
Höhere Mathematik für Physiker

Teil I

F. Krause

Kapitel 4

Lineare Algebra

Copyright F.Krause

Inhalt von Kapitel 4 Lineare Algebra

- **4.1 Vektorräume und Moduln**
 - **4.1.0 Vorbemerkung**
 - **4.1.1 Übertragung der Vektorraumstruktur / Analytische Geometrie**
 - * 4.1.1a Untermoduln / Teilräume.
 - * 4.1.1b Produktmengen / Produkträume
 - **4.1.2 Der Beispielfundus für Moduln und Vektorräume**
 - **4.1.3 Strukturerhaltende Abbildungen**
 - * 4.1.3a Die Übertragung der Struktur auf den Wertebereich einer Abbildung
 - * 4.1.3b Vektorraumhomomorphismen
 - **4.1.4 Lineare Gleichungen**
 - **4.1.5 Das Programm der analytischen Geometrie**
 - **4.1.6 Abbildungsräume mit Wertemengenverknüpfung**
 - * 4.1.6a Die Beziehung zu den Produkträumen
 - * 4.1.6b Der Teilraum der Abbildungen mit endlichem Träger
 - **4.1.7 Algebraische Strukturen der Potenzmenge: Teilraumverband und Quotientenräume**
 - * 4.1.7a Der Verband der Teilräume
 - * 4.1.7b Quotientenräume

- **4.2 Das grundlegende Begriffssystem der Vektorrechnung**
 - **4.2.1 Die Linearkombinationsabbildung**
 - * 4.2.2a Der rechnerische Umgang mit den Begriffen
 - * 4.2.2b Die kanonische Basis von K^n
 - * 4.2.2c Die Schnittpunktsbedingung für Geraden
 - * 4.2.2d Unterschiede zum Zahlenrechnen
 - **4.2.3 Erzeugte Teilräume**
 - **4.2.4 Linearkombinationen unendlicher Familien**

- **4.3 Die Struktur der endlichdimensionalen Vektorräume**
 - **4.3.0 Vorbemerkung**
 - **4.3.1 Vorbereitende Charakterisierungssätze**
 - **4.3.2 Die Basen eines endlichdimensionalen Vektorraumes**
 - **4.3.3 Die Dimension**
 - **4.3.4 Die Klassifikation**
 - **4.3.5 Wichtige Denkfiguren der Vektorrechnung**
 - **4.3.6 Der Dimensionssatz für Teilräume**
 - * 4.3.6a Der Spezialfall $U \cap W = \{0\}$ - direkte Summen

- * 4.3.6b Direkte Summen
- **4.3.7 Die Konstruktion supplementärer Räume**
- **4.3.8 Zusammenfassende Übersicht über die eingeführten Teilräume**
- **4.3.9 Die rekursive Konstruktion der endlichdimensionalen Vektorräume**
- **4.3.10 Der Dimensionssatz für Homomorphismen**
- **4.3.11 Beispiele**
 - * 4.3.11a Typische Interpretation eines einfachen geometrischen Problems
 - * 4.3.11b Die elementare Parallelprojektion
 - * 4.3.13c Etwas Geometrie in vier Dimensionen
 - * 4.3.11d Eine Vektorformel für die Drehoperation in V_0^3
 - * 4.3.11e Das n-dimensionale Tetraeder - Ein Beispiel für das Programm der analytischen Geometrie

- **4.4 Lineare Abbildungen: Allgemeine Eigenschaften und Quantifizierung**
 - **4.4.0 Vorbemerkung und Übersicht**
 - **4.4.1 Der Matrixkalkül**
 - * 4.4.1a Die Abbildungsinterpretation einer Matrix
 - **4.4.2 Der Indexkalkül**
 - * 4.4.2a Die Linearität der Matrixabbildung
 - * 4.4.2b Die Konventionen des Indexkalküls
 - **4.4.3 Die Fundamentalidentität einer linearen Abbildung**
 - * 4.4.3a Die Diagrammform der Fundamentalidentität
 - * 4.4.3b Die Quantifizierung einer linearen Abbildung durch eine Matrix
 - **4.4.4 Der Isomorphismus zwischen Homomorphismen und Matrizen**
 - **4.4.5 Die Matrixmultiplikation**
 - * 4.4.5a Der Endomorphismenring
 - * 4.4.5b Nichtlineare Gleichungen für Matrizen
 - * 4.4.5c Matrizen als Entwicklungsoperatoren

- **4.5 Basiswechsel**
 - **4.5.1 Das allgemeine Szenenbild**
 - **4.5.2 Die Transformation der beschreibenden Matrix**
-

Kapitel 4: Lineare Algebra

4.1 Vektorräume und Moduln

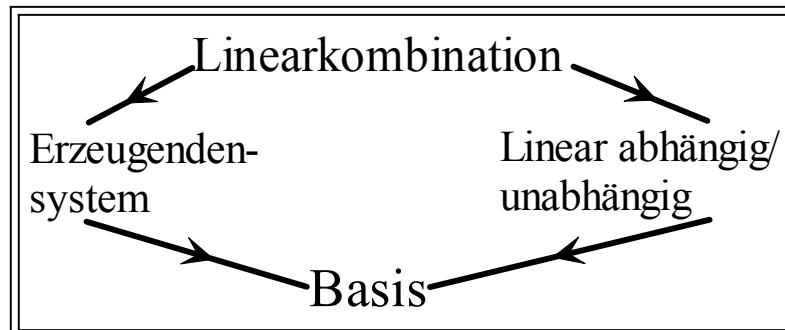
4.1.0 Vorbemerkung

(1.0.1) Die einleitende Überlegung soll verdeutlichen, wieso dem Vektorbegriff die zu beobachtende enorme Bedeutung innerhalb der Anwendungen der Mathematik zukommt.

- Bei der Naturbeschreibung treten neben skalaren Größen verbreitet auch vektorielle Größen auf, für die die quantitative Festlegung ihrer Werte mehr als eine Zahlangabe erfordert.
- In Anwendungssituationen unterschiedlichster Art entwickelt man zunächst Beziehungen zwischen vektoriellen Größen und möchte daraus auf die zulässigen Werte schließen. Man möchte also Gleichungen nach Vektoren auflösen. Ebenso möchte man Formeln für derartige Größen entwickeln, um Gesetze zu fassen.
- In Körpern (und teilweise Ringen) kann man weitgehend wie mit reellen Zahlen rechnen und insbesondere Gleichungen analog zum Vorgehen in \mathbb{R} auflösen. Naheliegender wäre daher, zu versuchen, die vektoriellen Größen als Elemente eines geeigneten Körpers zu interpretieren. Die mathematische Analyse dieses Problems zeigt jedoch, dass eine solche Interpretation fast nie möglich ist. Mehr dazu in Kapitel 9.
- Als Ersatz benötigt man eine (algebraische) Struktur, in der man einerseits die vektoriellen Größen unterbringen kann und in der man andererseits möglichst viele Bedingungen in Form lösbarer Gleichungen schreiben kann. Die Vektorraumstruktur leistet dies. Der Satz zugehöriger Rechenregeln ist einfach handhabbar, so dass sich Bedingungen meist gut formulieren und allgemein lösen lassen.
 - Der Erfolg der Vektorraumstruktur ist so groß, dass man Bedingungen, die man in ihrem Rahmen zunächst nicht formulieren und behandeln kann, gerne so idealisiert und abändert, dass sie schließlich doch in diese Struktur passen (Linearisierung von Problemen, Gleichungen ..).
- Von der Vektorraumstruktur noch nicht erfasste Eigenschaften können in Form zusätzlicher Axiome in die Struktur integriert werden. (Winkel über ein Skalarprodukt, Längen über eine Norm usw.). Die Analyse dieser feineren Strukturen klärt dann die logischen Zusammenhänge.

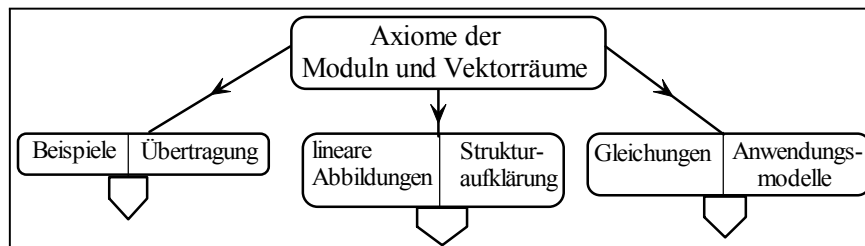
(1.0.2) Welches sind nun die hauptsächlichen Unterschiede, die beim Rechnen mit Vektoren gegenüber dem Rechnen mit Zahlen auftreten und vom Lernenden verstanden und beachtet werden müssen? Wir führen vier Punkte an:

1. Erforderlich ist zunächst einmal das Auseinanderhalten von Größen aus dem Operatorbereich (Skalare) und dem Objektbereich (Vektoren). Während beim üblichen Rechnen mit Zahlen nur Größen eines Typs auftreten, ist jetzt die begriffliche Trennung der beiden Typen erforderlich. Die multiplikative Gruppe K des Körpers operiert in Form einer Längänderung auf den Vektoren.
2. Man benötigt im Bereich der Vektorrechnung ein neues grundlegendes Begriffssystem, das wir nebensächlich graphisch präsentieren und in 4.2 eingehend besprechen werden. Diese Größen besitzen im Bereich des Zahlrechnens nur unzulängliche Entsprechungen, so dass man sich ihre Bedeutung gründlich aneignen sollte.



3. Bestimmte Rechnungen und Gleichungsumformungen, die man beim Rechnen mit Zahlgrößen beständig und automatisch benutzt, sind im vektoriellen Bereich nicht zulässig, also durch die Axiome nicht zu rechtfertigen. Hierzu gehört insbesondere die Division durch Vektoren. Man muss lernen, zu erkennen, ob eine Umformung durch die Axiome gerechtfertigt ist oder nicht.
4. Die strukturerehaltenden Abbildungen - die Vektorraumhomomorphismen - bilden ein überaus wichtiges Hilfsmittel. Beim üblichen Zahlrechnen findet sich hierzu keine ausreichende Entsprechung, so dass man die zugehörigen Konzepte und Begriffe neu erarbeiten muss. Hierauf gehen wir in 4.4 genauer ein. Überdies haben manche traditionell formulierten naturwissenschaftliche Texte die Tendenz, dieses fremde Begriffssystem zu meiden, was für ihre Effizienz und Verständlichkeit keineswegs immer vorteilhaft ist.

(1.0.3) Der Leser sollte sich unser allgemeines Einstiegsschema für algebraische Strukturen ins Gedächtnis rufen und es auf den Fall der Moduln und Vektorräume beziehen. Das Durcharbeiten dieses Kapitels wird dazu führen, dass die angedeuteten 6 übergeordneten Gesichtspunkte mit konkretem zugehörigen Inhalt gefüllt werden.



Was die Rollenzuweisung betrifft, so erhalten die Vektorräume je nach Situation alle drei Grundtypen: Sie übernehmen die Rolle eines Konfigurationsraumes, eines Werteraumes, aber durchaus auch die eines Parameterraumes.

4.1.1 Übertragung der Vektorraumstruktur / Analytische Geometrie

(1.1.1) Wir beginnen mit dem Problem der Übertragung einer vorhandenen Vektorraum- bzw. Modulstruktur auf andere Mengen. Also: Wie lassen sich aus gegebenen Vektorräumen neue bilden? Die Behandlung dieser Frage wird zugleich unseren Fundus an verfügbaren Beispielen auffüllen. Wir versuchen, alle Überlegungen auf der allgemeineren Ebene der Moduln durchzuführen. Die Resultate für Vektorräume folgen durch Spezialisierung. Sobald eine Körpereigenschaft für den Operatorbereich benötigt wird, werden wir darauf aufmerksam machen. Vgl. Kap. 3.2.2.

Wir behandeln nacheinander die Frage der

- Neukonstruktion einer Modulstruktur auf Teilmengen - also das Teilraumproblem (4.1.1a)
- Produktmengen -also das Produktraumproblem (4.1.1b)
- Strukturtransport auf den Wertebereich einer Abbildung (4.1.3a),
- Abbildungsräume (4.1.6),
- Klassenmengen (4.1.6b).

(1.1.2) Hinzu kommen zwei Einschübe: Der erste über die strukturerehaltenden Abbildungen, die *Vektorraumhomomorphismen* und die dazu gehörigen linearen Gleichungen und der zweite über das *Programm der analytischen Geometrie*.

(1.1.3) Nochmals zur Erinnerung: Im Modulfall sind alle Ringe assoziativ mit 1 vorausgesetzt. Weiter bezeichnen wir die Vektorräume und Moduln mit V anstelle von $(V+, -)$.

4.1.1a Untermoduln / Teilräume.

(1.1.4) Sei also M ein Modul über dem Ring R und $T \subset M$ eine Teilmenge dieses Moduls. Wie immer lassen sich die Verknüpfungen im Urbildbereich problemlos einschränken. $+$ auf $T \times T$ und o auf $R \times T$. D.h. der Operatorbereich R soll derselbe bleiben. Unser Problem:

Wann wird T hierdurch zu einem Modul über R ?

Entsteht tatsächlich ein Modul, so wird man diesen einen Teilmodul (Teilraum, *Teilvektorraum*, Unterraum usw.) von M nennen.

Die meisten Teilmengen bilden natürlich keinen Teilmodul. Nehmen wir als Beispiel einen zu besprechenden Vektorraum mit 25 Elementen. Er hat $2^{25} = 3355443$ Teilmengen. Und darunter sind nur 8 Teilräume! Vgl. (1.5.13).

(1.1.5) Inspektion der Axiome zeigt, dass folgende Bedingungen ausreichen:

Teilmodulkriterium / Teilraumkriterium	
Es sei	M Modul über dem Ring R und $T \subset M$ eine Teilmenge.
Dann	machen die Einschränkungen der beiden Verknüpfungen die Menge T genau dann zu einem Teilmodul, wenn gilt:
i)	$T \neq \emptyset$.
ii)	Mit $x, y \in T$ ist auch $x + y \in T$.
iii)	Mit $\alpha \in R$ und $x \in T$ ist auch $\alpha x \in T$.

D.h. im wesentlichen ist nur die Abgeschlossenheit der beiden Restriktionen zu fordern. Diese läßt sich meist leicht überprüfen.

(1.1.6) Man kann die Bedingungen ii) und iii) auch gleichwertig wie folgt formulieren:

ii') mit $\alpha, \beta \in R$ und $x, y \in T$ ist stets auch $(\alpha x + \beta y) \in T$.
 "Jede Linearkombination von zwei Vektoren aus T liegt wieder in T "

(1.1.7) Nochmals: Wie wendet man ein solches Kriterium an? Und wie sieht ein mathematischer Text aus, der die Anwendung des Kriteriums beschreibt? Wir wählen dazu die zweite Form des Kriteriums, die manchmal einfacher zu handhaben ist.

Das Szenenbild: Ausgangssituation: Man hat einen Vektorraum V über K vorliegen und dazu eine Teilmenge $T \subset V$ von Vektoren. D.h. die Aussage $x \in T$ besitzt jetzt eine ganz bestimmte inhaltliche Bedeutung! Es besteht ein Bedürfnis, zu klären, ob T Teilraum ist oder nicht. Unnötige Arbeit sollte möglichst nicht aufgewandt werden.

Man beginnt:

"**T ist nicht leer, weil.....**" und fährt fort:" Seien $x, y \in T$. D.h. "
 (und jetzt die ausgeschriebene Bedeutung, sowie daran anschließende Argumentation, bis man sagen kann:)"...**D.h.** $(\alpha x + \beta y) \in T$ für alle $\alpha, \beta \in K$ "
 (Das ist der zweite Tunneleingang! Schließlich die Formulierung des Resultates:)
"T ist Teilraum von V." (Dies Resultat steht dann zur Nutzung zur Verfügung.)

(1.1.8) Beispiel: Sei $\vec{x}_E = (\mathbb{R}^2, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \vec{d} + \beta \vec{e}, V_0^3)$ Parametrisierung einer Ebene E durch den Ursprung. Wir wählen $T = \text{Bild}(\vec{x}_E) = E$. **Ist das ein Teilraum?** Kurz: Ist die Ebene E ein Teilraum von V_0^3 ?

Und jetzt die Ausführung der soeben beschriebenen Argumentation:

$\text{Bild} \vec{x}_E \neq \emptyset$, da $0 = \vec{x}_E(0, 0) \in \text{Bild}(\vec{x}_E)$. Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \text{Bild}(\vec{x}_E)$. D.h. es gibt reelle Zahlen, so dass $x = \alpha \vec{d} + \beta \vec{e}$ und $\vec{y} = \gamma \vec{d} + \delta \vec{e}$ ist. Sei nun $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann folgt (über die Distributivgesetze) $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} = (\lambda \alpha + \mu \gamma) \vec{d} + (\lambda \beta + \mu \delta) \vec{e}$. Da beide Koeffizienten in \mathbb{R} liegen, gilt $(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) \in T$. Also ist $T = \text{Bild}(\vec{x}_E)$ Teilraum von V_0^3 .

(1.1.9) Ergebnis : **Jede Ebene durch den Ursprung bildet einen Teilraum von V_0^3** . Natürlich ist ein solcher Beweis reine Routine - trivial, so dass man ihn nach erster Übung kürzen oder nur andeuten sollte.

Unser Resultat regt an, zu fragen: **Gibt es noch weitere Teilräume in V_0^3 ?** Offenbar gilt ebenso: Jede Ursprungsgerade liefert einen Teilraum von V_0^3 . Hinzu kommen die beiden trivialen Teilräume $\{\vec{0}\}$ und V , Wir werden später sehen, dass dies bereits alle Teilräume von V_0^3 sind. Jede andere Teilmenge bildet keinen Teilraum.

(1.1.10) Beispiel: Sei \mathcal{P} der Vektorraum der reellen Polynomabbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir betrachten die Menge \mathfrak{G} aller geraden Polynome, d.h. aller Polynome, die stets $p(x) = p(-x)$ erfüllen. Das sind die Polynome, in denen nur gerade Potenzen von x auftreten. Typische Beispiele sind $2h_4 + 3h_2, -h_0$. Also $\mathfrak{G} \neq \emptyset$. Ist \mathfrak{G} Teilraum?

Seien $p, q \in \mathfrak{G}$. D.h. $p(-x) = p(x)$ und $q(-x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bilde $\alpha p + \beta q$. Über die punktweise Verknüpfung folgt $(\alpha p + \beta q)(-x) = \alpha p(-x) + \beta q(-x) = \alpha p(x) + \beta q(x) = (\alpha p + \beta q)(x)$. Also $\alpha p + \beta q \in \mathfrak{G}$. Mithin ist \mathfrak{G} Teilraum von P .

(1.1.11) In \mathcal{P} gibt es sehr viel mehr Typen von Teilräumen als in V . Aber natürlich liegt auch dort keineswegs immer ein Teilraum vor. Betrachten wir als Beispiel die Menge aller Polynome, deren höchster Term den Koeffizienten 1 hat. Etwa $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5$. Das ergibt offensichtlich keinen Teilraum, da bereits $2p$ mit $(2p)(x) = 2x^4 - 6x^3 + \dots$ nicht mehr dazu gehört. Das Teilraumkriterium ist nicht erfüllt.

(1.1.12) Was ist, wenn eine Teilmenge keinen Teilraum bildet? Die wichtige Frage des von T erzeugten Teilraumes, also des kleinsten Teilraumes, der T enthält, besprechen wir in 4.2.3 ausführlich.

4.1.1b Produktmengen / Produkträume

(1.1.13) Es seien M und N Moduln über demselben Ring R . Wir bilden die Produktmenge $M \times N$ und fragen: Kann man $M \times N$ (auf kanonische Weise) zu einem Modul über R machen?

(1.1.14) $M \times N$ ist sicher eine nichtleere Menge.

Gibt es Verknüpfungen? Das die Idee liefernde Stichwort lautet

komponentenweise Verknüpfung.

Für unseren Fall besagt das:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{für } x_1, y_1 \in M \text{ und } x_2, y_2 \in N \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y) \quad \text{für } \alpha \in R \text{ und } x \in M, y \in N. \end{aligned}$$

Es entsteht offensichtlich je eine Verknüpfung der gewünschten Art. Dabei wird die neue Verknüpfung auf die entsprechenden Verknüpfungen in M und N zurückgeführt. Dies macht ersichtlich, wieso M und N beide zu **demselben Ring** R gehören müssen.

(1.1.15) Jetzt ist es elementar, die Gültigkeit der Modul- bzw. Vektorraumaxiome zu überprüfen. Sie sind erfüllt.

!! Durch komponentenweise Verknüpfung wird die Produktmenge $M \times N$ zu einem Modul bzw. Vektorraum über R .
 \top Man nennt diesen Modul das **direkte Produkt der Moduln M und N** .
 In der Regel werden wir unter $M \times N$ immer diesen Modul verstehen.

(1.1.17) Verallgemeinerungen und Bemerkungen: Mehr als zwei Faktoren sind zulässig. Etwa $M \times M \times M$. Hierfür schreibt man abkürzend M^3 . Manchmal ist es zweckmäßig, zwischen $(M \times M) \times M$ und $M \times (M \times M)$ und $M \times M \times M$ zu unterscheiden. **Diese Moduln sind kanonisch isomorph, aber nicht gleich.** Dasselbe gilt für $M \times N$ und $N \times M$. Aber wie steht es mit unendlich vielen Faktoren? Auf diese Frage werden wir zurückkommen.

(1.1.18) Beispiele: Der **Konfigurationsraum** zweier Massenpunkte $V_0^3 \times V_0^3$ oder der Phasenraum $V_0^3 \times V^3$ eines Massenpunktes sind hiernach automatisch wieder Vektorräume über \mathbb{R} .

4.1.2 Der Beispielfundus für Moduln und Vektorräume

(1.2.1) Die beiden bisher eingeführten Verfahren sind nicht eigentlich schöpferisch, sie sind nur rekursiv produktiv. Solange man noch keine konkreten Beispiele von Moduln oder Vektorräumen zur Verfügung hat, produzieren sie auch keine. Wir müssen uns zuerst daran machen, unseren Fundus an konkreten Beispielen zu vergrößern, damit wir eine induktiv rekursive Struktur im Sinne von Kap.1.3.12 erhalten.

(1.2.2) Dazu stellen wir uns auf den Standpunkt, dass der zugehörige Ring R bzw. Körper K bereits verfügbar sei. Können wir dann wenigstens ein Beispiel eines Moduls über R - also einen zugehörigen Objektbereich - finden? Entscheidend ist, dass der Ring R beliebig sein darf bzw. soll.

(1.2.3) Es gibt eine einfache Lösung, die typisch ist für mathematisches Vorgehen: Man wählt als Objektmenge dieselbe Menge, die als Operatormenge vorgesehen ist. Also R oder K . Sobald R in die Rolle der Objektmenge schlüpft, schreiben wir R^1 bzw. K^1 , und die Elemente setzen wir in Klammern, schreiben also $(r) \in R^1$ usw. Wenn man will, kann man dies über eine bijektive Abbildung $(R, r \mapsto (r), R)$ vom Parametrisierungstyp formalisieren.

Jetzt ist es leicht, R^1 zu einem Modul über R zu machen. Etwas ungenau formuliert: R wird zu einem Modul über sich selbst. Als Verknüpfungen wählen wir die komponentenweise Verknüpfung für den einkomponentigen Fall. Also

$$(r) + (s) = (r + s) \quad \text{und} \quad r(s) = (rs) \quad r, s \in R$$

(1.2.4) Das Überprüfen der Axiome ist elementar. Ergebnis: **R^1 ist Modul über R und entsprechend ist K^1 Vektorraum über K .**

(1.2.5) Unsere Konstruktion formalisiert etwas durchaus Vertrautes, nämlich das Rechnen mit Größen, die eine Maßeinheit tragen. Bei "2 mal 7 cm ist 14 cm" trennen wir auch zwischen der Objektgröße 7cm und der Operatorgröße 2.

Nochmals formalisiert: $2 \cdot (7\text{cm}) = (14\text{cm})$. Dagegen gehört $(3\text{cm})(5\text{cm}) = 15\text{cm}^2$ offensichtlich weder zu einer inneren noch zu einer äußeren Verknüpfung.

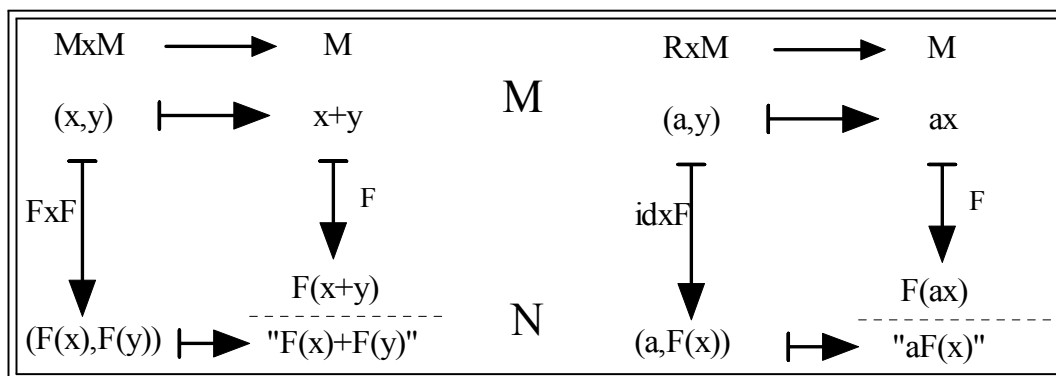
(1.2.6) Damit haben wir unseren Beispielfundus enorm aufgefüllt. Zu jedem Ring (Körper) besitzen wir mit R^1 bzw. K^1 einen Modul (Vektorraum). Mit diesen können wir dann Produkträume bilden und erhalten R^n bzw. K^n für $n = 2, 3, \dots$ In diesen Räumen können wir wieder nach Teiräumen suchen und so eine typische induktive Konstruktion in Gang setzen. Alle diese Räume erweisen sich allerdings als endlichdimensional!

Bevor wir Beispiele und Anwendungen bringen, ist es zweckmäßig, auf die strukturerhaltenden Abbildungen einzugehen.

4.1.3 Strukturerhaltende Abbildungen

4.1.3a Die Übertragung der Struktur auf den Wertebereich einer Abbildung.

(1.3.1) Gegeben sei also ein Modul M über einem Ring R , eine zweite Menge N sowie eine Abbildung $\Phi : M \rightarrow N$. Mit Hilfe der beiden Modulverknüpfungen können wir die folgenden Diagramme bilden. (Vgl. 3.1.5)



(1.3.2) Sofern $F = \Phi$ bijektiv ist, wird auf diese Weise auf N eine Modulstruktur erzeugt. Durch Gleichsetzen der Wege erhält man für N zwei wohldefinierte Verknüpfungen ($a, b \in N, \alpha \in R$):

$$a + b = \Phi(\Phi^{-1}(a) + \Phi^{-1}(b)) \quad \alpha \cdot a = \Phi(\alpha \Phi^{-1}(a))$$

Die Verifikation der Axiome ist erneut Routine.

(1.3.3) Anmerkung: Mit Hilfe der beschriebenen Konstruktion fällt es leicht, beispielsweise in \mathbb{R}^2 absontertlich erscheinende Vektorraumstrukturen einzuführen.

Wähle $\Phi = (\mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^3, y^5), \mathbb{R}^2)$. Diese Abbildung ist bijektiv. Wir erhalten als neue Addition

$$\begin{aligned}(a, b) + (x, y) &= \Phi(\sqrt[3]{a}, \sqrt[5]{b}) + \Phi(\sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{y}) = ((\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x})^3, (\sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{y})^5) \\ \alpha(x, y) &= (\alpha^3 x, \alpha^5 y)\end{aligned}$$

\mathbb{R} ist mit diesen beiden Verknüpfungen Vektorraum! Berechnen Sie einmal $(1, 2) + (2, 1)$ und $2 \cdot (x, y)$.

(1.3.4) Der Eingeweihte ist so in der Lage, zahlreiche schöne Beispiele zur Einübung der Vektorraumstruktur zu erfinden! Er formuliert Aufgaben des Typs: "Zeigen Sie, dass der \mathbb{R}^n mit den folgenden Verknüpfungen zu einem Vektorraum wird....". Der nicht eingeweihte Bearbeiter einer solchen Aufgabe fasst sich an den Kopf und fragt: Wie kommt man nur auf diese verrückten Kompositionen, die wunderbarerweise alle Axiome erfüllen? Natürlich handelt es sich bei diesen Beispielen nicht um **ernsthaft neue** Vektorräume! Nur die Bezeichnungen für die einzelnen Objekte sind permutiert, und dadurch wirken vertraute Rechenregeln plötzlich exotisch. Alte und neue Struktur sind kanonisch isomorph! Unser eigentliches Interesse geht dahin, neue Beispiel zu finden, die zu den alten gerade **nicht** isomorph sind.

4.1.3b Vektorraumhomomorphismen

(1.3.5) Nun zur zweiten Interpretation unserer Diagramme. Wir nehmen an, dass M und N beide bereits eine Modulstruktur besitzen, und zwar über ein und demselben Ring R . $\Phi : M \rightarrow N$ muss nicht mehr bijektiv sein. Die Frage, die sich stellt, lautet: **Sind die beiden Diagramme aus (1.3.1) unter diesen Umständen kommutativ, oder sind sie es nicht?** Falls sie es sind, liegt eine mit den Verknüpfungen verträgliche Abbildung vor, die in diesem Fall wieder strukturerhaltend ist. Vgl. 3.2.1b.

(1.3.6) In Gestalt von Formeln besagt die Kommutativität:

$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$	für alle $x, y \in M$	"Additivität"
$\Phi(\alpha x) = \alpha \Phi(x)$	für alle $\alpha \in R$ und $x \in M$	"Homogenität"

(1.3.7) Abbildungen mit dieser Eigenschaft sind von größter Bedeutung. Man bezeichnet sie

als **lineare Abbildungen** oder Modul- bzw. **Vektorraumhomomorphismen** oder auch als **lineare Operatoren**.

Wir werden diese linearen Abbildungen immer wieder und von immer neuen Gesichtspunkten aus studieren. Natürlich sind die beiden Bedingungen Additivität und Homogenität unabhängig. Man kann Abbildungen finden, die nur eine von ihnen erfüllen.

(1.3.8) Wird eine Abbildung vorgegeben, so sollte man zunächst prüfen, ob sie linear ist oder nicht. Und natürlich gibt es wie immer enorm viele nicht lineare Abbildungen!

(1.3.9) Typische Beispiele (linearer Abbildungen) kann man am Fall $\mathbb{R}^2 \rightarrow V_0^3$ studieren. Etwa $f : (x, y) \mapsto y\vec{a} + (x + 2y)\vec{b}$. Dabei sollen $\vec{a}, \vec{b} \in V_0^3$ fest gewählt sein. f ist manifest linear. Betrachtet man dagegen $g : (x, y) \mapsto x^2\vec{a} + xy\vec{b} + (2y + 1)\vec{c} + \sin(x)\vec{d}$, so zerstört jeder Summand für sich die Linearität.

(1.3.10) Was die Eigenschaften linearer Abbildungen betrifft, so nennen wir zunächst einige grundlegende, die vollständig den ersten Eigenschaften der Gruppenhomomorphismen entsprechen. Denken Sie daran: Für die Addition hat man es ja mit einer Gruppenstruktur zu tun, **so dass ein Vektorraumhomomorphismus immer auch ein Gruppenhomomorphismus ist**.

(1.3.11) Wie steht es mit den elementaren Eigenschaften linearer Abbildungen? Vornehmlich geht es um das Analogon von Satz (2.4.19) aus Kap.3. Die Beweise für den Gruppenfall lassen sich auf den Modulfall erweitern und ergeben:

Satz: Seien V, W Moduln über R (bzw. Vektorräume über K).
 $\Phi : V \rightarrow W$ sei linear. Dann gilt:

- a) $\text{Kern}\Phi = \Phi^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in V \text{ und } \Phi(\vec{x}) = \vec{0}\}$ und
- b) $\text{Bild}\Phi = \Phi(V) = \{\vec{y} \mid \vec{y} \in W \text{ und } \vec{y} = \Phi(\vec{x}) \text{ für } \vec{x} \in V\}$ sind Teilräume von V bzw. W .
Ist V_0 irgendein Teilraum von V , dann ist $\Phi(V_0)$ Teilraum von W .
- c) Ist W_0 irgendein Teilraum von W , so ist $\Phi^{-1}(W_0)$ ein Teilraum von V .
- d) Ist $\text{Kern}\Phi = \{\vec{0}\}$, so ist Φ injektiv.
- e) Ist Φ bijektiv, so ist auch $\Phi^{-1} : W \rightarrow V$ linear.

Diese Resultate erweisen sich als ausgesprochen nützlich.

(1.3.12) Punkt e) rechtfertigt die folgende zu Kap.3(2.3.10) analoge

Definition: Zwei Moduln (Vektorräume) heißen isomorph, wenn es einen bijektiven Vektorraumisomorphismus $V \rightarrow W$ gibt. Eine derartige lineare Abbildung heißt **Modul- bzw. Vektorraumisomorphismus.**

(1.3.13) Zwischen zwei isomorphen Moduln wird es i.a. mehrere - besser sehr viele! - vermittelnde Isomorphismen geben. Dabei kann es vorkommen, dass ein Isomorphismus kanonisch ausgezeichnet ist. Dann ist zu überlegen, ob die Räume zu identifizieren sind. Im Falle der Produkträume ist etwa

$$((V \times V) \times V), ((x, y), z) \mapsto (x, y, z), V \times V \times V = V^3$$

ein solcher Identifikationsisomorphismus. Oder aber es gibt einen solchen ausgezeichneten Isomorphismus **nicht**. Dann sollte man die Räume in der Regel auseinander halten! Der in Kapitel 5 zu besprechende Dualraum bildet das Paradebeispiel für die letztere Situation.

(1.3.14) Mit d) aus dem Satz folgt: Ist $\text{Kern}\Phi = \{\vec{0}\}$, so sind V und $\text{Bild}\Phi$ zueinander isomorph! Ist beispielsweise $\vec{x}_g = (\mathbb{R}^1, (\alpha) \mapsto \alpha \vec{d}, V_0^3)$ eine Parametrisierung einer Geraden g durch den Ursprung, so sind \mathbb{R}^1 und diese Gerade (genauer der zu g gehörige Teilraum von V_0^3) zueinander isomorph. Wir bezeichnen $\Phi = \vec{x}_g$ dann auch als "Einbettung (von \mathbb{R}^1 in V_0^3)". Allgemein: " V wird durch Φ in W eingebettet."

4.1.4 Lineare Gleichungen

(1.4.1) Zu den linearen Abbildungen gehört ein gewisser Typ von **Bestimmungsgleichungen**. Ist $\Phi : V \rightarrow W$ linear, so nennt man jede zugehörige Gleichung $\Phi(\vec{x}) = \vec{b}$ mit $\vec{b} \in W$ und $\vec{x} \in V$ gesucht, eine *lineare Gleichung*. **Umgekehrt gehört jede Gleichung, die man als linear bezeichnet, zu einem geeigneten Vektorraum- oder Modulhomomorphismus.** Vgl. Kap.1.2.9.

(1.4.2) Die zugehörigen Lösungsmengen haben eine weitestgehend festgelegte Struktur, die durch den folgenden Satz beschrieben wird:

Satz Sei $\Phi : V \rightarrow W$ linear. Dann gilt:

a) Die homogene Gleichung $\Phi(\vec{x}) = \vec{0}$ hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \text{Kern}\Phi$

b) Jede inhomogene Gleichung $\Phi(\vec{x}) = \vec{b}$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$ hat die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\vec{b}} = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \vec{b} \notin \text{Bild}\Phi \\ \vec{x}_s + \text{Kern}\Phi & \text{falls } \vec{b} \in \text{Bild}\Phi \end{cases}$$

⊤ Hierbei bezeichnet \vec{x}_s eine spezielle Lösung der Gleichung, d.h. irgendein Element $\vec{x}_s \in V$, für das $\vec{x}_s \mapsto \Phi(\vec{x}_s) = \vec{b}$ gilt.

Der Satz bewirkt - wie wir immer wieder feststellen werden - eine starke Einschränkung der in Frage kommenden Lösungsmenge ihrer jeweiligen Art. **Und dafür ist nur die Linearität Voraussetzung.** Gleichgültig, wie Φ gebaut ist, immer haben die Lösungsmengen die angegebene Struktur!

(1.4.3) Unser in (1.1.4) erwähnter Beispielraum verdeutlicht den Zugewinn an Information: Während man \mathbb{L} zunächst unter 2^{25} Kandidaten zu suchen hat, verbleiben wegen des Satzes im homogenen Fall gerade noch 8 Kandidaten.

In Kapitel 5 werden wir die linearen Gleichungen für endlichdimensionale Räume genauer analysieren.

(1.4.4) Beweis: a) ist trivial laut Definition des Kerns.

b) Der Fall $\mathbb{L} = \emptyset$ ist erneut trivial. Andernfalls gäbe es eine Lösung \vec{x}_s mit $\Phi(\vec{x}_s) = \vec{b}$. Sei $\vec{x}_0 \in \text{Kern}\Phi$. Dann rechnet man:

$$\Phi(\vec{x}_s + \vec{x}_0) = \Phi(\vec{x}_s) + \Phi(\vec{x}_0) = \vec{b} + \vec{0} \quad \text{Also } \vec{x}_s + \text{Kern}\Phi \subset \mathbb{L}.$$

Sei umgekehrt $\vec{x}_1 \in \mathbb{L}$. Also $\Phi(\vec{x}_1) = \vec{b}$. Schreibe (mit Modulstruktur möglich)

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_s + (\vec{x}_1 - \vec{x}_s). \quad \text{Es folgt } \Phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_s) = \Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}_s) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Mithin ist $(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \in \text{Kern}\Phi$. Und insgesamt $\mathbb{L} = \vec{x}_s + \text{Kern}\Phi$ wie behauptet. (Beachten Sie, wie und wo mehrfach entscheidend die Linearität eingeht!)

(1.4.5) In geometrischer Interpretation können wir sagen: **Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ist entweder leer, oder aber sie entsteht durch geeignete Parallelverschiebung des Teilraumes Kern Φ .** (Auch hier tritt daher der Operationsbegriff auf!)

(1.4.6) Eine Anwendung aus dem Bereich der linearen Differentialgleichungen: Dort ist die homogene Gleichung vielfach relativ leicht und schematisch zu lösen. Die inhomogenen Gleichungen sind oft sehr viel mühsamer zu behandeln. Daher versucht man, eine einzige Lösung zu raten- was häufig ohne Aufwand möglich ist - und addiert diese dann zur Lösung der homogenen Gleichung hinzu. Als Folge des Satzes ist das Problem damit gelöst. Vgl. Kap.7.

4.1.5 Das Programm der analytischen Geometrie

(1.5.1) Wir unterbrechen die formalen, aber wichtigen Übertragungskonstruktionen (der Struktur) und schieben ein interessantes **Anwendungsbeispiel** ein. Wir tun das, damit die Behandlung der formalen elementaren und letztlich langweiligen Konstruktionen nicht zu sehr ausufert und auch, um einige nichttriviale Beispiele für unsere bisherigen Überlegungen anführen zu können. Und zwar besprechen wir das

Programm der analytischen Geometrie.

(1.5.2) Spricht man Studienanfänger auf Dinge wie Geometrie im vierdimensionalen Raum an, so erlebt man nicht selten eine zwiespältige Reaktion: Eine gewisse Faszination ist schon zu verspüren, aber hinzu kommt doch immer wieder Abwehr. „Das ist doch schrecklich kompliziert. Wo ich mich schon mit der normalen Mathematik so plagen muss, wie soll es da erst im Vierdimensionalen werden?“

Eine solche Einstellung sollte man rasch überwinden. Nicht nur, weil man sich selbst von faszinierenden geistigen Erfahrungen abkapselt, sondern auch, weil sie - infolge der Verfügbarkeit der modernen Mathematik-einfach falsch ist. Die analytische Geometrie, die man mit Hilfe der Vektorraumtheorie entwickelt, liefert einen einfachen und sicheren Zugang zu all diesen Welten! Wobei zumindest zunächst zugegebenermaßen auch etwas von der geheimnisvollen Aura solcher Welten höherer Dimension verloren geht.

