schreibt man gerne |M| für det(M). Man ersetzt also die Matrixklammern durch senkrechte Striche. Etwa:

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$=ad-bc	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -9$

(2.5.10) Ein typisches Beispiel der Berechnung einer Determinanten mit den gegbenen Methoden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (-4)\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & -10 & -5 \\ 3 & -8 & -6 \end{vmatrix} = (-4)(-1)\begin{vmatrix} -10 & -5 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} = 4(60-40) = 80$$

☐ Überlegen Sie sich die Stratregie, nach der vorgegangen wurde. Welche der Regel wurden benutzt?

(2.5.11) Mit Hilfe einer zu (2.5.5) analogen Rechnung kann man ein weiteres nützliche Resultat gewinnen. Angenommen die Komponenten M_{ik} der Matrix hängen von eine Parameter α ab und man möchte die Determinante von M nach α ableiten, also $\frac{\partial}{\partial\alpha}\det M$ bestimmen. Dazu müssen wir $(\det M)(\alpha+\Delta\alpha)$ nach $\Delta\alpha$ entwickeln und die Beiträge mit genau einem Faktor $\Delta\alpha$ sammeln. Alternativ können wir $S_1 \wedge ... \wedge S_n$ mit der Produktregel differenzieren. Das gibt - wobei wir auf das Vorzeichen zu achten haben:

$$\partial_\alpha S_1 \wedge ... \wedge S_n = \Sigma_i S_1 \wedge .... \wedge (\partial_\alpha S_i) .... \wedge S_n = \Sigma_i (-1)^{i-1} (\partial_\alpha S_i) \wedge S_1 ́.... \wedge \check{S}_i ... \wedge S_n.$$

Weiter ist

$$\partial_\alpha S_i = \partial_\alpha \Sigma_r e_r M_{ri}(\alpha) = \Sigma_r e_r \left(\partial_\alpha M_{ri}(\alpha)\right)$$

Einsetzen erlaubt erneut Streichen der r-ten Zeile. e_r an die richtige r-te Stelle bringen, gibt $(-1)^{r-1}$. Damit ist alles auf die Ableitung der einzelnen Matrixkomponenten zurückgeführt. Die i-te Spalte und die r-te Zeile der Matrix entfallen für die Auswertung der Derterminante.

(2.5.12) Zusammen finden wir für die **Ableitung einer Determinante nach einem Parameter:**

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\det M(\alpha) = \Sigma_{ir}(-1)^{i+r}\left(\partial_\alpha M_{ri}(\alpha)\right)\det M^{(ri)}(\alpha) \qquad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\alpha}.$$

Anders als in (2.5.5) wird hier über **alle** Matrixkomponenten summiert, da nach der Produktregel ja zunächst über alle Spalten summiert wird.

☐ Setzen Sie $M_{ik}=(i+k)\alpha^{i+k}$. Berechnen Sie detM für n=2 und n=3. Bestimmen Sie dann ∂_αdetM auf zwei Weisen, also direkt und über die Formel. Berechnen Sie eventuell mit einem Computeralgebrasystem die Determinante für einige weitere n.

1.2.6 **Die transponierte Abbildung**

Zum Beweis von D5 und D7 müssen wir unsere Kenntnisse der linearen Algebra.etwas auffrischen. Vgl. Kap.5.2.

(2.6.1) Zu jedem Vektorraum V gibt es den Dualraum V^* der linearen Abbildungen V→K. Die äußere Algebra $\wedge V$ ist auch Vektorraum. Also gibt es den zugehörigen Dualraum $(\wedge V)^*$. Davon zu unterscheiden ist $\wedge V^*$, die äußere Algebra des Dualraums.

(2.6.2) Zu jeder Basis e_i von V gibt es die zugehörige duale Basis e_i^* von V^* mit $\boxed{e_i^*(\vec{x}) = x_i}$. D.h. e_i^* projiziert den Vektor $\vec{x}$ auf seine i-te Komponente x_i bezüglich der gegebenen Basis! Zu beachten ist die sofort folgende wichtige Beziehung $\boxed{e_i^*(\vec{e}_j)=\delta_{ij}}$. Ist $\lambda \in V^*$ und $\vec{x} \in V$, so schreibt man vielfach $\langle\lambda|\vec{x}\rangle$ statt $\lambda(\vec{x})$. Das ist das *kanonische Skalarprodukt zwischen* V^* und V. **Diese Konstruktion ist bilinear**.

Zur Basis e_i von V gehört nun die kanonisch erweiterte Basis e_R von $\wedge$V . Die zugehörige duale Basis ist $(e_R)^*$ von $(\wedge V)^*$. Dabei ist stets R$\subset$ {1,2,.....,n}. Aus der Basis e_i^* des Dualraumes von V bilden wir die Basis e_R^* von $\wedge V^*$. Begrifflich sind $(e_R)^*$ und e_R^* **zunächst unbedingt zu unterscheiden.**

(2.6.3) Jeder Homomorphismus Φ:V$\to$W wird bezüglich gegebener Basen durch die beschreibende Matrix bestimmt. Vermöge: $\Phi(e_i)=\Sigma_r f_r M_{ri}$. Das gab ja die i-te Spalte.der beschreibenden Matrix. Und diese Gleichung bestimmt umgekehrt einen zugehörigen Homomorphismus. Diesen Satz benutzen wir, um die inhaltliche Bedeutung der transponierten Matrix zu klären.

Zunächst das Ergebnis.

Die Bedeutung der transponierten Matrix (Das *Herüberwälzen der Matrix*)

Satz: Sei $\Phi : V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus.
Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus ${}^t\Phi : W^* \to V^*$,
der folgende Bedingung erfüllt: $\langle\lambda|\Phi.\vec{x}\rangle = \langle\ {}^t\Phi.\lambda|\vec{x}\rangle$ für alle $\lambda \in V^*$ und $\vec{x} \in V$.
Ist **weiter** e_i eine Basis von V und f eine von W und M die zugehörige beschreibende von Φ, dann wird ${}^t\Phi$ durch die zu M transponierte Matrix ${}^tM$ beschrieben.

Im kanonischen Skalarprodukt kann man also durch Transposition eine lineare Abbildung herüberwälzen : $\langle....|\Phi...\rangle = \langle{}^t\Phi...|...\rangle$. Wegen dieser Eigenschaft ist die transponierte Abbildung von großem rechnerischen Nutzen. Beachten Sie, dass die transponierte Abbildung analog zur inversen in die andere Richtung geht. **Von W nach V.**. Und es ist eine Abbildung der Dualräume, nicht der ursprünglichen Räume.

(2.6.4) **Beweis.** Wir berechnen $\langle\lambda|\Phi\vec{x}\rangle$ und $\langle{}^t\Phi\lambda|\vec{x}\rangle$ beide in der üblichen Weise. (Für $\lambda \in V^*$ und $\vec{x} \in V$). Dabei legen wir ${}^t\Phi$ durch die Werte auf der dualen Basis fest. Und zwar durch die Beziehung

$$ {}^t\Phi.f_r^* = \Sigma_k e_k^*({}^tM)_{kr} \qquad \text{wobei } {}^tM_{kr} = \left({}^tM\right)_{kr} = M_{rk}. $$

Der Rest folgt durch einfaches Rechnen nach der Tunnelmethode.

$$ \begin{aligned} \langle\lambda|\Phi.\vec{x}\rangle &= \Sigma\lambda_i \left\langle f_i^*|\vec{f}_k\right\rangle M_{km}x_m = \Sigma_{ik}\lambda_i\delta_{ik}M_{km}x_m = \Sigma_i\lambda_i M_{im}x_m \\ \left\langle{}^t\Phi.\lambda|\vec{x}\right\rangle &= \Sigma({}^tM)_{ki}\lambda_i\,\langle e_k^*|\vec{e}_m\rangle\,x_m = ... \end{aligned} $$

☐ Vervollständigen Sie die Rechnung. Wieso ist hier Koeffizientenvergleich möglich?

Wir werden (2.6.3) zum Beweis von D5 benötigen.

9.2.7 Einige weitere Eigenschaften der Determinante

(2.7.1) Jeder Homomorphismus λ:V$\to$W wurde zu einem Algebrahom. $\bar{\lambda}$:$\wedge$V$\to$ $\wedge$W erweitert. Der zugehörige transponierte Homomorphismus ist ${}^t(\bar{\lambda}) : (\wedge W)^* \to (\wedge V)^*$. D.h. in Basisdarstellung gehört dazu die transponierte Matrix.

Aber wir können auch ${}^t\lambda : W^* \to V^*$ erweitern zu $\overline{({}^t\lambda)}$:$\wedge W^* \to \wedge V^*$.

(2.7.2) **Wir wollen zeigen, dass beide Wege dasselbe liefern**. Hierzu benötigen wir eine Identität, die wir wegen ihrer Bedeutung **Fundamentalidentität für Determinanten** nennen.

Alle Spaltenvektoren seien nach derselben Familie y entwickelt. Also
$\boxed{\vec{x}_i = \Sigma_k\vec{y}_kT_{ki} \quad \text{i=1,2,....,n}}$ Über die Spaltenlinearität der Determinante folgt

$$ \boxed{\det(\vec{x}_1,\vec{x}_2,....,\vec{x}_n) = \Sigma_{r_1....r_n}\det(\vec{y}_{r_1},...,\vec{y}_{r_n})T_{r_11}T_{r_22}.......T_{r_nn}} $$

Summiert wird über alle möglichen Kombinationen von r_1,......r_n. Das sind n^n Terme. Davon sind die meisten Summanden aber wegen D1a Null. Nämlich alle bei denen wenigstens zwei der Indizes den gleiche Wert haben. Es verbleiben höchstens n! Terme, die zu den Permutationen von (1,...,n) gehören. Für das Rechnen mit dem Indexkalkül ist es jedoch günstig, alle Terme mitzunehmen.

(2.7.3) Wählt man $\vec{y} = \vec{e}_i$ (= kanonische Basis) und $\vec{x}_i$= i-te Spalte von M, so erhält man **den allgemeinen Entwicklungssatz für Determinanten in der Indexkalkülform**. Das ist die unter D7 angekündigte Formel:

$$\boxed{\text{detM}=\Sigma_{r_1r_2....r_n}\varepsilon_{r_1r_2...r_n}\text{M}_{r_1i}\text{M}_{r_22}.....\text{M}_{r_nn} \qquad \text{mit } \vec{e}_{r_1}\wedge\vec{e}_{r_2}\wedge....\wedge\vec{e}_{r_n}=\varepsilon_{r_1r_2...r_n}\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2....\wedge\vec{e}_n}$$

Der ε-Faktor nimmt nur die Werte 0 oder 1 oder -1 an. Er ist durch die 2. Gleichung definiert, die wir $e_R = \varepsilon e_I$ schreiben können, wobei ausnahmsweise die Indexreihenfolge in R nicht wachsend, sondern **beliebig** sein soll. R ist hier also eine Indexfolge. Auch sind gleiche Indizes zugelassen, was zum Wert Null führt. Die Summe der von Null verschiedenen Beiträge läuft über alle n! Permutationen von (1,2,...,n). Dabei wird aus jeder Zeile und aus jeder Spalte genau eine Matrixkomponente M_{ri}, gewählt und das auf alle möglichen Weisen. Daraus wird das Produkt gebildet und noch ein Vorzeichen hinzugefügt. Die Indexstruktur gibt diesen Sachverhalt wieder In (2.5.5) sind die Fälle n=2 und n=3 ausgeschrieben. Weiter unten geben wir den Entwicklungssatz noch in einer anderen Form.

(2.7.4) Jetzt unser allgemeines Resultat zu den Dualräumen:

Satz: Für zerlegbare Vektoren kann man das kanonische Skalarprodukt wie folgt ausdehnen: $\boxed{\langle\lambda_1\wedge\lambda_2....\wedge\lambda_k|\vec{x}_1\wedge\vec{x}_2...\wedge\vec{x}_k\rangle = \det\left(\langle\lambda_i|\vec{x}_j\rangle_{ij=12...k}\right)}$
Dadurch werden die Basisvektoren $(e_R)^*$ und e^*_R miteinander identifiziert.
Die Räume $\wedge V^*$ und $(\wedge V)^*$ sind kanonisch isomorph.