(1.5.3) Wie so häufig in der Mathematik besteht das Programm aus einer Reihe **einzeln** banal wirkender Schritte, deren gemeinsame Realisierung sich dann allerdings als sehr erfolgreich und weittragend erweist:

1. Schritt: Im Anschauungsraum E^3 gegebene geometrische Probleme werden mit Hilfe der elementaren Vektorrechnung für V_0^3 bzw. \mathbb{R}_K^3 formuliert und behandelt. Beachten Sie: Auf den Raum E^3 der geometrischen Punkte können wir die Vektorraumstruktur **nicht** übertragen. Statt dessen verwenden wir Abbildungen wie $(E^3, P \mapsto \vec{x}_P, V_0^3)$ vom Darstellungstyp, welche die Punkte im Vektorraum darstellen.
2. Schritt: Jetzt versucht man, die benötigten Begriffe, Rechnungen und Resultate (im V_0^3 bzw. V_0^2) ausschließlich mit Hilfe des Begriffssystems der Vektorraumaxiome zu formulieren. Gewisse geometrische Probleme werden auf diese Weise zu rein algebraischen und auch algebraisch lösbar. Für Fragen, für die der Formalismus zunächst **nicht** greift, wird der algebraische Apparat durch Hinzufügen weiterer Axiome entsprechend erweitert. (Ein Beispiel bildet die Winkelbeschreibung mit Hilfe des Skalarproduktes.) Ein wichtiges Hilfsmittel dieser Algebraisierung bilden die verschiedenen Gruppenoperationen.
3. Schritt: Gelingt der Schritt der Algebraisierung in V_0^3 , so versucht man die Resultate auf andere - eventuell beliebige - Vektorräume zu verallgemeinern. Es dürfen nur noch mit Hilfe der Vektorraumaxiome beweisbare Resultate benutzt werden.
Bei diesem Versuch kommt dann heraus, welche Eigenschaften in den allgemeinen Räumen gelten und welche nicht oder was stattdessen gilt. (Gerade für diesen Punkt sind die Moduln hilfreich.)
4. Schritt: Die mit Hilfe der Vektorraumstruktur algebraisch gewonnenen Resultate versucht man schließlich wieder geometrisch rückzuinterpretieren. So entsteht Einsicht in die geometrische Struktur allgemeiner Vektorräume.

(1.5.4) Als Konkretisierungsbeispiel für das Programm betrachten wir den **Begriff der Geraden**. Jeder wird in einer Geraden zunächst etwas Geometrisches sehen. Kann man die damit verbundenen anschaulichen Vorstellungen auf höhere Dimensionen und nicht anschauliche Vektorräume übertragen?

(1.5.5) Der aktive und mitdenkende Leser sollte sich jetzt überlegen, welche Eigenschaften von Geraden er für besonders wichtig hält, um dann zu sehen, ob sie tatsächlich im Rahmen des Programmes übertragbar sind.

2. Schritt Wir kennen die Algebraisierung des Geradenbegriffs bereits. Er erfolgt durch die vektoriellen Parameterdarstellungen der Geraden im V_0^3 . Also durch eine Abbildung

$$\vec{x}_g = (\mathbb{R}, \alpha \mapsto \vec{a} + \alpha \vec{d}, V_0^3) \quad \text{mit } g = \text{Bild} \vec{x}_g \subset V_0^3.$$

Mit Hilfe derartiger Abbildungen konnten wir die Geraden und damit verbundene Probleme ja algebraisch behandeln.

3. Schritt Parametrisierungsabbildungen dieser Form lassen sich problemlos auf beliebige Vektorräume, zunächst über \mathbb{R} , dann über beliebige Körper und schließlich auch auf Moduln verallgemeinern:

$$\vec{x}_g = (\mathbb{K}, \alpha \mapsto \vec{a} + \alpha \vec{d}, V) \dots \vec{a}, \vec{d} \in V.$$

Nun interpretieren wir die Menge $\text{Bild}(\vec{x}_g) \subset V$ als Gerade im Vektorraum V . **Unabhängig davon, was für ein Vektorraum V ist.** Und umgekehrt soll sich natürlich jede Gerade in V auf diese Weise parametrisieren lassen.

Zwei Geraden sind gleich, wenn sie als Teilmengen von V übereinstimmen. Ein und dieselbe Gerade kann unterschiedliche Parametrisierungen besitzen.

4. Schritt Jetzt kann man untersuchen, ob sich die geometrischen Eigenschaften unserer anschaulichen Geraden auf den allgemeinen Fall ausdehnen lassen. Gehen wir einige Beispiele durch.

Zwei Geraden sind parallel, wenn sie dieselbe Richtung haben, d.h. wenn es $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ gibt, so daß $\vec{d}_1 = \lambda \vec{d}_2$. (Hier ist bei der Begriffserweiterung auf Moduln zum ersten Mal Vorsicht geboten. Wieso? Beachten Sie: $\lambda \in \mathbb{R}$ wird zu $\lambda \in R$.)

"g und h sind parallel" erzeugt eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Geraden eines Vektorraumes V über K . Das gilt erneut für jeden Körper.

Durch *zwei verschiedene Punkte* von V verläuft immer eine Gerade, wie die (rein algebraisch formulierbare) Zweipunkteformel zeigt. Ist es aber auch immer genau eine? Ja, wenn ein Vektorraum vorliegt. Bei Moduln muss dies erneut nicht der Fall sein. Die Beweise sind leicht zu führen.

(1.5.6) Betrachten wir zwei weitere Eigenschaften, die beide als charakteristisch für das Verhalten von Geraden im Raum anzusehen sind. Zunächst das klassische **Parallelenaxiom der Geometrie**:

Gegeben eine Gerade g und ein Punkt P .
Dann gibt es im Vektorraum genau eine zu g parallele Gerade durch P .

(1.5.7) Beweis: Laut unserer Definition existiert zu g ein Parametrisierung

$\vec{x}_g = (K, \alpha \mapsto \vec{a} + \alpha \vec{d}, V)$. Dann hat $\vec{x}_\pi = (K, \alpha \mapsto \vec{x}_P + \alpha \vec{d}, V)$ die erwünschten Eigenschaften. Dabei ist \vec{x}_P Ortsvektor von P .

Sei umgekehrt $\vec{x}_h = (K, \beta \mapsto \vec{x}_1 + \beta \vec{e}, V)$ Parametrisierung einer Geraden h , die auch P enthält und die parallel zu g ist. Dann gibt es $\beta_0 \in K$ mit $\vec{x}_h(\beta_0) = \vec{x}_P$ und $\varphi \neq 0$ mit $\vec{e} = \varphi \vec{d}$. Einsetzen zeigt $\vec{x}_0 = (K, \beta \mapsto \vec{x}_P + (\beta - \beta_0) \varphi \vec{d}, V)$. Nun ist aber **für einen Körper** $\beta \mapsto \varphi(\beta - \beta_0)$ für $\varphi \neq 0$ eine bijektive Abbildung. Daher haben \vec{x}_g und \vec{x}_h dieselben Bilder.

?? Für Moduln gilt der Beweis so nicht. Wieso?

(1.5.8) Und jetzt die zweite Eigenschaft:

Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt.

(1.5.9) Überlegen Sie selbst, wie man bei der Lösung des anstehenden Problems weiter vorzugehen hat. Sind wir bereits ausreichend gerüstet, um diese Frage algebraisch, d.h. nur mit Hilfe der Vektorraumaxiome zu beantworten? Klar ist: Unser (ursprünglich geometrisches) Problem nimmt jetzt eine rein algebraische Form an:

Welche Lösungen in K hat $\vec{a} + \alpha \vec{d} = \vec{b} + \beta \vec{e}$?

(1.5.10) Leider reichen unsere algebraischen Kenntnisse noch nicht, diese Frage allgemein mit erträglichem Aufwand zu beantworten. Später - mit dem richtigen Formalismus wird es kein Problem mehr sein. (Vgl. Kap. 4.2.2c). Anstelle der allgemeinen Lösung diskutieren wir das Problem für einen konkret gegebenen Vektorraum. Allerdings für einen solchen, welcher der üblichen anschaulichen Vorstellung recht fern steht.

4.1.5a Ein Vektorraum mit endlich vielen Punkten (1.5.11) Wir wählen den Körper $K = \mathbb{Z}/(5)$ und bilden den zugehörigen Produktraum $V = K^2$. Nach unseren allgemeinen Vorüberlegungen ist dies ein Vektorraum über K . V hat offensichtlich 25 Elemente, die man graphisch wie üblich darstellen kann. Nachfolgend deuten wir die Elemente immer als Punkte an. Dieser Vektorraum hat 2^{25} Teilmengen. Darunter sind nur 30 Geraden.

	0	1	2	3	4	5=0
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,0)
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,0)
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,0)
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,0)
4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,0)
5=0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,0)

Beispiele von Geraden in diesem Raum sind:

$$\vec{x}_g = (K, x \mapsto (1, 0) + x(1, 1), V)$$

$$\vec{x}_h = (K, x \mapsto (3, 1) + x(1, 1), V)$$

$$\vec{x}_k = (K, x \mapsto (3, 1) + x(2, 1), V)$$

g und h sind parallel, k hat eine andere Richtung.

(1.5.12) Diese Geraden lassen sich sofort durch graphisches Aufzählen ihrer Elemente beschreiben (* heißt: gehört zur Teilmenge, o heißt: doppelt gezeichnetes Randelement):

g	h	k
. . . . * *	. . * . . .
* o *	* o
. *	* o	. . . * . .
. . * * *
. . . * * * .
. . . . o o o . . .

Inspektion (oder algebraische Rechnung) zeigt: Zu jeder gegebenen Richtung in V gibt es genau 5 parallele Geraden, davon eine durch den Ursprung. Parallele, aber verschiedene Geraden besitzen keinen Schnittpunkt. Jede Gerade hat genau 5 Punkte.

Und weiter: Jede Schar paralleler Geraden gibt eine Partition von V .

(1.5.13) Wieviele unterschiedliche Richtungen gibt es?

Sei $(m, n) \neq 0$ ein beliebiger Richtungsvektor. Ist $n = 0$, so haben wir $(m, 0) = m(1, 0)$. Ist $n \neq 0$, so folgt $(m, n) = n(m/n, 1)$. **Damit gibt es genau 6 verschiedene Richtungen**, die durch die Vektoren $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ und $(4, 1)$ festgelegt werden.

Zusammen mit den Aufpunkten gibt das 30 unterschiedliche Geraden, davon 6 durch den Ursprung. Mit den beiden trivialen Teilräumen erhält man die bereits mehrfach genannten 8 Teilräume.

(1.5.14) Nicht parallele Geraden besitzen einen eindeutigen Schnittpunkt, h und k schneiden sich beispielsweise in $(3, 1)$ und k und g in $(1, 0)$. (Das beantwortet die oben gestellte Frage für das konkrete Beispiel!)

(1.5.15) Es sieht tatsächlich so aus, als verhielten sich die Geraden in V genauso wie die uns geometrisch vertrauten anschaulichen Geraden in der Ebene! Aber das ist nicht ganz richtig. Versuchen wir einmal Begriffe wie *Strecke* oder *Dreieck* auf unsere neue Situation zu übertragen. In V_0^3 haben wir:

Eine Strecke s ist eine Teilmenge einer Geraden, die sich wie folgt parametrisieren läßt:
 $\vec{x}_s = (J, x \mapsto \vec{a} + x\vec{d}, V_0^3)$ mit $J = \{\alpha \in \mathbb{R} | a \leq \alpha \leq b\}$ Intervall!
 Dann folgt $s = \text{Bild}J$.

(1.5.16) Auf beliebige Vektorräume, insbesondere auf $K = \mathbb{Z}/(5)$ und $V = K^2$ ist diese Definition **nicht ausdehnbar**. Der Grund: Wir wissen nicht, wie man für $K \neq \mathbb{R}$ ein Intervall erklärt! Ungleichungen wie $a \leq \alpha \leq b$ werden durch die Körperaxiome allein nicht zu sinnvollen Beziehungen. Sie werden erst sinnvoll, wenn man eine zusätzliche Ordnungsrelation zur Verfügung hat, wie in \mathbb{R} .

(1.5.17) Auch \mathbb{C} besitzt eine derartige Ordnungsrelation nicht. Eine Ungleichung wie $l \leq 1 + 2i$ ist nicht erklärt.

(1.5.18) Betrachten wir diese Problematik in unserem Beispiel einmal etwas genauer.

k aus $\mathbb{Z}/(5) \times \mathbb{Z}/(5)$					
.	.	*	.	.	.
*	o
.	.	.	*	.	.
.	*
.	.	.	.	*	.
.	.	o	.	.	.

Welche Punkte könnten hier die "Strecke zwischen (0,2) und (4,4) auf der Geraden k" bilden? Vielleicht läßt sich ja die Ordnung von \mathbb{Z} in konsistenter Weise hinübertransportieren? Gehen wir von (0,2) aus. Dann zeigt sowohl (2,1) als auch (-2,-1) auf den zweiten Punkt (4,4).

Bildet man $(0,2) + x(2,1)$ so erhält man als Streckenkandidaten $\{(0,2), (2,3), (4,4)\}$. Bildet man $(0,2) + x(-2, -1)$ so folgt $\{(0,2), (3,1), (1,0), (4,4)\}$. Man hat in 2 nichts Entsprechendes und kein vernünftiges Kriterium, welche der beiden Mengen man als Strecke zwischen den beiden Punkten wählen soll.

4.1.5b Nutzen der analytischen Geometrie (1.5.19) Die Methoden und Resultate der analytischen Geometrie erweisen sich für zahlreiche Probleme und Fragestellungen als nützlich. Wir nennen zwei Problemtypen:

* Die effiziente quantitative Lösung geometrischer Probleme. Wir erinnern hier an die Schnittmengenbestimmung, wie sie im Vorkurs besprochen wird.

* Die Förderung des Verständnisses komplexer Sachverhalte.

(1.5.20) Den ersten Punkt kann man als analytische Geometrie im engeren Sinne charakterisieren. Geometrische Probleme werden mit Hilfe von Darstellungsabbildungen in Probleme der Vektorrechnung umgewandelt und analytisch - als Zahlwertprobleme gelöst. Die Methode geht auf Fermat und Descartes - 1. Hälfte des 17. Jahrhunderts - zurück: Ihre Einführung hat sich als enorm erfolgreich erwiesen. Man denke nur an das Beispiel der reellen Funktionen und in welchem Umfang und mit welchem Nutzen man dort zwischen der Geometrie der Graphen und der Algebra der Rechenausdrücke wechselt.

(1.5.21) Zum zweiten Punkt wollen wir ein für uns wichtiges Beispiel besprechen. Es geht dabei um die Frage: **Was beinhaltet die Linearität einer Abbildung genauer?** Was bedeutet sie? Das ist infolge der Allgemeinheit der damit verbundenen Begriffsbildungen eine für viele Menschen zunächst nur schwer zugängliche Frage, die natürlich nicht durch einfache Nennung der Linearitätsbedingung beantwortet wird.

(1.5.22) Was leistet der Standpunkt der analytischen Geometrie zur Klärung? Wichtig ist der dritte Schritt des Programms, in dem allgemeine algebraische Rechnungen mit Vektoren wieder geometrisch interpretiert werden.

(1.5.23) Dazu überlegen wir: Jede Abbildung ordnet zunächst einmal jedem $x \in V$ ein $y \in W$ zu. Gegenstand geometrischer Überlegungen sind aber weniger die Punkte selbst, als daraus gebildete Figuren wie Strecken, Dreiecke, Parallelepipede usw. Werden diese durch $\Phi : V \rightarrow W$ auch abgebildet? Aber natürlich! Jede solche Figur läßt sich als Teilmenge $T \subset V$ beschreiben.

Wir müssen zur Potenzmengenerweiterung $\Phi: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(W)$ übergehen, die jeder Figur $F \in \mathcal{P}(V)$ eine Teilmenge $G = \Phi(F)$ aus W zuordnet. Bei beliebigen Abbildungen wird man in G keine geometrische Eigenschaft von F wiedererkennen. Bei linearen ist dies anders. Hier werden ganz bestimmte Figurtypen wieder in ganz bestimmte Typen abgebildet. Und dies Bewahren gewisser geometrischer Formen ist charakteristisch für die linearen Abbildungen.

(1.5.24) Um den behaupteten Sachverhalt genauer zu sehen, beginnen wir mit b) aus Satz (1.3.11). Hiernach ist das Bild jedes Teilraumes wieder ein Teilraum. Angenommen $U \subset V$ beschreibt eine Gerade durch den Ursprung von V . Was ist $\Phi(U)$? Nun sei $\vec{d} \in V$ ein Richtungsvektor von U . Angenommen $\Phi(\vec{d}) = \vec{b} \neq \vec{0}$. Dann ist wegen $\Phi(\alpha\vec{d}) = \alpha\Phi(\vec{d}) = \alpha\vec{b}$ aber $\Phi(U)$ nichts anderes als die von $\vec{b} = \Phi(\vec{d})$ in W

erzeugte Gerade! Das liegt klar an der Linearität, genauer der Homogenität. Ist dagegen $\Phi(\vec{d}) = \vec{0}$, so wird die gesamte Gerade auf den Ursprung abgebildet. Zusammen:

Das lineare Bild einer Ursprungsgeraden ist stets erneut eine **Ursprungsgerade** oder aber **der Nullraum**.

(1.5.25) Wie steht es jetzt mit Geraden, die nicht durch den Ursprung gehen? In V_0^3 sind das parallel verschobene Ursprungsgeraden. Parallelverschiebung ist ein typisch **geometrischer Begriff**. Läßt sich unser Programm der analytischen Geometrie darauf anwenden? Ja, problemlos.

(1.5.26) in V_0^3 wird jede Parallelverschiebung durch Hinzuaddieren eines Vektors a beschrieben. Das ist eine Gruppenoperation der additiven Gruppe von V_0^3 auf V_0^3 . Nennen wir diese additive Gruppe $T(V_0^3)$ (=Translationsgruppe), so haben wir die Gruppenoperation $(T(V_0^3) \times V_0^3, (\vec{a}, \vec{x}) \mapsto \vec{x} + \vec{a}, V_0^3)$. Das ist eine Gruppenoperation, und sie beschreibt das, was wir unter "Parallelverschiebung" verstehen.

Diese Gruppenoperation ist nun auf jeden Vektorraum, ja auf jeden Modul verallgemeinerbar. Sei M Modul über R und $T(M)$ die additive Gruppe von M . Dann haben wir die Gruppenoperation $(T(M) \times M, (a, m) \mapsto m + a, M)$, die wir generell jetzt generell als Parallelverschiebung (in M) interpretieren. Vergleichen Sie: Wir sind die Programmschritte aus (1.5.3) für die konkrete Frage durchgegangen, und haben sie problemlos beantwortet! .

(1.5.27) **Damit ist eine Nichtursprungsgerade immer eine Parallelverschiebung einer Ursprungsgeraden.** Für eine Nichtursprungsgerade finden wir:

$\Phi(\vec{a} + \alpha\vec{d}) = \Phi(\vec{a}) + \alpha\Phi(\vec{d})$. D.h. aber: Das lineare Bild einer (beliebigen) Geraden ist erneut eine Gerade oder aber ein Punkt. Allgemeiner:
Verschiebt man eine Figur in V parallel, so ist das lineare Bild
der parallel verschobenen Figur eine Parallelverschiebung des Bildes,
also $\underline{\Phi}(\vec{a} + F) = \Phi(\vec{a}) + \underline{\Phi}(F)$.

(1.5.28) Insgesamt abstrahieren wir die folgende grundlegende Charakterisierung linearer Abbildungen von Vektorräumen:

Es sei $f : V \rightarrow W$ lineare Abbildung zweier Vektorräume. Dann ist das Bild eines beliebig verschobenen Teilraumes von V erneut ein eventuell verschobener Teilraum.

(□.1) Zeigen Sie am Beispiel $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, dass die Umkehrung von (1.5.28) nicht gilt.

(□.2) Was ist eine *konvexe Figur*? Überzeugen Sie sich, dass sich das "konvex" der ebenen und räumlichen Anschauung wie folgt vektoriell formulieren läßt: Eine Figur F heißt konvex, wenn gilt: Gehören \vec{a} und \vec{b} zu F , dann gehören auch alle Punkte der Verbindungsstrecke $\vec{a} + \beta(\vec{b} - \vec{a})$ mit $0 \leq \beta \leq 1$ zu F . Machen sie eine Skizze, die das verdeutlicht. Wie steht es mit der Verallgemeinerbarkeit?

(□.3) Es sei V reeller Vektorraum und $F \subset V$ eine Teilmenge. Bilden sie die folgende neue Teilmenge:

$$K_V(r) = \{\vec{x} | \vec{x} = \lambda\vec{a}, \vec{a} \in F, \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq r\}$$

Welche geometrische Interpretation haben diese Mengen in der Ebene und im Raum? Wie wird man diese Mengen allgemein bezeichnen? Was kann man tun, wenn ein anderer Körper als \mathbb{R} vorliegt?

(□.4) Läßt sich der Begriff des Schwerpunktes verallgemeinern? Der Begriff der Parabel? Und wie steht es mit der Tangente an eine Parabel? Wie steht es mit Kreisen?

4.1.6 Abbildungsräume mit Wertemengenverknüpfung

(1.6.1) Wir kehren jetzt zur Diskussion der formalen Konstruktionen zurück, mit deren Hilfe man Moduln und Vektorräume aus bereits vorhandenen produziert. Vgl. (1.1.1). Den nächsten zu behandelnden Typ bilden die in der Überschrift genannten Abbildungsmengen. Diese Konstruktion erweist sich für die Anwendungen als besonders wichtig.

(1.6.2) Sei dazu $A \neq \emptyset$ irgendeine Menge und M ein Modul (bzw. Vektorraum) über R . Dann betrachten wir die Menge $\mathcal{F}(A, M)$ aller Abbildungen $A \rightarrow M$. Die vorgegebene Modulstruktur steckt in der Wertemenge M und das genügt.

(1.6.3) Das Stichwort "punktweise Verknüpfung" liefert uns zwei Kompositionen für die Abbildungen aus $\mathcal{F}(A, M)$, nämlich:

$f, g \in \mathcal{F}(A, M)$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	für alle $x \in A$.
$\alpha \in R$	$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$	für alle $x \in A$.

Das "+"-Zeichen tritt hier in zwei Rollen auf: Als Verknüpfung in M und als Verknüpfung im Funktionsraum $\mathcal{F}(A, M)$.

(1.6.4) Die Gültigkeit der Modulaxiome ist leicht verifiziert. Alle benötigten Eigenschaften werden auf die Gültigkeit dieser Eigenschaften für M zurückgeführt. Betrachten wir als Beispiel nur die Assoziativität für "+" à la Tunnelmethode:

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \text{ für alle } x \in A.$$

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) \text{ für alle } x \in A.$$

Rechts stehen Summen aus M . **Dort gilt das Assoziativgesetz.** Also sind die rechten Seiten gleich. Die Zuordnungen sind gleich. Da auch die Mengen stimmen, sind die Abbildungen gleich: $(f + (g + h)) = ((f + g) + h)$.

Alles Weitere läuft entsprechend ab.

(1.6.6) Unser Resultat:

Wertemengenübertragung	der Modul- und Vektorraumstruktur:
(★) Ist M Modul über R und $A \neq \emptyset$,	dann ist $\mathcal{F}(A, M)$ mit punktweiser Verknüpfung auch Modul über R .
(★) Ist V Modul über K und $A \neq \emptyset$,	dann ist $\mathcal{F}(A, V)$ mit punktweiser Verknüpfung auch Vektorraum über K .

(1.6.7) Das ergibt eine Vielzahl neuer Vektorräume, von denen sich eine ganze Reihe als wichtig erweisen. Der Operatorbereich wird bei der Konstruktion nicht geändert.

(1.6.8) Noch einige Bemerkungen zu der Konstruktion:

1. Meist interessieren nicht die gesamten Räume $\mathcal{F}(A, M)$, sondern nur bestimmte Teiräume. Der Nachweis, dass ein Teilraum vorliegt, erfolgt über das Teitraumkriterium (1.1.5).
2. Häufig führen mathematische Texte Sätze auf, die gerade sicherstellen, dass das Teitraumkriterium auf die Menge aller Abbildungen mit einer gewissen Eigenschaft anwendbar ist, auch wenn der Text diesen Grund nicht ausdrücklich erwähnt.

Typischerweise lautet ein solcher Text : "Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sowie f und g zwei auf I stetige Funktionen. Dann ist auch $\alpha f + \beta g$ auf I stetig." Dies bedeutet, dass die Menge $C(I, \mathbb{R})$ der auf I stetigen Funktionen ein (reeller) Teilvektorraum von $\mathcal{F}(A, M)$ ist. **Und es wird erwartet, dass dem Leser dies klar ist.**

(1.6.9) Nun einige Beispiele von Räumen des Typs $\mathcal{F}(A, V)$, die für Physik besonders interessante Teilräume enthalten. Dabei ist "ausreichend glatt" fallspezifisch für den jeweiligen Zweck geeignet zu spezifizieren. In Kap.6 gehen wir hierauf näher ein:

1. Der Raum aller Bahnkurven $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}$. Als Teilraumeigenschaft verlangt man meist ausreichend glatt. Achtung: Die Menge "tatsächlicher Bahnkurven" ist für die meisten physikalischen Systeme kein Teilraum!
2. Der Raum aller (ausreichend glatten) Skalarfelder $V \rightarrow \mathbb{R}$.
3. Der Raum aller (ausreichend glatten) Vektorfelder $V_0^3 \rightarrow V^3$

(1.6.10) Viele dieser Funktionenräume sind das Thema einer wichtigen mathematischen Disziplin, der "Funktionalanalysis". Insbesondere fallen fortgeschrittenere Fragen aus dem Bereich der Differentialgleichungen in diesen Bereich.

(1.6.11) Ein wichtiges Beispiel für das Auftreten der punktweisen Addition in der Physik:

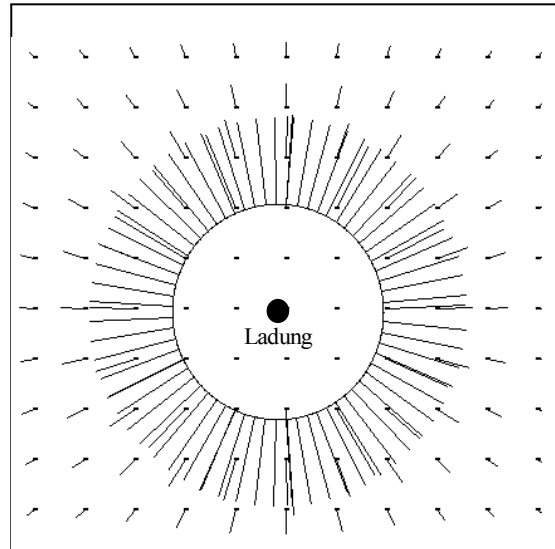
Wir betrachten ein elektrisches Feld, das durch eine räumliche Ladungsverteilung ρ_1 erzeugt wird. Das Feld wird beschrieben durch eine Feldabbildung

$$\vec{E}_1 = (G, \vec{x} \mapsto \vec{E}_1(\vec{x}), V^3) \quad G \subset V_0^3 \quad \text{Beobachtungsgebiet.}$$

Z.B. gilt für ein Punktladung in \vec{a} (=Feld vom Coulombtyp):

$$\vec{E}_1(\vec{x}) = \frac{e}{|\vec{x}-\vec{a}|^3}(\vec{x}-\vec{a})$$

Die Feldpfeile im Innenbereich sind nicht gezeichnet, da sie zu lang werden!



Der Feldstandpunkt liefert die gegebene Veranschaulichung. Die inneren Vektoren sind nicht gezeichnet, da deren Länge sehr groß wird. Besser ist es dann stattdessen "Feldlinien" zu zeichnen, also Kurven, deren Tangente in jedem Punkt die Richtung des zugehörigen Feldvektors hat. Aus ihnen kann man die Richtung der Feldvektoren, aber nicht unmittelbar ihre Länge ablesen.

Jetzt nehmen wir (als Gedankenexperiment) die Ladungsverteilung ρ_1 fort und bringen dafür eine andere, zweite Ladungsverteilung ρ_2 an. Diese erzeugt ein zweites elektrisches Feld:

$$\vec{E}_2 = (G, \vec{x} \mapsto \vec{E}_2(\vec{x}), V^3). \quad \text{Z.B. Punktladung in } \vec{b}: \quad \vec{E}_2(\vec{x}) = \frac{f}{|\vec{x}-\vec{b}|^3}(\vec{x}-\vec{b}).$$

Schließlich bringen wir in einem dritten Schritt unseres Gedankenexperimentes beide Ladungen gemeinsam an ihren Platz. Erneut entsteht ein Feld, das man üblicherweise *resultierendes Feld* nennen wird. Und dieses Feld entsteht in den meisten Fällen - **das ist Erfahrung, keine Denknötwendigkeit** - durch punktweise Addition von \vec{E}_1 und \vec{E}_2 .

Diese Erfahrungstatsache nennt man in der Physik - sofern sie vorliegt -

Superposition.

Die allgemeine Formel: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (G, \vec{x} \mapsto \vec{E}_1(\vec{x}) + \vec{E}_2(\vec{x}), V^3)$

Unser Beispiel: $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{e}{|\vec{x}-\vec{a}|^3}(\vec{x}-\vec{a}) + \frac{f}{|\vec{x}-\vec{b}|^3}(\vec{x}-\vec{b})$

Und denken Sie daran: In derartigen Formeln der Physik kann $\vec{E}(\vec{x})$ immer in zwei Rollen auftreten. In der Rolle eines bestimmten Feldwertes aus V^3 oder aber als Symbol für die gesamte Abbildung. Dann ist \vec{x} äußerer Parameter und beliebig in G wählbar.

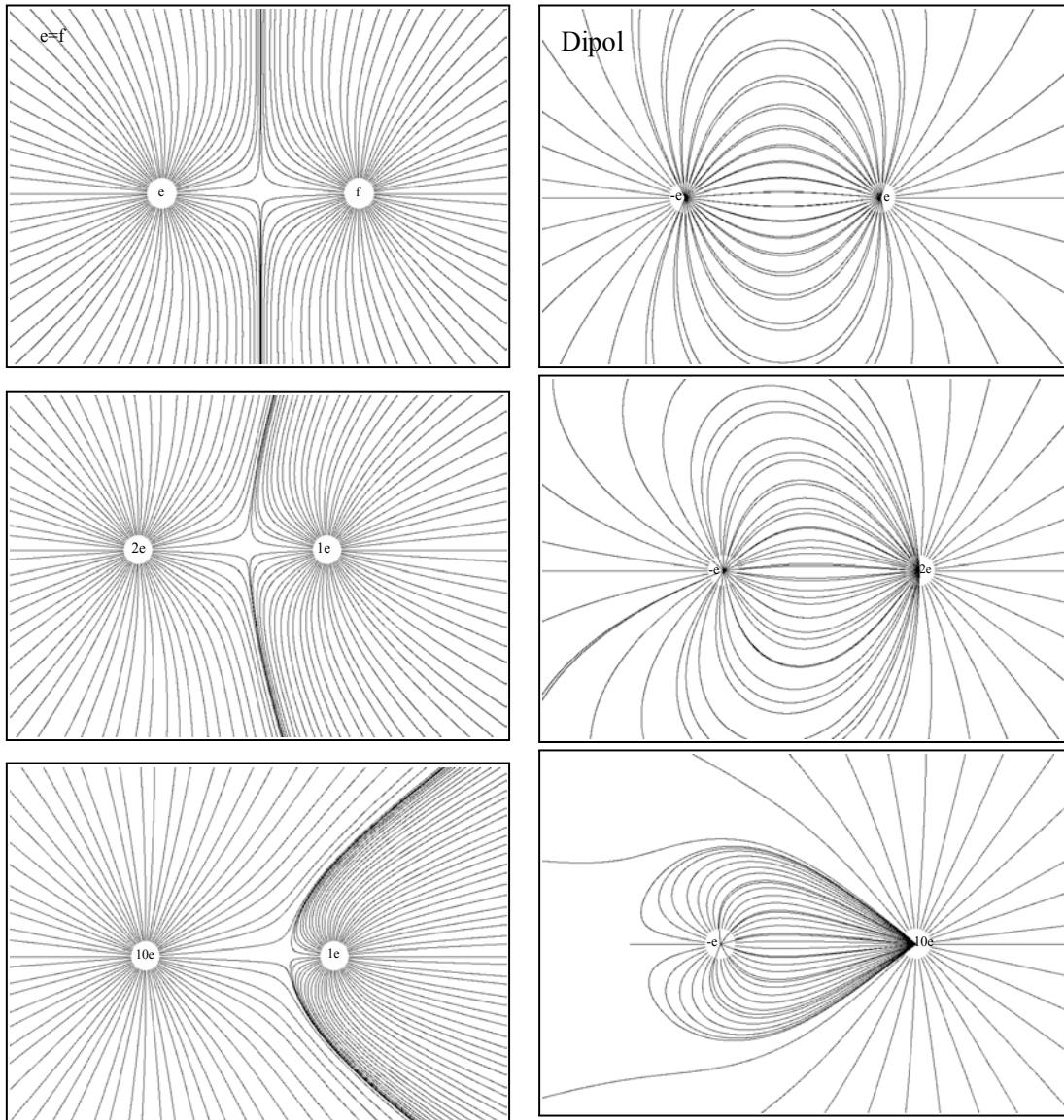
Natürlich heißt dies auch, daß an jedem Punkt das resultierende Feld per Parallelogrammkonstruktion aus den beiden Einzelfeldern entsteht.

(1.6.12) Im Bereich der Physik muss man im Zusammenhang mit der Wertemengenverknüpfung auch die folgenden beiden Aspekte oder auch mögliche Rollen beachten und auseinanderhalten:

- a) Die Wertemengenverknüpfung als mathematische Konstruktion, wie im Text beschrieben und
- b) eine eventuelle physikalische Interpretation dieser Verknüpfung als Superposition von Einzelwirkungen.

In manchen Texten wird so getan, als seien beide Fragen identisch. D.h. Verknüpfung ist immer automatisch Verknüpfung mit zugehöriger physikalischer Interpretation. Ein solches Vorgehen ist weder für die Problemlösung noch den Verstehensprozess besonders förderlich.

(1.6.13) Die nachfolgenden Bilder zeigen Beispiele für durch Superposition zweier Einzelladungen (der Stärken e und f) entstehende Feldkonfigurationen. Die Feldstruktur ist deutlich komplizierter als die für eine einzige Punktladung. Es werden jeweils Feldlinien gegeben, nicht mehr Feldvektoren. Links der Fall sich abstoßende Ladungen gleichen Vorzeichens, rechts der Fall einander anziehender Ladungen.



Abgesehen vom Dipolfall enthält jedes dieser Felder einen Punkt, in dem die Feldstärke verschwindet! In großer, nicht gezeigter Entfernung nähert sich das Feld stets dem einer Einzelladung mit Ladung $e + f$ an (Dominanz!) . Nur der Dipolfall zeigt in grosser Entfernung ein anderes Verhalten. In Kapitel 10 gehen wir hierauf sehr viel genauer ein.

(□.4) Berechnen Sie die Lage des Punktes, in dem resultierende Gesamtkraft verschwindet. (Geeignetes Koordinatensystem einführen. Fallunterscheidungen! Beachten Sie: $\sqrt{x^2}=\varepsilon x$ mit fallspezifisch zu bestimmendem Vorzeichen ε . Und für alle Fälle kontrollieren, ob das Resultat den Erwartungen entspricht.)

4.1.6a Die Beziehung zu den Produkträumen

(1.6.14) Bisher war die Urbildmenge A in unserem neukonstruierten Raum $\mathcal{F}(A, M)$ bis auf die Bedingung $A \neq \emptyset$ beliebig. In unseren Feldbeispielen war sie sogar recht groß. Es liegt nahe - zum Vertrautwerden mit einer so allgemeinen Struktur - einmal ein kleines endliches A zu wählen. Sagen wir $A = \{1,2,3\}$. Das typische Element aus $\mathcal{F}(A, V)$ sieht dann so aus:

Tripelform:	Alternativ: Feldstandpunkt:						
$\left(\begin{array}{l} 1 \mapsto v(1) \\ \{1, 2, 3\}, 2 \mapsto v(2) \\ 3 \mapsto v(3) \end{array} , V \right)$	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$v(1)$</td> <td style="padding: 2px 10px;">$v(2)$</td> <td style="padding: 2px 10px;">$v(3)$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">1</td> <td style="padding: 2px 10px;">2</td> <td style="padding: 2px 10px;">3</td> </tr> </table>	$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	1	2	3
$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$					
1	2	3					

(1.6.15) Der Feldstandpunkt - drei unterschiedene Orte mit angehefteten Vektoren! - zeigt, dass eine solche Abbildung eigentlich nichts anderes als ein Element aus $V \times V \times V$ ist, nämlich das Tripel $(v(1), v(2), v(3))$. ($V \times V \times V$ bitte nicht mit V^3 , dem Raum der freien geometrischen Pfeile im physikalisch geometrischen Raum, verwechseln!

(1.6.16) Wir haben bereits in Kap.1.2.12a eine kanonische bijektive Abbildung zwischen $V \times V \times V$ und $\mathcal{F}(\{1, 2, 3\}, V)$ eingeführt, durch die man die beiden Mengen identifizieren konnte:

$$\begin{aligned} F &= (V^3, \vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \mapsto (\{1, 2, 3\}, i \mapsto \vec{x}_i, V), \mathcal{F}(\{1, 2, 3\}, V)) \\ F &= (V^3, \dots \mapsto (\dots), \mathcal{F}(\dots, \dots)) \end{aligned}$$

Verfolgen sie den Bau von F , die Klammern, genau!

(1.6.17) Aber jetzt liegen nicht nur Mengen, sondern zwei Vektorräume vor. Man bestätigt jedoch sofort, dass es sich bei F um einen **Vektorraumisomorphismus** handelt. Betrachten wir als Beispiel den Nachweis der Additivität:

$$(\vec{x}_i + \vec{y}_i) \mapsto (A, i \mapsto \vec{x}_i + \vec{y}_i, V) = (A, i \mapsto \vec{x}_i, V) + (A, i \mapsto \vec{y}_i, V)$$

wegen punktweiser Verknüpfung. Und das ist die gesuchte Additivität von F .

(1.6.18) Damit können wir sagen:

Sei	M Modul über R und A eine endliche Menge mit $n > 0$ Elementen.
Dann	sind M^n und $\mathcal{F}(A, M)$ auch als Vektorräume isomorph, wobei der (kanonische) Isomorphismus durch
	$(M^n, (m_1, \dots, m_n) \mapsto (A, i \mapsto m_i, M)$ gegeben ist.
Vielfach	werden beide Räume stillschweigend miteinander identifiziert.

(1.6.19) Und das bedeutet: **Produkträume können als Spezialfälle von Abbildungsräumen aufgefasst werden.**

(1.6.20) Hierdurch erledigt sich auch das weiter oben aufgeworfene Problem von **Produkträumen mit unendlich vielen Faktoren!** Beispielsweise kann man den Folgenraum $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ als Produkt von abzählbar vielen Faktoren interpretieren! Die übliche Folgeschreibweise verdeutlicht das:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{identifiziert mit } \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}).$$

(1.6.21) Warum haben wir dann die Produkträume überhaupt eingeführt? Nun, zum einen werden sie (auch aus historischen Gründen) überall benutzt. Und zum anderen ist es häufig bequem und nützlich, mit ihnen zu arbeiten. Die Folgeschreibweise ist hierfür typisch. Es genügt, wenn man weiß, dass es sich im Prinzip um unterschiedliche Schreibweisen desselben Objekts handelt.

(1.6.22) Besonders deutlich wird die Isomorphie bei Verwendung der in der Physik beliebten **Indexschreibweise für Tupel**. Die reduzierteste Form für ein Tupel ist einfach x_j mit j in der Rolle eines äußeren Parameters.

x_j	x_j
$j \mapsto x_j$	$(x_j) \quad j = 1, 2, 3$
$1 \mapsto x_1$ $2 \mapsto x_2$ $3 \mapsto x_3$	(x_1, x_2, x_3)

Von unten nach oben wird die Schreibweise reduzierter, von Schreibballast befreit. **Prägen sie sich schon hier gut ein, was gemeint ist, wenn in der Physik im Indexkalkül x_j geschrieben wird.** Aus dem Kontext muss jeweils klar sein, welche Werte j annehmen darf. In Kapitel 5 werden wir diese Schreibweise genauer behandeln.

4.1.6b Der Teilraum der Abbildungen mit endlichem Träger

(1.6.23) Ist A eine unendliche Menge, so besitzt $\mathcal{F}(A, V)$ einen interessanten und nützlichen Teilraum. Für endliches A liefert die zu besprechende Konstruktion nichts Neues, sondern den trivialen Teilraum $\mathcal{F}(A, V)$, den Ausgangsraum selbst. **Und das heißt, dass dieser neue Teilraum sich elementargeometrisch nicht interpretieren lässt.** Er entfaltet eine Struktur, die im Bereich der unmittelbaren Konfigurationsraumanschauung nicht vorhanden ist!

(1.6.24) Jetzt die Konstruktion: Für $f \in \mathcal{F}(A, M)$ und $x \in A$ ist $f(x)$ ein im Prinzip beliebiges Element aus dem Modul M . Insbesondere ist $f(x) = 0$ zulässig ("Nullstelle"). Und natürlich gibt es auch Abbildungen, die sehr viele solcher Nullstellen besitzen. Und für eben solche Abbildungen interessieren wir uns hier.

(1.6.25) Wir definieren

$\mathcal{E}(A, M) \subset \mathcal{F}(A, M)$	bestehen aus allen $f : j \mapsto x_j$, für die höchstens endlich viele der x_j von Null verschieden sind
Formaler:	Für $f \in \mathcal{F}(A, M)$ setze $T(f) = \{x x \in A, f(x) \neq 0\}$. Dann: $\mathcal{E}(A, M) = \{f f \in \mathcal{F}(A, M), T(f) \text{ endlich}\}$.

(1.6.26) Konkretisieren wir das für den Folgenraum $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Die Zahlenfolge $n = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$ hat $T(n) = \mathbb{N} - \{0\}$ und liegt nicht in $\mathcal{E}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Anders steht es mit $a = (4, 3, 2, 1, 0, 0, \dots)$. Hier haben wir $T(a) = \{0, 1, 2, 3\}$. Das ist endlich, und daher gilt $a \in \mathcal{E}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

(1.6.27) Die in der Definition eingeführte Menge $T(f)$ nennt man auch den "Träger der Abbildung f ". Beschreibt f etwa eine Massendichte, dann gibt der Träger alle Punkte an, in denen Masse vorhanden ist. Der eingeführte Teilraum \mathcal{E} kann daher *als Raum der Abbildungen mit endlichem Träger* charakterisiert werden.

(1.6.28) **Liegt ein Teilmodul vor?** Wir verwenden das Teilraumkriterium. Nun, \mathcal{E} ist sicher nicht leer, da $i \mapsto 0$ von der gewünschten Art ist. Seien weiter $j \mapsto x_j$ und $j \mapsto y_j$ beide von der gewünschten Art. D.h es gibt eine endliche Teilmenge $I \subset A$ und eine zweite endliche $J \subset A$, derart dass $x \neq 0$ höchstens für $j \in I$ und $y \neq 0$ höchstens für $j \in J$ gilt. Dann ist die Vereinigung $I \cup J$ auch wieder endlich und es gilt sicher $x_i + y_i = 0$, für alle $i \notin I \cup J$. Oder auch: $T(x + y) \subset T(x) \cup T(y)$. Weiter ist αx_j Null, wenn x_j das ist.

(1.6.29) Also ist $\mathcal{E}(A, M)$ stets ein Teilmodul von $\mathcal{F}(A, M)$.

(1.6.30) Ein Beispiel für das Auftreten dieses Raumes: Der Raum \mathcal{P} der reellen Polynomabbildungen ist als Vektorraum isomorph zu $\mathcal{E}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Beweis: Die folgende Abbildung leistet offenbar das Verlangte:

$$(\mathcal{P}, p = a_0 + a_1 h_1 + \dots + a_n h_n \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots), \mathcal{E}(\mathbb{N}, \mathbb{R}))$$

Hierbei haben wir die Abbildung aus $\mathcal{E}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ durch das korrespondierende Folgentupel beschrieben. Nochmals: Wir haben leider bisher keine anschaulich-geometrische Vorstellung von diesem Teilraum, so dass wir ihn nicht unmittelbar an das Programm der analytischen Geometrie ankoppeln können. Dagegen haben wir einen Bezug zu den rekursiven Verfahren. Vgl. Kap. 1.(3.12.12).

4.1.7 Algebraische Strukturen der Potenzmenge: Teilraumverband und Quotientenräume

(1.7.1) Wie steht es nun mit der algebraischen Struktur der Potenzmenge? Das ist das letzte unserer Übertragungsprobleme. Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur Vektorräume. K ist nachfolgend Körper und V zugehöriger Vektorraum.

(1.7.2) Wie immer ist die gesamte Potenzmenge als Träger einer algebraischen Struktur derselben Art oder desselben Niveaus ungeeignet. Auf geeigneten Teilmengen von $\mathcal{P}(V)$ können wir jedoch gleichwertige Strukturen einführen. Wir wählen zwei Teilmengen aus, auf denen man recht interessante Strukturen erhält. Dies ist einmal **die Menge aller Teilräume von V** , die eine Verbandsstruktur besitzt, und zum anderen ist es **die Menge aller Parallelverschiebungen eines festen Teilraums U von V** , die erneut eine Vektorraumstruktur trägt.

4.1.7a Der Verband der Teilräume

(1.7.3) Beginnen wir mit dem ersten Fall. Sei also $\mathcal{T}(V)$ die Menge aller Teilräume von V . Sicherlich liegen stets $\{0\}$ und V selbst darin. In einfachen Fällen - wie V^3 oder

$\mathbb{Z}/(p) \times \mathbb{Z}/(p)$ haben wir bereits einen recht guten Überblick über diese Menge. (Natürlich wissen wir noch nicht mit letzter Sicherheit, ob die Geraden und die Ebenen wirklich **alle** nichtrivialen Teilräume von V ausmachen. Aber diese Zweifel werden wir Kap.4.4.2c ausräumen.)

(1.7.4) Jetzt benötigen wir Verknüpfungen auf $\mathcal{T}(V)$. Seien dazu U und W Teilräume von V . Man setzt

$$U + W = \{x \mid x = u + w \text{ mit } u \in U \text{ und } w \in W\}$$

Das Teilraumkriterium zeigt - $(\alpha(u + w) + \beta(w + w)) = (\alpha u + \beta w) + (\alpha w + \beta w)$ -, dass dies erneut ein Teilraum von V ist. D.h. $(U, W) \mapsto U + W$ erklärt eine innere Verknüpfung auf $\mathcal{T}(V)$. Man nennt $U + W$ auch "den von U und W erzeugten Teilraum". Denn es ist, wie man sich leicht überzeugt, der kleinste Teilraum von V , der sowohl U als auch W enthält. Beachten Sie auch, dass $U + W$ üblicherweise nicht einfach die Vereinigung von U und W ist, sondern mehr Elemente enthält.

(1.7.5) Eine Konkretisierung für den Fall $V = V_0^3$: Dann enthält $\mathcal{T}(V)$ sicher alle Geraden und Ebenen durch den Ursprung. Seien g und h zwei derartige verschiedene Geraden. (Geraden und Ebenen interpretieren wir hier als Teilmengen des Vektorraumes). Dann ist $g + h$ offensichtlich gleich der von den beiden Geraden aufgespannten oder erzeugten Ebene. Für $g = h$ dagegen gilt $g + h = g = h$. Ist E eine Ebene, so ist $g + E$ entweder ganz V^3 oder aber gleich E , je nach dem, ob g in E liegt oder nicht.

(1.7.8) Inspektion der allgemeinen Verknüpfung zeigt:

Die Menge $\mathcal{T}(V)$ der Teilräume von V bildet mit der Verknüpfung $+$ eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element $\{0\}$.

Dies folgt unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften für V .

(1.7.9) Aber diese Halbgruppe ist weit davon entfernt, eine Gruppe zu sein! In einer Gruppe wäre die Gleichung $A + X = B$ eindeutig lösbar. Wie sieht es hier mit der Lösbarkeit aus?

	<p>Sei $U, W \in \mathcal{T}(V)$. Betrachte $U + X = W$. Im konkreten Fall $V = V_0^3$ sei U Gerade und W Ebene. Falls W die Gerade U enthält, gibt es zahllose weitere Geraden X_i, die alle $U + X = W$ erfüllen. Auch $X = W$ ist zulässig. Liegt U nicht in W, ist $U + X = W$ unlösbar.</p>
--	---

(1.7.10) Nur den einen (für die Gruppenstruktur) erwünschten Fall, dass es genau eine Lösung gibt, den findet man bis auf triviale Sonderfälle des Typs $\{0\} + X = \{0\}$ nicht. Dieses Beispiel läßt sich mit dem Programm der analytischen Geometrie auf alle Vektorräume ausdehnen, so dass wir tatsächlich sagen können: **Die Halbgruppe $\mathcal{TG}(V)$ ist weit davon entfernt, eine Gruppe zu sein.**

(1.7.11) Neben dem neutralen Element $\{0\}$ ist auch der zweite triviale Teilraum - also V selbst - algebraisch interessant. Er erfüllt die Gleichung $V+U = V$ für alle $U \subset V$. Diese Eigenschaft ist konträr zu der des neutralen Elementes. Das neutrale Element beeinflusst den Verknüpfungspartner überhaupt nicht, wogegen dieses Element den Partner völlig verschlingt, ohne sich selbst zu ändern. (Beim Zahlrechnen mit $+$ hat ∞ ähnliche Eigenschaften und beim Multiplizieren die Null: $0 \cdot x = 0$. Vgl. Kap.3.1.3c beim Stichwort "Machoelement").

(1.7.12) In $\mathcal{T}(V)$ ist noch eine zweite Verknüpfung bedeutsam, die Durchschnittsbildung. Sind U und W wieder Teilräume von V , so ist stets auch $U \cap W$ ein Teilraum von V . Mit Hilfe des Teilraumkriteriums verifiziert man das sofort. Während $+$ die Räume vergrößert, verkleinert die Durchschnittsbildung sie.

(□.6) Im Gegensatz zur Durchschnittsbildung ist die Vereinigung zweier Teilräume i.a. kein Teilraum. Begründen Sie dies. Die eingeführte Summe von Teilräumen ist gleichsam der Ersatz für die Vereinigung. Geben Sie auch dafür Argumente.

(1.7.13) Die Durchschnittsbildung ist (wie die Summe) assoziativ. Dagegen sind die Rollen der trivialen Teilräume einfach vertauscht. V ist jetzt neutral und $\{0\}$ übernimmt die Rolle des Allesverschlingers.

(1.7.14) Ergebnis:

$\mathcal{T}(V)$ wird mit \cap kommutative Halbgruppe mit V als neutralem Element.

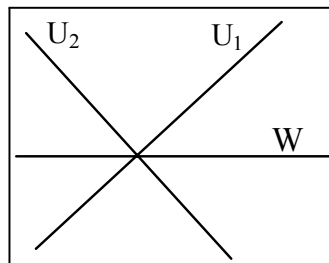
Erneut ist man von einer Gruppe weit entfernt. So hat $U \cap X = U$ viele Lösungen und $U \cap X = V$ ist für $U \not\subseteq V$ unlösbar.

(1.7.15) Insgesamt haben wir eine Menge mit zwei inneren Verknüpfungen: $(\mathcal{T}(V), +, \cap)$. Wie steht es mit den Eigenschaften, die die Beziehungen zwischen $+$ und \cap regeln? Die üblichen Kandidaten sind die Distributivgesetze. Diese würden hier lauten (eine Verknüpfung übernimmt die Rolle von $+$, die andere die von \cdot , das gibt 2 Typen. Wegen der Kommutativität genügt es, jeweils ein Gesetz hinzuschreiben):

$$\begin{aligned} (U_1 + U_2) \cap W &= (U_1 \cap W) + (U_2 \cap W) \\ (U_1 \cap U_2) + W &= (U_1 + W) \cap (U_2 + W) \end{aligned}$$

(1.7.18) Prüft man die Gültigkeit dieser Gesetze nach, so erlebt man eine Enttäuschung. Sie sind keineswegs generell erfüllt. Ein Beispiel:

U_1, U_2 und W Geraden der Ebene E
wie in der Skizze. Offenbar $(U_1 + U_2) = E$.
Also $(U_1 + U_2) \cap W = W$.
Andererseits $U_1 \cap W = U_2 \cap W = \{0\}$.
Das zugehörige Distributivgesetz ist verletzt.



(□.7) Überlegen Sie sich ein entsprechendes Beispiel für das zweite formulierbare Distributivgesetz.

(1.7.19) Gehen wir zurück zu unserem allgemeinen Schema der algebraischen Strukturen mit zwei Verknüpfungen in Kap.3.4.1, so sehen wir, dass für $\mathcal{T}(V)$ höchstens die Linie "Verband-Boolsche Algebra" in Frage kommt. Da die Distributivgesetze nicht gelten, kommt nur Verband in Frage.

(□.8) Suchen Sie die Axiome für einen Verband in der Literatur, und prüfen Sie deren Gültigkeit. Vergleichen sie mit der Struktur $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ für Potenzmengen.

4.1.7b Quotientenräume

(1.7.20) Wir kommen zum zweiten Beispiel einer Struktur auf einer Teilmenge von $\mathcal{P}(V)$. Sei dazu U ein Teilraum von V . Wir bilden die Menge aller Parallelverschiebungen von U . D.h. im Sinne der analytischen Geometrie, dass wir die Gruppenoperation der Translation einführen. Sei wieder $\mathcal{T}(V)$ die zu V gehörige

additive Gruppe mit Operation $(\vec{a}, \vec{x}) \mapsto \vec{x} + \vec{a}$. Dann ist $\{\vec{a} + U | \vec{a} \in V\}$ mit $\vec{a} + U = \{\vec{x} | \vec{x} = \vec{a} + \vec{u} \text{ mit } \vec{u} \in U\}$ gerade die Bahn von U unter der Erweiterung der Gruppenoperation von $T(V)$ auf die Potenzmenge. Man bezeichnet diese Menge (aller Parallelverschiebungen von U) mit V/U . Gelesen "V modulo U" oder "V nach U".

(1.7.21) Alternativ können wir V/U auch als Klassenmenge der folgenden Aquivalenzrelation einführen:

$$(\vec{x} \sim \vec{y}) \iff (\vec{x} - \vec{y}) \in U.$$

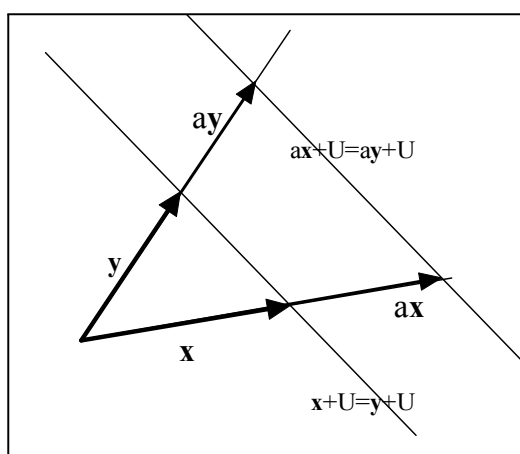
Diese Aquivalenzrelation haben wir bereits allgemein bei den Gruppen diskutiert. Die Klassen (= Nebenklassen von U) sind die gewünschten Parallelverschiebungen von U . Da $T(V)$ kommutativ ist, ist U auf jeden Fall ein Normalteiler, und damit ist V/U automatisch wieder Gruppe unter $+$. Wir bringen nochmals die Definition der (wohldefinierten) Klassenaddition:

$$(\vec{x} + U) + (\vec{y} + U) = (\vec{x} + \vec{y}) + U$$

(1.7.22) Jetzt definieren wir entsprechend ein Multiplikation der Klassen mit Körperelementen:

$$\alpha(\vec{x} + U) = \alpha\vec{x} + U \quad \text{für } \alpha \in K \text{ und } \vec{x} \in V.$$

Auch dieses Produkt ist wohldefiniert wegen $\alpha U = U$. (Wie steht es im Modulfall mit dieser Gleichung?) Anstelle des formalen Beweises der Wohldefiniertheit bringen wir eine Skizze, welche die Idee geometrisch verdeutlicht.



Wir haben also eine Menge V/U , die Menge aller Parallelverschiebungen von U . Für diese Menge haben wir zwei Verknüpfungen. Für $+$ ist V/U abelsche Gruppe. Der Rest der Vektorraumaxiome ist leicht zu verifizieren.

(1.7.23) Ergebnis.

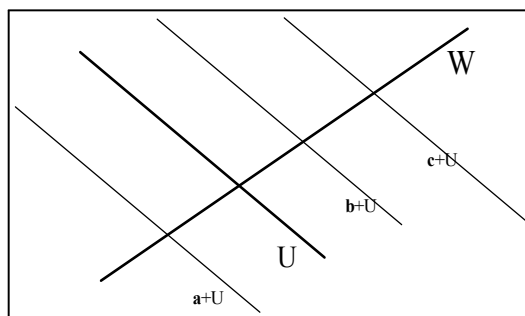
Sei V Vektorraum über dem Körper K und $U \subset V$ ein Teilraum.
Dann ist V/U mit den eingeführten Verknüpfungen auch Vektorraum über K .

Insbesondere ist V/V gerade der Nullraum, da es dann nur eine Klasse gibt! Und für $U = \{0\}$ sind alle Klassen einelementig, so dass $V/\{0\}$ isomorph zu V wird.

(1.7.24) Wie bei jeder Klasseneinteilung sollte man sich auch hier die Frage nach einem Vertretersystem stellen. Die Skizze liefert wieder die Idee:

Wähle einen zweiten Teilraum W mit den folgenden Eigenschaften:

- 1) $U + W = V$
- 2) $U \cap W = \{0\}$



Dann erwarten wir - und werden es sogleich streng beweisen - dass die Elemente von W ein Vertretersystem für V/U bilden.

(1.7.25) Beweis: W erfülle 1) und 2). Jedes $v \in V$ ist wegen 1) schreibbar als $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$. D.h. wir haben in W einen Vertreter von v . Oder $v + U = w + U$. Kann es für dieselbe Klasse noch einen zweiten Vertreter geben? Sei w' ein solcher. Also $w' + U = w + U$ und mithin $w' = w + u$ mit $u \in U$. Dann ist aber $w' - w$ sowohl aus W als auch aus U . Damit aus $W \cap U$. Wegen 2) ist dann $w' - w = 0$. D.h. es gibt genau einen Vertreter.

Dieser Beweis läßt sich noch ausbauen. Angenommen man hätte zwei Darstellungen $v = u + w = u' + w'$ mit $u, u' \in U$ und $w, w' \in W$. Dann liefert dieselbe Argumentation $u = u'$ und $w = w'$. **D.h. jeder Vektor $v \in V$ ist auf genau eine Weise schreibbar als $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$.**

(1.7.26) Wir haben soeben im Sinne der analytischen Geometrie die eindeutige geometrische Zerlegung unserer Skizze auf beliebige Vektorräume übertragen!

(1.7.27) Wir definieren (wegen der großen Bedeutung des soeben gewonnenen Resultates):

Sei	V Vektorraum über K und U ein Teilraum. Weiter sei W ein zweiter Teilraum, für den gilt: 1) $U + W = V$ 2) $U \cap W = \{\vec{0}\}$
Dann	heißt W ein zu U <i>supplementärer Teilraum</i> von V .
Und es gilt:	Jedes $v \in V$ ist eindeutig schreibbar als $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$.

(1.7.28) In unserem Fall können wir sagen: Jeder zu U supplementäre Teilraum liefert ein Vertretersystem von V/U . Damit haben wir eine bijektive Abbildung $(W, w \mapsto w + U, V/U)$, von der wir uns problemlos überzeugen, dass sie einen Vektorraumisomorphismus bildet. Das Ergebnis, das die Erwartungen der Skizze bestätigt, lautet:

V/U ist isomorph zu jedem zu U supplementären Raum W .

(1.7.29) Nun gibt es zu festem U aber zahlreiche supplementäre Räume. Alle sind als Teilräume von V voneinander verschieden. Alle sind zueinander isomorph. V/U dagegen ist eindeutig **kanonisch** bestimmt und konstruiert. Dieser Raum stellt so etwas wie die Abstraktion oder Idealisierung aller (zu U supplementären) W dar. Vgl. die Figur zu (1.7.9).

Oben haben wir gesehen, dass sich jedes $v \in V$ eindeutig schreiben lässt als $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$. Wir können (in Verallgemeinerung des üblichen Gebrauchs) \vec{u} "die Komponente von \vec{v} in U und \vec{w} die Komponente von \vec{v} in W " nennen. Damit haben wir die folgende Abbildung:

$$(V, \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \mapsto (\vec{u}, \vec{w}), U \times W).$$

Diese Abbildung ist kanonisch, sie enthält keinerlei Willkür. Wieder überzeugt man sich sofort, dass ein Isomorphismus vorliegt.

(1.7.30) Da nun W isomorph zu V/U ist, haben wir schließlich:

Satz:	Es sei V Vektorraum über K und U ein Teilraum von V . Weiter sei W ein zu U supplementärer Teilraum.
Dann	ist die folgende Abbildung ein kanonischer Vektorraumisomorphismus: $(V, \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \mapsto (\vec{u}, \vec{w}), U \times W)$. Schließlich sind V und $U \times (V/U)$ (nicht kanonisch) isomorph.

(1.7.31) Offen bleibt im Augenblick die Frage, ob es immer supplementäre Räume gibt. V/U jedenfalls gibt es stets.

(1.7.32) Welche Bedeutung hat obiger Satz? Vom Zahlrechnen her ist man es gewöhnt, Addition und Multiplikation strikt zu unterscheiden. Bei den Vektoren dagegen erweist sich das kartesische Produkt - wie der Satz zeigt - nur als andere Schreibweise der direkten Summe! Tupel stehen strukturell den Summen näher als den Produkten. Man darf sich da durch die Sprech- und Schreibweisen nicht in die Irre führen lassen.

Dagegen zeigt die folgende Rechnung (zu dem Stichwort "komponentenweise Addition") die richtige Struktur:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{0}) + (\vec{0}, \vec{y}).$$

(1.7.33) Aber auch diese vektorielle direkte Summe unterscheidet sich in gewisser Hinsicht stark von den Zahlsummen. Während man dort vom Resultat nicht auf die Summanden schließen kann, ist dies, wie wir gesehen haben, im vektoriellen Fall möglich. Und dieser Aspekt, der die Vektorrechnung von der Zahlrechnung abhebt, wird natürlich gerade durch die Tupelschreibweise ausgedrückt und prägnant dargestellt.

(1.7.34) Damit sind wir zum Anfang dieses Kapitels zurückgekommen: Dass es wichtig ist, die Unterschiede zwischen Zahlrechnen und Vektorrechnen herauszuarbeiten und zu verstehen.

4.2 Das grundlegende Begriffssystem der Vektorrechnung

Wie sieht nun das in (1.0.2) angekündigte spezifische Begriffssystem aus, durch das sich die Vektorrechnung von der Zahlrechnung unterscheidet?

4.2.1 Die Linearkombinationsabbildung

(2.1.1) Zunächst benötigt man den Begriff der Linearkombination, genauer, den der *Linearkombination einer Familie von Vektoren*.

(2.1.2) Die vektorielle Beschreibung einer Geraden geschah so: Man gab zwei Vektoren \vec{a} und \vec{d} fest vor. Dann veränderte man die Länge des einen und addierte anschließend den zweiten hinzu: $\vec{a} + \alpha\vec{d}$. Die gesamte Änderung ergab sich über die Änderung des einen freien Parameters α .

(2.1.3) Derartige Vektorkonstruktionen wollen wir verallgemeinern. Wir geben zunächst eine **endliche Familie von Vektoren** vor, d.h. eine Abbildung $(\{1, 2, \dots, n\}, j \mapsto a_j, V)$ oder gleichwertig in Tupelschreibweise $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Dazu betrachten wir eine entsprechende Familie von Skalaren, also $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$. (Dasselbe n !) Hieraus bilden wir den Vektor

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{a}_i = \sum \alpha_i \vec{a}_i = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n \quad \text{aus } V \text{ oder } M.$$

Die Konstruktion dieses Termes erfordert nur Bestandteile, die durch die Modulaxiome gesichert sind. Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Werte der Summationsindex (im Beispiel i) durchläuft, dann lassen wir meist die Angabe der Grenzen fort, wie in der zweiten Schreibweise. Gewöhnen Sie es sich an, solche kontextspezifischen Festlegungen wahrzunehmen und zu benutzen.

Der Term $\sum \alpha_i a_i$ hat zwei Interpretationsmöglichkeiten. Er liefert einerseits einen Wert, hier also einen Vektor aus V oder M . Und andererseits beschreibt er einen mathematischen Weg, aus bestimmten Eingabedaten zu diesem Wert zu gelangen. Der zweite Aspekt erweist sich im Falle der Linearkombination als vorrangig.

(2.1.4) Was ist mit $n = 0$? Dann müssen wir als Indexmenge die leere Menge wählen. ($I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $I_0 = \emptyset$). Wir haben es mit einer *leeren Menge von Vektoren* zu tun. Es ist sinnvoll, in diesem Fall den Nullvektor als Wert von $\sum \alpha_i \vec{a}_i$ anzusetzen. Denn sind I und J disjunkt und ist $K = I \cup J$, dann sollte $\sum_I \dots + \sum_J \dots = \sum_K \dots$ gelten. Für $I = \emptyset$ bedeutet das, dass man $\sum_{I=\emptyset} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}$ zu wählen hat, also die Behauptung.

Wie im Falle der Geradenparametrisierung erhalten die Vektoren \vec{a} einer Linearkombination üblicherweise die Rolle äußerer Parameter! Und die Skalare α die Rolle unabhängiger Variabler. Das ist die für die Vektorrechnung typische Rollenverteilung. Und damit wird die gesamte Konstruktion (natürlich!!) wieder zu einer Abbildung.

(□.1) Überlegen sie sich eine Problemsituation der elementaren Vektorrechnung mit anderer Rollenverteilung.

(2.1.5) Abstrahieren wir die angesprochene Abbildung:

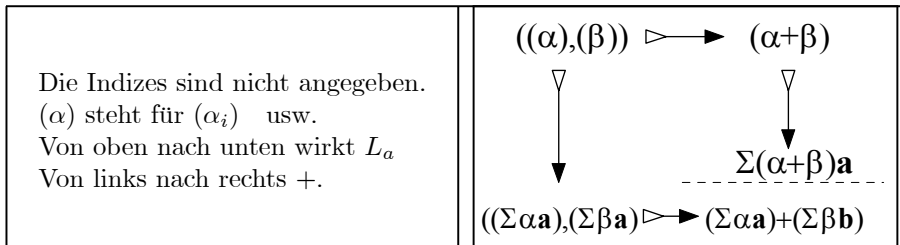
Sei	M Modul über dem Ring R .
Weiter	sei $a = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ eine Familie von $n \geq 0$ Vektoren aus M .
Dann	sei L_a die folgende Abbildung $R^n \rightarrow M$: $L_a = (R^n, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum \alpha_i \vec{a}_i, M)$
⌈	Wir nennen L_a die <i>Linearkombinationsabbildung der Familie a</i> .
	Jeder Wert $L_a(\alpha) = \sum \alpha_i \vec{a}_i$ heißt
⌋	eine <i>Linearkombination der Vektoren der Familie a</i> .

(2.1.6) Mithin sind genau die Vektoren aus $BildL_a$ Linearkombinationen der Vektoren aus a . Die Abbildung L_a ist eine Abbildung zweier Moduln und damit erhebt sich die Frage nach eventueller Linearität.

(□.1) Betrachten Sie die Parametrisierung einer Ebene im V_0^3 . Beschreiben Sie diese Abbildung mit Hilfe einer geeigneten Linearkombinationsabbildung. (Achtung: die Frage lautet nicht: "..., daß die Parametrisierung **gleich** einer Linearkombinationsabbildung ist.")

(2.1.7) Im Falle $n = 0$ ist R^0 als **Nullraum** zu interpretieren. Also $R^0 = \{0\}$ und L bildet diese Null auf den Nullvektor ab. Für $n = 0$ ist daher $BildL = \{0\}$. Dies L ist natürlich injektiv **und trivialerweise linear**.

(2.1.8) Jetzt zum allgemeinen Fall. Inspektion des Diagramms zeigt, dass und weshalb Linearität vorliegt. Im Zweifelsfall muss der Leser Indizes anbringen und die Summen ausschreiben.



(2.1.9) Für das zweite Diagramm gilt Entsprechendes. Also:

Die **Linearkombinationsabbildung ist stets** (auch für $n = 0$) ein **Vektorraumhomomorphismus, also linear**.

(2.1.10) Nach der Typeinteilung der Abbildungen aus Kap. 1.2.6 ist L_a eine **Parametrisierungsabbildung**. Die Figur $BildL_a \subset M$ wird durch R^n parametrisiert! Die Beispiele verdeutlichen dies weiter: Eine Gerade wird durch \mathbb{R} parametrisiert, eine Ebene durch \mathbb{R}^2 usw.

(2.1.11) Beispiele. Dazu sind jeweils nacheinander festzulegen: Modul und Ring/ Familie a / Koeffizienten α :

1. $M = V_0^3$, $K = \mathbb{R}$ und $\vec{a}, \vec{b} \in V_0^3$ mit unterschiedlichen Richtungen. Wir bilden die Familie $a = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$. Dann ist beispielsweise $L_a(1, -1, 3) = \vec{a} - \vec{b} + 3(\vec{a} - \vec{b}) = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ eine Linearkombination der Familie.

Anders sieht es mit dem Vektor $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ aus. Sofern $\vec{d} \neq \vec{0}$ gilt, ist \vec{d} keine Linearkombination der Familie! (Begründung?).

Allgemein gilt $L_a(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} - \vec{b}) = (\alpha + \gamma)\vec{a} + (\beta - \gamma)\vec{b}$ für die Werte. Und als Abbildung:

$$L_a = (\mathbb{R}^3, (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} - \vec{b}), V_0^3).$$

Dies zeigt: L_a ist (in diesem Fall) nichts anderes als eine **nicht injektive** Parametrisierung der von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Ebene.

(□.2) Interpretieren Sie die folgende Gleichung zu dem gegebenen Beispiel:

$$L_a(\alpha, \beta, \gamma) = L_{(\vec{a}, \vec{b})}(\alpha + \gamma, \beta - \gamma).$$

2 $n = 1$ und $M = (\mathbb{Z}/(6))^2$ mit $R = \mathbb{Z}/(6)$. Wähle $b = ([3], [2])$ als einelementige Familie. Dann ist $L_b = ((\mathbb{Z}/(6))^1, \alpha \mapsto ([3\alpha], [2\alpha]), (\mathbb{Z}/(6))^2)$. Das ergibt die Parametrisierung eines sechselementigen Teilraumes aus $(\mathbb{Z}/(6))^2$. Wegen $L_b([5]) = ([3], [4])$ ist dieses Element $- ([3], [4])$ eine Linearkombination der Familie b .

4.2.2 Erzeugendensysteme, lineare Unabhängigkeit und Basen

(2.2.1) L_a ist stets linear. Aber wie steht es mit surjektiv und injektiv? **Diese Eigenschaften können, müssen aber nicht erfüllt sein.** Sind sie erfüllt, so hat das nützliche Konsequenzen.

(2.2.2) Daher definiert man wie folgt:

Sei	$a = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ eine endliche Familie von Vektoren aus dem Modul M mit $n \geq 1$ und $L_a : R^n \rightarrow M$ die zugehörige Linearkombinationsabbildung.
Dann	definiert man:
La/Lu:	Die Familie a heißt <i>linear unabhängig</i> , (genau) wenn L_a injektiv ist. Ist L_a nicht injektiv, heißt die Familie <i>linear abhängig</i> .
ES:	Die Familie a heißt <i>ein Erzeugendensystem</i> von M , (genau) wenn L_a surjektiv ist.
Basis:	Die Familie heißt <i>eine Basis</i> von M , (genau) wenn L_a bijektiv ist. $\text{Bild}L_a$ ist stets ein Teilraum von M , den man <i>den von a erzeugten Teilraum</i> nennt. a ist genau Erzeugendensystem, wenn $\text{Bild}L_a = M$ ist.

(2.2.3) Viele Einführungen in die Vektorrechnung verwenden nur "Linearkombination", um diese Begriffe einzuführen, selbst wenn vorher lang und breit injektiv, surjektiv usw. eingeführt ist. Dann muß man wie folgt (aber gleichwertig) formulieren:

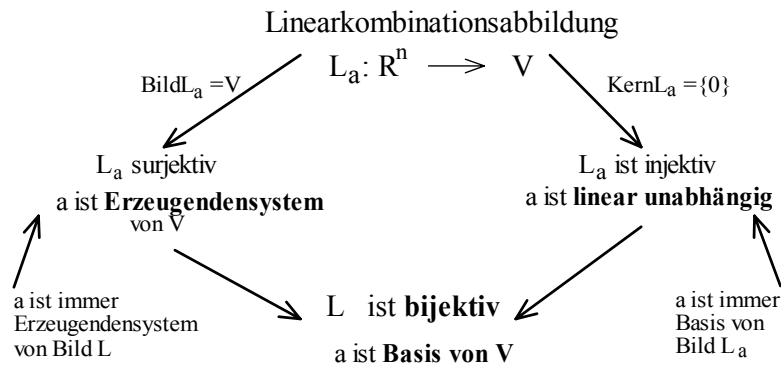
- "a ist linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor aus M auf höchstens eine Weise als Linearkombination der Vektoren aus a schreiben läßt."

Kann man irgendeinen Vektor auf mehr als eine Weise schreiben, so ist a linear abhängig.

- "a ist Erzeugendensystem von M, wenn sich jeder Vektor aus M auf mindestens eine Weise als Linearkombination der Vektoren aus a schreiben läßt"
- "a ist Basis von M, wenn sich jeder Vektor aus M auf genau eine Weise als Linearkombination der Vektoren aus a schreiben läßt"

Diese Formulierungen folgen unmittelbar aus der von uns gegebenen. Startet man mit der Formulierung aus (2.2.2), so kann man viele Resultate über lineare Abbildungen verwenden (L_a ist ja linear!), die man sonst wieder einzeln beweisen muß. .

(2.2.4) In graphischer Form können wir unsere Definitionen jetzt wie folgt zusammenstellen:



:

(2.2.5) Die leere Familie ($n = 0$) hat injektives L_a , ist also linear unabhängig. Sie erzeugt gerade den Nullraum. Wir folgern daher: Die leere Familie ist Basis des Nullraumes. Da die Werte von L_a als Linearkombinationen herauskommen sollen, ist unsere Vereinbarung von vorhin sinnvoll: Einzige Linearkombination der leeren Familie ist der Nullvektor. Ist a linear unabhängig, so ist a stets Basis des von a erzeugten Teilraumes $\text{Bild}(L_a)$.

4.2.2a Der rechnerische Umgang mit den Begriffen

(2.2.6) Der rechnerische Umgang und das Überprüfen von Familien hinsichtlich der eingeführten Begriffe geschieht am besten mit Hilfe der zu L gehörigen Gleichungen.

(2.2.7) D.h. man überprüft, wieviele Lösungen die Gleichung $L_a(\alpha) = \vec{b}$ für vorgegebenes $\vec{b} \in M$ hat. Das Resultat zeigt, ob a ein Erzeugendensystem, ein linear unabhängiges System von Vektoren oder eine Basis ist.

Da Injektivität von L_a wegen der Linearität von L_a bereits aus Kern $L = \{0\}$ folgt, entscheidet man linear abhängig / unabhängig, indem man die homogene Gleichung $L_a(\alpha) = 0$ behandelt und untersucht, ob sie nur die triviale oder auch noch weitere Lösungen besitzt.

(2.2.8) Das Lösen der entstehenden Gleichungen kann durchaus aufwendig sein. In der Regel und sofern irgendwie möglich, ist es vorzuziehen, die Entscheidung über **Inspektion** zu treffen, was meist durch Raten von Lösungen geschieht. (" $L_a(\alpha) = 0$ hat die folgende geratene nichttriviale Lösung..... Also ist a eine Familie **linear abhängiger** Vektoren.)

(□.1) Prüfen Sie nach, was Ihr Computeralgebrasystem an Leistungen aus (2.2.7) erbringt. Und für welche Arten von Vektoren.

(2.2.9) Beispiele. Denken Sie dabei an das zu Beginn in (2.2.11) Gesagte!

1. $a = ((1, 0), (0, 1), (3, 4))$ ist eine Familie von 3 Vektoren aus \mathbb{R}^2 . $L_a(\vec{\alpha}) = 0$ besagt $\alpha((1, 0) + \beta(0, 1) + \gamma(3, 4) = (0, 0)$. Das hat die folgende nicht triviale Lösung $\alpha = -3, \beta = -4, \gamma = 1$. **Also ist a linear abhängig.** $L_a(\vec{\alpha}) = (x, y)$ hat die Lösung $\alpha = x, \beta = y, \gamma = 0$. Die Abbildung ist **surjektiv**. Es liegt ein Erzeugendensystem, aber keine Basis vor.
2. Seien $s, c, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $s(x) = \sin x, c(x) = \cos(x)$ und $v(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$. Wir bilden die beiden Familien $\mathbf{a} = (s, c)$ und $\mathbf{b} = (s, c, v)$.

\mathbf{a} ist linear unabhängig. Beweis. Wann gilt

$$\alpha s + \beta c = (\mathbb{R}, x \mapsto \alpha \sin x + \beta \cos(x) = 0, \mathbb{R}) = \text{Nullfunktion?}$$

Die Zuordnungen muß für alle x den Wert Null ergeben. (x äußerer Parameter, α und β Unbestimmte.) Also $\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = 0$ für **alle** $x \in \mathbb{R}$. Wählt man $x = 0$, so folgt $\alpha = 0$. Wählt man $x = \frac{\pi}{2}$, so folgt $\beta = 0$. Also gibt es nur die triviale Lösung ($\alpha = \beta = 0$), und a ist linear unabhängig.

\mathbf{b} dagegen ist linear abhängig. Beweis. Hier ist die Gleichung $\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma \sin(x - \frac{\pi}{2}) = 0$ für **alle** x zu fordern. Anwenden des Additionstheorems für \sin zeigt aber, dass $v = c$ gilt. Also löst $\alpha = 0$ und $\gamma = -\beta$ für jedes β die Gleichung für jedes x . Wähle etwa $\beta = 1$.

- 3 Sei V irgendein Vektorraum und $a \in V$. Wir bilden die Familie $b = (a, a)$. Sie ist immer linear abhängig, da $1a + (-1)a = 0$ gilt. Wie steht es dagegen mit der einelementigen Familie (a) ? Die zu untersuchende Gleichung ist $\alpha a = 0$. Ist $a = 0$, gilt beispielsweise $1a = 0$. Also ist die einelementige Familie (0) immer linear abhängig! Ist $a \neq 0$, so folgt **im Vektorraum** aus $\alpha a = 0$ immer $\alpha = 0$. (Sonst mit α^{-1} multiplizieren!). Im Vektorraum ist also (a) mit $a \neq 0$ immer linear unabhängig. Im Modul muß das nicht sein. Dort ist $\alpha a = 0$ möglich, auch wenn beide Faktoren ungleich Null sind.