(2.7.5) Beweis: Sei $\lambda_1\wedge\lambda_2....\wedge\lambda_k$ zerlegbarer Vektor aus $\wedge$V* Wir wollen daraus ein Element Λ aus $(\wedge\text{V})^*$ machen, also eine lineare Abbildung $\wedge$V$\rightarrow$K. Hierzu genügt es, die Werte auf einer Basis von $\wedge$V, also auf den e_R anzugeben. Und das tut obige Formel. Insbesondere besagt diese Konstruktion, daß $(e^*)_R$ die Dualbasis von e_R ist und die Abbildung ein Isomorphismus. (Denken Sie daran, dass $\langle e^*_i|\vec{e}_j\rangle = \delta_{ij}$ und $\det(\delta_{ij}) = 1$. Ist R$\neq S$, so liefert die Konstruktion offensichtlich Null. Haben R und S unterschiedlich viele Elemente soll das Ergebnis per Definition Null sein.)

Das Hauptproblem ist die **Wohldefiniertheit.** Obige Konstruktion liefert ja nicht nur die Werte von Λ auf der Basis e_R, sondern **für alle zerlegbaren Vektoren**. Ist das konsistent?

- Wir haben einerseits über die Definition $\langle\lambda_1\wedge\lambda_2....\wedge\lambda_k|\vec{x}_1\wedge....\wedge\vec{x}_k\rangle = \underline{\det(\langle\lambda_i|\vec{x}_k\rangle)}$.
- Andererseits berechnet man für die Basiswerte mit $\vec{x}_i$=$\Sigma\vec{e}_{r_i}x_{r_ii}$

$$\begin{aligned}\langle\lambda_1\wedge\lambda_2....\wedge\lambda_k|\vec{x}_1\wedge....\wedge\vec{x}_k\rangle &= \langle\lambda_1\wedge\lambda_2....\wedge\lambda_k|\vec{e}_{r_1}\wedge....\wedge\vec{e}_{r_k}\rangle\, x_{r_11}x_{r_22}.....x_{r_kk}\\ &= \underline{\det(\langle\lambda_i|\vec{e}_{r_j}\rangle_{ij})x_{r_11}x_{r_22}.....x_{r_kk}}\end{aligned}$$

Die erste Umformung benutzt die Bilinearität des äußeren Produktes und des kanonischen Skalarproduktes, die zweite die Definition (2.6.4) **für die Basisvektoren**, also den die lineare Abbildung fixierenden Teil der Definition.

Nach der oben abgeleiteten Fundamentalidentität sind die beiden unterstrichenen Ausdrücke aber gleich. Also ist unsere Definition konsistent. Der Isomorphismus ist derselbe für jede Basiswahl und die in (2.6.4) gegebene Formel gilt für alle Paare zerlegbarer Vektoren.

Damit ist (2.6.4) bewiesen.

(2.7,6) Sei jetzt Φ: V$\rightarrow$W eine lineare Abbildung und ${}^t\Phi$: W* $\rightarrow$V* die zugehörige transponierte Abbildung. Für sie gilt $\langle\lambda|\Phi.\vec{x}\rangle = \langle{}^t\Phi.\lambda|\vec{x}\rangle$. Mit der Definitionsformel aus (2.7.4) kann man symbolisch verkürzt wie folgt rechnen (X zerlegbar aus $\wedge$V und Λ zerlegbar aus $\wedge$V):

$$\left\langle {}^t\left(\overline{\Phi}\right).\Lambda|X\right\rangle = \left\langle\Lambda|\overline{\Phi}\,X\right\rangle = \det\langle\lambda|\Phi x\rangle = \det\left\langle{}^t\Phi\lambda|x\right\rangle = \left\langle\overline{{}^t\Phi}\Lambda|X\right\rangle$$

(2.7.7) Da dies für alle zerlegbaren Λ und X gilt, folgt:

$$\boxed{{}^t\left(\overline{\Phi}\right)=\overline{({}^t\Phi)}}$$

(2.7.8) Und da für den l×l-Fall der n-Vektoren die Transposition die Abbildung nicht ändert, folgt wie gewünscht:

$$\boxed{\det({}^t\Phi)=\det\Phi \qquad \text{und} \qquad \det({}^t\mathrm{M})=\det\mathrm{M}}$$

9.2.7a **Eine Matrixdarstellung der Permutationsgruppe und der Entwicklungssatz**

(2.7.9) Im Entwicklungssatz (2.7.3)) haben wir die Vorzeichengröße $\varepsilon_R = \varepsilon_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ eingeführt. Die Bedeutung dieser wichtigen Größe muß noch genauer analysiert werden. $e_1,\ldots,e_n$ sei die fest gewählte Basis von V. Weiter ist I={1,2,...,n} unsere Indexmenge. Wir betrachten nur die n! Beiträge, bei denen alle r_i untereinander verschieden sind, lassen also sämtliche Nullbeiträge in der Summe fort. Dann haben wir die Zuordnung $e_i \mapsto r_{r_i}$ der Basisvektoren. Also: Dem i-ten Vektor wird der Basisvektor zugeordnet, der im Produkt an i-ter Stelle steht. Die Wertvorgabe für die Elemente einer Basis definiert wie üblich eine lineare Abbildung π_R :V→V, einen Endomorphismus. Dessen beschreibende Matrix $\mathrm{M}(\pi_R)$ bezüglich e sieht so aus: In jeder Spalte stehen Nullen ausgenommen die r_i-te Komponente. Diese Komponente ist 1. Ebenso enthält jede Zeile genau eine 1. Die Wirkung auf die Basisvektoren ist ja genau die einer Permutation, genauer einer Permutation der Objekte, nicht der Indizes. Man kann auch sagen: **"Die Koordinatenachsen werden permutiert"**. Diese Basispermutation wird eindeutig linear auf den gesamten Raum ausgedehnt. Hier sollte man sich kurz an die Symmetriegruppe des Würfels erinnern, bei der bereits gewisse Achsenpermutationen zu speziellen linearen Abbildungen des gesamten Raumes erweitert wurden, nämlich zu Drehungen. Wir nennen die so entstehenden Matrizen $\mathrm{M}(\pi_R)$ *Permutationsmatrizen (für n Objekte).*

Für n=3 ergibt das 6 derartige Matrizen:

$$\mathrm{M}(\pi_{123}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{M}(\pi_{312}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{M}(\pi_{231}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{M}(\pi_{132}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{M}(\pi_{321}) = \ldots \quad \mathrm{M}(\pi_{213}) = \ldots$$

(2.7.10) Die Definitionsgleichung $e_R{=}\varepsilon_R e_I$, für die Vorzeichegröße ε_R zeigt, dass $\varepsilon_R = \det(\pi_R)$ gilt. **Das Vorzeichen ε_R ist einfach die Determinante der zugehörigen Permutationsmatrix!**

Abkürzend schreiben wir auch $\varepsilon(\pi)$ anstelle von $\det(\pi)$.

(2.7.11) Dann vereinfacht sich der allgemeine Entwicklungssatz (2.7.3) wie folgt:

Die allgemeine Entwicklungsformel für Determinanten:
$\det\mathrm{M}{=}\Sigma_{\pi\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\pi)M_{\pi(1)1}M_{\pi(2)2}\ldots . M_{\pi 8n)n}$.

In (2.7.3) wurde über alle mögliche Indexkombinationen summiert. In der neuen Formel, die in der mathematischen Literatur meist benutzt wird, wird nur noch über die n! Elemente der symmetrischen Gruppe summiert. Oder auch: $\varepsilon(\pi)$ ist +1 oder -1, aber nie Null. Beide Darstellungen haben Vor- und Nachteile. Man muß sich jeweils die geeignete aussuchen.

□ Was für Matrizen ergeben sich in den fortgelassenen Fällen, in denen $\varepsilon_R = 0$ ist?

(2.7.12) Wir abstrahieren noch einige **nützliche Folgerungen** der soeben gegebenen Konstruktion:

(2.7.13) Die Abbildung ($\mathcal{S}_n$: $\pi \mapsto M(\pi)$,Aut(V)) ist ein Gruppenhomomorphismus. Typmäßig liegt eine (homomorphe) Darstellung der Permutationsgruppe durch lineare Abbildungen (umkehrbare Matrizen, Automorphismen) von V vor. Über diese Darstellung operiert die Gruppe von links auf V. Derartige lineare Darstellungen von Gruppen haben für die Physik größte Bedeutung. Ein anderes Beispiel dieser Art ist die übliche Matrixdarstellung der Drehungen in der Ebene.

(2.7.14) Die Abbildung ($\mathcal{S}_n$: $\pi \mapsto \det(\pi), \{+1,-1\}$) ist wegen $\det(\psi\circ\pi)$=$\det\psi\cdot\det\varphi$ ein Gruppenhomomorphismus. Der Kern besteht aus allen Permutationen mit Determinante +1 und ist eine **Untergruppe der symmetrischen Gruppe**. Da es genau zwei zugehörige Nebenklassen gibt, ist dieser Kern eine Untergruppe mit n!/2 Elementen. Man nennt diese Untergruppe *die alternierende Gruppe von n Elementen.* Diese Permutationen nennt man auch *gerade* Permutationen. Entsprechend heißen die Elemente der zweiten

Nebenklasse ungerade Permutationen. Wir sehen, wie sich die für n=2 und 3 vertraute Struktur der Unterscheidung von zyklischen und antizyklischen Permutationen auf alle n verallgemeinert. Aber Achtung: In höheren Dimensionen ist zyklisch etwas anderes als gerade.

(2.7.15) Infolge der Homomorphieeigenschaft von $\pi_R \mapsto \varepsilon_r = \det(\pi_R)$ kann man die Vorzeichenberechnung immer als Folge einfacher Einzeloperationen darstellen und darüber berechnen. Für einige wichtige, aber besonders einfache Typen von Operationen sollte man sich den resultierenden Vorzeichenfaktor merken. Der Beweis mit Hilfe der äußeren Algebra ist immer einfach.

(2.7.16) Bringe einen Einsvektor e von der r-ten an die erste Stelle ohne Änderung der restlichen Reihenfolge. Diese Operation gibt ein Vorzeichen s=(-1)$^{r-1}$.

> Beispiel mit r=3: $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge\ \ e_4 \wedge = (-1)^2 e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_4$. Beachten Sie, dass e_1 jetzt an 2. Stelle steht und somit eine Stelle näher an e_4 herangerückt ist.

(2.7.17) Vertauschen von e_r, und e_s ergibt einen Faktor ε=-1 unabhängig davon, wie weit die beiden Vektoren von einander entfernt sind..

> Beweis: Sei r>s. Nach a gibt das Vorziehen von r direkt vor s einen Faktor (-1)$^{r-s}$. Aber r steht jetzt eine Einheit näher an der Lücke, so dass das Weiterrücken von e_s nur einen Faktor (-1)$^{r-s-1}$ gibt. Zusammen entsteht das negative Zeichen.

(2.7.18) Vertauscht man in einer Gruppe von k Einsvektoren alle zyklisch, dann ergibt das ein Vorzeichen ε=(-1)$^{k-1}$. Dabei soll das letzte Element an die erste Stelle kommen.

> Beweis: Immer paarweise vertauschen wobei man mit den letzten beiden Elementen der Gruppe beginnt. Etwa
> $$12(34) \nearrow 12(43) = 1(24)3 \nearrow 1(42)3 = (14)23 \nearrow (41)23$$
> mit k=4. Ergibt nach b) insgesamt ein s=$\varepsilon = (-1)^{4-1}$.

(2.7.19) Wir benutzen die Entwicklungsformel für einen direkten Beweis von detM=det(^{t}M).

(2.7.20) Dabei wird folgender elementarer mengentheoretischer Sachverhalt benötigt: Durchläuft i die Indexmenge I={1,2,. ...,n} und ist π eine beliebige Permutation von I, dann durchläuft auch π(i) die gesamte Indexmenge. Damit folgt (Π.. für Produkt aller.. analog zu Σ... als Abkürzung für Summe aller...):

$$\begin{aligned}\det M &= \Sigma_\pi \varepsilon(\pi)\Pi_{j\in I} M_{\pi(j)j} = \Sigma_\pi \varepsilon(\pi)\Pi_{j\in I} M_{\pi(\pi^{-1}(j)),\pi^{-1}(j)} = \Sigma_\pi \varepsilon(\pi)\Pi_{j\in I} M_{j,\pi^{-1}(j)} \\ &= \Sigma_\pi \varepsilon(\pi)\Pi_{j\in I}\ {}^tM_{\pi^{-1}(j),j} = \Sigma_\pi \varepsilon(\pi^{-1})\Pi_{j\in I}\ {}^tM_{\pi^{-1}(j),j} = \det({}^tM)\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde benutzt, dass die Summe über alle $\pi \in \mathcal{S}_n$ gleich der Summe über alle π^{-1} ist. Und es wurde benutzt, dass die auftretenden Summen und Produkte kommutativ sind.