4.2.2b Die kanonische Basis von K^n .

(2.2.10) Jetzt ein wichtiges Beispiel einer Basis. Sei K Körper oder Ring. Dann haben wir für $n \geq 1$ dazu den Produktraum (Produktmodul) K^n gebildet. **Dieser Raum besitzt stets eine ausgezeichnete Basis.**

Wir erläutern die Konstruktion am Falle $n = 3$. Es gilt immer

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Setzt man $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ und $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ und $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, so ist die Familie $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ daher Erzeugendensystem von K . Aber sie ist auch linear unabhängig. Denn $(x, y, z) = 0$ gilt nur, wenn alle drei Komponenten Null sind.

Also ist e Basis von K^n . Entsprechendes gilt für alle anderen $n \geq 1$. Ist $n = 0$, so ist e die leere Familie und die ist Basis des Nullraumes.

(2.2.11) Man nennt die soeben eingeführte Basis $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ von K^n die *kanonische Basis von K^n* . Natürlich gibt es außer der kanonischen noch weitere Basen von K^n .

4.2.2c Die Schnittpunktsbedingung für Geraden

(2.2.12) Mit Hilfe des eingeführten Begriffssystems können wir die in (1.5.8-10) aufgeworfene Frage nach der Anzahl der Schnittpunkte zweier nicht paralleler Geraden in algebraischer Reinschrift formulieren und dabei auch sehen, wie das Resultat aussieht, das man zum Nachweis benötigt.

Das Problem bestand darin, dass die übliche Schnittmengenbestimmung von Geraden auf die Tupelform der Vektoren aus R^3 zurückgreift, und diese Form kommt in den Vektorraumaxiomen nicht vor. Zu untersuchen ist eine Bestimmungsgleichung (in α und β) der Form

$$\vec{a} + \alpha\vec{e} = \vec{b} + \beta\vec{f} \quad \text{oder} \quad \alpha\vec{e} + (-\beta)\vec{f} = \vec{D} \quad \text{mit} \quad \vec{D} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Mit unserem neuen Begriffssystem ist die Aufgabe ganz im Rahmen der Vektorrechnung formulierbar. Zunächst ist die Familie (\vec{e}, \vec{f}) linear unabhängig, da die beiden Geraden nicht parallel sein sollen, also ist die zugehörige Linearkombinationsabbildung injektiv.

(2.2.13) Bei einer Familie mit injektiver Linearkombinationsabbildung läßt sich jeder Vektor - insbesondere auch \vec{D} - auf höchstens eine Weise als Linearkombination darstellen. **Damit hat unsere Gleichung höchstens eine Lösung, und zwei nicht parallele Geraden im beliebigen Vektorraum haben höchstens einen Schnittpunkt.**

4.2.2d Unterschiede zum Zahlenrechnen

(2.2.14) Es liegt nahe, die wichtigen Unterschiede zwischen dem Rechnen mit Zahlen und dem mit Vektoren genauer herauszuarbeiten und zu verdeutlichen. Wir können sie jetzt zusammenstellen.

- **(2.2.15)** Für Zahlen (Körper-elemente) ist eine multiplikative Verknüpfung gegeben, die fast uneingeschränkte Division ($\neq 0$) erlaubt. Für Vektoren gibt es nichts Vergleichbares.
- **(2.2.16)** Bei Zahlen ist es nicht möglich, von einer Summe (ihrem Wert) auf die Summanden zu schließen. Bei Vektoren ist das immer dann möglich, wenn die Familie, aus der die Linearkombination gebildet wird, linear unabhängig ist. Denn dann sind ja die Koordinaten α_i des Urbildes eindeutig festgelegt. Das erklärt die große Bedeutung der linearen Unabhängigkeit, aber auch unsere Behauptung, dass dies eine gegenüber der Zahlrechnung neuartige Struktur sei.

4.2.3 Erzeugte Teilräume

(2.3.1) In der Definition (2.2.2) haben wir den Begriff des erzeugten Teilraumes eingeführt. Den Begriff "erzeugt" hatten wir bereits im Zusammenhang mit den Gruppen behandelt, wo er sich z.T. als recht unhandlich erweist. Mit Hilfe des Linearkombinationsbegriffs erhält er eine viel handhabbarere Form und wird zu einem wichtigen Hilfsmittel der linearen Algebra.

(2.3.2) Nach dem bei den Gruppen entwickelten Bezeichnungsverständnis sollte der von a erzeugte Teilraum der kleinste Teilraum sein, der die Vektoren der Familie a enthält. Ist das $\text{Bild}(L_a)$? Offensichtlich. Denn dieser kleinste Teilraum muss ja mindestens alle Linearkombinationen von a enthalten, wie das Teilraumkriterium zeigt. Andererseits besteht laut Konstruktion des Bildes der Teilraum $\text{Bild}(L_a)$ aber auch nur aus diesen Linearkombinationen.

(2.3.3) **Ergebnis:**

Der von a erzeugte Teilraum $\text{Bild}(L_a)$ besteht einerseits genau aus den Linearkombinationen der Vektoren von a und ist andererseits der kleinste Teilraum, der alle Vektoren von a enthält.

(2.3.4) Derartige erzeugte Teilräume erweisen sich in der linearen Algebra als wichtig. Entsprechend gibt es für sie auch eine Reihe weiterer Bezeichnungen. Statt von "erzeugtem Teilraum" spricht man vielfach von "aufgespanntem Teilraum". Ist $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, dann schreibt man statt $\text{Bild}(L_a) = \text{Bild}(L_{(a_1, \dots, a_n)})$ gerne $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Diese Schreibweise werden wir auch verwenden.

(2.3.5) Beispiel: Es sei $\vec{a}, \vec{b} \in V_0^3$ und (\vec{a}, \vec{b}) linear unabhängige Familie. Dann ist der erzeugte Teilraum $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ gleich der von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Ebene. Beachten Sie, dass "linear unabhängig" bewirkt, dass wirklich eine Ebene vorliegt. Überdies ist (\vec{a}, \vec{b}) eine Basis dieser Ebene, nicht aber des gesamten V_0^3 .

(□.1) Es seien \vec{a}, \vec{b} Vektoren aus V . Was lässt sich über den Wahrheitsgehalt der folgenden Gleichungen sagen: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$, $L_{(\vec{a}, \vec{b})} = L_{(\vec{b}, \vec{a})}$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$?

(2.3.6) Das Beispiel (2.3.5) zeigt, dass im erzeugten Teilraum sehr viel mehr Vektoren liegen können als in der erzeugenden Familie. Grob gesprochen enthält ja die von einem Vektor erzeugte Gerade genau so viele Elemente wie der Körper Elemente hat. Im Modulfall kann das erneut anders sein.

(2.3.7) Hieran schließt sich die folgende (wichtige) Definition an:

Definition: Ein Vektorraum heißt *endlichdimensional*, wenn es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

Eigentlich sollte man hier "endlich erzeugt" sagen, aber im Vektorraumfall wird sich zeigen, dass dann immer automatisch das gewichtigere "endlichdimensional" folgt.

(2.3.8) Beachten Sie: Gefordert wird, dass man eine endliche Familie findet, die Erzeugendensystem ist. Es kann und wird viele weitere Familien geben, die diese Eigenschaft **nicht** haben. Nur wenn es überhaupt keine derartige Familie gibt, liegt ein "unendlichdimensionaler" (d.h. nicht endlichdimensionaler) Vektorraum vor. Beachten Sie, dass in unseren Definitionen (2.2.2) und (2.3.7) unendliche Familien von Vektoren nicht zulässig sind. Auf diese Frage unendlicher Familien gehen wir nachfolgend ein.

4.2.4 Linearkombinationen unendlicher Familien

(2.4.1) Der Begriffsapparat, wie wir ihn bisher eingeführt haben, hat ein Defizit: Unsere Familien müssen alle endlich sein. Andererseits kommen durchaus Fälle vor, bei denen unendliche Familien von Vektoren zu behandeln sind. Nehmen wir etwa den Vektorraum \mathcal{P} der reellen Polynomabbildungen. Und darin die Familie $n \mapsto h_n$ aller homogenen Polynome. $h_n(x) = x^n$. Bildet diese Familie ein Erzeugendensystem? Oder eine Familie linear unabhängiger Vektoren? Nach unseren bisherigen Definitionen sind diese Fragen rein formal nicht korrekt zu stellen.

(2.4.2) Der Formalismus lässt sich zum Glück verallgemeinern. Dazu müssen wir zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen zurückkehren: Dem vektoriellen Rechenausdruck für die Linearkombination $\sum \alpha_i \vec{a}_i$. Wie sah diese Bildung aus:

Man nahm die Vektoren der Familie her, multiplizierte jeden von ihnen mit einem (zugehörigen) Skalar und addierte alles. Infolge der Vektorraumaxiome ergab dies immer einen wohlbestimmten Vektor.

(2.4.3) Aber die Konstruktion klappt nicht mehr, sobald man unendlich viele Vektoren \vec{a}_i hat. Denn dann müsste man auch unendlich viele $\alpha_i \vec{a}_i$ - also Vektoren - addieren, und das ist im Rahmen der Algebra nicht möglich.

(2.4.4) Man findet auch keinen sinnvollen Weg, derartige Summen rein algebraisch einzuführen, sieht man von einer Ausnahme ab, die vielleicht zunächst etwas uninteressant und banal erscheint, uns aber hier rettet: Nullvektoren kann man natürlich beliebig viele hinzuaddieren, ohne dass sich am Resultat etwas ändert. Und wir können vereinbaren, dass auch unendlich viele Nullen hinzugefügt werden dürfen. Dann wird $\sum \alpha_i \vec{a}_i$ aber immer dann definiert, wenn es unter den Skalaren α_i nur endlich viele gibt, die von Null verschieden sind. In der Sprechweise der Analysis: Fast alle α_i sind Null.

(2.4.5) Und damit sind wir am rettenden Ufer! Wir wissen aus 4.1.6b: Bei unendlich vielen Summanden (d.h. unendlicher Indexmenge I) sollte man Familien immer als Elemente von $\mathcal{F}(I, R)$ interpretieren. (Anstelle von R^n). Und dieser Raum besitzt den Teilraum $\mathcal{E}(I, R)$, der aus allen Familien besteht, die nur endlich viele von Null verschiedene Werte besitzen (also endlichen Träger haben). Wir ersetzen also nacheinander R^n durch das isomorphe $\mathcal{F}(I, R)$ und das durch den Teilraum $\mathcal{E}(I, R)$. Ist die Indexmenge I endlich, so wissen wir, dass alle diese Räume isomorph sind.

(2.4.6) Im unendlichen Fall müssen wir den letzten Raum wählen und verallgemeinern dann die Linearkombinationsabbildung wie folgt

Sei	I eine Indexmenge und $a \in \mathcal{F}(I, M)$ eine endliche oder unendliche Familie von Vektoren.
Dann	ist die <i>Linearkombinationsabbildung</i> L_a definiert durch
	$L_a = (\mathcal{E}(I, R), (\alpha_i) \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i \vec{a}_i, M)$

(2.4.7) Damit ist alles in Ordnung. Die Summen sind wieder sinnvoll, da höchstens endlich viele Summanden von Null verschieden sind. Alle weiteren Überlegungen, insbesondere die Einführung der Begriffe lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem und Basis ebenso wie erzeugter Teilraum können übernommen werden. Nur beim Lösen der Gleichungen $L_a(\alpha) = \vec{b}$ ist sorgfältig darauf zu achten, dass nur α aus $\mathcal{E}(I, R)$ (mit endlichem Träger) zulässig sind.

(2.4.8) Beispiel: $h = (h_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei die unendliche Familie der homogenen Polynome. Dann hat man $L_h = (\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), (\alpha_i) \mapsto \sum_i \alpha_i h_i, \mathcal{P})$. Jede Linearkombination ist ein Polynom und umgekehrt gilt auch $\mathcal{P} = \text{Bild}(L_h)$. D.h. h ist ein Erzeugendensystem von \mathcal{P} . L_h ist auch injektiv: Denn wann ist $L_h(\alpha) = \sum \alpha_i h_i$ das Nullpolynom? Nur dann, wenn alle α_i gleich Null sind. **D.h. aber, h ist sogar eine Basis von \mathcal{P} .**

(2.4.9) Die Konstruktion mit dem endlichen Träger ist sinnvoll. Die Vektorverknüpfungen werden meist benutzt, um gewisse Operationen unserer Erfahrungswelt zu formalisieren. Man denke an das klassische Parallelogramm der Kräfte. Unsere üblichen Erfahrungen erfassen immer nur endlich viele Operationen, auch wenn man die Zutaten aus unendlichen Mengen auswählen kann. Und genau dieses - endlich viele Summanden - sichert die Einschränkung auf Familien mit endlichem Träger.

4.3 Die Struktur der endlichdimensionalen Vektorräume

4.3.0 Vorbemerkung

(3.0.1) Bisher haben wir die vektortypischen Begriffe nur eingeführt, nicht aber gezeigt, was sie zu leisten vermögen. Jetzt wollen wir sie dazu verwenden, die Struktur aller endlichdimensionalen Vektorräume weitgehend aufzuklären.

(3.0.2) Die Strukturfrage umfaßt vorwiegend die folgenden beiden Probleme:

- **Klassifikation:** Was für Vektorräume gibt es überhaupt (bis auf Isomorphie?)
- **Rekursive Konstruktion:** Kann man alle Vektorräume aus einfachen Bausteinen nach einem definierten Verfahren aufbauen?

(3.0.3) Die entsprechenden Fragen für Gruppen - auch die endlichen - erweisen sich als außerordentlich schwierig. Für Vektorräume lassen sie sich relativ leicht und vollständig beantworten, wobei wir uns auf den endlichdimensionalen Fall beschränken.

(3.0.4) Die Resultate sind wichtig, weil sie einerseits sicherstellen, dass die üblichen Methoden der Vektorrechnung in all diesen Fällen tatsächlich korrekt sind, und andererseits, weil sie einem viele Hinweise geben, wie man in komplizierteren Fällen vorzugehen hat, wenn die üblichen Ansätze versagen. Hierzu gehören eine Reihe von Fragen aus dem Bereich der analytischen Geometrie.

(3.0.5) Genauer werden wir zeigen, dass (im endlichdimensionalen Fall) alle Basen eines gegebenen Vektorraumes ein und dieselbe Elementzahl besitzen. Damit ist die Anzahl der Vektoren irgendeiner Basis ein wichtiges Merkmal des Vektorraums, seine Dimension. Der Dimensionsbegriff ist wohldefiniert, unabhängig von der Vertreterwahl. Ja, es gilt sogar: Zwei Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension besitzen. Damit ist die Klassifikationsfrage beantwortet.

(3.0.6) Was die Konstruktion angeht, so werden wir ein Verfahren angeben, das aus zwei gegebenen Räumen einen neuen mit höherer Dimension konstruiert und es erlaubt, alle endlichdimensionalen Räume aus eindimensionalen unzerlegbaren Bestandteilen aufzubauen.

(3.0.7) Ein Reihe von Zwischenresultaten erweist sich als wichtiges Handwerkszeug der Vektorrechnung. Insbesondere ist hier der Basisergänzungssatz zu nennen. Nachfolgend geht es darum, die soeben formulierten Resultate streng zu beweisen.

4.3.1 Vorbereitende Charakterisierungssätze

(3.1.1) In diesem Abschnitt sei V stets Linksvektorraum über einem Körper K . Überdies sei V endlichdimensional im eingeführten Sinn: D.h. V besitzt wenigstens ein Erzeugendensystem mit endlich vielen Elementen. Ist $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ dieses System, so ist $L_b : K^n \rightarrow V$ definitionsgemäß ein **surjektiver** Vektorraumhomomorphismus. Das dürfen wir voraussetzen.

(3.1.2) Wir beginnen damit, eine Charakterisierung von linear abhängig und linear unabhängig für Vektorräume zu geben. Als Konsequenz kann man in Vektorräumen - nicht in beliebigen Moduln! - die den Begriff konstituierenden Eigenschaften durch andere ersetzen, die vielfach besser zu handhaben sind.

(3.1.3)

Hilfssatz	<i>Charakterisierung von linear abhängig für Vektorräume</i>
Sei	V Vektorraum über K und $a = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N) \in V^N$ mit $N > 0$.
Dann	ist a genau dann linear abhängig, wenn man einen Vektor der Familie durch die übrigen (als Linearkombination der Restfamilie) ausdrücken kann.

(3.1.4) Konkretisierungsbeispiel: Sei $N = 1$, also $a = (\vec{a}_1)$. Linear abhängig heißt hier $\vec{a}_1 = \vec{0}$. Die Restfamilie ist leer. Wir haben aber vereinbart: $\sum_{i \in \emptyset} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}$. Also ist $\vec{a}_1 = \vec{0}$ durch die Restfamilie ausdrückbar. Das geht in beide Richtungen ("genau").

Für $N = 2$ haben wir $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$. Ein α muß ungleich Null sein. Etwa α_1 . Dann können wir aber nach \vec{a}_1 auflösen: $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{a}_2$ und haben somit \vec{a}_1 als Linearkombination der Restfamilie dargestellt. Das geht erneut auch in die andere Richtung.

(3.1.5) In Moduln gilt diese Charakterisierung nicht allgemein. Nehmen wir $\mathbb{Z}^1 \times \mathbb{Z}^1$ über \mathbb{Z} . Wir haben $2(3,6) + (-3)(2,4) = (0,0)$. Wie es der geometrischen Erwartung entspricht, bilden $(2,4)$ und $(3,6)$ eine linear abhängige Familie. Da aber weder $2/3$ noch $3/2$ Element von \mathbb{Z} ist, kann man keinen der beiden Vektoren durch den anderen ausdrücken.

(3.1.6) Zur Bedeutung des Resultates (3.1.3): Angenommen man hat eine Größe, die man mit Hilfe der Vektoren der Familie a ausdrücken kann: $s = s(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N)$ Falls a abhängig ist, kann man jetzt einen dieser Vektoren - sagen wir \vec{a}_N als Linearkombination der übrigen schreiben, \vec{a}_N wird damit zu einer **Hilfsgröße, die man bei Bedarf eliminieren kann**.

Das erklärt den folgenden verbreiteten Sprachgebrauch: Statt " \vec{b} ist Linearkombination der Familie a " sagt man " \vec{b} ist linear abhängig von a ". Oder gar: " \vec{b} ist linear abhängig von den Vektoren von a ". Ohne genaues Verständnis des Begriffs der abhängige Familie ist das ein irreführender und gefährlicher Sprachgebrauch. Besser wäre: " \vec{b} ist erzeugbar durch a ".

(3.1.7) Beispiel: $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, 0, 1)$ und $\vec{c} = (3, 2, 2)$. Man betrachte die Parametrisierung

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

Wegen $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ist \vec{c} überflüssig. Man hat $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha + \gamma) \vec{a} + (\beta + \gamma) \vec{b}$. Es liegt eine nicht injektive Parametrisierung einer Ebene vor, die den von der Familie $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ erzeugten Teilraum bildet.

(3.1.8) **Beweis des Hilfssatzes:** Wir verwenden die Tunnelmethode, führen in i) und ii) zunächst die Tunnelleingänge sorgfältig aus und suchen dann in iii) gezielt das Verbindungsstück.

- i) Sei a linear abhängig. D.h. L_a ist nicht injektiv, hat einen nichttrivialen Kern. Sei etwa $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ aus diesem Kern, so dass $\sum \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}$ gilt, wobei nicht alle α_i Null sein dürfen. Wähle m mit $\alpha_m \neq 0$. D.h.

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m + \dots + \alpha_N \vec{a}_N = \vec{0} \quad \text{mit } \alpha_m \neq 0 \quad (*)$$

- ii) Ein Vektor- sagen wir \vec{a}_m - sei als Linearkombination der Restfamilie schreibbar. D.h.

$$\vec{a}_m = \beta_1 \vec{a}_1 + \dots + \widehat{\beta_m \vec{a}_m} + \dots + \beta_N \vec{a}_N. \quad (**)$$

Das Zeichen $\widehat{\dots}$ besagt, daß der zugehörige Summand auszulassen ist.

- iii) Die Verbindung der Tunnelhälften verlangt keine große Idee mehr. Man löst in (*) nach a auf und erhält (**). Ausführung: In jedem Modul ist (*) gleichwertig zu

$$\alpha_m \vec{a}_m = -\alpha_1 \vec{a}_1 - \dots - \widehat{m} - \dots - \alpha_N \vec{a}_N$$

Da V Vektorraum ist, existiert zu $\alpha_m \neq 0$ das inverse Element α_m^{-1} . Multipliziert man beide Seiten der Gleichung von links mit diesem Element, folgt wieder mit den Modulaxiomen und $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$:

$$\vec{a}_m = -(\alpha_m^{-1} \alpha_1) \vec{a}_1 - \dots - \widehat{m} - \dots - (\alpha_m^{-1} \alpha_N) \vec{a}_N$$

Das ist aber gerade (**). Auch im Falle $N = 1$ ergibt sich die korrekte Gleichung $\vec{a}_m = \vec{0}$. Die Restfamilie ist ja die leere Familie. Umgekehrt folgt aus (**) sofort

$$\beta_1 \vec{a}_1 + \dots + (-1) \vec{a}_m + \dots + \beta_N \vec{a}_N = \vec{0}.$$

Da nun in jedem Körper $(-1) \neq 0$ ist, folgt (*).

(3.1.9) Große Teile des Beweises sind reine Routine. In einem mathematischen Text wird man ihn daher in der Regel stark verkürzen. Wir geben unten in (3.1.12) eine solche verkürzte Formulierung, mit der wir zugleich noch etwas mehr beweisen werden.

(3.1.10) Diskussion des Beweises: Der Beweis ist weitgehend konstruktiv, bis auf eine Stelle, wo der spezielle Indexwert m ausgewählt wird. "Wähle ein m , so daß $\alpha_m \neq 0$ gilt". Ist beispielsweise $(\alpha_j) = (0, 1, 3, 0, 4, 0, 0)$, so könnte man $m = 2, 3$ oder 5 wählen. Für jeden dieser Werte klappt der Beweis. **Kann man durch Präzisierung der Wahl vielleicht ein besseres Resultat erzielen?** $m = 2$ und $m = 5$ liegen nahe. Nehmen wir den letzten Fall, der allgemein so zu formulieren ist: $m \in I$ mit $\alpha_m \neq 0$, aber $\alpha_j = 0$ für $j > m$, $j \in I$. (Oder: m ist der größte zulässige Index j , für den α_j ungleich Null ist).

(3.1.11) Für das so gewählte m liefert unser Beweis die folgende :

Verschärfung von Hilfssatz (3.1.3): Voraussetzungen wie oben. Dann ist a genau dann linear abhängig, wenn man ein a_m als Linearkombination der (in der Familie) **vorangegangenen** a_j schreiben kann. (Also $j < m$).

(3.1.12) Beweis (komprimierte Version): Sei a linear abhängig. Dann gibt es $\alpha_i \in K$, so dass $\sum \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}$, aber nicht alle $\alpha_i = 0$. Wähle m maximal, so dass $\alpha_m \neq 0$ gilt. Da K Körper ist, kann man nach a_m auflösen und erhält die erwünschte Darstellung durch die vorangegangenen Vektoren. Die andere Richtung ist trivial.

(3.1.13) Bisher haben wir den Hilfssatz für endliche Familien formuliert und bewiesen. Geht es auch für unendliche Familien (von Vektoren)? Wir betrachten nur die ursprüngliche Version, bei der Verschärfung gibt es Probleme.

(3.1.14) Geht man den Beweis durch, so muss man Punkt i) des Beweises geeignet an die neue Situation anpassen:

Sei $\alpha = (I, i \mapsto \alpha_i, K) \in \text{Kern} L_a \subset \mathcal{E}(I, K)$ nicht trivial. D.h. $T(\alpha) = \{i | \alpha_i \neq 0\}$ ist endlich, aber nicht leer. **Sei** weiter $\alpha_m \in T(\alpha)$. **Dann** gilt:

$$\sum_{i \in T(\alpha)} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0} \quad \text{mit } \alpha_m \neq 0.$$

(3.1.15) Der weitere Beweis kann übernommen werden. Bei einer beliebigen Indexmenge I muß $T(\alpha)$ natürlich kein größtes Element enthalten. Daher kann man die Verschärfung nicht ohne weiteres verallgemeinern. Andererseits haben wir nie das Kommutativgesetz für K benutzt. Daher gilt der Beweis auch für nicht kommutative Körper.

(3.1.16) Nun die angekündigte zweite Charakterisierung:

Hilfssatz : **Charakterisierung von linearer Unabhängigkeit in Vektorräumen:**
Sei V Vektorraum über dem Körper K und $a \in \mathcal{F}(I, V)$ eine Familie von Vektoren.
Dann ist a genau dann linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor $v \in V$ auf höchstens eine Weise als Linearkombination der Familie a schreiben läßt.
Oder gleichwertig: Jeder Vektor aus dem von a erzeugten Teilraum $\text{Bild}(L_a)$ läßt sich auf genau eine Weise als Linearkombination der Familie a schreiben.

(3.1.17) Der Beweis ist trivial, wenn man an die Bedeutung von linear unabhängig denkt. Der Leser überlege selbst, ob der Hilfssatz auch für Moduln gilt.

4.3.2 Die Basen eines endlichdimensionalen Vektorraumes

(3.2.1) Jetzt wollen wir uns den Objekten unseres eigentlichen Interesses zuwenden, den Basen von V . Basen sind Familien von Vektoren mit optimalen Eigenschaften:

- Jeder Vektor ist als Linearkombination darstellbar. Und diese Darstellung ist eindeutig.
- Hat man eine Basis b , so kann man das zugehörige L_b , bilden und hat damit ganz V . Falls b endlich viele Elemente enthält, liefert die Kenntnis dieser endlichen Anzahl von Vektoren einem mithin alle Vektoren aus V . Oder auch: Das zugehörige L_a liefert eine bijektive Darstellung von K^n in V .

(3.2.2) **Aber gibt es überhaupt in jedem Fall Basen?** Denkbar wäre ja z.B. ein Vektorraum, in dem jedes Erzeugendensystem automatisch linear abhängig ist. Und wenn es Basen gibt, wie erhält man Familien mit dieser Eigenschaft? Der folgende Satz beantwortet beide Fragen, sofern V ein endliches Erzeugendensystem besitzt. Dieser Satz erweist sich überdies als überaus nützliches Hilfsmittel für die Arbeit mit Vektorräumen.

(3.2.3) **Der Basisergänzungssatz:**

Sei V Vektorraum über K und $x = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ ein endliches Erzeugendensystem von V . Weiter sei $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren aus V .
Dann kann man y mit geeigneten Vektoren des Erzeugendensystems zu einer Basis $(y_1, y_2, \dots, y_k, x_j, \dots, x_r)$ ergänzen.

(3.2.4) Wichtig ist hier die Existenzaussage "man kann...". D.h. eine solche Ergänzung ist unter den getroffenen Annahmen stets möglich und liefert eine Basis der gewünschten Form. Die typische Anwendung sieht wie folgt aus:

"..... Daher gibt es laut Basisergänzungssatz eine Basis von V mit den Eigenschaften.....", und mit dieser Basis argumentiert man dann weiter.

(3.2.5) Wieder gilt der Satz für Moduln keineswegs. Wir nehmen beispielsweise $\mathbb{Z}^1 \times \mathbb{Z}^1$ über \mathbb{Z} . Und darin den Vektor $(2, 4)$. Die daraus bestehende Familie ist offenbar unabhängig. Aber man kann sie nicht zu einer Basis ergänzen. Das überlegen wir uns wie folgt:

1. Drei Vektoren bilden immer eine abhängige Familie in $\mathbb{Z}^1 \times \mathbb{Z}^1$. (Etwa: $m(a, b) + n(c, d) + q(e, f) = (0, 0)$ wird durch $m = cf - de$, $n = be - af$ und $q = ad - bc$ gelöst, es sei denn $m=n=q=0$. Ist dann etwa $a \neq 0$, dann gibt $m=-e$, $n=0$ und $q=a \neq 0$ eine nicht triviale Linearkombination.).
2. Daher kommt als Basis nur die Ergänzung durch einen zweiten Vektor (x, y) in Frage.

3. Dann müßte man mit $(2, 4)$ und (x, y) auch $(1, 2)$ darstellen können. Etwa $(1, 2) = m(2, 4) + n(x, y)$. Es folgt $n(x, y) = (2m - 1)(1, 2)$. D.h. aber, daß man nur die von $(1, 2)$ erzeugte Gerade, nicht aber den gesamten Raum erhält. Man kann den Vektor $(2, 4)$ in keiner Weise zu einer Basis ergänzen.

(3.2.6) Beweis des Basisergänzungssatzes: Ist $N = 0$, so ist die leere Familie (einziges) Erzeugendensystem. Man erhält den Nullraum und die leere Familie ist bereits Basis. Also dürfen wir $N > 0$ annehmen.

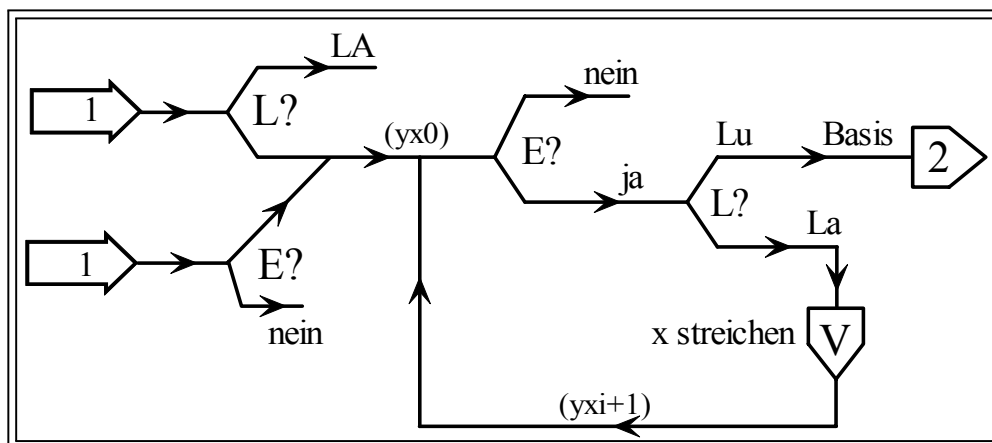
Betrachte die Vektorfamilie $(yx0) = (y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_N)$. Beachten Sie : Diese Gleichung führt eine ungewöhnliche Bezeichnung für eine Familie ein! $(yx0)$ ist jetzt Hilfsgröße!

$(yx0)$ ist ein Erzeugendensystem, da x das bereits ist. Die Familie ist nun entweder linear unabhängig, und dann haben wir die gewünschte Basis, oder sie ist linear abhängig.

$(yx0)$ ist entweder Basis oder (Erzeugendensystem und linear abhängig). Im zweiten Fall streichen wir in $(yx0)$ den ersten auftretenden Vektor, der sich durch seine Vorgänger ausdrücken läßt. Nach (3.1.11) gibt es einen solchen Vektor. Und es muß ein x sein, da y linear unabhängig ist. Die neue Familie $(yx1)$ ist immer noch Erzeugendensystem, da der fortgelassene Vektor ja durch die restlichen ausdrückbar ist. Die neue Familie $(yx1)$ hat mithin dieselben Eigenschaften wie $(yx0)$, aber ein Element weniger. Formal gilt $Bild(L_{(yx0)}) = Bild(L_{(yx1)})$.

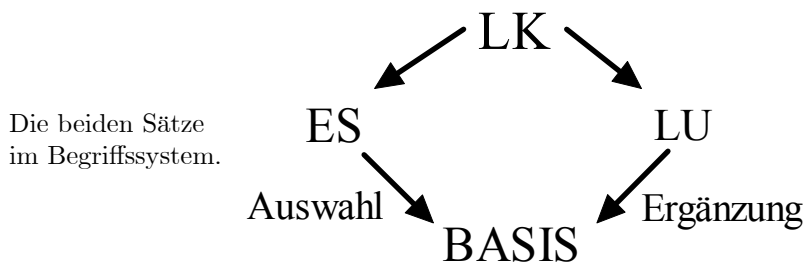
Man wiederholt diese Streichprozedur so lange, bis man ein unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis bekommt. Da sich die Zahl der Vektoren stets um 1 verringert, muß das spätestens dann der Fall sein, wenn alle x gestrichen sind.

(3.2.7) Der Beweis läßt sich prozedural darstellen und so besonders gut verstehen:



Man beginnt bei 1 und landet notwendig nach endlich vielen Schritten bei Punkt 2,

(3.2.8) Der Basisergänzungssatz sagt, daß man eine unabhängige Familie stets zu einer Basis vervollständigen kann. Aber es geht auch anders herum: Hat man ein Erzeugendensystem, so kann man darin solange Vektoren streichen, bis eine Basis übrigbleibt. Oder: Man kann eine Teilfamilie auswählen, die eine Basis bildet.



(3.2.9) Der Beweis des zugehörigen Satzes - des Basisauswahlsatzes - verwendet erneut obiges Verlaufsdiagramm. Man muß als Eingabefamilie x das vorgegebene Erzeugendensystem nehmen. Für y nimmt man die leere Familie, die ja linear unabhängig ist.

(3.2.10) Basisauswahlsatz:

Sei V Vektorraum über K und a ein endliches Erzeugendensystem von V .
Dann ist V endlichdimensional, und man kann eine Teilfamilie
von a auswählen, die eine Basis von V bildet.

(3.2.11) Mit Hilfe des Basisergänzungssatzes argumentieren wir jetzt wie folgt: V besitze ein endliches Erzeugendensystem. Dann ist die leere Familie linear unabhängig. Also kann man sie zu einer Basis ergänzen. D.h. aber

(3.2.12) Existenz einer Basis

Sei V Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem.
Dann gibt es in V eine Basis mit endlich vielen Elementen.

4.3.3 Die Dimension

(3.3.1) Die Existenz von Basen ist mithin gesichert. Wie steht es mit ihren Eigenschaften? Wir kommen zu dem Resultat, auf das wir eigentlich hinaus wollen:

(3.3.2) Satz über die Invarianz der Dimension.

Sei V Vektorraum über K mit endlichem Erzeugendensystem.
Dann enthalten alle Basen von V dieselbe Anzahl von Elementen.

(3.3.3) Der Beweis folgt sofort mit Hilfe des folgenden, mehr technischen Hilfssatzes:

(3.3.4) Hilfssatz :

Sei V Vektorraum und (x_1, \dots, x_n) ein Erzeugendensystem von V .
Weiter sei (y_1, \dots, y_m) linear unabhängig. Dann gilt $m \leq n$.

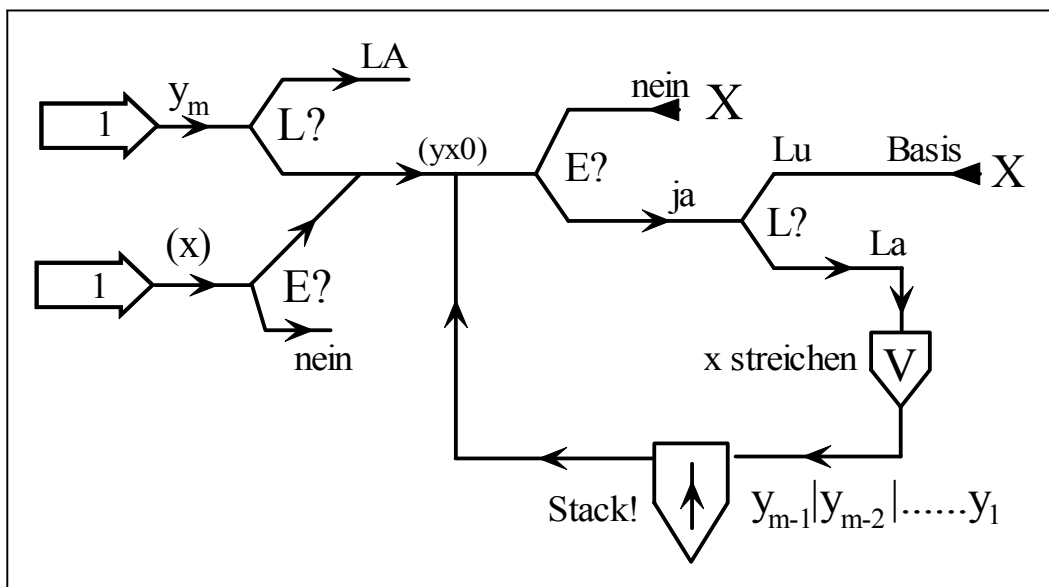
D.h. ein Erzeugendensystem enthält mindestens so viele Vektoren wie jedes System linear unabhängiger Vektoren.

(3.3.5) -Wie folgt (3.3.2) aus dem Hilfssatz? Sind beide Basen endlich, d.h. beide sind sowohl Erzeugendensystem als auch linear unabhängig, so folgt einerseits $n \leq m$, andererseits $m \leq n$, also $n = m$. Unendliche Basen kann es nicht geben, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt. Sonst könnte man eine endliche Teilfamilie dieser Basis wählen mit mehr Elementen als das Erzeugendensystem besitzt. Da die Teilfamilie (der Basis) linear unabhängig bleibt, hätte man einen Widerspruch zum Hilfssatz: Eine unabhängige Familie mit mehr Elementen als ein Erzeugendensystem.

Damit ist der Invarianzsatz bewiesen.

(3.3.6) Wie steht es mit dem Hilfssatz? Wir benutzen zum Beweis erneut unser Prozedurverfahren in

einer geeigneten Abwandlung.



Die Familie, mit der man startet, ist jetzt $(y_m, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Wieder wird bei V der erste durch die Vorgänger ausdrückbare Vektor gestrichen. An der Stelle S ("Stack") wird jeweils der nächste Vektor aus der y -Familie davorgestellt. D.h. z.B. $(yx1) = (y_{m-1}, y_m, \dots, x_1, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n)$. Bei jedem Lauf wird ein x gestrichen und dafür ein y hinzugefügt. Die neue Folge ist erneut Erzeugendensystem, weil sie es vor S bereits ist. Sie ist linear abhängig, weil bei S ein zusätzlicher Vektor hinzugefügt wird.

Mithin bleibt man notwendig im Kreislauf. Immer muß ein x gestrichen werden, weil die y unabhängig sind. Nach $m - 1$ Durchgängen sind alle y hinzugefügt und $n - m + 1$ der x gestrichen. Wäre $n < m$, d.h. $n \leq m - 1$, so wären **alle** x bereits gestrichen und die y abhängig entgegen der Voraussetzung. Also ist $n \geq m$ wie behauptet.

(3.3.7) Damit sind wir am Ziel: **Es gibt Basen, und sie haben alle dieselbe Anzahl von Elementen.** Die folgende Definition ist zulässig: (Der gesamte Aufwand war nötig, um dieses zulässig = wohldefiniert zu rechtfertigen!)

(3.3.8) Definition:

Sei V ein Vektorraum über K mit endlichem Erzeugendensystem.
 Ein solcher Vektorraum heißt **dann** endlichdimensional, und die Anzahl n der Vektoren einer Basis von V heißt die *Dimension von V* . Symbolisch: $\dim_K V = n$.
 Alle anderen Vektorräume heißen unendlichdimensional, was wir auch $\dim_K V = \infty$ schreiben.

Beispiele:

$$\begin{aligned} \dim_K \{0\} &= 0 & \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n &= n \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P} &= \infty & (h_n) &\text{ ist unendliche Basis} \end{aligned}$$

(3.3.9) Beachten Sie: Gilt $\dim_K V = n$, und kennt man eine Basis b , so benötigt man zur quantitativen Festlegung eines beliebigen Vektors $\vec{x} \in V$ genau n Skalare, nämlich die "Komponenten" α_i , für die $L_b(\alpha) = \sum \alpha_i \vec{b}_i = \vec{x}$ gilt. Das bedeutet eine enorme Vereinfachung. Wir können vom Vektor auf seine Komponenten schließen.