8.2.8 **Zur geometrischen Bedeutung der Zweivektoren und Zweiformen**

(2.8.1) Wir betrachten hier nur reelle Vektorräume. Sei

$$\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \qquad \text{und} \quad \vec{b} = \vec{e}_1 3 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Diese beiden Vektoren spannen ein Parallelogramm P im V^3 auf.

Wir haben drei senkrechte Projektionen von P auf die drei Koordinatenebenen. Die nennen wir P_{12} , P_{13} und P_{23}. Nach den Regeln der Vektorrechnung wird P_{12} dann durch $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ und $\vec{e}_1 3$-$\vec{e}_2$ aufgespannt (Fortlassen der 3. Komponente!). In der äußeren Algebra rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}\vec{a}\wedge\vec{b} &= (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \wedge (\vec{e}_1 3 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \\ &= (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \wedge (\vec{e}_1 3 - \vec{e}_2) + \text{.....Terme mit } \vec{e}_3.\end{aligned}$$

(2.8.2) Der hingeschriebene 3-freie Term ist gerade die Beschreibung von P_{12} in der äußerer Algebra. Rechnet man weiter, so bekommt man genau alle Terme mit $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ aus der Ausrechnung von $\vec{a}\wedge\vec{b}$. Bezüglich der gegebenen Basis ist dieser Term eindeutig bestimmt.

Rechnet man analog $\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \wedge (\vec{e}_1 3 + \vec{e}_3) + \quad \text{Terme mit } \vec{e}_2}$, so gibt der abgespaltene Beitrag die Darstellung von P_{13}. Auch diese ist eindeutig bestimmt.

(2.8.3) Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \wedge \vec{b} &= (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \wedge (\vec{e}_1 3 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \\
&= (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \wedge (\vec{e}_1 3 - \vec{e}_2) + (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \wedge (\vec{e}_1 3 + \vec{e}_3) + (\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \wedge (-\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \\
&= -4\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 - 2\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 + 2\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Also : $\vec{a} \wedge \vec{b}$ der ersten Zeile ist die eindeutige Vektorsumme der drei Projektionen in der äußeren Algebra. Die letzte Zeile gibt den Flächeninhalt dieser Projektionen in Vielfachen der Einheitsrechtecke der Koordinatenebenen.

(2.8.4) Aber es ist nicht möglich, etwa $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ und $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3$ hinsichtlich ihres Flächeninhaltes zu vergleichen! Flächenbestimmung in jeder Ebene des Raumes verlangt die Vorgabe von drei unabhängigen Normalparallelogrammen entsprechend der 3 Dimensionen von $V^3 \wedge V^3$, dem Raum der Zweivektoren.

(2.8.5) Jetzt führen wir noch den Dualraum mit der dualen Basis e^* ein. Z.B. $\Lambda = e_1^* \wedge e_2^*$. Vektoren des Dualraumes heißen auch *Formen*. Entsprechend heißen diese Vektoren *Zweiformen*.

(2.8.6) Nach unseren Regeln finden wir:

$$\left\langle \Lambda | \vec{a} \wedge \vec{b} \right\rangle = -4 \left\langle e_1^* \wedge e_2^* | \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \right\rangle = -4$$

Inhaltlich ist Λ eine Operation, die jedes Parallelogramm im Raum in seine 3 Basisebenenprojektionen zerlegt und dann die Größe der Projektion in Einheiten des zugehörigen dualen Basisvektors hier $e_1^* \wedge e_2^*$ vermisst. Physikalisch gesehen ein Messgerät, in das man ein Parallelogramm eingibt und als Ergebnis die genannte Zahl erhält! Von der konstruktiven Realisierung dieses Resultates - also dem Zuordnungsverfahren - wird dabei wie üblich abstrahiert. Nur die Zuordnung, das Ergebnis, wird mathematisch benötigt.

(2.8.7) Allgemein kann man sagen:

Die Elemente des Dualraumes abstrahieren und algebraisieren bestimmte Messoperationen, die man zunächst für konkrete geometrische Individuen beherrscht und vornimmt, **zu Operationen, die man auf alle geometrischen Objekte (=Vektoren aus $\wedge$V) anwenden kann.** Das Dualraumelement ordnet jedem Vektor das zugehörige Meßergebnis eine Zahl zu.

Insbesondere liefert ein zerlegbares Dualraumelement einen Inhalt für jedes Parallelepiped.

(2.8.8) Die entsprechende Verallgemeinerung auf alle zerlegbaren Zweiformen ist klar. Neu sind unzerlegbare Zweiformen ab n=4. Z.B. $e_1 \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$. Das projiziert in zwei völlig entkoppelte Ebenen und bildet die Summe der Projektionsflächeninhalte. Das Resultat beschreibt also in einer Zahl ein Ergebnis für zwei Ebenen.

Dagegen liefert $e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^*$ Resultate zu einer einzigen Ebene, die über zwei unterschiedliche Projektionen gewonnen wurden. Die Gleichung $e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^* = e_1^* \wedge (e_2^* + e_3^*)$ verdeutlicht das.

(2.8.9) Im Bereich der 1-Vektoren gibt es vergleichbare Unterschiede nicht. Dort gehören Basislinearkombinationen immer zu einem einzigen Vektor.

9.2.9 Die beschreibende Matrix der Algebraerweiterung eines Homomorphismus

Zur Erinnerung: I={1,2,..,n}. Kleine Indexbuchstaben i,k usw indizieren die Elemente vom M. Große wie R,S usw indizieren die geordnete Teilemengen (Teilfolgen) aus I.

(2.9.1) Sei λ:V$\rightarrow$W linear und $\bar{\lambda}$:$\wedge$V$\rightarrow$ $\wedge$W die zugehörige Algebraerweiterung. Wir geben in V eine Basis e_i vor und in W eine Basis f_j. Die zugehörige beschreibende Matrix von λ sei M.

Dann gehört zu $\wedge$V die Basis e_R und zu $\wedge$ die Basis f_R. Wir stellen uns folgende Frage:

(2.9.2) Wie sieht die zugehörige beschreibende Matrix $\bar{M}$ von $\bar{\lambda}$ aus? Sie ist ja eindeutig durch die Gleichungen $\bar{\lambda}(e_R) = \Sigma_S f_S M_{SR}$ festgelegt. (Dabei sind R und S natürlich wieder Wortindizes.)

Wir erwarten, dass wir die M_{SR} durch die Matrixelemente M_{ij} ausdrücken können. Hat man sich das Problem ausreichend verdeutlicht, dann liefert der Formalismus der äußeren Algebra unmittelbar die Antwort.

(2.9.3) Zu V gehöre die Indexmenge 1={1,2,..,n} und zu W die Indexmenge J={1,2,...,m}. Wir erinnern an die Vereinbarung, dass für R⊂I die Komplementmenge mit R′ bezeichnet werden soll. Also R∪R′=I und entsprechend S∪S′=J disjunkt. Das bedeutet, dass Formeln der folgenden Art gelten:

$$\Sigma_{j\in J}\tilde{\mathbf{f}}_j\alpha_j = \Sigma_{j\in S}\ \ \tilde{\mathbf{f}}_j\alpha_j + \Sigma_{j\in S\ '}\ \ \tilde{\mathbf{f}}_j\alpha_j$$

(2.9.4) Um M_{SR} zu bekommen, müssen wir wie üblich $\bar{\lambda}(e_R)$ berechnen. Und zwar genau den Anteil, der zu f_S gehört. Wir rechnen (mit $R=i_1 i_2....i_p$ und $S=j_1....j_p$):

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}(e_R) &= \lambda(e_{i_1})\wedge \ ....\wedge\ \lambda(e_{i_p}) = (\Sigma f_{j_1}M_{j_1i_1})\wedge(\Sigma f_{j_2}M_{j_2i_2})\ \ .....\wedge\left(\Sigma f_{j_p}M_{j_pi_p}\right)\\
&= (\Sigma_{j_1\in S}f_{j_1}M_{j_1i_1}+\Sigma_{j_1\in S'}\ f_{j_1}M_{j_1i_1})\wedge \ ....\wedge\left(\Sigma_{j_p\in S}f_{j_p}M_{j_pi_p}+\Sigma_{j_p\in S'}\ f_{j_p}M_{j_pi_p}\right)\\
&= (\Sigma_{j_1\in S}f_{j_1}M_{j_1i_1})\wedge \ ....\wedge\left(\Sigma_{j_p\in S}f_{j_p}M_{j_pi_p}\right) + \text{ Terme die nicht auf } f_S \text{ führen}\\
&= f_S\det(M(S,R)) + ...
\end{aligned}$$

Dabei ist M(S,R) die folgende Teilmatrix von M: Alle Spalten, die **nicht** zu R gehören, werden gestrichen. Denn alle i, die auftreten, müssen ja in R liegen. Und alle Zeilen, die **nicht** zu S gehören, werden gestrichen. Denn die verbleibenden j müssen ja alle in S, nicht aber im Komplement S′ liegen. Das ergibt die quadratissche p×p-Matrix der vorletzten Zeile der Rechnung. Diese kann dann nach der Determinantenformel ausgewertet werden (Endfaktor f_S), womit die letzte Zeile folgt.

(2.9.5) Ergebnis:

$\bar{\lambda}(e_R) = \Sigma_S f_S M_{SR}$ Dann ist $\boxed{M_{SR} = \det(M(S,R))}$ wobei M(S,R) die Matrix ist, die man aus M erhält, wenn man alle Spalten aus R′ und alle Zeilen aus S′ streicht. Für $|S| \neq |R|$ ist das Matrixelement Null.

(2.9.6) Beispiel: $M_{(12)(23)}$ ist gesucht. Also S=12 und R=34. Wir rechnen

$$\lambda(e_2)\wedge\lambda(e_3) = (f_1M_{12}+f_2M_{22}+...)\wedge(f_1M_{13}+f_2M_{23}+...) = f_1\wedge f_2(M_{12}M_{23}-M_{13}M_{22})+...$$

Aber $\begin{pmatrix} M_{12} & M_{13}\\ M_{22} & M_{23}\end{pmatrix}$ ist gerade die Matrix, die nach dem angegebenen Streichverfahren übrig bleibt.

Die Beispielrechnung entspricht genau der zum allgemeinen Resultat führenden Rechnung.

9.2.10 Allgemeine Entwicklungssätze für Determinanten

(2.10.1) Sei I=R∪R′ mit $|R|$=k. Und λ: $e_i \mapsto a_i = \Sigma e_k M_{ki}$. Dann gilt einerseits e_I detM = $\varepsilon_R a_R \wedge a_{R'}$. Es war I={1,2,..,n}. Und andererseits $a_R\wedge a_{S'}=0$ für R≠S. Achtung: der soeben benutzte Vorzeichenfaktor ε_R ist offensichtlich durch die Gleichung $\boxed{\boxed{e_I = \varepsilon_R e_R \wedge e_{R'}}}$ definiert. Das ist **nicht** mit dem ε_R aus (9.2.7) zu verwechseln. Ist R *Teilmenge* der Indexmenge, so gilt die soeben eingeführte Definition. Ist R dagegen *Folge von n Indexwerten*, so gilt die Definition aus (2.7.3).

Das ermöglicht die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
e_I\delta_{RS}\det M &= \varepsilon_R a_R\wedge a_{S'} = \varepsilon_R\,(\Sigma e_K M_{KR})\wedge(\Sigma_{L'}e_{L'}M_{L'S'})\\
&= \varepsilon_R\Sigma_K e_K\wedge e_{K'}M_{KR}M_{K'R'} \qquad \text{Nur L=K trägt bei!}\\
&= \Sigma_K\varepsilon_R\varepsilon_K e_I M_{KR}M_{K'S'}
\end{aligned}$$

(2.10.2) Vergleich liefert den **allgemeinen Entwicklungssatz (für Determinanten):**

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sei M eine n×n-Matrix und 0<k<n. Dann gilt:}\\ \varepsilon_S\delta_{RS}\det M=\Sigma_{K,|K|=k}\varepsilon_K M_{KR}M_{K'S'}.\end{array}}$$

(2.10.3) Ein bemerkenswerte Formel. Sie erlaubt eine Vielzahl von Spezialisierungen. Da die M_{KR} ja gemäß (9.2.5) Unterdeterminanten von M sind, haben wir hier eine Darstellung von detM durch zugehörige Unterdeterminanten. D.h. die Formel erlaubt uns rekursive Berechnungen von Determinanten auf eine Vielzahl von Weisen. Beachten Sie Kürze und Eleganz der Herleitung. Im Sinne des Indexkalküls ist die Indexreihenfolge falsch. D.h. im ersten Matrixfaktor ist noch eine Transposition enthalten.

☐ Wählen Sie n=3. Schreiben Sie für R=1 und S=1 bzw. 2 die Herleitung aus. D.h. konkretisieren Sie obige Rechnung für diesen Fall. Starten sie mit $a_R \wedge a_{S'}$.

(2.10.4) ist λ invertierbar, so gilt wegen $\overline{\lambda \circ \mu} = \overline{\lambda} \circ \overline{\mu}$ und $\overline{1_V} = 1_{\wedge V}$, dass auch $\overline{\lambda}$ invertierbar ist. Und die Elemente der inversen Matrix können wir unmittelbar aus obigem Entwicklungssatz ablesen, wobei wir M^{-1}_{RS} anstelle von $\overline{M}^{-1}_{RS}$ bzw. $\overline{M^{-1}_{RS}}$ schreiben.

$$\boxed{M^{-1}_{RS} = \frac{\varepsilon_R \varepsilon_S}{\det M} M_{S'R'}. \qquad \text{Indexreihenfolge rechts beachten!}}$$

(2.10.5) Sei jetzt k=1, R={r} und S={s}. Dann erhält man $M_{S'R'}$ wie folgt: Streiche in der Matrix M die s-te Zeile und die r-te Spalte. Vom Rest bilde die Determinante. Das Resultat dieser Konstruktion nennen wir auch *Minor an der Stelle (s,r) von M.* Wir bezeichnen diesen Minor mit $M^{(s,r)}$.

> **Achtung:** Minoren haben wir bereits in (2.5.4-5) eingeführt, dort allerdings mit $\det(M^{(s.r)})$ bezeichnet, um den rekursiven Charakter der Entwicklungsforn nach einer Zeile zu verdeutlichen.

(2.10.6) Der Vorzeichenfaktor ist offenbar $(-1)^{r-1+s-1} = (-1)^{r+s}$. Das ist leicht zu merken. Stichwort: "Schachbrettmuster".

(2.10.7) Dann ergibt (2.10.2) für R=S erneut die **Entwicklungsformel nach einer Spalte**

$$\boxed{\det M = \Sigma_r (-1)^{r+s} M_{rs} M^{(r,s)}} \qquad \text{Entwicklung nach der s-ten Spalte, (2.5.5).}$$

> Rechts steht eine Summe über alle Matrixelemente der s-ten Spalte von M. Der zugehörige Faktor ist der entsprechende Minor, eine (n-1)×(n-1)-Determinante. Damit lassen sich alle n×n-Determinanten rekursiv auf eine Summe von (n-1)×(n-1)-Determinanten zurückführen.

(2.10.8) Wählt man k=n-1, so erhält man die entsprechende Formel für die Entwicklung nach einer Zeile aus (2.5.5)

(2.10.11) Wir können die Entwicklungsformel (2.10.7) auch noch anders interpretieren. Und zwar führen wir eine weitere n×n-Matrix $\widetilde{M}$ ein vermöge:

$$\boxed{\widetilde{M}_{ik} = (-1)^{i+k} M^{(k,i)}} \qquad M^{(k,i)} \quad \text{Minor; Indexreihenfolge beachten!}$$

Damit schreiben sich unsere Entwicklungssätze

$$\Sigma_k \widetilde{M}_{ik} M_{kr} = \Sigma_k M_{ik} \widetilde{M}_{kr} = \delta_{ir} \det M \qquad \text{oder} \qquad \widetilde{M} M = M \widetilde{M} = \det M \cdot id$$

(2.10.12) Ist detM≠0, so ergibt sich folgende Formel für die inverse Matrix:

$$\boxed{\boxed{M^{-1}_{rs} = \frac{(-1)^{r+s}}{\det M} M^{(s,r)}}} \qquad \text{Indexreihenfolge!}$$

(2.10.13) Um den formelmäßigen Umfang dieser Beziehungen richtig würdigen zu können betrachten wir ein Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 \\ 1 & -10 & 7 \\ 1 & -17 & 12 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{M}_{11} = \begin{vmatrix} -10 & 7 \\ -17 & 12 \end{vmatrix} = -1 \quad \widetilde{M}_{12} = -1 \begin{vmatrix} -9 & 5 \\ -17 & 12 \end{vmatrix} = 23.....$$

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} -1 & 23 & -13 \\ -5 & 43 & -23 \\ -7 & 59 & -31 \end{pmatrix} \qquad \det M = 6 \qquad \widetilde{M} M = 6 \cdot id_3 \quad \text{(9 Beziehungen!)}$$

(2.10.14) Zur weiteren Verdeutlichung führen wir in M noch einen äußeren Parameter x ein.

M=$\begin{pmatrix} 4-x & -9 & 5 \\ 1 & -10-x & 7 \\ 1 & -17 & 12-x \end{pmatrix}$ $\qquad \widetilde{M}_{11} = \begin{vmatrix} -10-x & 7 \\ -17 & 12-x \end{vmatrix} = x^2-2x-1$

$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} x^2-2x-1 & -9x+23 & 5x-13 \\ x-5 & x^2-16x+43 & 7x-23 \\ x-7 & -17x+59 & x^2+6x-31 \end{pmatrix}$ $\qquad$ detM= ($-x^3+6x^2-11x+6$)

Multipliziert man $M\widetilde{M}$ aus, so ergibt sich ($-x^3+6x^2-11x+6$)$\cdot id_3$. Das sind beachtliche Identitäten zwischen den Polynomen. Genau für die Nullstellen dieses Polynoms - etwa x=1 - ist M **nicht umkehrbar**. Es handelt sich erneut um das Problem der Eigenwertbestimmung.

☐ Sei M=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie hierfür $\widetilde{M}$ und vergleichen Sie mit den Resultaten aus Kap.4 (4.5.30). Kann man das verstehen?

(2.10.15) Es sei N: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und M: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Für k =n kann man det(MN) bilden, nicht aber det(M)det(N). Wir wollen eine Formel entwickeln, die die Regel det(MN)=det(M)det(N) auf diesen Fall ausdehnt.

☐ Ist k<n, so ist notwendig det(MN)= 0. Wieso?

(2.1.16) Sei k$\geq$n. Weiter sei e_i die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ und E_j die von $\mathbb{R}^k$. Wir habe (MNe_1)$\wedge$ ...$\wedge$ (MNe_n)=det(MN)$e_1\wedge$ ...$\wedge e_n$. Andererseits ist mit den Resultaten aus (9.2.5):

$$\begin{aligned} (MNe_1)\wedge \ldots \wedge (MNe_n) &= \overline{MN}\ e_I = \overline{M}\circ\overline{N}(e_I) = \overline{M}(\overline{N}(e_I)) \\ &= \Sigma_K M(E_K)N_{KI} = \Sigma_{JK} e_J M_{JK} N_{KI} \end{aligned}$$

Da J aber n Elemente haben muß, trägt in der letzten Summe nur J=I bei.

(2.2.17) Vergleich gibt die folgende Formel:

$$\boxed{\text{det(MN)}=\Sigma_k \text{M}_{IK}\text{N}_{KI}} \quad \text{I} = \{1,2,..,\text{n}\} \quad \text{n} \leq k.$$
$$\text{summiert wird über alle K} \subset \{1,2,...,k\} \quad \text{mit n Elementen}$$

Denken Sie daran: M_{IK} ist die Determinante der quadratischen Matrix, die man erhält, wenn man alle Spalten von M streicht, deren Index nicht in K liegt. Ist k=n+1, so gibt es n+1 derartige K. Für k=n erhält man die alte Produktregel.

☐ Was ergibt sich für N= ^{t}M ? Rechnen Sie einige einfache Konkretisierungen.

9.2.11 Das Vektorprodukt und die äußere Algebra

(2.11.1) Wir kennen zwei gleichwertige Einführungen des Vektorproduktes. Entweder über die Komponentenmultiplikation und das heißt über die in Kap.9.1 gegebenen Strukturkonstanten. Dabei muß man jedoch von einer Orthonormalbasis e_i mit Rechtsorientierung ausgehen, was den euklidischen Raum voraussetzt. Oder man wählt die geometrische Definition. Dann hat $\vec{a}\times\vec{b}$ die Richtung der Normalen auf der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene und das verlangt erneut einen euklidischen Raum. Beide Einführungen geben kaum Hinweise, wie man das Vektorprodukt auf andere Dimensionen ausdehnen könnte.

(2.11.2) **Wir besprechen jetzt eine weitere Einführung des Vektorproduktes und zwar mit Hilfe der äußeren Algebra. Diese Einführung nun läßt sich relativ problemlos verallgemeinern. Allerdings muß man auch hier von einem euklidischen Raum ausgehen.** Daher verschieben wir die Details der Verallgemeinerung auf Kap.10.5.

(2.11.3) Seien $\vec{a}$,$\vec{b} \in V_0^3$ zwei unabhängige Vektoren und $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine Orthonormalbasis mit Rechtsorientierung. Wir berechnen $\vec{a}\times\vec{b}$ sowie $\vec{a}\wedge\vec{b}$ und vergleichen:

$$\begin{aligned} \vec{a}\times\vec{b} &= \vec{e}_1(a_2b_3-a_3b_2)+\vec{e}_2(a_3b_1-a_1b_3)+\vec{e}_3(a_1b_2-a_2b_1) \\ \vec{a}\wedge\vec{b} &= \vec{e}_2\wedge\vec{e}_3(a_2b_3-a_3b_2)+\vec{e}_1\wedge\vec{e}_3(-a_3b_1+a_1b_3)+\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2(a_1b_2-a_2b_1) \end{aligned}$$

(2.11.4) Das sieht aus wie die Wirkung einer linearen Abbildung $\vec{a}\wedge\vec{b}\mapsto\vec{a}\times\vec{b}$. Wir definieren eine lineare Abbildung $*:\overset{2}{\wedge}V_0^3\rightarrow V_0^3$ durch Festlegung der Basiswerte. Genauer setzen wir:

$$*(\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2)=\vec{e}_3 \qquad *(\vec{e}_3\wedge\vec{e}_1)=-*(\vec{e}_1\wedge\vec{e}_3)=\vec{e}_2 \qquad *(\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3)=\vec{e}_1$$

Beachten Sie das Vorzeichen im mittleren Term. "Zyklisch" (31) und "lexikographisch" (13) sind in diesem Fall nicht dasselbe. Da $*$ linear ist, folgt sofort allgemein $*(\vec{a}\wedge\vec{b})=\vec{a}\times\vec{b}$.

(2.11.5) Ein Problem, das sich anschließt: **Ist die Konstruktion unabhängig von der Wahl der kartesischen Rechtsbasis?** Offenbar, weil das Vektorprodukt rein geometrische Bedeutung besitzt. Ein neuer direkter Beweis wäre schön. Wir werden darauf in Kap.10.5 zurückkommen

(2.11.6) Und der eingeführte Isomorphismus $*$ ist verallgemeinerbar. Wir müssen nur daran denken, dass $V_0^3=\overset{1}{\wedge}V_0^3$ ist. Generell hat der Raum der k-Vektoren dieselbe Dimension wie der Raum der (n-k)-Vektoren. Vgl.(1.2.16). Beide Räume sind also isomorph. Können wir einer kanonischen Isomorphismus konstruieren?