(3.3.10) Wie findet man üblicherweise die Dimension eines Vektorraumes? Nun man verschafft sich **irgendeine** Basis und zählt deren Elemente ab.

(3.3.11) Beispiel: Sei V Vektorraum der Dimension n und W Vektorraum der Dimension m über demselben Körper K . Dann können wir den Produktraum $V \times W$ bilden. Welche Dimension hat dieser Raum?

Beispiel $V^3 \times V^3$. Dieser Raum ist $3 + 3 = 6$ -dimensional. Warum 6 und nicht $3 \times 3 = 9$?

Es sei allgemein $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_m)$ je eine Basis von V bzw. W . Dann gilt $v = \sum v_r a_r$ und $w = \sum w_j b_j$ für jedes $v \in V$ und $w \in W$. Wortüber jeweils summiert wird, ist aus dem Kontext klar.

r läuft von 1 bis n und j von 1 bis m . Damit folgt für das allgemeine Element $(v, w) \in V \times W$ folgende Darstellung:

$$(v, w) = (v, 0) + (0, w) = \sum v_r(a_r, 0) + \sum w_j(0, b_j)$$

Ganz am Ende steht eine Linearkombination von Vektoren aus $V \times W$. Die zugehörige Familie ist offensichtlich linear unabhängig: da $(v, w) = 0$ nur für $v = w = 0$ gilt und das bedeutet $v_r = 0$ und $w_j = 0$ für alle Fälle.

(3.3.12) Also ist die Familie $((a_1, 0), \dots, (a_n, 0), (0, b_1), \dots, (0, b_m))$ eine Basis von $V \times W$, und die Dimension dieses Raumes ist $\dim V + \dim W$. (Summe, nicht Produkt)

4.3.4 Die Klassifikation

(3.4.1) Jetzt können wir das Klassifikationsproblem für Vektorräume abschließen.

Satz: Sei V endlichdimensionaler Vektorraum über K der Dimension n .
Dann ist V isomorph zu K^n über K .

Die Linearkombinationsabbildung jeder Basis vermittelt ja einen derartigen Isomorphismus. Insbesondere haben isomorphe Räume immer dieselbe Dimension.

(3.4.2) Es liegt nahe, zu fragen, wieso man außer K^n überhaupt noch andere Vektorräume (der Dimension n) betrachtet. Mathematisch sind sie ja alle isomorph. Die Unterscheidung wird deshalb erforderlich, weil man solchen Vektorräumen besonders auch in der Physik noch **zusätzliche Strukturen und Interpretationen** gibt und es dann in der Regel keinen ausgezeichneten kanonischen Isomorphismus gibt, mit dessen Hilfe man beide Räume identifizieren könnte. Stattdessen hat man viele irgendwie gleichwertige Basen, die alle zu unterschiedlichen Isomorphismen führen. Wählt man einen zum Zweck der Identifikation, so zerstört man die inhaltlich bedeutsame demokratische Gleichwertigkeit. Stattdessen arbeitet man mit Darstellungsabbildungen. K^n wird in dem eventuell reicher strukturierten Raum V nur dargestellt, etwa durch eine Linearkombinationsabbildung.

(3.4.3) Wie steht es mit dem ausgenommenen, aber vorkommenden Fall der unendlichdimensionalen Vektorräume? Man kann mit nicht konstruktiven Methoden (Auswahlaxiom in der Form von Zorns Lemma) zeigen, dass es auch hier Basen gibt, und erwartungsgemäß erweisen sich alle Basen als gleichmächtig.

(3.4.4) Vektorräume, bei denen die zugehörigen Basen die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen besitzen, sind noch herausgehoben. Man nennt sie Vektorräume mit abzählbarer Dimension. Der Raum der reellen Polynomabbildungen \mathcal{P} gehört hierzu. In einem solchen Raum kann man jede Basis als Folge $(\mathbb{N}, n \mapsto \vec{b}_n, V)$ schreiben. Und solche Folgen kann man vielfach noch mit einfachen Methoden konstruieren. Vektorräume, deren Basen überabzählbar viele Elemente haben, sind meist schlechter zugänglich. Man benötigt zu ihrer Beherrschung in der Regel noch topologische Strukturen, nicht nur rein algebraische.

(3.4.5) Abschließend ein Beispiel eines Raumes mit überabzählbarer Dimension.

Man betrachte den Raum \mathbb{R}^1 . Als Operatorbereich wähle man aber nicht \mathbb{R} , sondern nur den Unterkörper \mathbb{Q} . D.h. die Multiplikation mit den Skalaren ist die Restriktion auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Das macht aus \mathbb{R}^1 offensichtlich einen Vektorraum über \mathbb{Q} . Wann sind Vektoren (= reelle Zahlen) linear abhängig? Sind z.B. π und e linear abhängig? Dann müßte es rationale Zahlen p und q geben mit $p\pi + qe = 0$. Solche Fragen sind konkret sehr schwer zu entscheiden. Eine Basis muß aus überabzählbar vielen solcher rational voneinander unabhängiger reeller Zahlen bestehen. Sie ist konstruktiv jedoch nicht zugänglich.

4.3.5 Wichtige Denkfiguren der Vektorrechnung

(3.5.1) Wir können jetzt eine Reihe von Denkfiguren begründen oder beweisen, die man in der Vektorrechnung einsetzt, besonders auch in Beweisen. Einige von ihnen wie der Koeffizientenvergleich - sind **charakteristisch für das Rechnen mit Vektoren**, zeigen an, in welcher Denkrichtung vektortypische Problemlösungen liegen.

- **(3.5.2)** Sei $\dim_K V = n < \infty$. Dann bildet eine Familie von n unabhängigen Vektoren automatisch eine Basis.

Man muß also "Erzeugendensystem" nicht mehr (eventuell aufwendig) überprüfen. Nach dem Basisergänzungssatz kann man die Familie sicher zu einer Basis ergänzen. Da sie aber bereits n Vektoren enthält, muß sie bereits Basis sein.

- **(3.5.3)** Sei $\dim_K V = n < \infty$. Dann bilden $n + 1$ Vektoren aus V stets eine linear abhängige Familie.

Dies erwartet man vom Dreidimensionalen. Aber es gilt allgemein. Wäre die Familie linear unabhängig, könnte man sie zu einer Basis mit mindestens $n + 1$ Elementen ergänzen. (Wieso muß der Raum als endlichdimensional vorausgesetzt werden?)

- **(3.5.4)** Sei $\dim_K V = n$ beliebig und $a = (a_1, \dots, a_r)$ eine endliche Vektorfamilie aus V . Dann hat der durch a erzeugte Teilraum $W = \text{Bild}L_a$ eine endliche Dimension $m = \dim_K W$, für die $m \leq \min(n, r)$ gilt.

W besteht nach (1.7.4) ja aus allen Linearkombinationen von a . Auch hier werden vertraute Eigenschaften unserer dreidimensionalen geometrischen Welt stark verallgemeinert. Mit $r = 2$ Vektoren des V kann man höchstens eine Ebene, mit $r = 3$ höchstens den gesamten Raum erzeugen. Usw. Der Beweis ist trivial. $n = \infty$ ist hier zulässig.

- **(3.5.5)** Sei V Vektorraum und U, W endlichdimensionale Teilräume vom V . Dann gilt:

$$(U \subset W \quad \text{und} \quad \dim_K U = \dim_K W) \implies U = W.$$

D.h. man kann sich den für die Mengengleichheit $U = W$ erforderlichen Nachweis der zweiten Inklusion $W \subset U$ sparen. Da ein solcher Nachweis durchaus aufwendig sein kann, ist das eine beliebte Denkfigur. Zum Beweis ergänzt man wieder eine Basis von U zu einer von W . Da die Elementzahl dieselbe sein muß, sind die Basen und daher die Räume gleich.

- **(3.5.6)** Es sei hier nochmals an den folgenden vektortypischen Sachverhalt erinnert: Kennt man eine Basis b von V oder von einem Teilraum $U \subset V$, so ist L_b , ein **Isomorphismus**, und man besitzt für ganz V eine bijektive Parametrisierung, mit deren Hilfe man alle Vektoren von U bzw. V erhält.
- **(3.5.7)** Sei V Vektorraum und a eine Familie unabhängiger Vektoren. Dann ist immer **Koeffizientenvergleich** zulässig. Darunter versteht man den Schluß:

$$(\sum \alpha_i \vec{a}_i = \sum \beta_i \vec{a}_i) \implies (\alpha_i = \beta_i \quad \text{für alle } i)$$

Aus der einen Vektorgleichung werden n Zahlgleichungen, wenn n die Zahl der \vec{a}_i ist.

Zum Beweis sei nur daran erinnert, daß L_a , injektiv ist, wenn a linear unabhängig ist. Koeffizientenvergleich wird meist vorgenommen, wenn man zwei auf unterschiedliche Weisen konstruierte Vektoren einerseits als gleich nachweist und andererseits als Linearkombination derselben Basis darstellt. Dann folgert man die angegebenen Gleichungen für die Komponenten. Aus der einen Gleichung für Vektoren wird ein System von Zahlgleichungen für die Komponenten.

Betrachten wir als Beispiel einen Partialbruchansatz:

$$\frac{-7x + 1}{(x - a)(x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} \quad (a, b \text{ gegeben, } A, B \text{ gesucht}).$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt die Gleichheit zweier Polynome. Im Beispiel

$$-7x + 1 = (A + B)x - (Ab + Ba) \quad \text{oder} \quad -7h_1 + h_0 = (A + B)h_1 - (Ab + Ba)h_0.$$

Da die h_n in \mathcal{P} linear unabhängig sind, ist Koeffizientenvergleich zulässig und gibt hier die Gleichungen $A + B = -7$ und $bA + aB = -1$.

- **(3.5.8)** Dimensionsbestimmung mit Hilfe einer Basis : Siehe (3.3.10)
- **(3.5.9)** Basisergänzung : Siehe (3.2.3). Beachten Sie, dass der gegebene Beweis konstruktiv ist, also bei Bedarf wirklich gestattet, eine Basis zu konstruieren!

- (3.5.10) Basisauswahl Siehe (3.2.10).

4.3.6 Der Dimensionssatz für Teilräume

(3.6.1) Jeder Vektorraum wird durch seine Dimension charakterisiert. Die **Teilräume** eines gegebenen Raumes sind Vektorräume und daher ist ihre Dimension ein wichtiges Merkmal. Dieser Frage nach der Dimension von Teilräumen wollen wir uns jetzt zuwenden und eine Reihe zugehöriger Resultate herleiten. Und denken Sie daran: Es geht um Argumentationen und Beweise, die für jeden endlichdimensionalen Vektorraum gelten, sei er auch noch so exotisch konstruiert.

(3.6.2) Im Falle V^3 sind die eindimensionalen Teilräume die Geraden durch den Ursprung, die zweidimensionalen die Ebenen durch den Ursprung. Weitere nichttriviale Teilräume kann es nicht geben, denn sie müßten eine Dimension haben! Das ist jetzt gesichert. Der Vektorraumfall ist in dieser Hinsicht viel einfacher als der Modulfall.

(3.6.3) Wir hatten die Menge $\mathcal{T}(V)$ aller Teilräume eines gegebenen Vektorraumes V eingeführt und dazu zwei Verknüpfungen $+$ und \cap . Sind U, W zwei Teilräume von V , dann ist $U \cap W$ der größte Teilraum, der sowohl in U als auch in W enthalten ist, und $U + W$ ist der kleinste Teilraum, der U und W enthält.

(3.6.4) Über die Dimensionen dieser 4 Räume kann man folgendes sagen:

	Der Dimensionssatz für Teilräume
Sei	V Vektorraum über K und U, W Teilräume von V .
Dann	gilt: $\dim_K(U + W) + \dim_K(U \cap W) = \dim_K U + \dim_K W$.

Ist dabei eine der auftretenden Dimensionen unendlich, so besagt die Gleichung, dass notwendig auch mindestens eine Dimension auf der anderen Seite der Gleichung unendlich ist. Die Gleichung ist somit in der gegebenen Form stets sinnvoll. (Formt man sie um, dass negative und positive Zeichen auftreten, ist das nicht mehr der Fall.)

(3.6.5) **Beweis:** Ist U oder W unendlichdimensional, so gilt für $U + W$ notwendig dasselbe, denn letzterer Raum ist größer. Sind U und W beide endlich, so gilt dies auch für $U + W$. (Man vereinige je eine Basis von U und W . Das ergibt ein endliches Erzeugendensystem von $U + W$). Damit ist der unendliche Fall erledigt. Seien also U und W endlichdimensional. Man hat $k = \dim(U \cap W) < \infty$. Wähle eine Basis (a_1, \dots, a_k) von $U \cap W$. Ergänze diese einmal zu einer Basis von U und einmal zu einer Basis von W :

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_r) & \text{ von } U, \text{ also } r = \dim U \\ (a_1, \dots, a_k, c_{k+1}, \dots, c_s) & \text{ von } W, \text{ also } s = \dim W. \end{aligned}$$

(Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welcher Körper gemeint ist, schreiben wir $\dim V$ statt $\dim_K V$). Bilde die neue Familie:

$$d = (a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_r, c_{k+1}, \dots, c_s)$$

Wir behaupten: d ist Basis von $U + W$. Diese Ergebnis sollten Sie sich über den Beweis hinaus merken! Ist d wirklich eine Basis, so folgt die behauptete Formel des Satzes sofort durch Abzählen: $(k + (r - k) + (s - k)) + k = r + s$.

Ist die Familie d eine Basis von $U + W$? Sie ist sicher Erzeugendensystem (Basisdarstellungen von $u \in U$ und $w \in W$ addieren). Also kommt es darauf an: Ist d auch linear unabhängig? Hierzu gehen wir nach dem üblichen Schema vor und nehmen an, daß

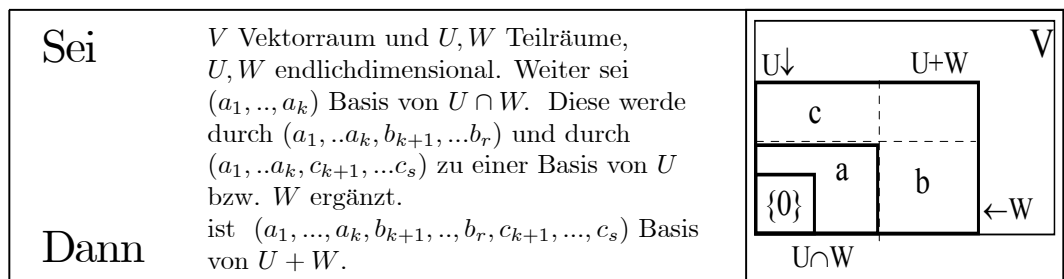
$$\sum \alpha_m a_m + \sum \beta_r b_r + \sum \gamma_s c_s = 0 \quad \text{gilt.}$$

Worüber jeweils summiert wird, ist klar.

Wir setzen $D = \sum \alpha_m a_m + \sum \beta_r b_r$. Dann gilt $D = -\sum \gamma_s c_s$. Wegen der ersten Gleichung gilt $D \in U$ und wegen der zweiten $D \in W$. Also ist $D \in U \cap W$. Daher haben wir eine eindeutige Basisdarstellung $D = \sum \delta_m a_m$ in $U \cap W$. Das ist zugleich die Basisdarstellung von D in $U \supset U \cap W$. Koeffizientenvergleich liefert $\delta_m = \alpha_m$ für alle m und damit $\beta_r = 0$ für alle r . Aber $D = \sum \delta_m a_m$ ist **auch** Basisdarstellung (a,c) von D in W . Koeffizientenvergleich mit $D = -\sum \gamma_s c_s$ liefert jetzt $\gamma_s = 0$ und $\delta_m = 0$ für alle m und s . Wegen

$\alpha = \delta$ sind wir fertig! Unsere angenommene Ausgangsgleichung hat nur die triviale Lösung. Somit ist d eine Basis von $U + W$ wie behauptet.

(3.6.6) Die folgende Basiskonstruktion ist möglich:



Die Figur verdeutlicht die Verhältnisse.

(3.6.7) Beispiel: Wir betrachten zwei Ebenen E und F im \mathbb{R}^4 . Dann haben wir für $E \cap F$ die möglichen Dimensionen 0,1,2. Korrespondierend dazu hat $E + F$ die Dimensionen 4,3,2. Der erste Fall wird z.B durch die folgenden Parametrisierungen repräsentiert:

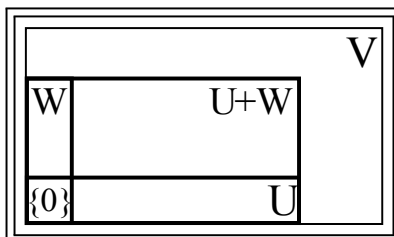
$$\vec{x}_E(u, v) = (u, v, 0, 0) \quad \vec{x}_F(x, y) = (0, 0, x, y).$$

Für die beiden anderen Fälle überlegt man sich unmittelbar entsprechende Beispiele.

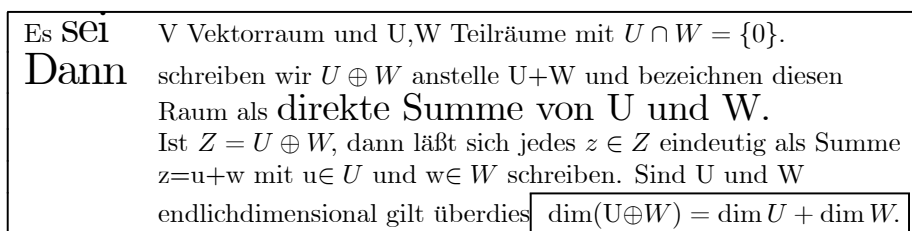
4.3.6a Der Spezialfall $U \cap W = \{0\}$ - direkte Summen

(3.6.8) Besonders wichtig ist der Fall $U \cap W = \{0\}$. Dann haben die beiden Teilräume so wenig wie überhaupt möglich gemeinsam, und dafür ist $U + W$ so groß wie überhaupt möglich. Wir wissen, dass in diesem Fall jeder Vektor x aus $U + W$ eine eindeutige Darstellung $x = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ besitzt. Das erkennt man erneut auch über die Basis d aus der Folgerung (3.6.6). Vektoren vom Typ a kommen ja nicht vor. Oder auch: d ist die disjunkte Vereinigung von b und c . Mit der in 4.(1.7.27) erklärten Sprechweise können wir sagen: W ist in $U + W$ ein zu U supplementärer Raum.

(3.6.9) Der soeben beschriebene Fall erweist sich als so wichtig, dass wir eine neue präzisierende **Bezeichnung** für ihn einführen. Wir geben auch eine graphische Repräsentation der Situation.



(3.6.10) Definition:



4.3.6b Direkte Summen

(3.6.11) Die direkte Summe bildet keine innere Verknüpfung auf $\mathcal{T}(V)$, da man ja nicht alle, sondern nur gewisse Teiräume durch sie verbinden kann. Übrigens kennen wir die direkte Summe bereits: Wenn U die Dimension p hat und W die Dimension q , so hat $U \oplus W$ die Dimension $p + q$. Und wir kennen bereits einen anderen Raum, der dieselbe Dimension hat, und das ist der Produktraum $U \times W$. Die beiden Räume müssen daher isomorph sein. Und sie sind sogar kanonisch isomorph.

(3.6.12) Der zugehörige (kanonische) Isomorphismus wird durch folgende Abbildung geliefert:

$$(U \times W, (u, w) = (u, 0) + (0, w) \mapsto u + w, U \oplus W).$$

Beachten Sie, diese Abbildung ist bijektiv, weil die Zerlegung $z = v+w$ eindeutig ist. Sie ist auch offensichtlich linear.

(3.6.13) Besteht zwischen $V \times W$ und $V \oplus W$ überhaupt noch ein Unterschied? Ja, das direkte Produkt ist allgemeiner. Man kann die Produktkonstruktion für beliebige Vektorräume durchführen, wogegen die direkte Summe immer nur erklärt ist, wenn beide Räume bereits Teilräume eines gemeinsamen Raumes V sind.

(3.6.14) Überdies ergeben sich Unterschiede bei der Ausdehnung auf unendlich viele Faktoren bzw. Summanden. Nehmen wir an, alle Summanden und Faktoren seien ein und derselbe Vektorraum V . Die Indexmenge I sei unendlich. Dann verallgemeinert sich die Produktbildung zu $\mathcal{F}(I, V)$, wogegen sich die Summenbildung zu dem Teilraum $\mathcal{E}(I, V)$ der Funktionen mit endlichem Träger verallgemeinert! Vgl. 4.2.4.

4.3.7 Die Konstruktion supplementärer Räume

(3.7.1) In (1.7.27) haben wir den Begriff des "supplementären Teilraumes" eingeführt. Jetzt können wir sagen:

Ein zu U in V supplementärer Teilraum ist eine Lösung der Gleichung $X \oplus U = V$.

Mit Hilfe des Basisergänzungssatzes ist es leicht, Räume in direkte Summen zu zerlegen und supplementäre Räume zu konstruieren.

(3.7.2) Sei V Vektorraum der Dimension n und U ein Teilraum der Dimension k . Wähle eine Basis (a_1, \dots, a_k) von U . Also ist U der von den a_i erzeugte Raum. Wir schreiben das ("von den Vektoren erzeugter Teilraum") auch

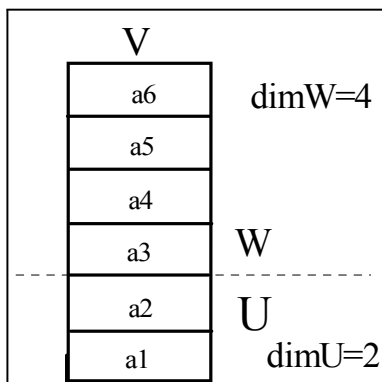
$$U = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle.$$

Jetzt ergänzen wir zu einer Basis (a_1, \dots, a_n) von V . Dann erzeugen die ergänzten Vektoren einen Teilraum $W = \langle a_{k+1}, \dots, a_n \rangle$, der offensichtlich supplementär zu U ist. Also

$$V = U + W \quad \text{und} \quad U \cap W = \{0\}. \quad \text{oder} \quad V = U \oplus W.$$

Eine andere Basiswahl liefert i.a. einen anderen zu U supplementären Raum. Nur die Dimension des supplementären Raumes ist festgelegt.

(3.9.3) Wir verdeutlichen die soeben beschriebene Konstruktion und die zugehörigen Verhältnisse diagrammatisch durch eine Skizze. Jede Höheneinheit bedeutet eine Dimensionseinheit bzw. den zugehörigen Basisvektor.



4.3.8 Zusammenfassende Übersicht über die eingeführten Teilräume

Wie steht es allgemein mit der Dimension der neukonstruierten Vektorräume? Gehen wir die Fälle einmal durch:

$U \subset V$	$\dim U \leq \dim V$, unendlich zugelassen.
$U \times W$	$\dim(U \times W) = \dim U + \dim W$
$\mathcal{F}(M, V)$	$\dim \mathcal{F}(M, V) = \text{Mächtigkeit von } M$, M endlich
V/U	$\dim(V/U) = \dim V - \dim U$, falls $\dim U < \infty$
$U \cap W$	$\dim(U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W)$
$U + W$	$\dim(U \cap W) \leq \dim(U + W) \leq \dim U + \dim W$
$U \oplus W$	$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Der Nachweis der vier noch nicht bewiesenen Resultate ist eine leichte Übung.

4.3.9 Die rekursive Konstruktion der endlichdimensionalen Vektorräume

(3.9.1) Inzwischen haben wir ausreichend formalen Apparat zur Verfügung, um auch die zweite eingangs gestellte Strukturfrage zu beantworten: Wie sind (endlichdimensionale) Vektorräume aus kleineren unzerlegbaren Bestandteilen aufgebaut?

(3.9.2) Nun, jeder Vektorraum V , der sich in nichttrivialer Weise als direkte Summe zweier anderer Vektorräume schreiben läßt, also $V = U \oplus W$, wird als zerlegbar angesehen. Seine Elemente sind stets eindeutig als Summe schreibbar. Nach unseren Resultaten sind nur die eindimensionalen Vektorräume unzerlegbar. Zerlegt man einen unzerlegbaren Raum weiter, so muß einer der Summanden gleich dem trivialen Nullraum sein. Jeder endlichdimensionale Vektorraum V läßt sich aber als direkte Summe eindimensionaler Räume schreiben. Sei $a \in V$ irgendein Vektor. Dann sei $\langle a \rangle = \{\alpha a \mid \alpha \in K\}$ der von a erzeugte Teilraum, $\langle a \rangle$ ist eindimensional (eine Gerade) und unzerlegbar, falls $a \neq 0$ ist. Sei jetzt (a_1, \dots, a_n) eine Basis von V . Dann ist $V = \langle a_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_n \rangle$ eine Zerlegung von V in unzerlegbare Teilräume.

(3.9.3) Folgerung:

Sei	V n -dimensionaler Vektorraum über K .
Dann	läßt sich V als direkte Summe unzerlegbarer eindimensionaler Teilräume darstellen: $V = \langle a_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_n \rangle$.

(3.9.4) D.h. man kann alle endlichdimensionalen Vektorräume mit Hilfe der direkten Summe rekursiv aus eindimensionalen Teilräumen aufbauen. Die eindimensionalen Teilräume sind aber immer isomorph zu K . Damit ist geklärt, wie die Operatorbereiche K und die Objektbereiche V im Falle endlichdimensionaler Vektorräume zusammenhängen. Vgl. 4.1.2.

Die Einfachheit dieses Resultates sollte nicht dazu verleiten, die Frage selbst als einfach oder unwichtig zu erklären. Im Falle der Gruppen führt die analoge Fragestellung auf größte Schwierigkeiten.

4.3.10 Der Dimensionssatz für Homomorphismen

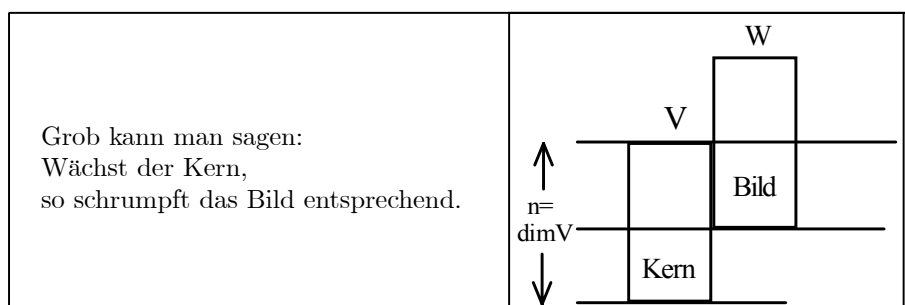
(3.10.1) Wir besprechen ein weiteres nichttriviales und nützliches Resultat zum Dimensionsbegriff. Wenn $\Phi : V \rightarrow W$ ein Vektorraumhomomorphismus ist, haben wir zwei damit verbundene herausragende Teilräume: Kern Φ von V und Bild Φ von W . Da V und W verschieden sein können, hat man zunächst zwischen diesen beiden Räumen keinerlei Beziehung (außer Φ selbst). Die Dimensionen dagegen sind Zahlen und die kann man in Beziehung zueinander setzen!

(3.10.2) Tatsächlich gilt der folgende bemerkenswerte

Dimensionssatz für Homomorphismen:	
Seien	V, W Vektorräume über K und $\Phi : V \rightarrow W$ linear.
Dann	gilt $\dim_K V = \dim_K(\text{Kern } \Phi) + \dim_K(\text{Bild } \Phi)$.

Ist eine der Dimensionen unendlich, so besagt die Gleichung, dass dann auch auf der anderen Seite der Gleichung mindestens eine Dimension unendlich ist.

(3.12.3) Den Inhalt des Satzes verdeutlicht man sich am besten graphisch.



Eine Vergrößerung von W außerhalb des Bereiches von $Bild(\Phi)$ wirkt sich auf die Gleichung für die Dimensionen nicht aus. Oder auch: Ganz W kommt in ihr nicht vor.

(3.10.4) Beweis: Wieder wird vom Basisergänzungssatz Gebrauch gemacht. Zunächst der endlichdimensionale Fall.

Wir setzen $n = \dim V$ und $k = \dim Kern(\Phi)$. Demnach sollte $n - k = \dim Bild(\Phi)$ gelten. Ergänze eine Basis von $Kern(\Phi)$ zu einer Basis von V , also $a = (a_1, \dots, a_n)$. Das liefert uns die Zerlegung $V = Kern(\Phi) \oplus U$ mit $U = \langle a_{k+1}, \dots, a_n \rangle$. U ist nicht eindeutig bestimmt, nur die Dimension $n - k$ ist es.

Jetzt schränken wir Φ auf U ein. Bilden also $\varphi = (U, x \mapsto \Phi(x), Bild\Phi)$. Oder auch $\varphi(x) = \Phi(x)$ für alle $x \in U$. Wir behaupten: φ ist **Isomorphismus**. Sobald dies bewiesen ist, sind wir fertig. Denn dann ist $\dim Bild\Phi = \dim U = n - k$.

Untersuchen wir also φ . Die Linearität ist als Restriktion von Φ trivial. Weiter ist φ **injektiv**. Sei $x \in U$ mit $\varphi(x) = 0$. Dann ist $\Phi(x) = 0$, also $x \in Kern\Phi$. Da die Aufspaltung direkt ist, folgt über $x \in U \cap Kern\Phi$ aber $x = 0$ wie gewünscht. Es verbleibt, die **Surjektivität** zu zeigen. Sei also $y \in Bild\Phi$. D.h. es gibt $x \in V$ mit $\Phi(x) = y$. Über die Summenzerlegung folgt $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in Kern\Phi$ und $x_1 \in U$. Damit folgt aber

$$y = \Phi(x) = \Phi(x_0 + x_1) = 0 + \Phi(x_1) = \varphi(x_1).$$

Denn x_1 liegt ja im Definitionsbereich von φ . Die Linearität geht auch ein. Insgesamt liefert die Gleichung die Implikation $y \in Bild\Phi \implies y \in Bild\varphi$ Mithin ist φ surjektiv und ein Isomorphismus.

(3.10.5) Aus dem Beweis können wir auch noch das folgende Resultat herausziehen:

Folgerung: Sei $\Phi : V \rightarrow W$ linear. Man habe eine Zerlegung $V = Kern\Phi \oplus U$.
 Dann ist $(U, x \mapsto \Phi(x), Bild\Phi)$ ein Isomorphismus, und jede Basis (b_{i+1}, \dots, b_n) wird durch Φ zu einer zu einer Basis $(\Phi(b_{i+1}), \dots, \Phi(b_n))$.

(3.10.6) Die Bilder der Basisvektoren ergeben auf jeden Fall ein Erzeugendensystem, und da die Dimension stimmt, müssen sie eine Basis bilden. (Denkfigur (3.5.5)).

Aber denken Sie daran, daß U i.a. nicht eindeutig bestimmt ist.

(3.10.7) Mit Hilfe der Folgerung löst man Aufgaben des Typs "Bestimmen Sie eine Basis von $Bild\Phi$, die verbreitet die Reaktion "Ja, wie soll ich das denn machen?" hervorrufen. Man bestimmt den Kern und eine zugehörige Basis, ergänzt zu einer Basis von ganz V und wendet die Folgerung (3.12.5) an.

?? Was ergibt sich im Falle eines trivialen Kerns, also $Kern\Phi = \{0\}$?

4.3.11 Beispiele

4.3.11a Typische Interpretation eines einfachen geometrischen Problems

(3.11.1) Beispiel: Wir betrachten 4 Vektoren aus V_0^3 , die alle in einer Ebene E liegen und diese aufspannen. Sie bilden zusammen eine Familie a mit Linearkombinationsabbildung $L_a : \mathbb{R}^4 \rightarrow V_0^3$. Wir haben $\text{Bild}(L_a) = \langle (a) \rangle = E$ als erzeugten Teilraum mit $\dim(\text{Bild}L_a) = \dim(E) = 2$. $\text{Kern}(L_a)$ besteht aus allen $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^4$ mit $L_a(\vec{\alpha}) = 0$. Dies ist ein homogenes 3×4 -Gleichungssystem. Die Lösung enthält zwei freie Parameter, ist geometrisch auch eine Ebene (im Parameterraum \mathbb{R}^4). Wir haben $\dim(\text{Kern}L_a) = 2$. Und zusammen $\dim(\text{Kern}L_a) + \dim(\text{Bild}L_a) = \dim(\mathbb{R}^4)$ wie vom Satz behauptet.

4.3.11b Die elementare Parallelprojektion

(3.11.3) Die elementare Parallelprojektion im Anschauungsraum sieht so aus: Im Raum kann ein Lichtstrahl parallel und beliebig verschoben werden. Weiter ist im Raum eine Ebene fest gegeben, die nicht parallel zur Strahlrichtung ist. Jeder Punkt des Raumes wird jetzt per Schattenwurf auf die Ebene projiziert. Dem Punkt wird sein Schattenort zugeordnet.

(3.11.4) Wir machen daraus eine vektorielle Abbildung.

Den Ursprung legen wir in die Ebene. Dann seien \vec{e} und \vec{f} zwei Richtungsvektoren, die die Ebene aufspannen. Und \vec{n} sei Richtungsvektor des Lichtstrahles. Zusammen erhalten wir mit $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{n})$ eine Basis des V_0^3 . Jeder Vektor besitzt eine eindeutige Basisdarstellung $\vec{x} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{f} + \gamma\vec{n}$. Dann ist die Projektion die folgende Abbildung vom Transformationstyp

$$\pi = (V_0^3, \vec{x} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{f} + \gamma\vec{n} \mapsto \alpha\vec{e} + \beta\vec{f}, V_0^3).$$

Diese Abbildung ist offensichtlich linear. Der Kern ist die vom Licht erzeugte Ursprungsgerade, von der jeder Punkt auf den Ursprung projiziert wird. Und das Bild ist die Projektionsebene. Mit Hilfe der gewählten Basis wird auch eine rechnerische Behandlung dieser Projektion elementar. Der Dimensionssatz gibt $1 + 2 = 3$.

(3.11.5) Es ist sinnvoll, an diesem Beispiel kurz zu verdeutlichen, wie man typisch physikalisch-geometrische Problemsituationen angehen sollte, die man mit Koordinatenmethoden lösen will. Alternativ gibt es vielfach koordinatenfreie, absolute Methoden.

- (1) Nach dem Verdeutlichen der Geometrie der Situation wählt man eine geeignete Basis. Im Beispiel $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{n})$.
- (2) Man stellt alle Vektorgrößen als Linearkombinationen der gewählten Basis dar.
- (3) Mittels Koeffizientenvergleichs wandelt man Gleichungen zwischen den Vektoren in Gleichungen für die Komponenten um.
- (4) Jetzt ist man rechnerisch im Zahlbereich. "Geeignet gewählte Basis" in (1) bedeutet meist, daß die jetzt entstehenden Bestimmungsgleichungen besonders leicht lösbar sind, daß sie möglichst einfach werden!
- (5) **Man löst anstehende Probleme rechnerisch für die Koordinaten .**
- (6) Man setzt die gefundenen Lösungen in die Basisdarstellungen ein (mit der Linearkombinationsabbildung).

(3.11.6) Anfängern ist vielfach nicht klar, daß man in der Regel zuerst und vorgegeben die **Geometrie** hat und daß man **dazu** sein Koordinatensystem wählt

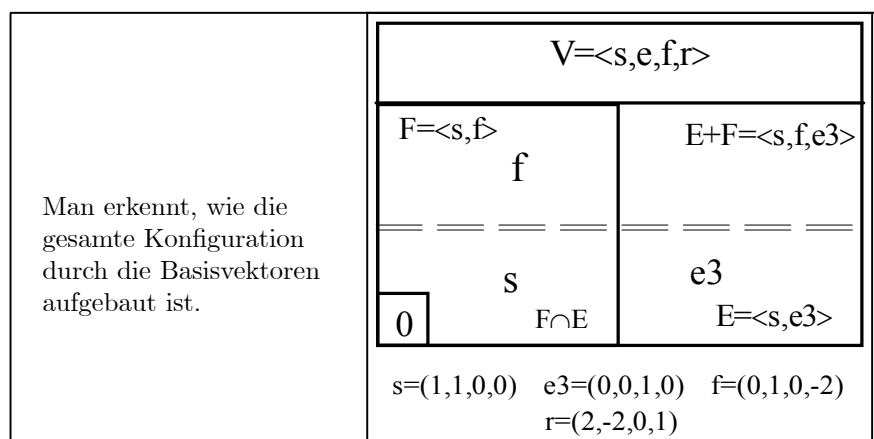
?? In Kap. 1.(2.6.14) haben wir die Parallelprojektion in kartesischen Koordinaten gegeben. Setzen Sie $\vec{e} = \vec{e}_2$, und $\vec{f} = \vec{e}_3$. Bestimmen Sie jetzt mit der alten Formel \vec{n} . Das erläutert die Bedeutung der beiden Parameter s und φ .

4.3.13c Etwas Geometrie in vier Dimensionen

(3.11.7) Wir betrachten zwei Ebenen E und F durch den Nullpunkt in vier Dimensionen, genauer im \mathbb{R}^4 . Nach dem Dimensionssatz für Teilräume hat $E \cap F$ dann die Dimension 0 oder 1 oder 2. Der erste Fall ist neu im Vergleich zur Anschauungswelt: Die beiden Ebenen treffen sich nur in einem Punkt. Infolge der zusätzlichen Dimension haben sie die Freiheit, sich aus dem Wege zu gehen, so wie es zwei Geraden im (dreidimensionalen) Anschauungsraum können.

(3.11.8) Jetzt ein Beispiel für den Fall $\dim(E \cap F) = 1$ und das Arbeiten mit der Basisergänzung. Wir nehmen an $E = \langle a, b \rangle$ und $F = \langle c, d \rangle$ mit $a = (1, 1, 1, 0)$ und $b = (1, 1, -1, 0)$ sowie $c = (1, 0, 0, 2)$ und $d = (0, 2, 0, -2)$. Wir versuchen, diese Konfiguration durch geeignete Basisergänzung in den Griff zu bekommen. Inspektion zeigt $a + b = (1, 1, 0, 0)$ und $c + d = (2, 2, 0, 0)$. Offenbar haben wir die Schnittgerade $E \cap F = \langle s \rangle$ mit $s = (1, 1, 0, 0)$. Vergleicht man mit a und b , so sieht man, daß $e_3 = (0, 0, 1, 0) = (a - b)/2$ den Einzelvektor s zu einer Basis von E ergänzt.

Und daß $f = (0, 1, 0, -2)$ dasselbe für F tut. Zusammen spannen beide Ebenen aber nur einen dreidimensionalen Teilraum $E + F$ von \mathbb{R}^4 auf mit Basis (s, e_3, f) . Wir können diese noch zu einer Basis des Gesamtraumes ergänzen, also durch einen Vektor r , der sich durch die drei übrigen nicht darstellen läßt. Die Auswahl ist groß. Entweder wählt man einen mit möglichst vielen Nullen, sagen wir $r = (0, 1, 0, 0) = e_2$. Denn dieser Vektor ist offensichtlich nicht durch s, e und f darstellbar. Oder man nimmt eine zusätzliche Eigenschaft zur Festlegung. Etwa, daß r im Sinne des später einzuführenden kanonischen Skalarproduktes des \mathbb{R}^4 auf den drei anderen Vektoren senkrecht steht. $r = (2, -2, 0, 1)$ leistet dies offensichtlich.



Das Beispiel verdeutlicht: Basen sind nicht nur zum Rechnen da, sondern auch zur Erfassung geometrischer Sachverhalte.