(2.11.7) Wir deuten das kurz an. Sei $e_1,...,e_n$ eine orthonormale Rechtsbasis des Raumes und $K=\{i_1,....,i_k\}$ eine k-elementige Teilmenge von $\{1,2,...,n\}$. Die Gesamtheit der e_K bildet eine Basis von $\overset{k}{\wedge}V$, dem Raum der k-Vektoren. Erneut sei K' das Komplement zu K in $\{1,2,..,n\}$. Wir setzen $*e_K=\varepsilon_K e_{K'}$. Dabei sei ε_K der in (2.10.1) eingeführte Vorzeichenfaktor. Das erklärt offfensichtlich einen Isomorphismus $\wedge V\rightarrow\wedge V$. Die Frage der Unabhängigkeit von der Basiswahl lassen wir hier noch offen.

(2.11.8) Aber wie steht es mit der geometrischen Interpretation? Nun, die Basisvektoren e_i, die zu K gehören, spannen einen k-dimensionalen Teilraum U auf. Dann spannen die fehlenden Vektoren aus K' einen (n-k)-dimensionalen Teilraum auf, den man geometrisch als Normale zu U interpretieren wird! Zugleich bilden die beiden Vektoren e_K bzw. $e_{K'}$ je ein orientiertes Einheitsvolumen für die beiden Räume. Somit ist zu vermuten, dass $*$ jedem k-dimensionalen Teilraum seine Normale zuordnet unter gleichzeitiger Mitnahme eines Größenvergleichs und einer Orientierung. Und das ist natürlich eine naheliegende und sinnvolle Verallgemeinerung des Vektorproduktes.

(2.11.9) Somit lag die Schwierigkeit der Verallgemeinerung hauptsächlich darin, dass man den Raum der Einsvektoren mit V identifizieren kann, so dass im Falle n=3 die Zuordnung $(\vec{a},\vec{b})\mapsto\vec{a}\wedge\vec{b}\mapsto*(\vec{a}\wedge\vec{b})$ als **innere Verknüpfung der Einsvektoren** interpretiert werden kann. Das ist allgemein nicht der Fall und wäre auch nicht strukturgerecht.

9.3 Tensoren

9.3.0 Zur Motivation des Tensorproduktes

Häufig hängen physikalische Größen von *zwei Vektoren unterschiedlichen Typs* ab. Ein Drehmoment von einem Ortsvektor und einer Kraft, ein Phasenraumvektor von einem Ortsvektor und einer Geschwindigkeit usw. Seien V und W die beiden zugehörigen Vektorräume. Die einfachste Methode, daraus einen einzigen Vektorraum zu machen, ist die Bildung des kartesischen Produktes $V\times W$ der beiden Räume, das wir besser kanonisch isomorph als direkte Summe $V\oplus W$ interpretieren. Vgl. Kap.4.1.1b und Kap.4.1.6a. Der Produktraum $V\times W$ ist ein Raum der Dimension dimV+dimW. Im Phasenraumfall ist die direkte Summe die passende Bildung. Eine Konstruktion wie das Drehmoment dagegen fügt sich schlecht in diese Struktur. Ist etwa einer der beiden Eingabevektoren Null, so ist auch das resultierende Drehmoment Null, ein Phänomen, das nicht zu der direkten Summe paßt. (a,0) ist in der Regel ungleich Null. Bildungen wie das Drehmoment sind vielmehr durch Bilinearität ausgezeichnet. $(\alpha\vec{r},\vec{F})$ und $(\vec{r},\alpha\vec{F})$ führen beide zu demselben Drehmoment. Eine bilineare Abbildung $V\times W\rightarrow U$ verlangt zu ihrer Festlegung (nm)k Zahlangaben, wobei dimV=n, dimW=m und dimU=k ist. So, als läge eine lineare Abbildung $X\rightarrow U$ vor, wobei X ein Raum der Dimension nm statt n+m wäre.

Eine Raumbildung mit dieser Dimension und den gewünschten Eigenschaften gibt es tatsächlich: *Das Tensorprodukt.* Im Rahmen der Mathematik, aber auch der theoretischen Physik hat es eine beträchtliche Bedeutung erlangt. Wir nennen dafür zwei Gründe: Mit Hilfe des Tensorproduktes wandelt man bilineare und allgemeiner multilineare Abbildungen auf kanonische Weise in lineare Abbildungen um, so dass man die Resultate der linearen Algebra übernehmen kann. Und man erhält ein Verfahren, mit dem man in vielen Fällen Gleichungen zwischen den Werten in Gleichungen zwischen den beteiligten Abbildungen umwandeln kann.

Eine Erläuterung des letzten Punktes: Häufig ist es leicht, eine Gleichung für das totale Differential einer Abbbildung zu erhalten. Sagen wir df=Df($\vec{x}_0$).$\Delta\vec{x}$=$(\vec{a}\cdot\Delta\vec{x})\vec{b}$+3$(\vec{a}\cdot\vec{x}_0)\Delta\vec{x}$. Wie erhält man aus diesen Gleichungen für die Werte eine Gleichung für Df($\vec{x}_0$), wie "kürzt man das Urbildelement $\Delta\vec{x}$ aus der Gleichung heraus"? Bisher haben wir uns damit geholfen, dass wir eine Basis einführten und zur zugehörigen Matrixdarstellung übergingen. Das Tensorprodukt macht den Übergang jedoch basisunabhängig möglich, wie wir sehen werden.

Stärker physikalisch orientiert können wir (mit einiger Ungenauigkeit) auch sagen: Es geht um einen Formalismus, der aus Formeln zwischen Meßresultaten entsprechende Formeln zwischen den beteiligten physikalischen Größen produziert. Im Bereich der Quantenmechanik benötigt man das Tensorprodukt, um aus Einteilchenzustandsräumen die Zustandsräume von Mehrteilchensystemen aufzubauen.

9.3.1 **Die Konstruktion**

(3.1.1) Wir führen die **Tensorräume analog zur Konstruktion der äußeren Algebra** ein, genauer zur Konstruktion der Räume der k-Vektoren. Die Konstruktion des Tensorproduktes ist weniger kompliziert als die der k-Vektoren, entsprechend ist ihre geometrische Interpretation jedoch auch weniger reichhaltig.

(3.1.2) Es seien V und W zwei Vektorräume über dem kommutativen Körper K. Ihre (endlichen) Dimensionen seien n und m. Wir wählen je eine zugehörige Basis e_i und f_k. Der Produktraum V×W hat dann die Basis $(e_1,0)$,.... $(0,f_m)$ mit n+m Elementen. Wir wollen einen zweiten Raum V⊗W der Dimension n·m bilden. Als Basis nehmen wir die geordneten Paare (e_i,f_k), die wir formal $e_i\otimes f_k$ schreiben. Die Indizes laufen über die zugehörigen Werte 1,..,n bzw. 1,...,m. Diese Objekte sollen **eine Basis eines neuen Vektorraumes über K** bilden, den man mit V⊗W bezeichnet. Also

$$\boxed{\mathrm{V}\otimes\mathrm{W}=\{\mathrm{t}|\mathrm{t}=\Sigma_{ik}\mathrm{e}_i\otimes\mathrm{f}_k\mathrm{t}_{ik}\quad\text{mit}\quad\mathrm{t}_{ik}\in\mathrm{K}\}}.$$

(3.1.3) Der allgemeine Tensor t (=Vektor dieses Raumes) ist formale Linearkombination der gewählten Basis. Da V≠W möglich ist, ist die Frage nach der Faktorvertauschung sinnlos. Die beiden Räume V⊗W und W⊗V sind zwar isomorph, aber in der Regel sollte man sie nicht identifizieren.

(3.1.4) Die Komponenten t_{ik} eines Tensors bilden eine n×m-Matrix. Oder auch: Der zugehörige Koordinatenvektor t^K ist eine n×m-Matrix: $t^K=(t^K_{ik})$.

(3.1.5) Warum die Produktschreibweise? Nun die wichtigste Eigenschaft der Multiplikation einer Algebra ist die Bilinearität. Diese fordern wir jetzt auch für unser Tensorprodukt:

Die Zuordnung $(\mathbf{V}\times\mathbf{W},(\mathbf{x},\mathbf{y})\mapsto x\otimes y,\mathbf{V}\otimes\mathbf{W})$ soll bilinear sein!

Natürlich entsteht so noch keine Algebra, da keine **innere** Verknüpfung vorliegt.

(3.1.6) Insbesondere gilt die übliche Fundamentalidentität

$$x\otimes y=\Sigma_{ik}e_i\otimes f_kx_iy_k$$

wobei die Summation über alle doppelten Indizes läuft. (Anzahl n·m).

(3.1.7) Von der äußeren Algebra übernehmen wir den Begriff der Zerlegbarkeit. Jeder Tensor t, für den es ein x∈V und ein y∈W gibt, so dass t=x⊗y gilt, heißt zerlegbar.

In der Regel gibt es unzerlegbare Tensoren. Die Basisvektoren $e_i\otimes f_k$ sind zerlegbar.

(3.1.8) Jetzt können wir die **Basisunabhängigkeit** der Tensorkonstruktion nachweisen. Seien E_i und F_k zwei weitere Basen. Das damit gebildete Tensorprodukt sei $\otimes'$. Wir müssen zeigen, dass die beiden Räume V⊗W und V $\otimes'$W kanonisch isomorph sind. Den Isomorphismus erzeugen wir über die zerlegbaren Vektoren. Für sie soll gelten $x\otimes y\mapsto x\otimes' y$. Die Frage ist: Ist das wirklich ein wohldefinierte lineare Zuordnung? Wir wissen ja aus den Erfahrungen mit dem äußeren Produkt, dass eigentlich **nur** die Werte der linearen Abbildung für (e_i,f_k) vorzugeben sind und der Rest aus der Linearität folgt.

Die Fundamentalidentität (3.1.6) zeigt die Konsistenz. Die Wertfestlegung für die Basisvektoren und die Linearität ergeben die eingerahmte Beziehung. Die beiden Außenbeziehungen folgen dann über die Bilinearität des Tensorproduktes:

$$x\otimes y=\boxed{\Sigma\mathrm{e}_i\otimes\mathrm{f}_k\mathrm{x}_i\mathrm{y}_k\mapsto\Sigma\mathrm{e}_i\otimes'\mathrm{f}_k\mathrm{x}_i\mathrm{y}_k}=x\otimes' y$$

Folglich kann man die beiden Tensorprodukte kanonisch identifizieren. Insbesondere gilt natürlich $\mathrm{E}_i \otimes \mathrm{F}_j = E_i \otimes' F_j$, so daß man die Konstruktion mit jeder Basis starten kann.

□ Angenommen V ist eindimensional. Was für eine Beziehung besteht dann zwischen W und $V \otimes W$? Und was ist mit $V \times W$, insbesondere der zugehörigen Dimension? Was mit der Zerlegbarkeit?

9.3.2 Basiswechsel bei Tensoren

(3.2.1) Jetzt kommen wir zum wichtigen Problem des Basiswechsels. Auch hier spielt die Bilinearität die entscheidende Rolle.

(3.2.2) Seien also $\vec{e}_i$ und $\vec{f}_k$ die alten und $\vec{E}_i$ und $\vec{F}_k$ die neuen Basen von V bzw. W. Die Transformationsmatrizen seien gegeben durch e=ET und f=FS. Einsetzen gibt:

$$\boxed{\vec{e}_i \otimes \vec{f}_k = (\Sigma_m \vec{E}_m \mathrm{T}_{mi}) \otimes (\Sigma_m \vec{F}_n \mathrm{S}_{nk}) = \Sigma_{mn} \vec{E}_m \otimes \vec{F}_n \mathrm{T}_{mi} \mathrm{S}_{nk}}$$

Haben Sie jeden dieser einzeln trivialen Schritte verstanden? Das Ergebnis liefert die gesuchte Matrix für den Basiswechsel:

> Die alte Basis von V⊗W wird als Linearkombination der neuen dargestellt. Das ergibt die zugehörige Transformationsmatrix. Analog zum Fall der äußeren Algebra sind deren Indizes keine Einzelzahlen, sondern Worte, hier solche, die Zahlenpaaren (m,i) oder (n,k) entsprechen.

□ Interpretieren Sie selbst die Gleichung $\overline{T}_{(mn)(ik)} = T_{mi} S_{nk}$.

(3.2.3) Die Hauptbedeutung der Transformationsmatrix liegt darin, dass man mit ihre Hilfe den neuen Koordinatenvektor aus dem alten berechnen kann: $\boxed{\vec{x}^N = T.\vec{x}^A}$. Das läßt sich problemlos auf die Tensorkomponenten übertragen, die ja auch durch Indexpaare charakterisiert werden. Sei t=$\Sigma \vec{e}_i \otimes \vec{f}_k t^A_{ik} = \Sigma \vec{E}_m \otimes \vec{f}_n t^N_{mn}$. Dann folgt wie üblich durch Koeffizientenvergleich im Indexkalkül

$$\boxed{\mathrm{t}^N_{mn} = \Sigma \mathrm{T}_{mi} \mathrm{S}_{nk} \mathrm{t}^A_{ik}}. \quad \text{Oder in Matrixform} \quad \vec{t}^N = \overline{T}.\vec{t}^A \qquad \text{Vgl. (3.1.4).}$$

Inspizieren Sie die Indexstruktur sorgfältig. In Kap.11 gehen wir hierauf genauer ein.

(3.2.4) Jetzt kann man entsprechend Tensorprodukte aus mehreren Faktoren bilden. Etwa U⊗V⊗W. Ebenso kann man die Produktbildung iterieren und etwa (U⊗V)⊗W oder U⊗(V⊗W) bilden. Alle dies Räume **sind kanonisch isomorph und man identifiziert sie** üblichwerweise. Nicht identifizieren sollte man dagegen U⊗V und V⊗U.

(3.2.5) Die Basiskonstruktion und die Formeln für den Basiswechsel übertragen sich problemlos auf diese Fälle.

□ Bilden Sie analog zur äußeren Algebra die direkte Summe

$$K \oplus V \ \oplus \ (V \otimes V) \ \oplus \ (V \otimes V \otimes V) \ \oplus ....$$

Begründen Sie, dass das Tensorprodukt hieraus eine Algebra macht, die *tensorielle Algebra des Vektorraumes V*. Welche (elementaren) Eigenschaften hat sie? Die in (3.2.4) gegebene Identifikation ist zu benutzen. Welcher fundamentale Unterschied besteht gegenüber der äußeren Algebra hinsichtlich der Dimension?

9.3.3 Die Beziehung zwischen kartesischem Produkt und Tensorprodukt

(3.3.1) Zunächst haben wir die folgende bilineare, aber **keineswegs lineare** Abbildung:

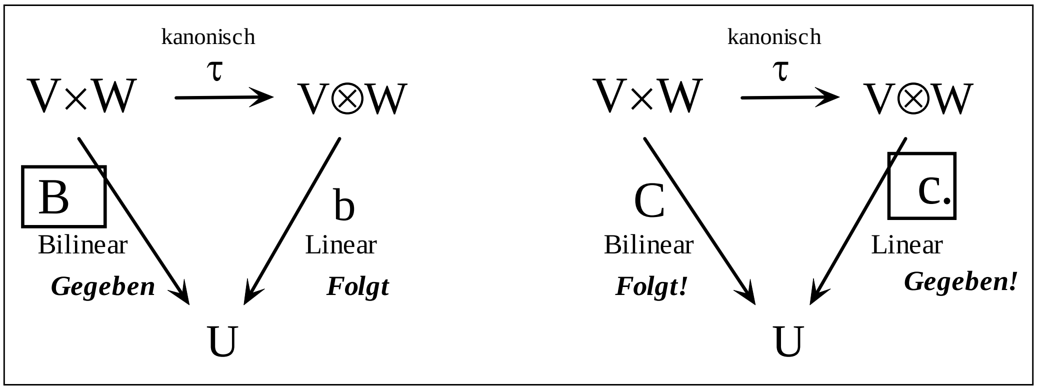
$$\tau = \otimes = (V \times W, (x,y) \mapsto x \otimes y, V \otimes W).$$

Ist n=1 oder m=1, dann ist jeder Vektor aus V⊗W zerlegbar und die Abbildung ist surjektiv. Für n=m=3 ist die Abbildung dagegen weder injektiv noch surjektiv. Dann ist der neundimensionale Werteraum $V \otimes W$ weitaus größer als der sechsdimensionale Urbildraum $V \times W$. Für n=m=2 ist das noch nicht der Fall, da (zufällig) 2+2=2·2=4 gilt.

(3.3.2) **Der Charakterisierungssatz für das Tensorprodukt**

Es seien	V,W,U endlichdimensionale Vektoräume über K und B:V×$W \to U$ eine bilineare Abbildung. Weiter sei c: $V \otimes W \to U$ linear.
Dann	Dann gibt es genau eine **lineare** Abbildung b:V⊗$W \to U$, die stets b(x⊗$y) = B(x, y)$ erfüllt. Also $\boxed{\text{B=b}\circ\tau}$. Und zu c gibt es genau eine bilineare Abbildung C:V×$W \to U$ mit C=c∘τ.

Die Skizzen verdeutlichen die Verhältnisse. In beiden Fällen liegt ein kommutatives Diagramm vor.



Alles Bilineare wird hierdurch linearisert, in den Bereich der linearen Algebra übertragen. Man kann die dort hergeleiteten Resultate übernehmen. Für mehr als zwei Faktoren ist bilinear durch multilinear zu ersetzen. Der angegebene Sachverhalt gilt analog.

(3.3.3) **Beweis:** a) Sei c:V⊗W→U linear vorgegeben. Dann ist C=c∘τ bilinear, da τ das ist.

b) Sei B gegeben, b ist zu konstruieren. Wie üblich genügt die Festlegung der Werte auf einer Basis und das erfolgt durch die Formel $b(e_i \otimes f_k) = B(e_i, f_k)$. Es verbleibt die Frage nach der Wohldefiniertheit, insbesondere die Unabhängigkeit der Konstruktion von der Basiswahl. All das ist gesichert, wenn wir die behauptete Gleichung b(x⊗y)=B(x,y) für jeden zerlegbaren Vektor beweisen. Das geschieht auf die übliche Weise:

$$b(x \otimes y) = b((\Sigma e_i x_i) \otimes (\Sigma f_k y_k) = \Sigma_{ik} e_i \otimes f_k x_i y_k = \Sigma_{ik} B(e_i, f_k) x_i y_k = B(x, y).$$

Die letzte Umformung verwendet die vorausgestzte Bilinearität von B. Die Eindeutigkeit folgt über die jeweilige Wertefestlegung auf den Basisvektoren.

Wegen der Bedeutung der Konstruktion sei der Weg von bilinear bzw. multilinear zum Tensor nochmals erläutert:

⧫ 1) Die Werte einer multilinearen Abbildung seien vorgegeben.

⧫ 2) Das legt die Werte für alle zerlegbaren Tensoren fest, insbesondere für Basen des Typs e⊗f ..

⧫ 3) Für jede lineare Konstruktion genügen jedoch die Werte auf einer Basis.

⧫ 4) Wähle eine Basis des beschriebenen Typs. Dann kann man per Bilinearität aus den Basiswerten zunächst konsistent die Werte für alle zerlegbare Tensoren rekonstruieren.

⧫ 5) Und schließlich werden basisunabhängig die Werte aller Tensoren per Linearität bestimmen. Die gewählte Basis taucht dabei in der Formulierung auf.

(3.3.4) Eine **Bezeichnungskonvention**: Häufig ist es nützlich, beide Abbildungen B und b, die ja gleichwertig zueinander sind, mit demselben Buchstaben zu bezeichnen. Man schreibt etwa B(x⊗y)=B(x,y) anstatt b(x⊗y)=B(x,y) und denkt sich die zugehörige Urbildmenge jeweils korrekt dazugewählt.

☐ Wie sieht Bild(τ) aus? Aus welchen Vektoren besteht diese Menge? Wieso ist das kein Teilraum? Wie "groß" ist das Bild relativ zur Wertemenge?

(3.3.5) Nachfolgend das wichtigste Beispiel dieser Konvention. (Vgl. den analogen Satz 9.3(21) für die äußere Algebra):

Satz:	V und W seien Vektorräume über K und V* und W* deren Dualräume. Dann sind die beiden Räume $V^* \otimes W^*$ und $(V \otimes W)^*$ kanonisch isomorph.

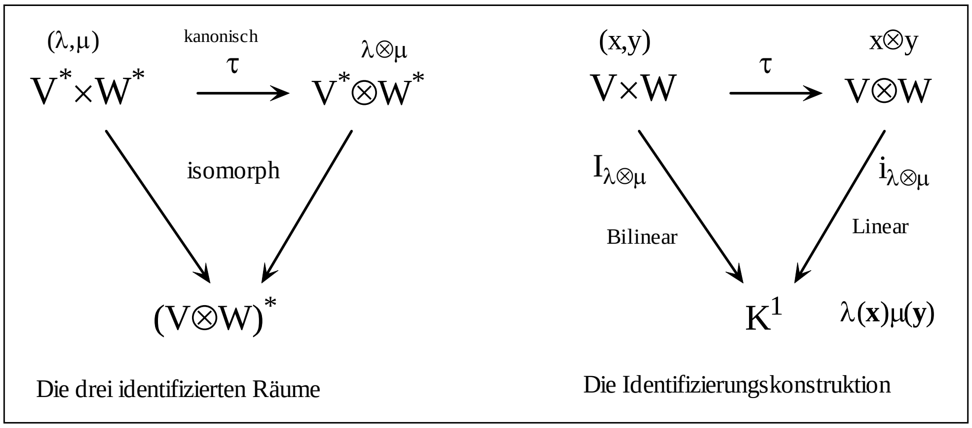
(3.3.6) Beweis: Zu $\lambda \in V^*$ und $\mu \in W^*$ bilden wir den zerlegbaren Vektor $\lambda \otimes \mu \in V^* \otimes W^*$ und definieren $\mathrm{j}_{\lambda\otimes\mu}(\vec{x} \otimes \vec{y}) = \lambda(\vec{x})\mu(\vec{y})$. Das erzeugt ein Funktional auf V⊗W und man zeigt wie üblich über die Basiskonstruktion, dass es linear und wohldefiniert ist.

Auch die Zuordnung $\lambda \otimes \mu \mapsto \mathrm{j}_{\lambda\otimes\mu}$ erweitert sich zu einer linearen Abbildung $\mathrm{V}^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$. Man prüft leicht, dass der Kern trivial ist. Da die Räume gleiche Dimension haben, sind sie kanonisch isomorph wie behauptet.

(3.3.7) Nach dem Charakterisierungssatz gehört zu der linearen Abbildung $\mathrm{j}_{\lambda\otimes\mu} : V \otimes W \to K$ des Beweises eine entsprechende bilineare Abbildung $\mathrm{J}_{\lambda\otimes\mu} : V \times W \to K$, die $\mathrm{J}_{\lambda\otimes\mu}(\vec{x}, \vec{y}) = j_{\lambda\otimes\mu}(\vec{x}\otimes\vec{y}) = \lambda(\vec{x})\mu(\vec{y})$ erfüllt.

(3.3.8) Wir **bezeichnen** von jetzt ab auch $j_{\lambda\otimes\mu}$ und $\mathrm{J}_{\lambda\otimes\mu}$ mit $\lambda \otimes \mu$, identifizieren alle drei Größen. Das prägt man sich gut über das folgende Schema ein:

$\lambda \in V^*, \vec{x} \in V, \mu \in W^*, \vec{y} \in W$ Bilde dazu:	$j_{\lambda\otimes\mu}(\vec{x} \otimes \vec{y}) = J_{\lambda\otimes\mu}(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x})\mu(\vec{y})$
Neue Schreibweise	$\lambda \otimes \mu(\vec{x} \otimes \vec{y}) = \lambda \otimes \mu(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x})\mu(\vec{y})$



(3.3.9) Oder auch: Der Term $\lambda \otimes \mu$ kann in drei unterschiedliche Rollen schlüpfen, wobei wir zugleich sehen, welchen formalen Nutzen das Tensorprodukt bringt:

- (3.3.10) Als Element von V*⊗ W* interpretiert, kann man die Tensoren aus einfachen **Bausteinen** - den Dualraumelementen - aufbauen.
- (3.3.11) Als bilineare Abbildung V×W→ K zeigen die Tensoren einen Abbildungscharakter, über den meist die **Verbindung zu den Anwendungen** hergestellt wird. In dieser Form ist es jedoch schwierig, von Gleichungen zwischen den Werten zu entsprechenden Gleichungen zwischen den Abbildungstripeln überzugehen. Man muß dazu aus Termen wie $\lambda(\vec{x})\mu(\vec{y})$ das Urbild $(\vec{x},\vec{y})$ "herauskürzen", was fast immer Probleme bereitet.
- (3.3.12) Als Element von (V⊗W)*, also eines Dualraumes, wird der in (3.3.11) gewünschte **Übergang zu Abbildungsgleichungen** formal unproblematisch. Der Grund ist die schon früher besprochene Doppelrolle der Dualraumelemente als Abbildung und als Vektor sowie der formal unproblematische Wechsel zwischen diesen beiden Rollen.