4.3.11d Eine Vektorformel für die Drehoperation in V_0^3

(3.11.9) Was sind Drehungen im Raume? Jedenfalls etwas, was bei physikalischen und geometrischen Problemen immer wieder auftaucht. Der üblich gebrauchte Begriff ist noch nicht voll entfaltet und wir wollen daraus eine besonders wichtige Teilstruktur abstrahieren. In Kap. 3.2.6 haben wir die allgemein übliche mathematische Definition im Rahmen der Gruppenstruktur gegeben, diese dann in Kap. 3.3.1a für die Ebene sogar quantifiziert. Jetzt nehmen wir einen neuen, stärker anschauungsorientierten Anlauf.

Was ist eine Drehung? Unter einer Drehung verstehen wir eine Abbildung $V_0^3 \rightarrow V_0^3$, die das Resultat einer starren Bewegung aller Raumpunkte um den Ursprung darstellt. D.h. es kommt uns nur auf die Zuordnung $\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R\vec{x}$ an, die festlegt, in welchen Punkt \vec{x}' ein gegebener Punkt \vec{x} bei der Bewegung übergeht. Von dem Bewegungsvorgang selbst wird nur verlangt, daß dabei alle Raumpunkte starr miteinander verbunden sein sollen. Dabei können viele Bewegungsabläufe zu ein und demselben Resultat, also derselben Zuordnung führen.

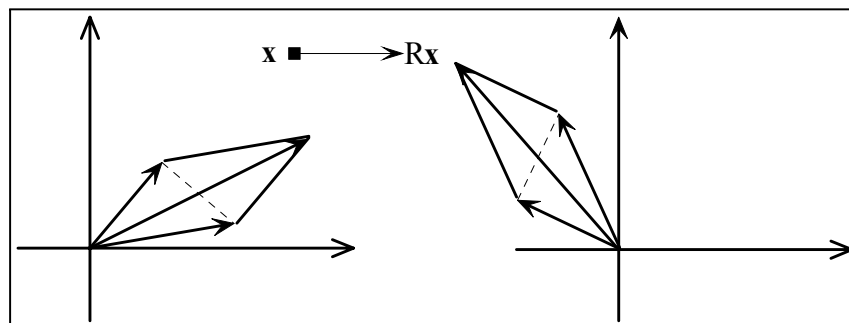
Später in Kap. 6.4 werden wir lernen, auch die Drehvorgänge selbst, nicht nur ihr Resultat mathematisch zu beschreiben.

(3.11.10) Für uns ist eine Drehung also zunächst einmal eine Abbildung

$$R = (V_0^3, \vec{x} \mapsto R\vec{x}, V_0^3)$$

mit gewissen Eigenschaften. Vgl. 3.(6.2.4). Dabei ist es üblich, für die Werte $R\vec{x}$ anstelle von $R(\vec{x})$ zu schreiben.

(3.11.11) Und weiter: Eine solche Abbildung ist linear bezüglich der Vektorraumstruktur des V_0^3 . Denn da alle Figuren starr bewegt werden, werden auch die Parallelogramme der geometrischen Vektoraddition starr mitbewegt, und das ist gerade die geforderte Linearitätsbedingung für die Abbildung R .



Zur Veranschaulichung der Abbildung $\vec{x} \mapsto R\vec{x}$ verwenden wir hier den Transformationsstandpunkt. In der Figur wird jeder Vektor \vec{x} der Urbildseite durch Drehung um $\varphi = 100^\circ$ zugehörigen Bildvektor. Speziell wird \vec{a} zu $R\vec{a}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ zu $\vec{d} = R(\vec{a} + \vec{b})$. Andererseits ist \vec{d} aber auch die Diagonale des gedrehten Parallelogramms, also $\vec{d} = R\vec{a} + R\vec{b}$. Damit ist $R(\vec{a} + \vec{b}) = R(\vec{a}) + R(\vec{b})$. bewiesen. $R(\alpha\vec{x}) = \alpha R\vec{x}$ folgt analog.

(3.11.12) Man kann nun (geometrisch oder im Rahmen der Eigenwerttheorie, Kap. 12) zeigen, daß jede derartige Drehabbildung vollständig durch Angabe einer Drehachse \vec{n} und eines Drehwinkels φ festgelegt wird. Genauer: Jede Klasse von Bewegungsvorgängen mit demselben Drehresultat enthält einen Vertreter der folgenden Art:

Eine Achse im Raum mit Richtungsvektor (Einheitsvektor) \vec{n} wird fixiert, und um diese Achse wird mit dem Winkel φ gedreht. Die so erzeugte Drehung bezeichnen wir mit $R_{\varphi\vec{n}}$. D.h. $\vec{\varphi} = (\varphi, \vec{n}) \mapsto R_{\vec{\varphi}}$ gibt uns eine (nicht injektive) Parametrisierung aller Drehungen.

Die Menge aller dieser Drehungen bildet eine Gruppe, genauer einer Untergruppe von von $\mathcal{B}(V_0^3, V_0^3)$ und diese Gruppe operiert auf V_0^3 . Allerdings ist diese Gruppe kleiner als die in 3.(2.6.7) eingeführte orthogonale Gruppe $O(V_0^3)$.

?? Welche Elemente aus $O(V_0^3)$ fehlen? In Kap. 10. werden wir hierauf allgemein zurückkommen.

(3.11.13) Die Abbildung $\vec{\varphi} \mapsto R_{\vec{\varphi}}$ und die dazu gemachten Aussagen werden wir später in Kap. 10 genauer berechnen. Im Augenblick geht es darum, eine explizite Formel für den Wert $R_{\vec{\varphi}}\vec{x}$ herzuleiten, die den um φ gedrehten Vektor durch den Eingabevektor \vec{x} und den Drehvektor $\vec{\varphi}$ ausdrückt.

(3.11.14) Wir gehen so vor, daß wir den interessierenden Vektor $R_{\vec{\varphi}}\vec{x} \in V_0^3$ mit Hilfe zweier geeigneter Basen darstellen, diese Darstellungen ineinander umrechnen und dann Koeffizientenvergleich vornehmen. Diese Vorgehensweise erweist sich häufig bei anspruchsvollen Problemen als günstig.

(3.11.15) Zuerst wählen wir ein kartesisches Koordinatensystem (und die zugehörige Basis). Dieses System soll der Geometrie unserer Konfiguration möglichst entsprechen, was wir erreichen, indem wir $\vec{e}_3 = \vec{n}$ wählen. ($|\vec{n}| = 1$ setzen wir voraus.) Dann liegen \vec{e}_1 und \vec{e}_2 in der zu \vec{n} senkrechten Ebene. Wir erhalten die Darstellung:

$$\vec{x} = \vec{e}_1x + \vec{e}_2y + \vec{e}_3z \quad \vec{x}^k = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Eine elementargeometrische Überlegung (Skizze machen!) zeigt, daß dann gilt:

$$R_{\varphi\vec{n}}\vec{x} = \vec{e}_1(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + \vec{e}_2(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + \vec{e}_3z.$$

Die Vektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 sind innerhalb der Ebene senkrecht \vec{n} nur insoweit bestimmt, als daß insgesamt ein kartesisches Rechtssystem entstehen muß. Sie hängen noch von einer willkürlichen Wahl ab, erlauben aber die elementare Berechnung des Bildvektors.

Können wir eine **andere Basis** finden, die eindeutig durch unsere Konfiguration bestimmt wird? Wir brauchen eine Basis, also drei unabhängige Vektoren. Zur Verfügung stehen uns \vec{n} und \vec{x} und $\vec{n} \times \vec{x}$. Falls

\vec{n} und \vec{x} nicht dieselbe Richtung haben, ergibt das eine Basis. Haben Sie dieselbe Richtung, wird unser Problem trivial, weil dann $\vec{x} = R\vec{x}$ gilt.

I.a. werden wir also $R\vec{x}$ als Linearkombination unserer drei Vektoren darstellen können, was den folgenden Ansatz ergibt:

$$R_{\varphi\vec{n}}\vec{x} = \vec{x}\alpha(\varphi) + (\vec{n} \times \vec{x})\gamma(\varphi) + \vec{n}\beta(\varphi) \quad \text{mit zu bestimmenden Koeffizienten.}$$

Unser erstes Koordinatensystem hatte den Index K . Wir stellen alle Vektoren in diesen Koordinaten dar und machen dann Koeffizientenvergleich. (Ansatz = hergeleitete Formel für $R_{\vec{\varphi}}\vec{x}$).

$$\vec{x}^K = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{n}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\vec{n} \times \vec{x})^K = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt sofort ein lineares Gleichungssystem für α , β und γ , das sich per Inspektion lösen läßt.

$x\alpha(\varphi) + 0 - y\gamma(\varphi) = x \cos \varphi - y \sin \varphi$	$\alpha(\varphi) = \cos \varphi$
$y\alpha(\varphi) + x\gamma(\varphi) = x \sin \varphi + y \cos \varphi$	$\beta(\varphi) = z(1 - \cos \varphi)$
$z\alpha(\varphi) + \beta(\varphi) = z$	$\gamma(\varphi) = \sin \varphi$

Das Auftreten von z in β ist störend. Denn z bezieht sich auf unser erstes Koordinatensystem, das wir hinauswerfen wollen. Aber z ist eine rein geometrische Größe, nämlich die Projektion von \vec{x} auf die Drehachse! Oder $z = (\vec{n} \cdot \vec{x})$.

(3.11.16) Setzen wir ein, so erhalten wir unsere gewünschte Formel:

$$R_{\varphi\vec{n}}(\vec{x}) = \vec{x} \cos(\varphi) + (\vec{n} \times \vec{x}) \sin(\varphi) + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x})(1 - \cos \varphi).$$

(3.11.17) Inspektion zeigt: Die Formel bleibt korrekt, wenn \vec{n} und \vec{x} dieselbe Richtung haben. Überdies verdeutlicht ein Einheitenvergleich Notwendigkeit und Sinn des Faktors $(\vec{n} \cdot \vec{x})$. Damit haben wir eine explizite Formel für die Operation der Drehgruppe auf den Ortsvektoren.

4.3.11e Das n -dimensionale Tetraeder - Ein Beispiel für das Programm der analytischen Geometrie

(3.11.18) Das Tetraeder ist ein regelmäßiger dreidimensionaler Körper. Seine Oberfläche besteht aus 4 gleichseitigen Dreiecken. Den ebenso regelmäßigen Würfel kann man im Rahmen der analytischen Geometrie problemlos auf n Dimensionen ausdehnen. Man geht in den \mathbb{R}^n und bildet dort die Mengen

$$W_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq a \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Die Eigenschaften dieser Mengen kann man leicht herleiten und geometrisch interpretieren.

(3.11.19) Mit dem Tetraeder ist das schwieriger, weil dessen Kanten nicht mit den Koordinatenachsen des \mathbb{R}^n übereinstimmen. Die Kantenvektoren scheinen sich nicht auf naheliegende Weise vektoriell darstellen zu lassen. **Folgende Idee hilft weiter:** Einen einfacheren Fall erhält man in zwei Dimensionen. Das zweidimensionale Analogon zum Tetraeder ist offensichtlich das gleichseitige Dreieck. Läßt sich dieses einfach vektoriell darstellen? Nicht im \mathbb{R}^2 . Dort hat man wieder Probleme mit den Winkeln. Wohl aber im \mathbb{R}^3 : **Wir verbinden die drei Endpunkte der Einheitsvektoren miteinander.** Das ergibt ein gleichseitiges Dreieck. Die Symmetrie der Figur ist offensichtlich. Die Kantenvektoren sind die Differenzvektoren der Einheitsvektoren! Die Endpunkte der Einheitsvektoren spannen eine (nicht durch den Ursprung gehende) Ebene auf, und das Dreieck ist eine Teilmenge darin. Man kann die Ebene mit der Dreipunkteformel parametrisieren und die Parameterwerte für die Dreieckspunkte festlegen. Günstig ist es, die Dreieckspunkte physikalisch als mögliche Massenschwerpunkte zu interpretieren: Also als Linearkombinationen

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 \quad \text{mit} \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \Sigma \alpha_i = 1.$$

(3.11.20) Und diese Konstruktion läßt sich nun problemlos verallgemeinern. Das übliche (räumliche) Tetraeder etwa stellen wir im \mathbb{R}^4 dar. Wir erhalten 4 Eckpunkte, 6 Differenzvektoren = Kanten wie erwünscht. Usw. Beachten Sie: Das Tetraeder liegt dann in einem dreidimensionalen parallel verschobenen Teilraum des \mathbb{R}^4 , der nicht durch den Ursprung geht und schräg zu den Koordinatenebenen liegt.

(3.11.21) Jetzt gehen wir die gesamte Konstruktion genauer durch, und zwar für n Dimensionen.

(3.11.22) Im \mathbb{R}^{n+1} haben wir die kanonische Basis \vec{e}_i . Wir lassen i von 0 bis n laufen. (Anzahl $n+1$! $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ usw.). Jetzt parametrisieren wir den n -dimensionalen verschobenen Teilraum, der von den Endpunkten der \vec{e}_i , aufgespannt wird. Als Aufpunktvektor nehmen wir \vec{e}_0 . Dazu die n Richtungsvektoren $\vec{E}_i = \vec{e}_i - \vec{e}_0$ für $i = 1, 2, \dots, n$. Das gibt als Parametrisierung des verschobenen Teilraumes

$$\pi_n = (\mathbb{R}^n, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mapsto \vec{e}_0 + \alpha_1 \vec{E}_1 + \alpha_2 \vec{E}_2 + \dots + \alpha_n \vec{E}_n, \mathbb{R}^{n+1})$$

(3.11.23) Die gesuchte Tetraedermenge ist Teilmenge von $\text{Bild}(\pi_n)$. Die Parameter sind einzuschränken. Wieder nehmen wir die Schwerpunktsinterpretation, bringen also in jedem Eckpunkt eine Masse m , an, setzen $M = \Sigma m$, $\alpha = m/M$ und bestimmen den Schwerpunkt. Das Ergebnis ist folgende Darstellung der Tetraedermenge:

$$T_n = \{\alpha_0 \vec{e}_0 + \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n \mid \alpha_i \geq 0 \text{ für } i = 0, \dots, n \text{ und } \Sigma_{i=0}^n \alpha_i = 1\} \subset \text{Bild}\pi_n.$$

(3.11.24) Den Schwerpunkt des Tetraeders können wir sofort angeben. Aus Symmetriegründen hat er die Richtung $(1, 1, \dots, 1)$. Ein derartiger Vektor liegt nur für $\alpha_i = 1/(n+1)$ in T_n . Also:

$$\vec{x}_S = \frac{1}{n+1}(1, 1, \dots, 1) \quad \text{der Ortsvektor des Mittelpunktes des Tetraeders.}$$

(3.11.25) Diesen Punkt S führen wir als neuen Ursprung ein. Insbesondere sind dann $\vec{R}_i = \vec{E}_i - \vec{x}_S$ die Ortsvektoren der Tetraedereckpunkte (von S aus)! Es gibt $n+1$ Eckpunkte für $i = 0, \dots, n$. Diese Vektoren berechnen sich zu:

$$\vec{R}_i = \frac{1}{n+1}(-1, -1, \dots, n, -1, \dots, -1) \quad \text{mit } n \text{ an der } i\text{-ten Stelle.}$$

(3.11.26) Damit haben wir die Ortsvektoren aller Eckpunkte! Ihre Summe ist 0, wie es aus Symmetriegründen zu erwarten ist. Diese $n+1$ Vektoren bilden ein Erzeugendensystem, aber keine Basis des Teilraumes (in dem das Tetraeder liegt).

(3.11.27) Die Oberfläche von T_n erhalten wir durch Nullsetzen einer Koordinate. Denn genau an diesen Stellen wechselt die Bedingung für die Punkte aus T_n von erfüllt zu nicht erfüllt! Das zeigt sofort, daß die Oberfläche aus $n+1$ Tetraedern der Dimension $n-1$ besteht. Usw.

(3.11.28) Weitere Überlegungen und Präzisierungen kann man bei Bedarf problemlos durchführen.

Nur eine Aufgabe ist mühsamer: Im Tetraederteilraum eine kartesische Basis zu konstruieren.

(???) Was ergibt sich im Falle $n = 1$?

(???) Bestimmen sie den "Tetraederwinkel", Also den Winkel zwischen den Ortsvektoren zweier Eckpunkte. Wird der Winkel mit zunehmender Dimension größer oder kleiner? Kann man das verstehen?

(???) Von einem Punkt gehen drei fest im Boden verankerte Stäbe aus. Auf den Punkt wirkt eine Kraft \vec{F} . Wie groß müssen die Reaktionskräfte der drei Stäbe sein, damit Gleichgewicht herrscht? Lassen sich diese drei Kräfte bei Vorgabe der geometrischen Konfiguration bestimmen? Welche Vereinfachung tritt ein, wenn die Stäbe eine gleichseitige Pyramide bilden und die Kraft senkrecht nach unten wirkt?

4.4 Lineare Abbildungen: Allgemeine Eigenschaften und Quantifizierung

4.4.0 Vorbemerkung und Übersicht

(4.0.1) Basen und lineare Abbildungen bilden das Handwerkszeug für die Arbeit mit Vektoren. Existenz und Struktur von Basen in endlichdimensionalen Vektorräumen sind im vorangegangenen Teil geklärt. Über die linearen Abbildungen brauchen wir noch weitere Kenntnisse. Insbesondere steht die Frage an: **Wie**

quantifiziert man lineare Abbildungen? D.h. wie legt man eine bestimmte lineare Abbildung durch Zahlangaben fest, so wie man einen geometrischen Pfeil durch seine Koordinaten (in Form seines Koordinatenvektors) festlegt? Zumindest im endlichdimensionalen Fall. Der geistige Gehalt dieser Überlegungen ist nicht allzu groß, zumindest nicht vergleichbar mit dem der Analyse des Dimensionsbegriffs. Aber die praktische Bedeutung ist enorm.

(4.0.2) Zur Durchführung ist allerdings ein größerer formaler Aufwand erforderlich. Schreibt man nämlich die Rechnungen aus, so nehmen sie bald riesigen Umfang an. Es entsteht arbeitsaufwendige und unnötige Schreibarbeit. Man benötigt einen Formalismus, der die Schreibarbeit reduziert und zugleich das Wesentliche der Rechnungen herausarbeitet. Zwei Kalküle, die das leisten, sind im Gebrauch. Der *Matrixkalkül* und der *Indexkalkül*. Besonders beim zweiten Kalkül sind bestimmte Konventionen und Regeln einzuhalten, damit der Indexkalkül seinen vollen Nutzen entfaltet. Das Anwendungsspektrum beider Kalküle ist breit. In vielen Fächern ist der Matrixkalkül gebräuchlich. Er ist jedoch weniger flexibel als der Indexkalkül und führt spätestens bei der Tensorrechnung zu Problemen, die der Indexkalkül problemlos bewältigt.

(4.0.3) Studienanfänger haben vielfach Schwierigkeiten, sich schematisch - sagen wir ruhig **stur** - an solche Regeln und Konventionen zu halten, d.h. insbesondere sie sich zu merken. Darum sollte man sich gezielt um das Verstehen und Merken und Verwenden dieser Regeln bemühen.

(4.0.4) Vier größere Fragenkomplexe stehen im Zusammenhang mit dem genaueren Verständnis der linearen Abbildungen an:

1. Die quantitative Beschreibung linearer Abbildungen
2. Die allgemeinen Eigenschaften linearer Abbildungen, im Sinne der Eigenschaften von Räumen linearer Abbildungen
3. Die Strukturanalyse einzelner Homomorphismen
4. Die Beziehung zwischen Basiswechsel und linearen Abbildungen.

(4.0.5) Zunächst zu 1) und 2). Problem 1) beschäftigt sich mit der Frage: Wie kann man einen Homomorphismus durch Zahlangaben eindeutig festlegen und wie viele solcher Zahlangaben braucht man? (So wie geometrische Vektoren durch die Zahlangaben der Koordinatenvektoren quantifiziert wurden.) Die Beantwortung dieser Frage stellt den Zusammenhang zwischen Vektor- und Matrixrechnung her. Mit den gewonnenen Resultaten folgt dann 2). Zu Thema 3) haben wir bereits die Kenntnisse über Kern und Bild. Die zugehörige Analyse wird später in der Eigenwerttheorie in Kap. 12 fortgesetzt und vertieft. 4) folgt im Anschluß an 1) und 2) im vorliegenden Kapitel. Kapitel 11 über das Transformationsverhalten physikalischer Größen wird die Behandlung vertiefen.

1) und 2) hängen eng miteinander zusammen. Die Entwicklung und Übung des Rechenkalküls koppeln wir an die Behandlung dieser beiden Fragen. Thema 4) ist für viele Anwendungen in der Physik wichtig. Das Teilkapitel 4.4.6 wird die zugehörigen Grundlagen bereitstellen.

(4.0.6) Zur Einstimmung sei nochmals an die Quantifizierung geometrischer Pfeile aus V_0^3 erinnert. Man wählt eine kartesische Basis $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Das legt ein kartesisches Koordinatensystem K fest. Die zugehörige Linearkombinationsabbildung $L_e : \mathbb{R}_K^3 \rightarrow V_0^3$ ist ein Isomorphismus. Die Umkehrabbildung bezeichnen wir mit D_e . Sie stellt die geometrischen Pfeile als Zahl tupel dar! Dem Ortsvektor wird der Koordinatenvektor zugeordnet. Genauer: $D_e = (V_0^3, \vec{x} \mapsto \vec{x}^K, \mathbb{R}_K^3)$. **Analog dazu sollen jetzt lineare Abbildungen durch geeignete Zahl tupel dargestellt werden.**

4.4.1 Der Matrixkalkül

(4.1.1) Allgemein akzeptierter Standard für quantitatives Rechnen mit vektoriellen Größen ist der Matrixkalkül. Auf ihn müssen wir unsere Quantifizierungen beziehen. **Genauer gesagt, müssen wir den Formalismus (zur Beschreibung linearer Abbildungen) so gestalten, dass die üblichen Matrixformeln für Komponententupel als Ergebnis herauskommen.** Das begründet viele Konventionen. Ausgangspunkt für beide Kalküle - Matrix- und Indexkalkül - ist die axiomatische Vektorrechnung.

(4.1.2) Was ist eine Matrix? Wir setzen $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Das ist die übliche n -elementige Indexmenge. Dann verstehen wir unter einer $m \times n$ -Matrix mit Werten in der Menge K zunächst einmal eine Abbildung

$$M = (I_m \times I_n, (i, j) \mapsto M_{ij}, K) \quad \text{d.h.} \quad M \in \mathcal{F}(I_m \times I_n, K).$$

Beispiel einer 3×4 -Matrix mit Werten in \mathbb{Z} . Beispiele für Komponenten: $M_{14} = 3, M_{31} = -7, M_{11} = 1$	$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ -7 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
--	---

Die beste Veranschaulichung einer solchen Abbildung erfolgt vom Feldstandpunkt aus. Der Urbildraum repräsentiert $m \cdot n$ Feldpunkte, deren Lage von zwei unabhängigen Eigenschaften bestimmt wird. Die erste Eigenschaft wird durch den *Zeilenindex* $i \in I_m$ repräsentiert. Die zweite durch den *Spaltenindex* $j \in I_n$. Jeder Feldwert ist ein Element aus K . Und K ist im Prinzip eine beliebige Menge, im Augenblick unser Ring oder Körper. Den Feldwert an der Stelle (i, j) nennt man die (i, j) -te *Komponente von M*. **Merken Sie sich:** Der erste (zu m gehörige) Index gibt die Zeilennummer, der zweite zu n gehörige die Spaltennummer.

Zusammenfassung: Eine **Matrix** ist eine Familie von Elementen einer Menge X , deren Elemente durch zwei unabhängige Eigenschaften indiziert sind. Die erste Eigenschaft bestimmt die **Zeilen**, die zweite die **Spalten** der Matrix. Als Indexmenge wählt man üblich $I_m \times I_n$. Die Elemente selbst sind die **Komponenten** der Matrix
 Zutatenformel: **Eine $m \times n$ -Matrix mit Werten in X .**

(4.1.4) Vektoren aus K^r sind Spezialfälle von Matrizen mit $m = r$ und $n = 1$. Aber auch ein Tupel $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_N)$ von Vektoren aus einem Vektorraum V ist als Matrix interpretierbar. Eine Basis von V ist somit eine V -wertige $1 \times n$ -Matrix.

(4.1.5) Für K wählen wir jetzt den Vektorraum K^n . Dann ist nach der allgemeinen Methode der Wertemengenübertragung $\mathcal{F}(I_m \times I_n, V)$ ein Vektorraum über K . Die Verknüpfungen erfolgen komponentenweise, so als wäre eine Matrix nur ein etwas eigenartig geschriebenes Element von K^N mit $N = n \cdot m$. (Wählt man $K = R$ mit einem Ring R , liegt entsprechend ein Modul vor.) Nochmals: die Dimension dieses Raumes ist $n \cdot m$. Eine Basis erhält man bei Bedarf leicht durch die kanonische Basis des K^N . Alle Räume K^n schreiben wir als Linksräume, solange nichts Gegenteiliges gesagt wird.

(4.1.6) Ein Beispiel einer vektoriellen Rechnung mit einer Matrix:

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= (-4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Resultat ist die Darstellung der Matrix als Linearkombination der kanonischen Basis.

4.4.1a Die Abbildungsinterpretation einer Matrix

(4.1.7) Eine derartige Matrix definiert aber auch noch etwas anderes, nämlich eine Abbildung $K^n \rightarrow K^m$. Wir definieren den Wert- oder wenn man will das "Produkt" - $M(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$ nach der Regel *Zeile mal Spalte*
 \therefore

Das erzeugt eine Abbildung, die wir auch mit M bezeichnen wollen. Also

$M = (K^n, \vec{x} \mapsto M \cdot \vec{x}, K^m)$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y - 1z \\ 4x + 0y + 1z \end{pmatrix}$
---	--

(4.1.8) Beachten Sie die "vertauschte" Reihenfolge der beiden Zahlen m und n im Abbildungstripel. Die Urbildmenge gehört zu n !

(4.1.9) Wir werden unten zeigen, dass M **stets linear ist**. Meist identifiziert man Matrix und Matrixabbildung. Nochmals der wichtige Sachverhalt, dass eine Matrix je nach Situation in zwei Rollen auftreten kann:

- Als Abbildung $M : I_m \times I_n \rightarrow K$ vom Feldtyp, die der "Hausnummer" (i, j) den Feldwert M_{ij} zuordnet oder
- (sofern K Ring oder Körper) als lineare Abbildung $M : K^n \rightarrow K^m$.

4.4.2 Der Indexkalkül

(4.2.1) Für den Beweis, dass Matrixabbildungen linear sind, verbessern wir zunächst einmal unseren Formalismus durch Einführung des Indexkalküles. Diesem liegt das folgende Prinzip zugrunde:

(4.2.2)

Grundidee des Indexkalküls für Moduln und Vektorräume:

- ◆ Alle Rechnungen mit Matrizen und Koordinatenvektoren sollen möglichst in Rechnungen für die Komponenten umgewandelt werden. Denn dann kommt man vollständig mit den Rechenregeln für Körper und Ringe aus.
- ◆ Statt etwa mit dem Koordinatenvektor $\vec{x}^K = (x_i)$ zu rechnen, rechnet man mit der allgemeinen Koordinate x_i , wobei i als äußerer Parameter anzusehen ist. x_i ist ein reines Körper- oder Ringelement, also algebraisch ein Skalar.
- ◆ Eine eigene spezifische Vektor- und Matrixrechnung wird so nicht benötigt.

(4.2.3) Das folgende Schema zeigt exemplarisch, wie man durch Umschreiben und Fortlassen von Information, die aus dem Kontext ersichtlich ist, vom allgemeinen Rechenausdruck einmal zur Matrixformulierung und einmal zur Indexformulierung gelangt. Als Ausgangspunkt wählen wir ein lineares Gleichungssystem. Vgl. auch 4.(1.6.22).

$\vec{y} = M \cdot \vec{x}$	Matrixgleichung
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3 \\ M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + M_{23}x_3 \end{pmatrix}$
\Rightarrow Ausgangsform , Start :	$y_1 = M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3$ $y_2 = M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + M_{23}x_3$
$(x_j)_{j=1, \dots, n} \mapsto (y_i)_{i=1, \dots, m} = (\sum_{j=1}^n M_{ij}x_j)_{i=1, \dots, m}$	$n = 3, m = 2$, Familienschreibweise.
$y_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}x_j$	Indeschreibweise

(4.2.4) Man sieht: Im Matrixformalismus werden die Komponenten zu neuen, hierarchisch höheren Gebilden, den Matrizen zusammengefaßt, für die man dann eigene Rechenregeln wie die der Matrixmultiplikation zu entwickeln hat, während man im Indexkalkül alles auf Körperelemente zurückführt, für die man ja bereits die Rechenregeln des Körpers hat und verwenden kann. Die Unterscheidung der Komponenten und die Zusammenfassung zu hierarchisch höheren Gebilden erfolgt über Indizes mit den Rollen von äußeren Parametern und Variablen.

(4.2.5) Wenn man aus dem Kontext weiß, welche Werte die einzelnen Indizes zu durchlaufen haben - und das sollte man sich zu Beginn einer Rechnung verdeutlichen - enthält die unterste Zeile des Schemas dieselbe Information wie die Ausgangszeile bzw. die Matrixgleichung. Die unterste Zeile steht wegen des äußeren Parameters i für das gesamte Gleichungssystem. Alle Terme sind reine Körpert Terme, während oben in $M \cdot \vec{x}$

eine neue Multiplikation zur Termbildung erforderlich ist. Eine Erhöhung der Dimensionen vergrößert den Schreibaufwand in der Ausgangsformulierung stark, wogegen Matrix- und Indexformulierung praktisch unverändert bleiben. Der Summenzeichenformalismus aus Kap-1.2.15 wird beim Indexkalkül ausgiebig benutzt.

Die Beziehung zwischen den beiden Kalkülen stellen wir meist durch Gleichungen des Typs $\vec{x} = (x_i)$ her. Rechts wird ein Komponententupel gebildet und als Matrix interpretiert, die dann abgekürzt durch \vec{x} bezeichnet wird. Läßt man die Tupelklammer fort, schreibt also x_i dann ist man im Indexkalkül, sofern man i als äußeren Parameter interpretiert!

4.4.2a Die Linearität der Matrixabbildung

(4.2.5) Als Anwendungsbeispiel beweisen wir mit Hilfe des Indexkalküls, dass die oben eingeführte Matrixabbildung M stets linear ist. Zu zeigen ist

$$? \quad M(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w}) = \alpha M\vec{u} + \beta M\vec{w} \quad ?$$

Links führen wir die Bezeichnungen für auftretende Tupel ein, rechts führen wir die Rechnung für die Komponenten aus.

$\vec{y} = M(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w})$ mit $\vec{u} = (u_i)$ und $\vec{w} = (w_i)$ $\vec{y} = M(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w})$ $\alpha\vec{u} + \beta\vec{w} = (\alpha u_i + \beta w_i)$ $\vec{s} = (s_i) = \alpha M\vec{u}$ und $\vec{t} = (t_i) = \beta M\vec{w}$	$y_i = \sum_j M_{ij}(\alpha u_j + \beta w_j)$ $= \sum_j (\alpha M_{ij} u_j + \beta M_{ij} w_j)$ $= \alpha \sum_j M_{ij} u_j + \beta \sum_j M_{ij} w_j$ $= s_i + t_i$ für $i = 1, \dots, n$
--	--

Rechts ist $\vec{y} = \vec{s} + \vec{t}$ bewiesen, d.h. $M(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w}) = \alpha M\vec{u} + \beta M\vec{w}$. Das liefert die gewünschte Linearität.

(4.2.6) Alle Rechenschritte sind reine Rechnungen im Operatorbereich K . Alle fehlende Information über mögliche Werte der Indizes läßt sich leicht aus dem Kontext ergänzen. Die Indexformulierung gibt nur die für die Rechnung relevante Information wieder.

(4.2.7) Wer Schwierigkeiten im Nachvollziehen der Rechnung hat, sollte alles für $m = 2$ und $n = 3$ anschreiben. Er wird bereits für diesen niedrigen Fall die Ersparnis an Schreiarbeit durch den Indexkalkül würdigen können. Und falls er dann noch nicht überzeugt ist, schreibe er einmal den Fall 5×4 aus.

4.4.2b Die Konventionen des Indexkalküls

(4.2.8) Der Indexkalkül ist - sobald man ihn einmal beherrscht - sehr effizient. Die Gründe haben wir angedeutet. Wenn man mit ihm arbeitet, ist er so machtvoll, dass es durchaus vorkommt, dass die Rechnung dem Denken voraus ist.

(4.2.9) Damit der Formalismus klappt, muss man allerdings gewisse Konventionen und Vorsichtsmaßnahmen einhalten, an die wir uns nachfolgend immer halten werden. Tut man das nicht, produziert man rasch Unfug oder kommt nicht weiter.

Konventionen zum Indexkalkül (Teil I):

◆ Die Koordinatenräume K^n werden als **Linksvektorräume** geschrieben, sobald sie in der Rolle von Parameterräumen auftreten, was fast immer der Fall ist. D.h. als Urbildmenge einer Linearkombinationsabbildung. Alle zugehörigen Tupel sind Spaltenvektoren.

Also

$$3\vec{x}^K = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ nicht } \vec{x}^K 3.$$

◆ **Alle anderen geometrischen Vektorräume werden als Rechtsvektorräume** geschrieben. D.h. die typische Basisdarstellung hat immer die Form:

$$\vec{x} = \sum_j \vec{b}_j x_j = \vec{b}_1 x_1 + \dots + \vec{b}_n x_n, \text{ nicht mehr } 3\vec{a} - 7\vec{b}!$$

Eine Linearkombinationsabbildung führt daher immer von einem Linksraum in einen Rechtsraum:
 $L : K^n \rightarrow V$.

◆ Vorgabe eines Koordinatensystems S bedeutet, dass man in **allen** am Problem beteiligten Räumen eine Basis vorgibt. Wie üblich kennzeichnen wir zugehörige Koordinatengrößen durch einen Index S .

Ist also b eine zu S gehörige Basis und $\vec{x} = \sum \vec{b}_i x_i$, dann ist $\vec{x}^S = (x_i)$ der zugehörige Koordinatenvektor.

◆ Ein Index, der als äußerer Parameter auftritt, heißt *laufender oder freier Index*. Er läuft über die Indexmenge einer der beteiligten Basen. Ein freier Index steht immer auf beiden Seiten einer Gleichung des Indexkalküls der Gleichung (Merkmal!). In der Gleichung

$$M_{ij} = 3N_{ij} + 5x_i y_j$$

sind i und j freie Indizes. Die Skalare 3 und 5 stehen links.

◆ Ein Index, über den summiert wird, heißt *stummer Index*. Auch er bezieht sich auf eine der beteiligten Basen. Ein stummer Index tritt - von ganz seltenen Ausnahmen abgesehen - in der Summe, zu der er gehört, immer doppelt auf. Sonst (außerhalb der Summe) kommt er nicht vor. (Das Vorkommen am Summenzeichen wird nicht gezählt!) In der folgenden Gleichung ist k stummer Index:

$$C_{ij} = 3 \sum_k M_{ik} N_{kj} + 5 (\sum_k a_k a_k) x_i y_j.$$

Im Rahmen der Matrixrechnung ist es in der Regel so, dass **zwischen** den beiden Vorkommen eines stummen Index kein weiterer Index steht. Diese Indexstruktur spiegelt die Regel Zeile mal Spalte der Matrixrechnung wider. Also

$$\sum_k M_{ik} N_{kj} \quad \text{aber nicht ohne Grund} \quad \sum_k N_{kj} M_{ik}.$$

◆ Von allen Rechenregeln des Körpers sollte man das Kommutativgesetz der Multiplikation so lange wie möglich meiden. Nie Faktoren vertauschen, ohne dass ein besonderer Grund vorliegt! Denn beim Vertauschen der Faktoren wird die Indexreihenfolge verändert, und das ist in der Regel nicht gut.

Die Formeln des nachfolgenden Abschnitts werden konkrete Beispiele für die Verwendung dieser Regeln liefern.

4.4.3 Die Fundamentalidentität einer linearen Abbildung

(4.3.1) Wir kommen jetzt zu einer Rechnung, für die wir den Indexkalkül verwenden, ja benötigen. Diese Rechnung tritt im Zusammenhang mit linearen Abbildungen häufig auf. Mit ihrer Hilfe klärt sich das Quantifizierungsproblem im endlichdimensionalen Fall rasch. Ohne diesen Kalkül - also ausgeschrieben - nimmt die zugehörige Rechnung eine enorme Länge an. Mit dem Indexkalkül sind es knapp zwei Zeilen.

Wir nennen die entstehende Gleichung *Fundamentalidentität für lineare Abbildungen*.

(4.3.2) Achten Sie darauf, **dass jeder Rechenschritt in der Rechnung irgendwie notwendig, zwangsläufig ist**. Man kommt auf eben diese und nur diese Weise weiter. Allerdings sind es bereits eine ganze Reihe von Schritten, die zusammen die Rechnung ausmachen.

(4.3.3) Szenenbild und Rechnung sehen wie folgt aus:

Das Szenenbild	
Seien	V, W Vektorräume über dem kommutativen Körper K . $\Phi : V \rightarrow W$ sei linear. $\dim V = n < \infty$, $\dim W = m < \infty$. b Basis von V und c Basis von W . $b = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ und $c = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m)$ $\vec{x} \in V$ und $\Phi : \vec{x} \mapsto \vec{y} = \Phi(\vec{x})$ mit $\vec{y} \in W$.
Die Rechnung	mit dem Ziel einer Formel für den Wert $\vec{y} = \Phi(\vec{x})$. $\vec{y} = \Phi(\vec{x}) \stackrel{(1)}{=} \Phi(\sum_i \vec{b}_i x_i) \stackrel{(2)}{=} \sum_i \Phi(\vec{b}_i) x_i \stackrel{(3)}{=} \sum_i (\sum_k \vec{c}_k M_{ki}) x_i \stackrel{(4)}{=} \sum_{ik} \vec{c}_k M_{ki} x_i \stackrel{(5)}{=} \sum_k \vec{c}_k (\sum_i M_{ki} x_i) \stackrel{(6)}{=} \sum_k \vec{c}_k y_k$
Vergleich	$y_k = \sum_i M_{ki} x_i$

(4.3.4) Gehen wir die Schritte der Rechnung durch. Bei (1) wird die **Basisdarstellung** von \vec{x} eingesetzt. (Etwas anderes kann man mit \vec{x} hier nicht tun. Aber die eindeutige Basisdarstellung folgt sofort aus dem Szenenbild! Das Einsetzen der jeweiligen Basisdarstellung ist ein in diesem Kalkül immer zu vollziehender Schritt).

Bei (2) verwenden wir die **Linearität** von Φ . D.h. Summenzeichen und die Skalare x_i werden aus der Von-Klammer herausgezogen. Vektoren müssen drin bleiben. Die Reihenfolge der Faktoren wird nicht geändert.

Bei (3) müssen wir wieder auf unser Szenenbild zurückgreifen: Für jedes i ist $\Phi(\vec{b}_i)$ ein Vektor aus W . Also läßt er sich eindeutig als **Linearkombination der Basis** c schreiben! Die Komponenten hängen vom äußeren Parameter i und von Indexwert k des Basisvektors \vec{c}_k ab. Wir **bezeichnen** diese Komponente mit M_{ik} , so dass die Basisdarstellung lautet:

$$\Phi(\vec{b}_i) = \sum_k \vec{c}_k M_{ki} \quad \text{Merken!}$$

Beachten Sie, wie wir durch die Wahl der Bezeichnung unsere Indexkonventionen erfüllen. Über die Komponentenbezeichnung wird eine $m \times n$ -Matrix $M = (M_{ki})$ eingeführt. Die gefundene Darstellung für $\Phi(\vec{b}_i)$ wird in Schritt (3) eingesetzt.

In Schritt (4) werden die Rechenregeln für Vektoren benutzt, um **Klammern aufzulösen und die Reihenfolge der Summanden zu ändern**. Das Ergebnis ist eine **Doppelsumme**.