(3.2.13) Gibt man in V eine Basis e vor und wird nicht ausdrücklich etwas Gegenteiliges gesagt, dann wird im Dualraum immer die zugehörige duale Basis e* genommen. **D.h. die Basisvorgabe in V bewirkt automatisch eine Basisvorgabe in V*.**

□ Formulieren Sie selbst die Definition einer *multilinearen* Abbildung der Vektorräume V_1,,V_2,...,V_k in den Vektorraum U. (Genauer *k-linear*). Hierdurch soll bilinear verallgemeinert werden. Wie sehen die Verallgemeinerungen von (3.3.3) und (3.3.5) aus?

9.3.4 **Beispiele für den formalen Nutzen des Tensorproduktes**

(3.4.1) Der Hauptnutzen des Tensorproduktes besteht darin, dass er einen gemeinsamen vektoriellen Darstellungsrahmen einer Vielzahl mathematischer Konstruktionen zunächst sehr unterschiedlicher Art bildet. D.h. alle diese Bildungen lassen sich kanonisch als Tensoren darstellen, so dass man die tensoriellen Rechenregeln für sie nutzen kann. Hierzu gehört insbesondere das Problem, über Wertevorgabe definierte Koordinatendarstellungen von Abbildungen in eine koordinatenfreie absolute Form zu bringen. Wir besprechen drei wichtige Beispiele. Genauer geben wir kanonische Darstellungen von Skalarprodukten, Vektorraumhomomorphismen und Zweiformen (der äußeren Algebra) durch Tensoren. Wir erinnern an die in Kap.l gegebene Charakterisierung von **Darstellungsabbildungen**: Parametrisierung der interessierenden Objekte in einer anderen Menge mit reicherer Struktur.

9.3.4a **Die Tensordarstellung eines Skalarproduktes**

(3.4.2) Zur Verdeutlichung des in (3.3.9) besprochenen Rollenwechsels formulieren wir das folgende Problem, auf das wir in Kapitel 10 genauer eingehen werden: Ein bilineares Skalarprodukt in einem Vektorraum V sei über seine Komponentenform bezüglich einer bestimmten Basis gegeben: $\boxed{(\vec{x},\vec{y}) \mapsto S(\vec{x},\vec{y}) = \Sigma x_i S_{ik} y_k}$ mit $S_{ik} = S(\vec{e}_i,\vec{e}_k)$.Man mache aus dieser Gleichung für die Werte eine Gleichung für das Abbildungstripel S. Die zugehörige Basis sei mit $\vec{e}_i$. bezeichnet. Gegeben ist also die Matrix (S_{ik}) und die damit gebildete angegebene Gleichung zwischen den Werten.

(3.4.3) Mit Hilfe des Tensorproduktes und der soeben eingeführten Konventionen können wir wie folgt rechnen (e* zu e duale Basis):

$$\begin{aligned} S(\vec{x},\vec{y}) &= \Sigma x_i S_{ik} y_k = \Sigma S_{ik} e_i^*(\vec{x}) \vec{e}_k^*(\vec{y}) = \Sigma S_{ik} e_i^* \otimes e_k^*(\vec{x}\otimes\vec{y}) = \left(\Sigma S_{ik} e_i^* \otimes e_k^*\right)(\vec{x}\otimes\vec{y}) \\ &= \left(\Sigma S_{ik} e_i^* \otimes e_k^*\right)(\vec{x},\vec{y}). \end{aligned}$$

Die Vektorkomponenten werden als Werte der dualen Basis dargestellt, das ergibt eine in ($\vec{x}$,$\vec{y}$) bilineare Konstruktion, die nach dem Satz mit einem Tensor identifiziert wird. Die letzte Umformung beinhaltet die punktweise Verknüpfung (Wertemengenübertragung) linearer Abbildungen. Der Übergang zum Abbildungstripel ist möglich und ergibt die Gleichung auf Abbildungsniveau:

$$\boxed{S=\Sigma S_{ik} e_i^* \otimes e_k^*}$$

Die Abbildung S kann durch die beschreibende Matrix (S_{ik}) ausgedrückt werden!

In der Ausgangsgleichung $S(\vec{x},\vec{y})=\Sigma S_{ik} x_i y_k$ kann man dagegen nicht zu den Abbildungen übergehen, also suggestiv ausgedrückt "($\vec{x}$,$\vec{y}$) aus der Gleichung herauskürzen.

□ Es sei e eine kartesische Basis des V_0^3. Wie lautet die tensorielle Darstellung des üblichen kartesischen Skalarproduktes?

9.4.3b **Die Tensordarstellung eines Vektorraumhomomorphismus**

(3.4.5) Analoges gilt für einen Vektorraumhomomorphismus. Bisher erlaubte uns die Fundamentalidentität nur, alle Werte mit Hilfe der beschreibenden Matrix auszudrücken. Jetzt können wir daraus eine Formel für die Abbildung selbst machen.

(3.4.6) Sei φ: V→W linear, e Basis von V und f Basis von W. Die zugehörige beschreibende Matrix sei M. Also $\varphi(e_i)=\Sigma f_k M_{ki}$. Dann haben wir die folgende Fundamentalidentität:

$$\varphi(x) = \Sigma f_k M_{ki} x_i = \Sigma f_k M_{ki} e_i^*(x) = \Sigma M_{ki} f_k \otimes e_i^*(x) = \left(\Sigma_{ik} M_{ki} f_k \otimes e_i^*\right)(x)$$

Hierbei haben wir im 3. Schritt erneut eine naheliegende Identifikation eingeführt. Es folgt die Tensordarstellungsformel für einen Homomorphismus:

$$\boxed{\boxed{\varphi{=}\Sigma_{ki}\mathrm{M}_{ki}\mathrm{f}_k{\otimes}\mathrm{e}_i^*}.}$$

(3.4.8) Hinter dieser Formel steckt natürlich ein kanonischer Isomorphismus samt zugehöriger Identifikation:

Satz: Dann	Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über K. sind die beiden Räume W$\otimes V^*$ und $Hom_K(V,W)$ kanonisch isomorph. Erzeugt wird der Isomorphismus durch $(a\otimes\lambda) : x \mapsto a\ \lambda(x)$.

Beachten Sie den Bau der Formel: Ein Vektor x$\in$V wird hineingesteckt und das Ergebnis ist ein Vektor aus W, der die feste durch a$\in W$ gegebene Richtung hat.

(3.4.9) Beweis: (a,λ)$\mapsto$ φ mit φ =(V,x$\mapsto$ a $\lambda(x)$,W) ergibt offensichtlich eine bilineare Abbildung B:W$\times$V*$\to$Hom$_K$(V,W). Nach (3.3.2) gibt es hierzu ein b:W$\otimes$V*$\to$Hom$_K$(V,W) mit b(a$\otimes\lambda$)=B(a,λ)und $\boxed{\text{b(a}\otimes\lambda\text{)(x) =a } \lambda(x) \text{ und b linear}}$. Dann ist b der Kandidat für unseren Isomorphismus. Wie angegeben wird dieser Isomorphismus durch die Werte auf den zerlegbaren Tensoren erzeugt: (a$\otimes\lambda$) $: x \mapsto a\ \lambda(x) = a\ \langle\lambda|x\rangle$.

Da die Dimensionen der beiden Räume W$\times$V* und Hom$_K$(V,W) gleich sind, genügt es zu zeigen, dass b injektiv ist. Um das zu sehen, führen wir Koordinaten ein.

Seien also e eine Basis von V mit dualer Basis e* und f eine Basis von W. Dann folgt wegen $e_i^*(x) = x_i$:

$$b(a\otimes\lambda)(x) = (\Sigma f_r a_r)\left((\Sigma e_i^*\lambda_i)(x)\right) = \Sigma_{ri} f_r a_r \lambda_i x_i.$$

Insbesondere ist $\boxed{\mathrm{b}(\mathrm{f}_r\otimes e_i^*)(x) = f_r x_i}$. Für einen allgemeinen Tensor T=$\Sigma T_{ri} f_r\otimes e_i^*$ folgt durch Überlagerung $\boxed{\mathrm{b(T)(x)}{=}\Sigma f_r T_{ri} x_i}$. Das zeigt: b(T) kann nur Null (=Nullabbildung!) werden, wenn alle $\mathrm{T}_{ri} = 0$ sind. (Wähle dazu etwa x=e$_j$!) **D.h. es liegt ein Isomorphismus vor!**

Identifiziert man b(a$\otimes\lambda$) mit a$\otimes\lambda$, so schreibt sich die hergeleitete Wertegleichung wie folgt

$$\boxed{(\mathrm{a}\otimes\lambda)(\mathrm{x}){=}\Sigma_{ri}\mathrm{f}_r\mathrm{a}_r\lambda_i\mathrm{x}_i}.$$

(3.4.10) Der Beweis zeigt noch etwas anderes. Dazu betrachten wir nochmals die Rechnung für einen zerlegbaren Tensor $a\otimes\lambda$:

$$(a\otimes\lambda)(x) = \Sigma_{ri} f_r a_r \lambda_i x_i = \Sigma_{ri} f_r (a_r\lambda_i) x_i = \Sigma_{ri} f_r (a^K\ {}^t\lambda^K)_{ri} x_i$$

D.h. die **beschreibende Matrix des Homomorphismus** a$\otimes\lambda$ wird erhalten, indem man das Matrixprodukt aus den Koordinatenvektoren a^K von a und ${}^t\lambda^K$ von λ bildet. Das ist ein Produkt des Typs Spalte mal Zeile, ergibt also korrekt eine m$\times$n-Matrix. (Diese Bildung wird in älteren Physikbüchern manchmal "dyadisches Produkt" genannt.

(3.4.11) **Folgerung**

Die Koordinatendarstellung des von a$\otimes\lambda \in W\otimes V^*$ erzeugten Homomorphismus ist folgendes Matrixprodukt

$\boxed{\mathrm{M}_{a\otimes\lambda} = (a\otimes\lambda)^K = a^K\ {}^t\lambda^K}$ (a^K und λ^K beides Spaltenvektoren!)

Beispiel: n=m=3. $\vec{a} = \vec{f_1}1 + \vec{f_2}7$ und $\lambda = e_2^* + e_3^*5$. Also

$$a^K = \begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}^t\lambda^K = (0,1,5). \ \text{Also} \ \boxed{\mathrm{M}{=}\begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}(0,1,5){=}\begin{pmatrix}0&1&5\\0&0&0\\0&7&35\end{pmatrix}}$$

☐ Sei φ:V→ W linear. Dann hat φ viele Tensordarstellungen des Typs $\varphi = \sum_{i=1}^{r} y_i \otimes \lambda_i$ mit $y_i \in W$ und $\lambda_i \in V^*$ sowie r∈ ℕ. Wähle r minimal. Welche Bedeutung hat dies minimale r? (Stichwort Rang von φ). Was bedeutet insbesondere r=1?

☐ Ergänzen Sie a zu einer Basis f von W. Was ergibt sich für die beschreibende Matrix von a⊗λ? Wählen Sie die Basis e von V so, daß $\lambda=e_1$ wird. Was bedeutet das für die beschreibende Matrix?

In Kapitel 7 haben wir Rechnungen und Überlegungen dieser Art bereits stillschweigend benutzt, als wir über $e^{tM}.\vec{y}_0$ auf e^{tM} selbst schlossen. Das geschah dort über durchaus nichttriviale Rechnungen. Allgemein sieht der **Schluss von den Werten einer Homomorphismus auf die Abbildung** selbst jetzt wie folgt aus

$$\begin{aligned} \underline{\varphi(x) = \Sigma f_k M_{ki} x_i} \quad &= \quad \Sigma f_k M_{ki} e_i^*(x) = (\Sigma f_k M_{ki} \otimes e_i^*)(x) \\ &\quad \text{Also} \quad \boxed{\varphi = \Sigma_{ki} f_k \otimes e_i^* M_{ki}} \end{aligned}$$

Man startet mit der unterstrichenen Gleichung. Eingerahmt ist das Ergebnis.

9.4.3c **Die Tensordarstellung einer p-Form**

(3.4.12) Auch p-Formen lassen sich als Tensoren interpretieren. Zur Erinnerung: "p-Form" war eine Bezeichnung für die Elemente aus $\overset{p}{\wedge}V^*$. Sei $\Lambda = \lambda_1 \wedge \lambda_2 \wedge .... \wedge \lambda_p$ eine zerlegbare p-form und $X=x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p$ ein zugehöriger zerlegbarer p-Vektor. Dann galt $\langle\Lambda|X\rangle = \det(\langle\lambda_i|x_k\rangle)$. D.h erneut liegt eine jetzt ausgesprochen komplizierte Gleichung für die Werte vor. Mit Hilfe des allgemeinen Entwicklungssatzes für Determinanten folgt

$$\langle\Lambda|X\rangle = \Sigma_\pi \varepsilon(\pi) \lambda_{\pi(1)1} \lambda_{\pi(2)2} ..... \lambda_{\pi(p)p}(x_1, x_2, ..., x_p).$$

Wie üblich identifizieren wir hier b und B auch für den Fall von p Faktoren.

(3.4.13) Nun können wir von den Werten zu den Abbildungen übergehen und erhalten:

Die zerlegbare p-Form $\Lambda = \lambda_1 \wedge \lambda_2 \wedge .... \wedge \lambda_p$ kann mit dem folgenden Tensor aus $V^* \otimes V^* \otimes ... \otimes V^*$ identifiziert werden:
$\boxed{\Sigma_\pi \varepsilon(\pi) \lambda_{\pi(1)1} \otimes \lambda_{\pi(2)2} \otimes ..... \otimes \lambda_{\pi(p)p}}$
Summiert wird über alle p! Permutationen von (1,2,....,p).

Insbesondere ist im Falle p=2 die Zweiform $\lambda \wedge \mu$ mit dem Tensor $\lambda \otimes \mu - \mu \otimes \lambda$ identifizierbar.

☐ Dasselbe für eine zerlegbare Dreiform.

9.3.4d **Tensoren und multilineare Abbildungen / Außenkontraktionen**

(3.4.14) Für x∈V und λ ∈V* haben wir das kanonische Skalarprodukt $\langle\lambda|x\rangle$ gebildet. Ist λ ein Element einer Dualbasis, dann ist diese Zahl eine Komponente für die Ausgangsbasis. Für den augenblicklichen Zweck ist es sinnvoll, auch die andere Reihenfolge der Faktoren zuzulassen. Wie definieren daher $\langle x|\lambda\rangle = \langle\lambda|x\rangle$. Es handelt sich dabei nur um eine andere Schreibweise, die bewirkt, dass man das Produkt $\langle a|b\rangle$ immer dann bilden kann, wenn einer der beiden Faktoren a,b Vektor und einer Form ist.

(3.4.15) Wir besprechen eine naheliegende Verallgemeinerung unserer bisherigen Konstruktionen mit Tensoren. Dabei drehen wir die Reihenfolge der Argumentation um: Wir gehen nicht mehr von einer Abbildung aus, die basisbezogen definiert wird und konstruieren daraus einen Tensor, sondern wir beginnen umgekehrt mit einem Tensor und konstruieren daraus Abbildungen. Kurz: **Welche multilinearen bzw. linearen Abbildungen lassen sich aus einem gegebenen Tensor basisunabhängig bilden?** Diese Bildungen werden wieder in Form von Formeln gegeben, die für jede Basis gelten, so dass der für uns relevante Schluß von der basisbezogenen Wertegleichung auf Abbildungsgleichung möglich ist.

(3.4.16) Bisher haben wir aus Koordinaten $x_i=\langle e_i^*|x\rangle$ einen Tensorfaktor e_i^* gemacht. Jetzt machen wir umgekehrt aus einem Tensorfaktor eine Koordinate.

(3.4.17) Wir verwenden dazu eine *Multindexschreibweise*, die wir über ein illustratives Beispiel einführen. Sei V ein Vektorraum und V* der zugehörige Dualraum. Sei weiter J eine Indexmenge des Typs

J={1,2,3*,4,5*}. D.h. jeder Index hat als eine Art Zusatzkomponente entweder einen Stern oder keinen. Dann soll V_J den Tensorraum V⊗V⊗V*⊗V⊗V* bezeichnen. Ist K⊂J eine Teilmenge von J, dann sei K* die Indexmenge, die entsteht, wenn man alle gesternten Indizes durch ungesternte ersetzt und umgekehrt. Für K ={2,3*} ergibt sich K*={2*,3}. Schließlich bestehe J-K wie üblich aus allen Elementen von J, die nicht in K liegen. Seien J und K wie oben. Dann ist J-K={1,4,5*}.

(3.4.18) Sei jetzt i∈K*. Weiter seien T∈V_J und A∈V_{K^*}, beide zerlegbar. Dann gilt auch i∈J, d. h. T enthält einen tensoriellen Faktor t, an i-ter Stelle. Dazu gibt es einen Partnerfaktor a_i in A. Von beiden Faktoren hat immer einer ein * und der andere nicht. Wir bilden das kanonische Skalarprodukt $<t_i|a_i>$ aus diesen beiden Faktoren. Alle i∈J, die nicht in K liegen, bleiben unbeeinflußt. Insgesamt setzen wir:

$$C_K(T_J) : A_{K^*} \mapsto C_K(T_J|A_{K^*}) = T_{J-K}\Pi_{k\in K}\langle t_k|a_k\rangle$$

In obigem Beispiel ist

$$C_{2^*3}(t_1 \otimes t_2 \otimes t_3^* \otimes t_4 \otimes t_5^*|a_{2^*} \otimes a_3) = t_1 \otimes t_4 \otimes t_5^*\langle t_2|a_2^*\rangle\langle t_3^*|a_3\rangle.$$

Die rechte Seite ist multilinear in den Faktoren a_k. Nach der Verallgemeinerung von (3.3.2) ergibt das eine lineare Abbildung des zugehörigen Tensorraumes. Und die übliche Argumentation zeigt, dass die Konstruktion basisunabhängig ist. Die Abbildung ist zunächst nur für alle zerlegbaren Tensoren T definiert. Per Wertemengenübertragung dehnt man die Konstruktion auf beliebige Tensoren aus. Insgesamt erhält man eine multilineare Abbildung $V_{K^*} \to V_{J-K}$. Für das Beispiel ausgeschrieben V*⊗V→ V⊗V⊗V*.

(3.4.19) In Worten: Gewisse der Tensorfaktoren werden mit Hilfe dazu dualer Vektoren in Koordinaten umgewandelt und verschwinden aus dem Vektorteil der Tensoren. Dafür werden diese dualen Vektoren zu unabhängigen Variablen. Aus dem Tensor wird eine lineare bzw. multilineare Abbildung. Wir nennen diesen Prozeß eine *Außenkontraktion des Tensors.* Hat der Tensor k Indizes, dann gibt es $2^k - 1$ derartige Außenkontraktionen, wenn wir den Sonderfall K=∅ ausnehmen.

(3.4.20) Unsere früheren Beispielen benutzten bereits Außenkontraktionen. Außenkontraktion des zweiten Faktors von T∈V⊗V* ergab eine lineare Abbildung $C_{2^*}(T) : V \to V$. Außenkontraktion beider Faktoren von g∈V*⊗V* ergab ein Skalarprodukt, eine Bilinearform C_J(g):V×V→ R.

(3.4.21) Insbesondere ist wie im letzten Beispiel K=J möglich. Dann werden **alle** Tensorfaktoren außenkontrahiert und das Ergebnis ist ein Körperelement. Wir haben eine lineare Abbildung V_{J^*} →K, also eine Linearform auf dem Tensorraum V_J. In Verallgemeinerung von (3.3.5) kann V_{J^*} mit $(V_J)^*$ identifiziert werden. Nach (3.3.2) ist das gleichwertig mit einer Multilinearform auf V_{J^*}. Viele Autoren beginnen mit diesen Multilinearformen, definieren Tensoren als Multilinearformen eines bestimmten Typs und ziehen von da aus die gesamte Tensorrechnung auf. Beispielsweise wird aus $\lambda \otimes \mu \otimes \sigma$ ∈V*⊗V*⊗V* durch vollständige Kontraktion die Trilinearform

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \mapsto C_{1^*2^*3^*}(\lambda \otimes \mu \otimes \sigma|\vec{x} \otimes \vec{y} \otimes \vec{z}) = \langle\lambda|\vec{x}\rangle\langle\mu|\vec{y}\rangle\langle\sigma|\vec{z}\rangle.$$

☐ Wie ist jetzt die Komponentenform $\vec{x} \mapsto x_i$ zu interpretieren?

9.3.4.e **Kontraktionen von Tensoren**

(3.4.22) Anstatt die Vektoren A_{K^*} wie bei der Außenkontraktion als unabhängige Variable vorzugeben, kann man sie auch dem Tensor selbst entnehmen und zwar in Form weiterer geeigneter Faktoren aus T_J. Sei T wieder zerlegbar. J und K wie oben. L⊂J sei disjunkt und dual zu K. "Dual" heißt: Zwischen K und L gibt es eine bijektive Abbildung β: K→L so dass i∈K genau dann gesternt ist, wenn $\beta(i)$ das nicht ist. Zu (i, β(i))∈K×L gehört also immer ein Vektorfaktor und ein Formfaktor, so dass man folgende Größe konstruieren kann:

$$\boxed{T_J \mapsto C_\beta(T_J)=T_{J-K-L}\Pi_{i\in K}\langle t_i|t_{\beta(i)}\rangle.}$$

(3.4.23) Die rechte Seite ist zunächst linear in jedem Tensorfaktor von T_J, also multilinear. Der Charakterisierungssatz macht daraus eine lineare Abbildung der Tensorräume, die wie üblich unabhängig von der ursprünglichen Basiswahl von V ist.

Aus einem vorgegebenen Tensor T_J wird ein Tensor niedrigeren Grades gebildet. Man nennt diesen Prozeß eine *Kontraktion.* (Oder zur Abgrenzung gegen obige Außenkontraktion eine Binnenkontraktion.) Eine Kontraktion mit β:K→ L ist daher eine Abbildung C_β:V_J →V_{J-K-L}

(3.4.24) Im einfachsten Fall ist K einelementig. Sagen wir V_J =V⊗V⊗V*. Und K={1} und $\beta(1)$=3*. Der erste und der dritte Tensorfaktor müssen verschwinden. Dann ist

$$\begin{aligned}\underline{C_\beta(T_J)} &= \Sigma_{i_1 i_2 i_3} e_{i_2} \langle e_{i_1} | e^*_{i_3} \rangle T_{i_1 i_2 i_3} = \Sigma_{i_2} e_{i_2} \Sigma_{i_1 i_3} \left(\langle e_{i_1} | e^*_{i_3} \rangle T_{i_1 i_2 i_3} \right) = \Sigma_{i_2} e_{i_2} \Sigma_{i_1 i_3} \left(\delta_{i_1 i_3} T_{i_1 i_2 i_3} \right) \\ &= \underline{\Sigma_{i_2} e_{i_2} \Sigma_{i_1} T_{i_1 i_2 i_1}}\end{aligned}$$

Die letzte Umformung zeigt, wie sich die Komponenten unter der Transformation verhalten. Denken sie daran, dass vereinbarungsgemäß e* die zu e duale Basis ist, was den Faktor $\delta_{i_1 i_3}$ erklärt.

(3.4.25) Stellen wir abschließend zum Vergleich eine Außenkontraktion und eine Kontraktion desselben Tensors T=$\Sigma e_i \otimes e^*_j T_{ij}$ nebeneinander:

$$C_{\{2\}}(T|x) = \Sigma e_i T_{ij} \langle e^*_j | x \rangle = \Sigma e_i T_{ij} x_j \qquad \text{und} \qquad C_J(T) = \Sigma \langle e_i | e^*_j \rangle T_{ij} = \Sigma T_{ii} = Spur(T).$$

Im ersten Fall entsteht eine lineare Abbildung V→V und im zweiten eine V⊗V*→K.