Man möchte eine Linearkombination der Basis c haben. Die Umformung (5) leistet das: **Ausklammern von \vec{c}_k !**

Mit (6) schließlich steuert man auf Koeffizientenvergleich zu: $\Phi(\vec{x})$ ist ja ein Element aus W und muß daher eine eindeutige Basisdarstellung besitzen, das im Szenenbild \vec{y} genannt wurde. Dessen gesuchte Komponenten werden mit y_k bezeichnet. In der letzten Zeile ist das Ergebnis des Koeffizientenvergleichs im Indexkalkül gegeben.

(4.3.5) Damit man einmal die Ersparnis an Schreibearbeit durch die Indexschreibweise sieht, schreiben wir die Umformungen der Schritte (3) und (4) - und nur diese! - für $n = 4$ und $m = 2$ konkret aus.

$$\begin{aligned} \sum \Phi(\vec{b}_i)x_i &= \Phi(\vec{b}_1)x_1 + \Phi(\vec{b}_2)x_2 + \Phi(\vec{b}_3)x_3 + \Phi(\vec{b}_4)x_4 \\ &= (\vec{c}_1 M_{11} + \vec{c}_2 M_{21})x_1 + (\vec{c}_1 M_{12} + \vec{c}_2 M_{22})x_2 + \\ &\quad + (\vec{c}_1 M_{13} + \vec{c}_2 M_{23})x_3 + (\vec{c}_1 M_{14} + \vec{c}_2 M_{24})x_4 \\ &= \vec{c}_1 M_{11}x_1 + \vec{c}_2 M_{21}x_1 + \vec{c}_1 M_{12}x_2 + \vec{c}_2 M_{22}x_2 + \\ &\quad + \vec{c}_1 M_{13}x_3 + \vec{c}_2 M_{23}x_3 + \vec{c}_1 M_{14}x_4 + \vec{c}_2 M_{24}x_4 \\ &= \vec{c}_1 (M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3 + M_{14}x_4) + \\ &\quad + \vec{c}_2 (M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + M_{23}x_3 + M_{24}x_4) \\ &= \vec{c}_1 y_1 + \vec{c}_2 y_2. \end{aligned}$$

(4.3.6) Man kann sich leicht vorstellen, was die gesamte Rechnung von 1-5 für Ausmaße annimmt, sobald sich die Dimensionen erhöhen. Vergewissern Sie sich, dass Ihnen klar ist, was die Umformungen (3) und (4) bedeuten und wie sie sich mit Hilfe der Summenzeichen schreiben.

(4.3.7) Der Koeffizientenvergleich am Ende der Rechnung kann in Matrixform gebracht werden. Das Koordinatensystem mit den Basen b und c werde mit S bezeichnet. Dann folgt:

$$\begin{array}{l} y_k = \sum M_{ki}x_i \qquad \vec{y}^S = M\vec{x}^S \\ y_k = \sum_i M_{ki}x_i \quad k = 1, \dots, m \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{m1} & \dots & M_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Links die Indexform, rechts die Matrixform des Resultates, oben in Kurzform, unten ausführlicher.

(4.3.8) Nach der gesamten Konzeption stehen M und x immer rechts von den Basisvektoren (Rechtsraum). Dagegen steht M links von den Komponenten x_i . Daher ist der zugehörige Parameterraum mit S sinnvollerweise als Linksraum angesetzt, wie in den Regeln (4.2.9) gefordert. Die generelle Reihenfolge ist bMx .

4.4.3a Die Diagrammform der Fundamentalidentität

(4.3.9) Wir stellen die Verhältnisse jetzt in Form eines Diagramms dar. Hierdurch wird Vieles übersichtlicher.

(4.3.10) Natürlich müssen alle Basiskonstruktionen als Abbildungen interpretiert werden. Die Vorgabe der beiden Basen b und c bedeutet, dass wir es mit den beiden Linearkombinationsabbildungen

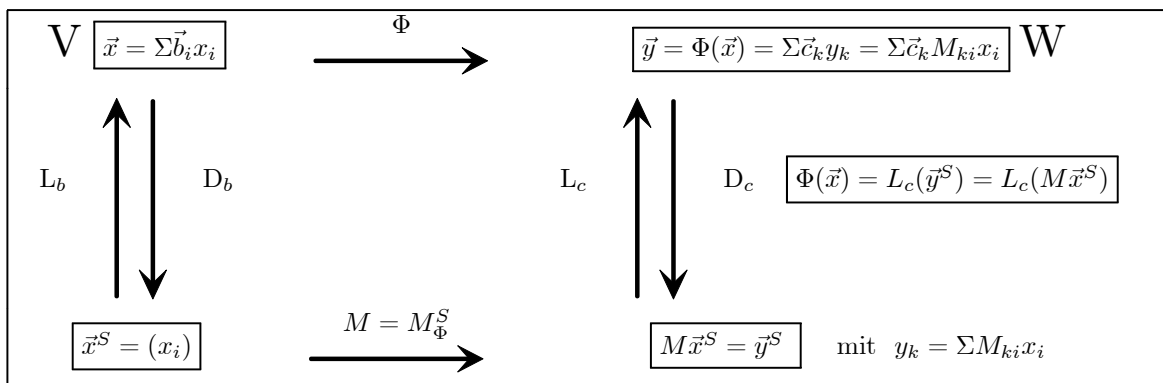
$$L_b = (K^n, \vec{x}^S = (x_i) \mapsto \sum \vec{b}_i x_i, V) \quad \text{und} \quad L_c = (K^m, \vec{y}^S = (y_k) \mapsto \sum \vec{c}_k y_k, W)$$

zu tun haben. Da Basen vorliegen, sind sie umkehrbar, bijektiv. Die Umkehrabbildungen sind Darstellungsabbildungen, sind vom Quantifizierungstyp. Wir bezeichnen sie mit D_b und D_c . Also :

$$D_b = (V, \vec{x} = \sum \vec{b}_i x_i \mapsto (x_i), K^n) \quad \text{und} \quad D_c = (W, \vec{y} = \sum \vec{c}_k y_k \mapsto (y_k), K^m)$$

Alle Tupel aus K^n sind jetzt vereinbarungsgemäß Spaltenvektoren.

(4.3.11) Zusammen haben wir folgendes **kommutative Diagramm**, das wir von jetzt ab gerne als Szenenbild verwenden. D.h. wir gehen die einzelnen Probleme meist so an, dass wir in diesem Diagramm eine bestimmte Rollenzuteilung für die einzelnen Größen vornehmen und davon ausgehend die anstehenden Fragen behandeln.



4.3b Die Quantifizierung einer linearen Abbildung durch eine Matrix

(4.3.12) Die gegebene Formel für $\Phi(\vec{x})$ beschreibt präzise, wie der Funktionswert mit Hilfe der basisabhängigen Beschreibungsgrößen $M = M^S$ und \vec{x}^S zu berechnen ist.

(4.3.13) Nachdem wir die Rechnung verstanden haben, fragen wir, was die Fundamentalidentität für unser Ziel, die Beziehung zwischen Matrizen und Homomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume zu klären, aussagt.

(4.3.14) Lesen wir die Identität einmal von links nach rechts. Dann sehen wir:

Wir können den Abbildungswert $\Phi(\vec{x})$ für beliebiges Urbild \vec{x} ausrechnen, sofern wir nur die Matrix M kennen. Als Formel : $\vec{x} \mapsto \Phi(\vec{x}) = \sum \vec{c}_k M_{ki} x_i$. D.h., wir haben ein allgemeines Berechnungsverfahren für den Wert $\Phi(\vec{x})$, wobei die Komponenten x_i als unabhängige Variable eingehen und der Rest die Rolle von Konstanten hat.

Für die Komponenten ist das gerade die Matrixformel $\vec{y}^S = M \vec{x}^S$. Wir erinnern daran, dass viele der Konventionen des Kalküls gerade so gefordert werden, dass am Ende diese durch den Matrixkalkül vorgegebene Formel herauskommt.

(4.3.15) Die für beide Formeln benötigte Matrix M bekommen wir mittels der Bilder der Basisvektoren \vec{b}_i . Die Matrixkomponenten waren ja definiert über $\Phi(\vec{b}_i) = \sum \vec{c}_k M_{ki}$. Das besagt aber für unsere Quantifizierungsfrage:

- ◆ Eine gegebene **lineare** Abbildung $\Phi : V \rightarrow W$ ist bereits vollständig bestimmt, wenn nur ihre Werte auf einer Basis des Urbildraumes bekannt sind.
- ◆ Definiert man M über $\Phi(\vec{b}_i) = \sum \vec{c}_k M_{ki}$, so berechnen sich die Koordinaten des Bildes $\Phi(\vec{x}) = \vec{y}$ über die Matrixgleichung

$$\vec{y}^S = M\vec{x}^S \quad \text{oder} \quad y_k = \sum M_{ki}x_i \quad k = 1, 2, \dots, m.$$
- ◆ Vektoriell geschrieben:

$$\vec{x} \mapsto \Phi(\vec{x}) = \sum \vec{c}_k M_{ki}x_i.$$

(4.3.16) Damit ist die gesamte Zuordnung von Φ , die für i.a. unendlich viele \vec{x} aus V Werte liefert, **auf die Angabe von $n \cdot m$ Zahlen zurückgeführt. Die Matrix M liefert eine quantitative Bestimmung unserer linearen Abbildung.** M ist die Koordinatendarstellung von Φ (bezüglich des Systems S).

Das ist ein bemerkenswertes Resultat, das zeigt, dass und wie man jede lineare Abbildung beherrscht, wenn man nur über die zugehörige Matrix M verfügt.

(4.3.17) Aber es geht auch umgekehrt. Jede Matrix legt eine zugehörige lineare Abbildung fest. Auch das zeigt die Fundamentalidentität. Aus dem Diagramm in (4.3.11) lesen wir nämlich folgenden Zusammenhang zwischen den beiden Größen ab:

$$\begin{aligned} \Phi &= L_c \circ M \circ D_b \\ M &= D_c \circ \Phi \circ L_b \end{aligned}$$

Da die Zusammensetzung linearer Abbildungen erneut linear ist, zeigt dies, dass die Beziehung $\Phi \mapsto M$ auch bijektiv ist.

Will man also eine lineare Abbildung $V \rightarrow W$ konstruieren, so genügt es, irgendeine $m \times n$ -Matrix M zu wählen und in die Fundamentalidentität einzusetzen. Das resultierende Φ - als Zusammensetzung linearer Abbildungen - ist dann linear. (Hier wird die Fundamentalidentität von rechts nach links gelesen).

(4.3.18) Wir nennen M "die den Homomorphismus Φ bezüglich S beschreibende Matrix". Wir schreiben für M auch $\boxed{\Phi^S}$, um anzudeuten, dass eine Koordinatendarstellung zu S vorliegt oder auch $\boxed{M_\Phi}$, wenn wir stärker den Matrixcharakter betonen wollen.

Matrizen sind (bei gegebenen Basen) dasselbe wie lineare Abbildungen in demselben Sinne, wie Koordinatenvektoren dasselbe wie geometrische Pfeile sind.

(4.3.19) Oder genauer formuliert:

Seien	die Basen b von V und c von W fest gewählt.
Dann	definiert $\Phi \mapsto \Phi^S = M_\Phi$ eine bijektive Beziehung zwischen linearen Abbildungen $\Phi : V \rightarrow W$ und $m \times n$ -Matrizen über K .
Φ gegeben:	Die Matrix Φ^S erhält man, indem man die n Vektoren $\Phi(\vec{b}_j)$ in W entwickelt.
M gegeben:	Das zugehörige Φ erhält man, indem man die Fundamentalidentität vor rechts nach links liest.

(4.3.20) Der zweite Punkt (Φ gegeben, M gesucht) wird vielfach in Anwendungssituationen benötigt, führt aber allzu häufig bei Anfängern zum Versanden der Aktivität. Immer wieder die Frage: "Wie soll ich das machen?" Daher die Antwort nochmals als **Kochrezept**:

Wie findet man die beschreibende Matrix eines Homomorphismus?

- ◆ Bestimme $\Phi(\vec{b}_i)$ in W für $i = 1, 2, \dots, n$.
- ◆ Stelle diese Vektoren als Linearkombinationen der Basis c dar.
Dann liefern die Koeffizienten der j -ten Gleichung die j -te
- ◆ **Spalte** der beschreibenden Matrix $\boxed{M = M_\Phi = \Phi^S}$.

- (4.3.21) Beispiel : $\lambda = (V_0^3, \vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}, V_0^3)$ ist offensichtlich linear (Bilinearität des Vektorproduktes). Wir wählen für V_0^3 eine kartesische Basis e , sowohl in der Urbild- als auch in der Wertemengenrolle.

Damit ist S festgelegt. Nach dem Kochrezept berechnen wir $\lambda(\vec{e}_j)$. Etwa

$$\lambda(\vec{e}_1) = \vec{a} \times \vec{e}_1 = \vec{e}_1 0 + \vec{e}_2 a_3 + \vec{e}_3 (-a_2) \quad \text{Rechtsschreibweise!}$$

Das gibt die erste Spalte der beschreibenden Matrix. (Nicht horizontal, wie in der Gleichung, vertikal!) Analog für $j = 2$. Damit folgt die beschreibende Matrix

$$M = M_\lambda = \begin{pmatrix} 0, & -a_3 & \dots \\ a_3 & 0 & \dots \\ -a_2 & a_1 & \dots \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die dritte Spalte selbst.

(4.3.22) Beispiel: V Vektorraum und a irgendeine Basis von V . Dann sind $id : \vec{x} \mapsto \vec{x}$ und $c_0 : \vec{x} \mapsto \vec{0}$ beides Homomorphismen $V \rightarrow V$. Für die beschreibenden Matrizen ergibt unser Rezept zwei Matrizen, die *Einheitsmatrix* und *Nullmatrix* genannt werden.

$$id^S = \begin{pmatrix} 1 & 0\dots & \dots 0 \\ 0 & 1\dots & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad c_0^S = \begin{pmatrix} 0 & 0\dots & \dots 0 \\ 0 & 0\dots & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(4.3.23) Beispiel: Wir betrachten die Drehung R_φ (in der Ebene \mathbb{R}_K^2) um den Winkel φ . Vgl. Kap.3.3.1a. Wir wissen nach 4.3.12d, dass eine lineare Abbildung vorliegt. Die Basis (\vec{e}_1, \vec{e}_2) sei kartesisch. Wir müssen gemäß Kochrezept $R_\varphi(\vec{e}_1)$ und $R_\varphi(\vec{e}_2)$ bestimmen. Eine Skizze zeigt $R_\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \cos(\varphi) + \vec{e}_2 \sin(\varphi)$ und $R_\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_1(-\sin(\varphi)) + \vec{e}_2 \cos(\varphi)$. Beachten Sie die Vorzeichenverteilung vor den Sinustermen, Sie läßt sich leicht über die Skizze zu merken: Für nicht zu große Winkel liegt $R_\varphi(\vec{e}_1)$ im ersten und $R_\varphi(\vec{e}_2)$ im zweiten Quadranten, was die Vorzeichen erklärt. Das Kochrezept gibt:

$$M_{R_\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

(4.3.24) Ein Beispiel für die andere Richtung der Fundamentalidentität, also Punkt 3 aus (4.3.19): Wieder wählen wir $V = W = \mathbb{R}_K^2$. Wieder sei (\vec{e}_1, \vec{e}_2) die Koordinatenbasis. Wir geben jetzt 2 weitere Vektoren $\vec{E} = \vec{e}_1 2 + \vec{e}_2 1$ und $\vec{F} = \vec{e}_1 1 + \vec{e}_2 2$ vor, die eine zweite Basis N des Raumes bilden. Nur für diese beiden Vektoren legen wir die Bildwerte fest, und zwar wie folgt:

$$\lambda(\vec{E}) = \vec{E} 2 = \vec{E} \cdot 2 + \vec{F} \cdot 0 \quad \lambda(\vec{F}) = \vec{F} \left(\frac{1}{2}\right) = \vec{E} \cdot 0 + \vec{F} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

Beachten Sie die folgende Besonderheit dieser speziellen Werte: Urbilder und Bilder haben dieselbe Richtung, unterscheiden sich nur in der Länge. Normalerweise unterscheiden Sie sich in Länge und Richtung. Wir schreiben die Räume als Rechtsvektorräume.

□ Fertigen Sie eine Skizze mit \vec{E}_1, \vec{E}_2 und $\vec{x} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ samt allen drei Bildvektoren!

Die (von rechts nach links gelesene) Fundamentalidentität gewährleistet, dass durch die beiden gemachten Vorgaben eine lineare Abbildung $\lambda : \mathbb{R}_K^2 \rightarrow \mathbb{R}_K^2$ eindeutig festgelegt wird. Für die Basis $N = (\vec{E}, \vec{F})$ können wir auch sofort die beschreibende Matrix gemäß Kochrezept angeben. Es ist eine *Diagonalmatrix*:

$$\lambda^N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Die Skizze zeigt, wie man über die Linearitätseigenschaft den Wert $\lambda(\vec{x})$ für beliebiges \vec{x} erhält.

Zur (kanonischen) Basis e gehört eine andere beschreibende Matrix, die man erhält, wenn man das Kochrezept auf \vec{e}_1 und \vec{e}_2 anwendet. Dazu benötigt man die folgenden Umrechnungsformeln, die man sofort verifiziert:

$\vec{E} = \vec{e}_1 2 + \vec{e}_2 1$	$\vec{e}_1 = \vec{E} \frac{2}{3} + \vec{F} \left(-\frac{1}{3}\right)$
$\vec{F} = \vec{e}_1 1 + \vec{e}_2 2$	$\vec{e}_2 = \vec{E} \left(-\frac{1}{3}\right) + \vec{F} \frac{2}{3}$

Es folgt mit Hilfe der vektoriellen Rechenregeln

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{e}_1) &= \lambda\left(\vec{E} \frac{2}{3} + \vec{F} \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \vec{E} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + \vec{F} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= (\vec{e}_1 2 + \vec{e}_2 1) \frac{4}{3} + (\vec{e}_1 1 + \vec{e}_2 2) \left(-\frac{1}{9}\right) = \vec{e}_1 \frac{5}{3} + \vec{e}_2 1 \\ \lambda(\vec{e}_2) &= \lambda\left(\vec{E} \left(-\frac{1}{3}\right) + \vec{F} \frac{2}{3}\right) = \vec{E} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \vec{F} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= (\vec{e}_1 2 + \vec{e}_2 1) \left(-\frac{2}{3}\right) + (\vec{e}_1 1 + \vec{e}_2 2) \frac{2}{9} = \vec{e}_1 (-1) + \vec{e}_2 0 \end{aligned}$$

Laut Kochrezept lesen wir hieraus die beschreibende Matrix bezüglich der kanonischen Basis e ab zu:

$$\lambda^e = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(4.3.25) Zur Übung sollten Sie jetzt einige Funktionswerte mit Hilfe dieser Matrix ausrechnen. Grundlage ist die Formel aus (4.3.7). Etwa:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{e}_1 2 + \vec{e}_2 1 \\ \vec{E}^e &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda^e \vec{E}^e = \dots = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{E}^e = (\lambda(\vec{E}))^e \end{aligned}$$

Führen Sie dasselbe für \vec{F} , für \vec{e}_1, \vec{e}_2 und $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ durch. ("Dasselbe" heißt: Berechnung des Funktionswertes mit Hilfe der Matrix λ^e .)

(4.3.26) Die **geometrischen Eigenschaften** der Abbildung λ , etwa die Besonderheiten der beiden Vektoren E und F , lassen sich aus dieser Matrix λ^e nicht mehr oder nur sehr mühsam ablesen. Sie ist für Rechnungen adäquat, nicht aber für die Analyse der geometrischen Struktur von λ . Aus λ^N dagegen läßt sich die Abbildungsgeometrie ablesen.

(4.3.27) Nochmals zu den geometrischen Eigenschaften von λ . Die Konstruktion in der Figur zeigt: Für alle Vektoren \vec{x} , die nicht auf den beiden von \vec{E} und \vec{F} erzeugten Geraden liegen, ändert sich beim Übergang zum Vektor $\lambda(\vec{x})$ die Richtung. Aber nicht wie im Falle einer Drehung immer gleichsinnig, sondern immer weg von der durch \vec{F} erzeugten, hin zu der durch \vec{E} erzeugten Geraden. Geometrisch liegt also etwas wesentlich anderes als eine Drehtransformation vor. Was wir hier soeben für λ gemacht haben, ist ein Einstieg in den eingangs genannten Problemkreis iii): Die Strukturanalyse individueller Homomorphismen.

(4.3.28) Ein Homomorphismus soll vorgegeben werden. Muss man dann immer eine beschreibende Matrix angeben? Inspiziert man die Fundamentalidentität oder (4.3.24), so sieht man, dass wegen der Linearität die **Werte auf einer Basis genügen**.

Korollar: Es seien V und W zwei Vektorräume über K . Weiter sei $b=(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und \vec{w}_i irgendwelche Elemente aus W für $i=1, \dots, n$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ mit $\varphi(\vec{b}_i) = \vec{w}_i$.

Legt man die Vektoren mit Hilfe einer Basis c von W fest, hat man die Vorgabe von φ durch eine beschreibende Matrix. Gelingt die Vorgabe ohne Basis, so liegt φ bereits fest.

(□ **F.**) Im \mathbb{R}^3 wählt man zur Beschreibung üblich die kanonische Basis. Jede zugehörige lineare Abbildung wird dann unmittelbar durch eine 3×3 -Matrix beschrieben. Ein Beispiel: Wir betrachten die durch $x + y = 0$ bestimmte Ebene. σ sei die Spiegelung an dieser Ebene. Wie sieht die beschreibende Matrix aus? (Auch hier stur (4.3.20) anwenden!).

Dasselbe für die durch $z = 0$ bestimmte Ebene.

(□ **F.**) Welche geometrische Interpretation hat umgekehrt die lineare Abbildung $\tau: \mathbb{R}_K^3 \rightarrow \mathbb{R}_K^3$, die durch folgende Matrix beschrieben wird:

$$M_\tau = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} ?$$

Welcher Unterschied besteht zur Drehmatrix? Hinweis: Was sind die Spalten laut Kochrezept?

4.4.4 Der Isomorphismus zwischen Homomorphismen und Matrizen

(4.4.1) Wir sollten unsere Beziehung zwischen linearen Abbildungen und Matrizen abstrahieren und zu einer vollen Abbildung ergänzen.

(4.4.2) Dazu benötigen wir die zugehörigen Mengen sowie einige neue Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \text{Mat}_K(m, n) &= \mathcal{F}(I_m \times I_n, K) = \text{Menge aller } m \times n\text{-Matrizen mit Wert in } K \\ \text{Hom}_K(V, W) &= \{\Phi | \Phi : V \rightarrow W \text{ linear}\} \subset \mathcal{F}(V, W) \end{aligned}$$

Die erste Menge (der Raum aller $m \times n$ -Matrizen) ist - wie in (4.1.5) besprochen - ein $m \cdot n$ -dimensionaler Vektorraum über K . Die zweite Menge (der Raum aller Homomorphismen $V \rightarrow W$) ist - wie man sofort sieht - ein Teilvektorraum von $\mathcal{F}(V, W)$. Letzterer ist Vektorraum per Wertemengentübertragung.

(4.4.3) Üben Sie sich im Decodieren solcher Sgmbole, die immer viel Information enthalten. $\text{Hom}_K(V_0^3, \mathbb{R}^1)$ etwa bedeutet: Der (dreidimensionale) Vektorraum aller linearen Abbildungen $V_0^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Ein typisches Element daraus ist $\vec{x} \mapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$. Dem Vektor wird eine Zahl zugeordnet, hier in Form eines Skalarproduktes. Die Bilinearität des Skalarproduktes sichert die Linearität. Auf der Matrixseite entspricht dem der Raum $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(1, 3)$, das ist der Raum reeller Zeilenvektoren wie $M = (1, 3, 4)$. In Kap.5.2 werden wir sehen, dass dem Vektorraum $\text{Hom}_K(V, K^1)$ allgemein eine große Bedeutung zukommt. Man nennt diesen Raum den **Dualraum von V** , und seine Elemente Linearformen. Als Kurzbegründung kann man sagen: **Jedes seiner Elemente legt eine einzelne lineare Bedingungsgleichung für die Vektoren von V fest.**

Übung: Was bedeuten $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_0^3, V^3)$ und $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(2, 2)$ und $\text{Hom}_K(K^1, V)$?

(4.4.4) Wir erwarten, dass die von $\Phi \mapsto \Phi^S$ erzeugte Abbildung ein Vektorraumisomorphismus ist.

(4.4.5) Damit folgt der **Satz**:

Es seien	V, W Vektorräume über K . Das Koordinatensystem S sei festgelegt durch je eine Basis b von V und c von W .
Dann	ist die aus der Fundamentalidentität resultierende Abbildung $(\text{Hom}_K(V, W), \Phi \mapsto \Phi^S, \text{Mat}_K(m, n))$ ein Vektorraumisomorphismus. Es gilt $\Phi^S = D_c \circ \Phi \circ L_b$.

Beweis: Die Zusammensetzung linearer Abbildungen ist erneut linear. Da D_c und L_b Isomorphismen sind, ist die Zuordnung umkehrbar.

(4.4.6) Das ist die (von uns gesuchte) Quantifizierungsabbildung für lineare Abbildungen! Sie entspricht völlig der Abbildung $(V_0^3, \vec{x} \mapsto x^K, \mathbb{R}_K^3)$, mit der wir die Ortsvektoren quantifizieren. Mit Hilfe dieser Abbildung ist das Quantifizierungsproblem für die linearen Abbildungen gelöst, jedenfalls für endlichdimensionale Vektorräume und für Moduln, die endliche Basen besitzen. In extremen Fällen, wenn eine feste ausgezeichnete Basis vorliegt, kann man Matrizen und lineare Abbildungen über diese Abbildung identifizieren. Ansonsten gilt immer: Der Isomorphismus ist nicht kanonisch, sondern basisabhängig, und daher ist eine generelle Identifikation unzweckmäßig.

(4.4.7) Um den Satz nutzbringend verwenden zu können, muß der Leser natürlich wissen, wie die Vektorraumstrukturen der beiden Räume definiert sind. Bei den Matrizen ist das die komponentenweise Verknüpfung, und bei den Homomorphismen ist es die punktweise Verknüpfung. Etwa $(\Phi + \Psi)(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}) + \Psi(\vec{x})$. Auch muß er sich klar machen, was alles an Information in der Floskel "ist ein Isomorphismus" steckt.

(4.4.8) Wie formuliert sich die komponentenweise Matrixaddition im Indexkalkül? Die Antwort ist in den nachfolgenden Formeln enthalten bei denen die Indizes zu äußerem Parametern werden:

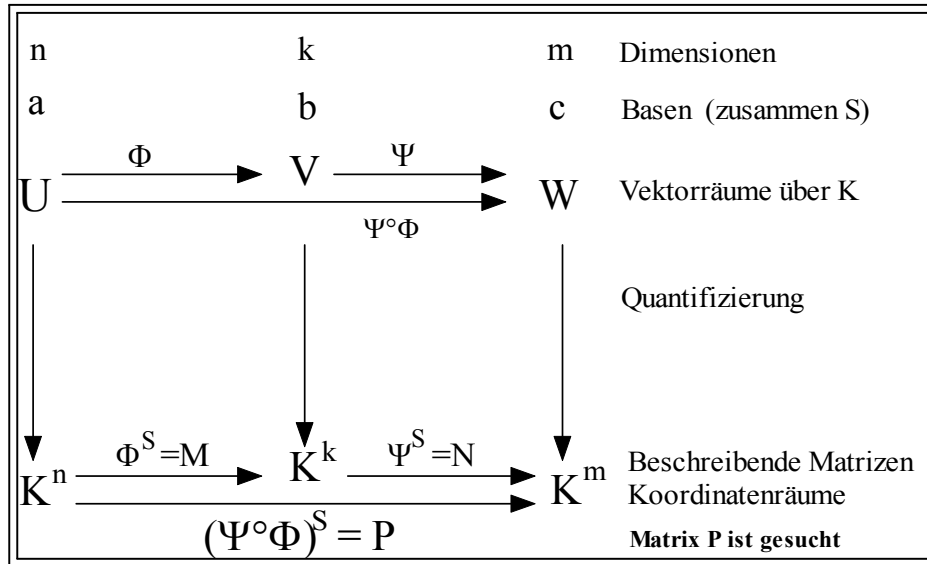
$$\begin{array}{ll} \text{Summe} & (M + N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij} \\ \text{Multiplikation mit Skalar} & (\alpha M)_{ij} = \alpha M_{ij} \end{array}$$

Die erste Regel etwa ist zu lesen: "Die $i - j$ -te Komponente der Matrix $M + N$ ist gleich..."

4.4.5 Die Matrixmultiplikation

(4.5.1) Nun gibt es für lineare Abbildungen neben den beiden durch die Vektorraumstruktur erfaßten Verknüpfungen in gewissen Fällen (Werteraum der ersten Abbildung = Urbildraum der zweiten Abbildung) noch die **Zusammensetzung**. Wir wissen, die Zusammensetzung zweier linearer Abbildungen ist erneut linear. Was bedeutet das nun für die zugehörigen Matrizen?

(4.5.2) Erneut müssen wir zuerst unser Szenenbild aufbauen, das jetzt schon recht umfangreich (obwohl weitgehend trivial) ist! Wir geben es sogleich in Diagrammform:



Alles in diesem Diagramm ist durch die Vorabüberlegungen festgelegt. Oben ist die koordinatenfreie, absolute Darstellung, unten die isomorphe basisabhängige Quantifizierung. Für die drei Matrizen, die im Diagramm auftauchen und die beispielsweise über das Kochrezept (4.3.20) bestimmt werden können, haben wir (im Diagramm) vereinfachende Bezeichnungen eingeführt: P, M und N.

(4.5.3) Das Problem, das wir uns stellen, ist das folgende: **Wie kann man die Matrix P direkt aus den beiden anderen Matrizen M und N erhalten ?** Wir suchen also eine Verknüpfung, ein *Matrixprodukt*, das die Zusammensetzung der Abbildungen im quantitativen Bereich repräsentiert. Denn selbstverständlich muß es möglich sein, die Matrix P durch die beiden Matrizen M und N auszudrücken.

(4.5.4) Sobald das Problem als solches verstanden ist und man sich das Szenenbild eingepreßt hat, ist die Lösung Routine. Wieder läuft alles zwanghaft mechanisch ab. Der Leser darf sich diesbezüglich auf keinen Fall durch die Kompliziertheit vortäuschende **Länge der Rechnung** in die Irre leiten lassen.

(4.5.5) Das Kochrezept (4.3.20) sagt genau, was zu tun ist: Für jeden Basisvektor \vec{a}_i von V ist der Vektor $\Psi \circ \Phi(\vec{a}_i)$ als Linearkombination der Basis c von W darzustellen. Das ergibt die Spalten von P. Die Rechnung, die das leistet, sieht so aus:

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(\vec{a}_i) &\stackrel{(1)}{=} \Psi(\Phi(\vec{a}_i)) \stackrel{(2)}{=} \Psi(\sum_r \vec{b}_r M_{ri}) \stackrel{(3)}{=} \sum_r \Psi(\vec{b}_r) M_{ri} \stackrel{(4)}{=} \sum_r (\sum_s \vec{c}_s N_{sr}) M_{ri} \\ &\stackrel{(5)}{=} \sum_{rs} \vec{c}_s N_{sr} M_{ri} \stackrel{(6)}{=} \sum_s \vec{c}_s (\sum_r N_{sr} M_{ri}) \stackrel{(7)}{=} \sum_s \vec{c}_s P_{si} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$P_{si} = \sum_{r=1}^k N_{sr} M_{ri}$$

(4.5.6) Gehen wir die Rechenschritte durch:

- Bei (1) verwendet man die Definition der Zusammensetzung $g \circ f(x) = g(f(x))$. Bei (2) und (4) werden die definierenden Gleichungen für M bzw. N eingesetzt. Das sind die Stellen, an denen die beiden Eingabegrößen unseres Produktes - also M und N eingespeist werden. (3) - völlig klar - verwendet die Linearität der Abbildungen. (5) und (6) sind Umformungen der Summe, die erforderlich sind, um die Endform zu erreichen. Wir sind diesen Umformungen bereits bei der Fundamentalidentität begegnet.

(4.5.7) Schauen Sie sich die Indexstruktur (der gesamten Rechnung) genau an: Wir haben einen freien Index i, der überall ganz rechts als letzter Index auftritt. Alle anderen Indizes sind stumm und tauchen daher doppelt auf. Die Reihenfolge der Faktoren ändert sich nie. Am Ende wird durch den Koeffizientenvergleich ein neuer freier Index s erzeugt. Das geht, da der zweite Faktor mit dem Index s gerade der Basisvektor \vec{c}_s , ist. Überzeugen Sie sich davon, dass man für jedes Summenzeichen erkennt, worüber zu summieren ist.

(4.5.8) Und jetzt zum Resultat unserer Rechnung. Die Formel liefert die Matrixelemente von P, indem sie sie -wie gewünscht- durch die Matrixelemente von M und N ausdrückt. Und zwar wieder nach der

Regel *Zeile mal Spalte*. Man nimmt die s-te Zeile des linken Faktors N, also $(N_{s1} N_{s2} \dots N_{sk})$ und multipliziert komponentenweise mit der i-ten Spalte des rechten Faktors M. Anschließend werden die Produkte summiert:

$$P_{si} = N_{s1}M_{1i} + N_{s2}M_{2i} + N_{s3}M_{3i} + \dots + N_{sk}M_{ki} \quad \begin{array}{l} s \text{ und } i \text{ frei} \\ k \text{ stumm} \end{array}$$

Unser Szenenbild zeigt, welche Werte die beiden freien Indizes s und i annehmen können: s läuft von 1 bis m (zu W gehörig) und i von 1 bis n (zu U gehörig).

(4.5.9) Die so eingeführte Multiplikation zweier Matrizen nennt man *Matrixprodukt*. Das Matrixprodukt zweier Matrizen ist genau dann bildbar, wenn die Anzahl der Spalten des linken Faktors mit der Zeilenzahl des rechten übereinstimmt. Also: $m \times k$ mal $k \times n$ gibt $m \times n$ -Matrix. Das Produkt der beiden Matrizen N und M bezeichnen wir einfach mit NM statt $N \circ M$.

(4.5.10) Damit liefert unser Szenenbild die folgende grundlegende Formel:

$$\boxed{(\Psi \circ \Phi)^S = \Psi^S \circ \Phi^S = \Psi^S \Phi^S}$$

Die darstellende Matrix der zusammengesetzten Abbildung $\Psi \circ \Phi$ ist gleich dem rechts stehenden Matrixprodukt, das sich schematisch über "Zeile \times Spalte" berechnen läßt.

(4.5.11) Man sieht: **Die Matrixmultiplikation ist nichts anderes als eine Quantifizierung der Zusammensetzung linearer Abbildungen.**

(4.5.12) Und damit übertragen sich die algebraischen Eigenschaften:

Die Matrixmultiplikation ist assoziativ, aber nicht kommutativ.

(4.5.13) Und jetzt einige konkrete **Rechenbeispiele**, wobei wir die Komponentenbezeichnungen so wählen, dass die Regel "Zeile mal Spalte" verdeutlicht wird.

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ r & s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & X \\ B & Y \\ C & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bB + cC & aX + bY + cZ \\ iA + jB + kC & iX + jY + kZ \\ rA + sB + tC & rX + sY + tZ \end{pmatrix}$
$(abc) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (aX + bY + cZ) \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} (abc) = \begin{pmatrix} Xa & Xb & Xc \\ Ya & Yb & Yc \\ Za & Zb & Zc \end{pmatrix}$

Die Beispiele unbedingt eigenständig rechnen und die Struktur verstehen. Wieso darf man im ersten Produkt die Reihenfolge der Faktoren nicht vertauschen?

(□ F.) R_φ sei die Drehmatrix aus (4.3.23). Verifizieren und interpretieren Sie $R_\varphi R_\psi = R_{\varphi+\psi}$. Rechnen Sie selbst weitere Konkretisierungsbeispiele, bis Sie den Umgang mit der Matrixmultiplikation konsolidiert haben.

(□ F.) Die übliche Matrixschreibweise linearer Gleichungen $M\vec{x} = \vec{b}$ läßt sich als einfacher Spezialfall des Matrixproduktes interpretieren. Nämlich?

(□ F.) Schreiben sie den folgenden Ausdruck als Matrixprodukt aus drei Faktoren. Er enthält keinen freien Parameter, ist also eine Zahl, ein Körperelement. Die obere Zeile gibt ihn ausgeschrieben, die untere in Indexform:

$$\boxed{x_1 M_{11} y_1 + x_1 M_{12} y_2 + x_2 M_{21} y_1 + x_2 M_{22} y_2} \\ \Sigma_{ik} x_i M_{ik} y_k$$

Welche Verallgemeinerungen hinsichtlich der Dimension bieten sich an?

(□ F.) Die Computeralgebrasysteme nehmen einem hinsichtlich des Matrixproduktes lange Rechnungen ab. Es sei M eine quadratische Matrix. Wir schreiben M^2 für MM und M^3 für MMM usw. Wähle

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Berechne } M^2, M^3, M^4 \text{ und } M^5.$$

Anschließend dasselbe mit einem Computeralgebrasystem.

- Sei $M = (M_{ik})$ eine $m \times n$ -Matrix. Dann definieren wir eine neue Matrix ${}^t M = ({}^t M_{ik})$ im Rahmen des Indexkalküls wie folgt: ${}^t M_{ik} = M_{ki}$. Anschaulich heißt das, dass Zeilen und Spalten der Matrix vertauscht werde. Ist etwa $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, so ist ${}^t M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \end{pmatrix}$. Beweisen sie: ${}^t(M+N) = {}^t M + {}^t N$ und ${}^t(MN) = {}^t N {}^t M$. und ${}^t(M^{-1}) = ({}^t M)^{-1}$.

4.4.5a Der Endomorphismenring

(4.5.14) Welche algebraischen Strukturen entstehen durch die neue Multiplikation? Damit überhaupt eine innere Verknüpfung entsteht, muß $V=W$ gelten: Die Zusammensetzung zweier linearer Abbildungen $V \rightarrow V$ ist erneut eine lineare Abbildung $V \rightarrow V$. Das Produkt zweier quadratischer $n \times n$ Matrizen ist wieder eine Matrix dieses Typs.

(4.5.15) Wir definieren

Sei V Vektorraum über K .
 Dann ist der *Endomorphismenring* von V definiert durch
 $\text{End}_K(V) = \text{Hom}_K(V, V) = \{\Phi | \Phi : V \rightarrow V, \text{linear}\}$

(4.5.16) Bezüglich $+$ und der Zusammensetzung **ist das ein Ring**, Es ist eine Teilmenge von $\mathcal{F}(V, V)$ mit Ringstruktur. Insbesondere besteht $\text{End}_K(K^n) = \text{Mat}_K(n, n)$ aus allen quadratischen $n \times n$ - Matrizen und hat ebenfalls Ringstruktur bezüglich Matrixaddition und Matrixmultiplikation. Neutrales Element ist die Einheitsmatrix, die wir mit \mathbb{I} oder \mathbb{I}_n bezeichnen wollen, und Nullelement ist die Nullmatrix.

(□ F.) $\mathcal{F}(V, V)$ selbst ist kein Ring, weil ein Distributivgesetz nicht gilt! Zeigen Sie, dass die Linearität gerade das fehlende Distributivgesetz sichert. Wieso gilt das andere Distributivgesetz?

(4.5.17) Schließlich gibt es noch die **invertierbaren Endomorphismen bzw. die invertierbaren Matrizen**. Wir wissen, dass die invertierbaren Elemente eines Ringe stets eine Gruppe bilden. Im Falle unseres Endomorphismenringes erweisen sich die so entstehenden Gruppen als sehr nützlich.

Sei V Vektorraum über K
 Dann bildet die Menge der invertierbaren Endomorphismen von V eine Gruppe, die Automorphismengruppe von V , die man mit $\text{Aut}_K(V)$ bezeichnet.
 ♦ Im Falle der quadratischen Matrizen nennt man die Gruppe $\text{Aut}_K(K^n)$ auch "die lineare Gruppe von K^n " und bezeichnet sie mit $\text{GL}_K(n)$.
 Wie üblich bezeichnen wir inverse Elemente mit λ^{-1} oder M^{-1} .

(4.5.18) Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^2$. Dann besteht der Endomorphismenring aus allen quadratischen 2×2 -Matrizen.

$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ beispielsweise ist ein Endomorphismus, aber kein Automorphismus. Diese Matrix ist nicht invertierbar, weil sie einen eindimensionalen Kern hat. Anders sieht es mit $N = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ aus. Hierfür ist $X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ inverse Matrix, wie man unmittelbar überprüft. Oder $N^{-1} = X$.

Insbesondere sind die Drehmatrizen aus Beispiel (4.3.23) Automorphismen. Denn eine Drehung um φ läßt sich durch Drehung um $-\varphi$ rückgängig machen:

$$R_{-\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = R_{\varphi}^{-1} \quad \text{für} \quad R_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Dies prüft man leicht nach.

(□ F.) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $D = ad - bc \neq 0$. Beweisen Sie, dass A invertierbar ist mit $A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Es ist nützlich, sich diese Formel zu merken und damit 2×2 -Matrizen zu invertieren. A ist genau dann invertierbar, wenn $D \neq 0$ ist.

(4.5.19) Die Gruppe $\text{Aut}_K(V)$ operiert kanonisch von links auf V vermöge $\varphi \star \vec{x} = \varphi(\vec{x})$, wie man sofort verifiziert, ($\varphi(\vec{x})$ ist der Wert der Abbildung φ im Punkte \vec{x} .) Die geometrische Bedeutung dieser Operation ist, dass sie Geraden in Geraden, Ebenen in Ebenen usw überführt. Kurz: **Alles Lineare bleibt linear mit derselben Dimension**. (Aut, nicht End!) Ist $K = \mathbb{R}$, also der Streckenbegriff verfügbar, geht n -Eck in n -Eck über usw. Daher auch die Bezeichnung "lineare Gruppe". Die Bahn eines Dreiecks besteht aus sämtlichen

Dreiecken. Und der Stabilisator eines gleichseitigen Dreiecks im V_0^3 enthält 6 Elemente und ist isomorph zur Dreiecksgruppe, wie man sich leicht überlegt.

(4.5.20) Das alles folgt unmittelbar aus unserer geometrischen Charakterisierung der linearen Abbildungen in 4.3 und der zusätzlichen Bedingung, dass die Elemente von $\text{Aut}(V)$ als Isomorphismen trivialen Kern haben.

(4.5.21) Interessant sind weiter die Untergruppen, die von einzelnen Elementen aus $\text{Aut}(V)$ erzeugt werden, also die zugehörigen diskreten Evolutionsgruppen und die von ihnen erzeugten Bahnen. Vgl. Kap.3.3.5a. Diese Bahnen geben vielfach gut Aufschluß über die geometrischen Eigenschaften der Abbildung. (Zur Erinnerung: Wähle \vec{x} , wende φ an, auf das Ergebnis erneut φ usw. Die entstehende Punktfolge ergibt die eine Hälfte der Bahn! Dasselbe mit φ^{-1} liefert die andere Hälfte.)

Nehmen wir $V=\mathbb{R}^2$ und darin die Drehung R_φ um φ . Die Bahn eines Punktes \vec{x} liegt dann ganz auf dem Kreis mit Radius $r=|\vec{x}|$. Nimmt man dagegen

$$\lambda = \begin{pmatrix} s \cos \varphi & -s \sin \varphi \\ s \sin \varphi & s \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit } s=0.95$$

so erhält man Bahnen, die auf nach innen laufenden Spiralen liegen.

(□ F.) Zur Übung sollten Sie sich für λ aus Beispiel (...) die qualitative Form der entstehenden Bahnen überlegen.

(□ F.) Wie sehen die Bahnen einer "Scherung" (in der Ebene) aus, sagen wir für

$$\vec{x} = \vec{e}_1 x + \vec{e}_2 y \mapsto \vec{x} + \vec{e}_1 2y$$

(4.5.22) Fassen wir alles zusammen, so haben wir die folgende Hierarchie algebraischer Strukturen samt ihren zugehörigen Quantifizierungen durch Matrizen (links das allgemeine

Objekt, rechts die Matrixdarstellung, in der Mitte die Bezeichnung und Angabe der zugehörigen algebraischen Struktur):

V	Vektorraum. Dimension n	K^n
$\text{Hom}_K(V, W)$	Vektorraum der linearen Abbildungen, Dimension $n \cdot m$	$\text{Mat}_K(m, n)$
$\text{End}_K(V)$	Endomorphismenring	$\text{Mat}_K(n, n)$
$\text{Aut}_K(V)$	Automorphismengruppe oder lineare Gruppe	$\text{Gl}_k(n)$

(4.5.23) Sobald man mit einer dieser Mengen arbeitet oder einer Teilmenge davon, kann man die zugehörige algebraische Struktur verwenden. Alle zugehörigen Rechenregeln gelten. So ist es beispielsweise überflüssig, das Distributivgesetz für eine Menge quadratischer Matrizen nachzuweisen. Es ist infolge der Ringstruktur automatisch erfüllt.

(4.5.24) Nichtsdestoweniger führen wir diesen Beweis jetzt als Fingerübung zum Indexkalkül vor.

Seien $M, N, X \in \text{Mat}_K(n, n)$. Wir wollen für die Matrixmultiplikation $(M+N)X=MX+NX$ zeigen. Wir haben wie üblich $M=(M_{ij})$ usw. und rechnen wie folgt:

$$\Sigma(M + N)_{ir} X_{rj} \stackrel{(1)}{=} \Sigma(M_{ir} + N_{ir}) X_{rj} \stackrel{(2)}{=} \Sigma(M_{ir} X_{rj} + N_{ir} X_{rj}) \stackrel{(3)}{=} \Sigma M_{ir} X_{rj} + \Sigma N_{ir} X_{rj}$$

Damit ist das Gesetz bewiesen (Gezeigt: Es gilt für alle Komponenten und daher für die Matrizen). Beachten Sie, dass bei den entscheidenden Umformungen (2) und (3) die Rechenregeln für den Körper benötigt und benutzt werden. Diese Stellen illustrieren das Grundprinzip des Indexkalküls, alles auf Rechnungen für Körperelemente zurückzuführen. Der Rest der Rechnung besteht im Explizieren von Definitionen.

4.4.5b Nichtlineare Gleichungen für Matrizen

(4.5.25) Wir wollen auf eine weitere Konsequenz unseres Resultates "Aut(V) ist Ring" hinweisen. Man kann jetzt für quadratische Matrizen alle Gleichungen oder Rechenausdrücke formulieren, die in einer Ringstruktur sinnvoll sind. Und das sind sehr viele. Grob gesagt alles, was man auch als Zahlgleichung hinschreiben kann. **Nur mit der Lösbarkeit sieht es anders aus, da wir ja keine Körperstruktur haben.** Und das bedeutet:

Die Lösungen (von Bestimmungsgleichungen) sind in der Regel fallspezifisch zu bestimmen. Etwas Vergleichbares etwa für die p-q-Formel für quadratische Gleichungen ist nicht zu erwarten.

Zusätzlich ist zu beachten, dass die Multiplikation nicht kommutativ ist und man daher in Produkten sorgfältig auf die Reihenfolge zu achten hat.

(4.5.26) Beispiel: $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$. Dann kann man Gleichungen folgender Art formulieren

$$X^2 = XX = M \quad \text{oder} \quad 3X^2 - 2MX + 2id = 0 \quad \text{oder} \quad (X+M)^{-1}MX = id$$

Gesucht sind jeweils alle reellen 2x2-Matrizen X, die die formulierte Gleichung erfüllt.

(4.5.27) Versuchen wir zur Illustration einmal die erste Gleichung zu lösen. **D.h wir suchen nach Wurzeln der gegebenen Matrix M.**

$X \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ bedeutet, dass X die folgende Form haben muß:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{gesucht.}$$

Sind diese 4 Zahlen bekannt, so ist auch X bekannt! Zunächst berechnen wir X^2 per Matrixmultiplikation. $X^2 = \begin{pmatrix} aa + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + dd \end{pmatrix}$. Die beiden Matrizen XX und M sind genau dann gleich, wenn ihre 4 Komponenten übereinstimmen. Das gibt uns folgende 4 Bestimmungsgleichungen für a,b,c,d:

$$\begin{array}{ll} a^2 + bc = 4 & \text{Die weitere Rechnung erfolgt wieder in } \mathbb{R}. \\ ab + bd = 3 & \text{Allerdings liegt ein nichtlineares} \\ ac + cd = 5 & \text{Gleichungssystem vor.} \\ bc + d^2 = 4 & \end{array}$$

Da bc zweimal auftritt, subtrahieren wir (1) und (4). Das ergibt $a^2 - d^2 = 0$. Hieraus folgt: (a+d=0 oder a-d=0). Oder $d = \varepsilon a$ mit $\varepsilon = \pm 1$. Jetzt eliminieren wir d:

$a^2 + bc = 4$	oder	$a^2 + bc = 4$	$\varepsilon = -1$ entfällt!	$a^2 + bc = 4$
$ab + \varepsilon ba = 3$		$ab(1 + \varepsilon) = 3$	$d = a$	$2ab = 3$
$ac + \varepsilon ca = 5$		$ac(1 + \varepsilon) = 5$	Also:	$2ac = 5$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt $5b = 3c$. Elimination von c gibt schließlich

$$\begin{array}{lll} a^2 + \frac{5}{3}b^2 = 4 & \text{oder} & a^2 = \frac{15}{4} \\ 2ab = 3 & & a^4 - 4a^2 + \frac{15}{16} = 0 \quad \text{oder} \quad a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \end{array}$$

Das gibt 4 zulässige Werte für a. Durch Rückeinsetzen erhält man die übrigen Komponenten. Insgesamt sind daher 4 Lösungen X, also Wurzeln der Matrix M, zu erwarten. Wir erhalten folgende 4 Matrizen:

$$X_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplizieren verifiziert man unmittelbar, dass das Lösungen von $X^2 = M$ sind. Beachten Sie: Es erhält hier 4, nicht wie in dem Zahlkörper \mathbb{C} genau 2 Quadratwurzeln.

(4.5.28) Der Lösungsweg, den wir in unserem Beispiel gegangen sind, ist typisch. Über einen geeigneten Ansatz wandelt man die Matrixgleichung in ein Gleichungssystem für die Komponenten um. Damit ist man im Rechenbereich des Körpers und kann wie üblich rechnen. Die Wurzel aus einer 3x3 Matrix ergibt natürlich ein rechnerisch bereits recht hartes Problem: 9 nichtlineare Gleichungen für 9 Unbestimmte! Man sieht, dass es sinnvoll ist, nach weiteren, besser handhabbaren Methoden Ausschau zu halten. Hier erweist sich besonders die Eigenwerttheorie aus Kap. 12 als nützlich.

Auch das gefundene Resultat ist typisch: Die Struktur der Lösungsmenge (einer Matrixgleichung) kann sich deutlich von dem unterscheiden, was man aus dem Bereich der Körper gewohnt ist.

(4.5.29) Hierzu - Ringstruktur! - noch ein Beispiel: Die Matrixringe können **Nullteiler** enthalten. Aus $MX=0$ muß keineswegs folgen, dass einer der beiden Faktoren Null ist. Etwas genauer:

Angenommen M ist invertierbar. D.h. es gibt die zugehörige inverse Matrixabbildung M^{-1} . Dann können wir die Gleichung wie üblich von links damit multiplizieren und finden

$$M^{-1}(MX) = (M^{-1}M)X = \mathbb{I}X = X = 0 \quad \text{Da } M^{-1}0 = 0.$$

Dabei soll \mathbb{I} die Einheitsmatrix bezeichnen. Ergebnis:

Ist M invertierbar (formal $M \in Gl(n)$), dann folgt aus $MX=0$ automatisch $X=0$.

Aber was ist, wenn M nicht invertierbar, kein Automorphismus ist?

(4.5.30) Das folgende Beispiel ist leicht zu rechnen und zeigt eine Vielzahl illustrativer Phänomene.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	Welche X erfüllen $MX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ??$	Ansatz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$					
$MX = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$	<i>Es folgt:</i>	<table border="1"> <tr> <td>$a+2c = 0$</td> <td>$b+2d = 0$</td> <td rowspan="4">Ein lineares 3×4-<i>System</i>. (3) und (4) sind abhängig,</td> </tr> <tr> <td>$2a+4c = 0$</td> <td>$2b+4d = 0$</td> </tr> </table>	$a+2c = 0$	$b+2d = 0$	Ein lineares 3×4 - <i>System</i> . (3) und (4) sind abhängig,	$2a+4c = 0$	$2b+4d = 0$
$a+2c = 0$	$b+2d = 0$	Ein lineares 3×4 - <i>System</i> . (3) und (4) sind abhängig,					
$2a+4c = 0$	$2b+4d = 0$						
c und d sind frei wählbar. Dann folgt $a=-2c$ und $b=-2d$. Das gibt die Lösungsschar:							

$$X = X(c,d) = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} \quad c,d \text{ frei}$$

Man verifiziert sofort, dass für all diese X tatsächlich $MX=0$ gilt.
Aber was ist dann XM ? Man findet

$$XM = (c + 2d) \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

Und das ist ungleich Null, es sei denn $c+2d=0$. In diesem speziellen Fall hat man

$$X = X(-2d, d) = d \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } XM=MX=0.$$

Was bleibt offen? Bestimmen Sie alle Y mit $YM=0$.

(□ F.) Bestimmen Sie alle 2×2 -Matrizen X , die eine der folgenden Gleichungen erfüllen (\mathbb{I}_2 Einheitsmatrix, $\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$):

$$X^2 = 0 \quad , \quad X^2 = \mathbb{I} \quad , \quad X^2 = X$$

Was ist anders als im Zahlfall?

(□ F.) Bestimmen Sie eine 3×3 Matrix X mit $X^3=0$, aber $X^2 \neq 0$.

4.4.5c Matrizen als Entwicklungsoperatoren

(4.5.31) Die Automorphismengruppe $Aut(V)$ operiert im Sinne von Kapitel 3.3 von links auf dem Vektorraum V . Entsprechendes gilt von $Gl(n)$. Wählt man jetzt ein festes Element $\lambda \in Aut(V)$ und betrachtet die davon erzeugte Untergruppe $E(\lambda) = \{\lambda^n | n \in \mathbb{Z}\}$, dann erhält man die Beschreibung eines Entwicklungsprozesses in V , wie sie in Kap. 3.3.5c eingeführt wurde.

(4.5.32) Also: Die Operation wird auf $E(\lambda)$ eingeschränkt, was eine Darstellung der Gruppe \mathbb{Z} mit ihrer Vorgänger-Nachfolger-Struktur in den Automorphismen (als winzige Teilmenge aller bijektiven Abbildungen von V) ergibt:

$$(\mathbb{Z}, n \mapsto \lambda^n, Aut(V))$$

Interessant sind die hiervon erzeugten Bahnen $B(\vec{x}_0) = \{\vec{x}_n | \vec{x}_n = \lambda^n \vec{x}_0\}$. Diese Bahnen lassen sich auch rekursiv über $\vec{x}_{n+1} = \lambda(\vec{x}_n)$ und $\vec{x}_{n-1} = \lambda^{-1}(\vec{x}_n)$ erzeugen. Die Bahnen sind meist als geometrische Figuren in V

gut interpretierbar. Jede Bahn ist eine Folge diskreter Punkte. Natürlich kann man die Operation auch auf Figuren ausdehnen.

(4.5.33) Das Besondere an den hier vorliegenden Entwicklungsgesetzen ist einmal, dass die Fortentwicklung über einen linearen Operator erfolgt, der zum anderen unabhängig von n ist.

(4.5.34) Neben den Bahnen sind die Stabilisatoren (von Punkten) von Interesse. Das sind jeweils Untergruppen von \mathbb{Z} und die sind uns alle bekannt. Wir sollten drei Fälle unterscheiden:

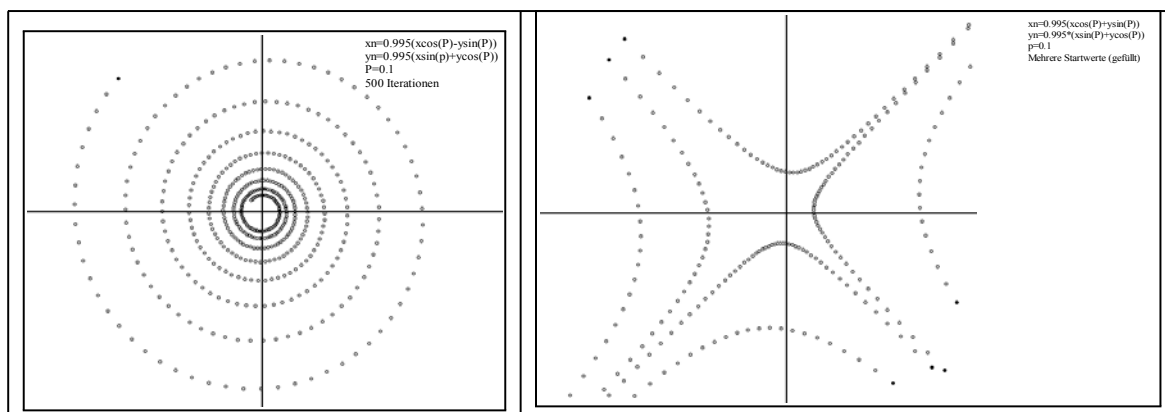
- Der Stabilisator ist ganz \mathbb{Z} , dann ist die Bahn einpunktig und stationär. Der Ursprung von V ist stets ein Beispiel hierfür, er bleibt immer stabil.
- Der Stabilisator ist gleich der zweiten trivialen Untergruppe, nämlich $\{0\}$. Dann sind alle Punkte der Bahn verschieden, sie entwickelt sich geometrisch von $-\infty$ nach $+\infty$. Oder schließlich
- Die Bahn ist gleich einer (additiven) zyklischen Untergruppe $(\mathbb{Z}/(k), +)$ mit $k=2,3,\dots$. Dann ist $\lambda^k(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$. Hieraus folgt sofort, dass die Bahn aus genau k Elementen besteht, auf denen der Entwicklungsprozeß periodisch abläuft. (Man sagt auch gerne zyklisch!) Beispiel: Drehung in der Ebene um $2\pi/n$ für $n=2,3,4,\dots$

Weitere Möglichkeiten sind unter den gegebenen Umständen nicht vorhanden.

(4.5.35) Für Konkretisierungen des Gesagten arbeitet man günstig mit $V=\mathbb{R}^2$ so dass λ eine 2×2 -Matrix bildet.

(□ F.) Führen Sie derartige Konkretisierungen durch. Wählen Sie zunächst eine Drehmatrix $R(\alpha)$ mit geeignetem α . Unterscheiden Sie: α klein, etwa 0.01, und α groß, vielleicht $\alpha = 1$. Dann $\alpha = \frac{\pi}{5}$ und $\alpha = \frac{\pi}{100}$.

Schreiben Sie ein kleines Computerprogramm, das ihnen die Entwicklung der Bahnen optisch zeigt. Den Anfangswert \vec{x}_0 sollte man möglichst mit der Maus vorgeben können. Die nachfolgenden Bilder zeigen, wie die Ergebnisse aussehen können. Sie zeigen zwei charakteristische Fälle. Das erste Bild zeigt einen Teil einer Bahn, wogegen das zweite Teile von 7 Bahnen gibt.



Variieren Sie jetzt ihre Matrix. Wählen Sie etwa $\lambda = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, dann weitere Matrizen.

Überzeugen Sie sich, dass es insgesamt nur ganz wenige Typen von so erzeugbaren Entwicklungsabläufen (in \mathbb{R}_K^2) gibt. Versuchen Sie, dafür eine sinnvolle Klassifikation zu entwickeln. In Kap.12 wird das Problem vollständig und systematisch gelöst werden.

(□ F.) Sei M invertierbare $n \times n$ -Matrix, also aus $GL(n)$. Was läßt sich dann allgemein über Lösbarkeit und Lösung der linearen Gleichung $M\vec{x} = \vec{b}$ sagen?

4.5 Basiswechsel

4.5.1 Das allgemeine Szenenbild

(5.1.1) Wir kommen zum vierten und letzten der einführend genannten Themen. **Wie beschreibt man Basiswechsel in einem Vektorraum?** Im Beispiel (4.3.24) sind wir ja bereits auf dieses Problem gestoßen.

(5.1.2) Im Bereich physikalischer und geometrischer Anwendungen bedeutet Basiswechsel, dass man ein und dieselbe Größe, die durch einen geometrischen Pfeil dargestellt wird, von zwei Bezugssystemen aus beobachtet und die Meßdaten, also die Koordinatenvektoren, zwischen den beiden Beobachtern ausgetauscht und ineinander umgerechnet werden. Das sieht zunächst wie ein anderes Problem aus als die quantitative Beschreibung linearer Abbildungen. Aber wir werden sehen, dass sich auch hier eine Matrixdarstellung ergibt.

(5.1.3) Wir haben es mit folgendem **Szenenbild** zu tun:

	Gegeben:
◆	Ein fester Rechtsvektorraum V über K mit $\dim V = n < \infty$.
◆	Zu V zwei Basen a und b , als die alte und die neue Basis bezeichnet. Die zugehörigen Koordinaten werden durch die Indizes A und N charakterisiert.
◆	Ein beliebiger Vektor \vec{x} aus V mit Koordinatenvektoren \vec{x}^A und \vec{x}^N .

Wie immer ist es wichtig, sich dieses Szenenbild einzuprägen und in späteren Problemsituationen zu erkennen, dass es vorliegt. Im Rahmen physikalischer Argumentationen tritt es sehr häufig auf. Und jetzt das zugehörige entstehende **Problem**:

◆	\vec{x} hat bezüglich jeder Basis eine Darstellung. Also: $\vec{x} = \sum \vec{a}_i x_i^A = \sum \vec{b}_k x_k^N$
◆	Die Darstellungsabbildungen ergeben die Koordinatenvektoren \vec{x}^A und \vec{x}^N . Beides sind n -Tupel, genauer Spaltenvektoren.
◆	Gesucht: Eine Formel, die \vec{x}^N durch \vec{x}^A ausdrückt.

(5.1.4) Die angegebene Formel für \vec{x} legt es nahe, **Koeffizientervergleich** anzustreben. Da wir eine Formel für die neuen Koordinaten N wollen, müssen wir den rechten Term mit der neuen Basis b , also $\sum \vec{b}_k x_k^N$ unverändert lassen.

(5.1.5) Da b eine Basis ist, können wir damit jeden Vektor - insbesondere die Vektoren \vec{a}_i der "alten" Basis eindeutig darstellen. Es gibt also n Gleichungen

$$\vec{a}_i = \sum \vec{b}_k T_{ki} = \vec{b}_1 T_{1i} + \vec{b}_2 T_{2i} + \dots + \vec{b}_n T_{ni} \quad \text{für } i=1,2,\dots,n$$

die man sich verschaffen muß. Die so eingeführte Koeffizientenmatrix T ist hierdurch eindeutig bestimmt. Jetzt können wir die Rechnung ausführen. Oben geben wir die Indexform, unten die Matrixform der Rechnung. Im Matrixfall sind die Basen als **Zeilenvektoren** zu interpretieren!

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \sum \vec{a}_i x_i^A = \sum_i \left(\sum_k \vec{b}_k T_{ki} \right) x_i^A = \sum_{ik} \vec{b}_k T_{ki} x_i^A = \sum_k \vec{b}_k \sum_i T_{ki} x_i^A = \sum_k \vec{b}_k x_k^N \\ \vec{x} &= a \vec{x}^A = (bT) \vec{x}^A = bT \vec{x}^A = b(T \vec{x}^A) = b \vec{x}^N \end{aligned}$$

(5.1.6) Koeffizientenvergleich gibt die gewünschte Formel, die die alten in die neuen Komponenten umrechnet:

$$\vec{x}^N = T \vec{x}^A$$

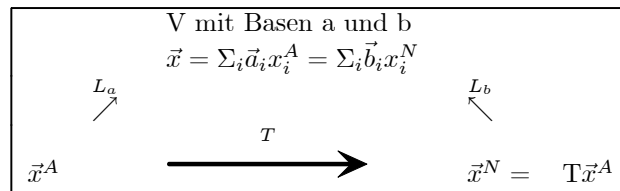
Erneut ist der Grund vieler Konventionen, dass am Ende eben diese Matrixformel herauskommt soll.

(5.1.7) Das ist ein wichtiges Resultat, so wichtig, dass wir den Sachverhalt erneut als **Kochrezept** präsentieren.

◆	Der Koordinatenvektor \vec{x}^N zum neuen System wird durch Anwenden der Matrix T auf den Koordinatenvektor \vec{x}^A erhalten. (Neu durch alt)
◆	Die "Transformationsmatrix" T erhält man, indem man die Vektoren der alten Basis durch die neue ausdrückt. (Alt durch Neu!)

Die Bezeichnungen "alt" und "neu" sind vornehmlich eingeführt, um als gedächtnistechnische Hilfen zum Merken dieses Sachverhaltes zu dienen

(5.1.8) Nochmals das Ganze in Diagrammform (L sind wieder die Linearkombinationsabbildungen):



(5.1.9) Damit kann man T alternativ auch als lineare Abbildung $V \rightarrow V$ darstellen oder interpretieren:

$$T = L_b^{-1} \circ L_a$$

(5.1.10) Man nennt T die **Transformationsmatrix des Basiswechsels**. Man erhält T entweder über (4.6.5) oder über (4.6.9). Ist T einmal bekannt, so folgt damit alles Weitere. Insbesondere kann man mit Hilfe von $\vec{x}^N = T\vec{x}^A$ alle neuen Koordinatenvektoren aus den alten ausrechnen. Anders ausgedrückt: Der zu "Neu" gehörige Beobachter kann mit Hilfe von T die Meßergebnisse von "Alt" mit seinen eigenen vergleichen, sie in seine Beschreibungsform übersetzen. Beachten Sie auch hier wieder: Jede der "horizontalen" Gleichungen liefert eine Spalte von T, keine Zeile!

(5.1.11) Die Transformationmatrix ist stets invertierbar, wie (4.6.9) zeigt. Oder gleichwertig: Natürlich kann man umgekehrt die neue Basis durch die alte ausdrücken. (Das ist übrigens nicht selten eine nützliches Verfahren, sich eine inverse Matrix T^{-1} konkret zu verschaffen! $b = aT^{-1}$)

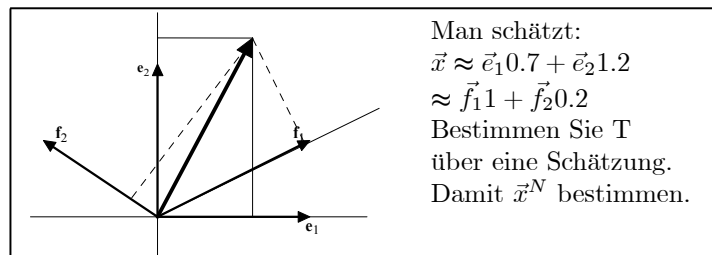
□ () Beweisen Sie mit Hilfe des Indexkalküls, dass aus $a = bT$ tatsächlich $b = T^{-1}a$ folgt.

(5.1.12) Nochmals: Die Gleichung $\vec{x}^N = T\vec{x}^A$ ist als Endergebnis erwünscht: Die Transformationsmatrix T soll diese Gleichung erfüllen (neue Koordinaten aus den alten ausrechnen). Damit das der Fall ist, muss man bei der Definition von T gerade die umgekehrte Richtung (alte Basis durch neue) wählen. Erneut muß man sich daher etwas merken.

(5.1.13) Die Gleichung $\vec{x} = \sum_i \vec{a}_i x_i^A = \sum_k \vec{b}_k x_k^N$ schließlich liefert den inhaltlich-physikalischen Gehalt des Basiswechselkonzeptes: Ein und dieselbe absolute Größe \vec{x} wird mit Hilfe von 2 Basen dargestellt, auf zwei Weisen quantifiziert. Die jeweilige Rollenverteilung bestimmt, was durch was auszudrücken ist. Oder welche Koordinaten unabhängig und welche abhängig sein sollen.

(5.1.14) Bitte beachten Sie den großen konzeptionellen Unterschied zwischen den beiden äußerlich nicht zu unterscheidenden Gleichungen (4.3.7) und der jetzigen Gleichung (4.6.6). Im ersten Fall wird ein Vektor \vec{x} in einen zweiten Vektor \vec{y} transformiert, umgewandelt und dieser Sachverhalt wird durch Zahlen beschrieben. Jetzt wird ein und derselbe Vektor \vec{x} auf zwei Weisen quantifiziert und die Gleichung (4.6.6) rechnet die eine Quantifizierung in die andere um. Die Bezeichnung Transformationsmatrix für T ist daher etwas irreführend, prägnanter wäre Beschreibungswchselmatrix.

(5.1.15) Noch ein einfaches Beispiel, das die Zusammenhänge zeigt. In der Figur ist ein und derselbe Vektor \vec{x} in zwei Koordinatensystemen dargestellt. Eines ist nicht kartesisch.

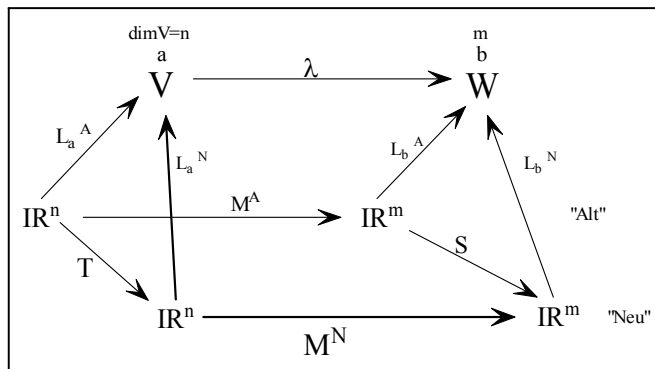


4.5.2 Die Transformation der beschreibenden Matrix

(5.2.1) Man kann den Umfang des soeben behandelten Problems noch ausdehnen. Angenommen, wir haben eine lineare Abbildung $\lambda : V \rightarrow W$ und nehmen in **beiden Räumen** einen Basiswechsel vor. Was geschieht dann mit der beschreibenden Matrix? Später wird sich zeigen, dass dies eine häufig auftauchende Problemsituation darstellt.

(5.2.2) Erneut erweist sich die Nützlichkeit der Verlaufsdiagramme: Wir haben es hier mit vielen zusammenwirkenden strukturerhaltenden Abbildungen zu tun und uns interessieren Formeln zwischen diesen Abbildungen. Arbeitet man mit einem Verlaufsdiagramm, so stehen die gesuchten Zusammenhänge gleichsam von allein da, sind nur noch abzulesen.

(5.2.3) Wir zeichnen das Szenenbild daher sofort in der Diagrammform auf. Überzeugen Sie sich, davon, dass nichts Zusätzliches zu sagen ist. Das Diagramm erklärt alles und erfaßt das Problem vollständig.



(5.2.4) Auch die Aufgabe ist klar: Die *neue* beschreibende Matrix M^N ist durch die alte M^A auszudrücken.

(5.2.5) Beachten Sie noch: In dem Diagramm findet sich oben die koordinatenfreie "absolute" Beschreibung, unten finden sich die beobachterabhängigen Quantifizierungen. Oben Rechtsräume, unten Linksräume.

(5.2.6) Alle eingezeichneten Diagramme sind kommutativ. Daher lesen wir das Resultat unmittelbar ab, wobei wir vollständig in der unteren Ebene verbleiben.

Die **allgemeine Transformationsformel** für die beschreibende Matrix einer linearen Abbildung lautet:

$$M^N = S M^A T^{-1}$$
 T Transformationsmatrix für V und S die für W.

(5.2.7) D.h. mit Hilfe der Transformationsmatrizen für die beiden Räume und einer Matrixproduktbildung können wir unmittelbar die beschreibende Matrix M^N bestimmen, die der neuen Beobachter verwenden muß.

(5.2.8) Vielfach ist $V=W$. Dann wählt man in der Regel in beiden Räumen dieselben Basen, also $S=T$. In diesem Fall lautet die Formel $M^N = T M^A T^{-1}$.

(□ F.) Sei $V=\mathbb{R}^2$ und $\lambda = R(\varphi)$ eine Drehung um den Winkel φ . Die alte Basis sei die kanonische Basis e . Als neue Basis f nehmen wir eine um δ gegen e gedrehte kartesische Basis. Wie sieht $R^N(\varphi)$ aus? Einmal rechnerisch und einmal unmittelbar durch Verständnis.

(5.2.9) Da manche Autoren unser T mit T^{-1} bezeichnen, sollte man immer sehr genau auf die jeweiligen Rollen achten: Welche Basis wird durch welche ausgedrückt? Ist es die hier gewählte Konvention, die von der Mehrheit der modernen Physikbücher benutzt wird, oder eine andere?

(5.2.10) Man kann die Formel $M^N = S M^A T^{-1}$ auch auf weitere - und wenn man will rechenaufwendige - Weisen herleiten, etwa mit Hilfe der Basisvektoren. Aber stets handelt es sich um irgendwelche weitgehend festgelegte Manipulationen im oben gegebenem Diagramm.

(□ F.) Beweisen Sie (4.6.21) über das Kochrezept (4.3.20)

(5.2.11) In physikalischen Problemen taucht die Transformationsaufgabe auch in der folgenden Einkleidung auf:

Man hat eine Problemsituation, wählt ein seinem Wissensstand gemäß es Koordinatensystem und arbeitet damit. Dann überlegt man sich, dass es ein geeigneteres Koordinatensystem geben muß, das man aber noch nicht kennt. Dieses neue Koordinatensystem bestimmt man mit Hilfe des gewählten "alten" Koordinatensystems. Hat man das bessere System (= neue Basis) gefunden, so muß man alle bisherigen Beschreibungsgrößen in die neue Form bringen, sie transformieren, was mit Hilfe unserer Formeln für alle geometrischen Pfeile und alle Homomorphismen bereits leicht möglich ist.

(5.2.12) Für die spezielle Relativitätstheorie ist die beschriebene Beobachterwechselproblematik grundlegend. Wir gehen darauf in Kap 10 genauer ein. Ebenso liegt dieses Konzept der Eigenwerttheorie zugrunde.

(□ F.) **Beherrschen Sie den Formalismus?** Dann sollten sie die folgenden Fragen beantworten können :

★ Was für Objekte werden durch $\text{Hom}_K(V,K)$ beschrieben? Welche Dimension hat dieser Vektorraum? Wie sehen die zugehörigen beschreibenden Matrizen aus? Wie transformieren sich diese Matrizen unter Basiswechsel (neu durch alt)? Wie schreibt sich die Basiswechseltransformation im Indexkalkül? Gesucht sind die formalen Antworten ohne irgendwelche Identifikationen.

Antwort: Die beschreibenden Matrizen sind Zeilenvektoren. Da $W=K^1$ ist mit fester Basis, folgt $S=I_1 = (1)=\text{Einheitsmatrix}$. Und das gibt das Transformationsgesetz $\lambda^N = \lambda T^{-1}$. Diesem Gesetz, das Zeilenvektoren transformiert, werden wir in Kap.5 erneut begegnen. Im Indexkalkül schreibt sich das Transformationsgesetz

$$\lambda_i^N = \sum_k \lambda_k^A T_{ki}^{-1} = \sum_k T_{ki}^{-1} \lambda_k^A$$

In der letzten Form ist die Reihenfolge der Faktoren "falsch": Die Matrix sollte links von den Koordinaten stehen. Da der Körper kommutativ sein soll, dürfen wir die beiden Faktoren vertauschen und erhalten die letzte Form. Aber jetzt ist die Indexreihenfolge gestört. Zwischen den beiden k-s steht jetzt der laufende Index i. Wir werden bald sehen, wie man das korrigiert. Schreiben sie die letzten Summen ruhig einmal aus.

(5.2.13) Unser Hauptresultat $b=aT$ läßt sich auch wie folgt interpretieren: T ist invertierbar, also aus der linearen Gruppe $GL_K(n)$. Weiter Sei $\mathcal{B}=\mathcal{B}(V)$ die Menge aller Basen von V.

Dann operiert $GL_K(n)$ **von rechts** auf der Basismenge \mathcal{B} . Aus einem Gruppenelement, also der Transformationsmatrix und einer Basis wird eine neue Basis! Dass eine Rechtsoperation vorliegt, sieht man sofort, wenn man das zugehörige Verlaufsdiagramm hinschreibt. Meist benutzt man in der Physik Einschränkungen dieser Operation auf geeignete Untergruppen, speziell auf die Drehgruppe.

□ Erstellen Sie selbst das Übersichtsschema für Kapitel 4

1. Anhang: Die Geometrie reeller 2×2 -Matrizen

Geraden der Ebene gehen in Geraden über. Aber läßt sich das genauer beschreiben?

Es zeigt sich, dass es genau drei Typen gibt. (Korrespondieren zu der Art der Nullstellen einer quadratischen Gleichung)

Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn eine Gerade g unter M in sich übergeht. D.h. aber Folgendes: Ist \vec{x} Richtungsvektor der Geraden, also $\vec{x} \neq \vec{0}$, dann hat $M \cdot \vec{x}$ dieselbe Richtung oder ist eventuell Null. Als Bedingungsgleichung $M \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ noch unbestimmtes Körperelement ist.

M legen wir wie üblich über die vier Komponenten fest, also

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dann schreibt sich unsere Bedingung $M \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ für M wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{matrix} ax+by=\lambda x \\ cx+dy=\lambda y \end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix} (a-\lambda)x + by = 0 \\ cx+(d-\lambda)y = 0 \end{matrix}}$$

Wie sieht die Rollenzuweisung aus? M ist gegeben. D.h. a,b,c,d sind äußere Parameter. x,y und λ dagegen sind gesucht. Die Bedingung liefert ein nicht lineares Gleichungssystem für diese drei Größen.

Zur Behandlung verwenden wir einen Trick, den die zuletzt gegebene Form dieses Gleichungssystems nahelegt. Wir interpretieren λ zunächst als äußeren Parameter! Dann erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für x und y . Da wir hier nach Vektoren ungleich $\vec{0}$ suchen, heißt dies, dass wir einen nicht trivialen Kern der nachfolgenden Matrixabbildungen benötigen.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Also: Für welche Werte

Entweder immer vor- oder nachlaufende Geraden oder
Eigenwerte. Davon entweder 2 oder eine
Vor- oder Nachlauf: Umskalierte Drehung.
2. Matrixdarstellungen von Gruppen

e kanonische Basis

$f = (f_1, f_2)$ neue Basis mit Ansatz

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{e}_1 \cos \alpha + \vec{e}_2 \sin \alpha \\ \vec{f}_2 &= \vec{e}_1 (-\lambda \sin \alpha) + \vec{e}_2 \lambda \cos \alpha \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\lambda \sin \alpha \\ \sin \alpha & \lambda \cos \alpha \end{pmatrix} \\ T &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\frac{1}{\lambda} \sin \alpha & \frac{1}{\lambda} \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daher

$$M = M^A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{4}(a+d)^2 \leq (ad-bc).$$

$$\text{Das gibt} \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\frac{1}{\lambda} \sin \alpha & \frac{1}{\lambda} \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha - \frac{y}{\lambda} \sin \alpha & x \sin \alpha + \frac{y}{\lambda} \cos \alpha \\ z \cos \alpha - \frac{x}{\lambda} \sin \alpha & z \sin \alpha + \frac{x}{\lambda} \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$S = M^n = TMT^{-1}$$

$$ST = TM$$

$$S = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{\lambda} \\ \lambda c & d \end{pmatrix}$$