****

Höhere Mathematik für Physiker
Teil I

F. Krause

Kapitel 1

Grundlegende mathematische Begriffssysteme
(Mengen, Abbildungen, Partitionen)

****

Inhalt des Kapitels

- 1.1 **Das Begriffssystem Mengen**
  - 1.1.0 Vorbemerkung
  - 1.1.1 Mengenbildung
  - 1.1.2 Beispiele und Rollen wichtiger Mengen
  - 1.1.3 Das mengentheoretische Begriffssystem $(\in, \subset, =)$
  - 1.1.4 Die leere Menge
  - 1.1.5 Die Neukonstruktion von Mengen
    - 1.1.5a Die Potenzmenge (einer gegebenen Menge)
    - 1.1.5b Die Produktmenge (zweier Mengen)
  - 1.1.6 Denken mit Mengen. Das Beispiel des Multinomialsatzes
  - 1.1.7 Mit dem Mengenbegriff verbundene Denkfiguren
    - 1.1.7a Nachweis und Explikation einer Elementbeziehung
    - 1.1.7b Denkfiguren zur Inklusion und Gleichheit
    - 1.1.7c Übungsbeispiel
    - 1.1.7d Endform
  - 1.7.8 Übersicht über den Aufbau von Kapitel 1.1
- 1.2 Das Begriffssystem Abbildungen
  - 1.2.0 Vorbemerkung
  - 1.2.1 Was ist eine Abbildung? Zuordnungen.
  - 1.2.2 Was ist eine Abbildung? Die Definition
    - 1.2.2a Das Einsetzen von Termen
    - 1.2.2b Das Unterscheiden von Abbildung und Wert.
  - 1.2.3 Die Vorgabe von Abbildungen
    - 1.2.3a Schreibweisen für Abbildungen
  - 1.2.4 Bild und Graph einer Abbildung
  - 1.2.5 Mögliche Fehler bei der Konstruktion einer Abbildung
  - 1.2.6 Typisierung der Abbildungen nach der jeweiligen Rolle der beteiligten Mengen.
  - 1.2.7 Das Veranschaulichen von Abbildungen
    - 1.2.7a Die Veranschaulichung mit Hilfe von Prozessen.
  - 1.2.8 Die Typisierung der Abbildungen über die Struktur der Zuordnung: Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen
  - 1.2.9 Gleichungen.
  - 1.2.10 Einige nützliche Denkfiguren für Abbildungen und Gleichungen.
  - 1.2.11 Die Neukonstruktion von Abbildungen aus gegebenen Abbildungen.
    - 1.2.11a Änderung des Abbildungstripels
    - 1.2.11b Die kanonische Erweiterung der Abbildung auf die Potenzmengen
    - 1.2.11c Die kanonische Erweiterung von Abbildungen auf Produktmengen
  - 1.2.12 Mengen von Abbbildungen
    - 1.2.12a Eine nützliche Identifikationsabbildung.

  - 1.2.13 Zustände physikalischer Systeme
    * 1.2.13a Sprachliche und mathematische Darstellung eines Begriffsystems: Der physikalische Arbeitsbegriff.
  - 1.2.14 Denken mit Abbildungen: Abbildungsbegriff und Verständnisbildung
  - 1.2.15 Vom Nutzen der Symbolsprache: Das Summenzeichen.
- 1.3 Partitionen und Äquivalenzrelationen
  - 1.3.0 Vorbemerkung
  - 1.3.1 Partitionen
  - 1.3.2 Parametrisierungen von Partitionen
  - 1.3.3 Abgeleitete Größen einer Partition
    * 1.3.3a Konkretisierung durch ein Beispiel: Auswertung eines Zufallsexperimentes
  - 1.3.4 Eigenschaftsabstraktion
  - 1.3.5 Äquivalenzrelationen
    * 1.3.5a Der Nachweis einer Äquivalenzrelation
  - 1.3.6 Die Beziehung zwischen Partitionen und Äquivalenzrelationen
    * 1.3.6a Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürliche
  - 1.3.7 Übersicht über den Formalismus
  - 1.3.8 Erholungspause: Ein Beispiel für den Formalismus
  - 1.3.9 Ein kleiner Ausflug in die Mengenlehre. Der Mächtigkeitsbegriff.
    * 1.3.9a Die Äquivalenzrelation gleichmächtig.
    * 1.3.9b Endliche und unendliche Mengen
    * 1.3.9c Denkbar und tatsächlich
    * 1.3.9d Das Auswahlaxiom
    * 1.3.9e Unterschiedliche unendliche Anzahlen
    * 1.3.9f Formal zulässige Mengenbildungen
  - 1.3.10 Die umgangssprachliche Herkunft des Relationsbegriffs
  - 1.3.11 Das einfachste mathematische Modell des Wahrscheinlichkeitsbegriffs
    * 1.3.11a Ein exotischer Konfigurationsraum

1.1 Das Begriffssystem *Mengen*
1.1.0 Vorbemerkung

(1.0.1) Die Einführung des naiven Mengenbegriffs dient dazu, eindeutig und effizient festzulegen. worüber man (mathematisch) sprechen will.

> Wenn im Alltagsleben über Dinge wie Freiheit, Schönheit oder Leistung gesprochen wird, so verstehen unterschiedliche Personen darunter vielfach Unterschiedliches. Was jeweils genauer gemeint ist, wird erst bei Bedarf durch Nachfragen oder ein klärendes Wort bestimmt, oder erklärt sich durch die Situation, den Kontexf, nicht aber allein durch die sprachliche Formulierung. Im wissenschaftlichen Bereich, speziell dem mathematischen, ist eine solche Unbestimmtheit unzulässig, zumindest sehr problematisch. Ein wissenschaftlicher Text sollte aus sich heraus kontextfrei erklären, was er meint.

(1.0.2) *Interpretatorisch nicht eindeutig* sollte man nicht verwechseln mit *sachlich unbestimmt.* Im ersten Fall legt der Kontext nicht ausreichend fest, was gemeint ist. Derselbe Text wird durch verschiedene Adressaten unterschiedlich interpretiert. Im schlimmsten Fall zieht jeder diejenige Interpretation für sich heraus, die ihm gefällt. Im Gegensatz dazu, kann es sachliche Gründe geben, die bestimmten Begriffen eine gewisse Unbestimmtheit belassen. Was ein alter Mensch ist, sollte nur grob, aber nicht auf Jahr und Tag bestimmt werden. Die Atome einer Wolke sind im Randbereich mehr als unbestimmt. Usw. Aber man kann und sollte die Begriffe so formulieren, daß allen Adressaten diese Unbestimmtheit und ihr Ausmaß bewußt ist.

(1.0.3) Die elementare Mengenlehre ist eine mächtige (aber einfache) Symbolsprache mit einer Semantik, die genau das festlegt, auf das es im mathematisch naturwissenschaftlichen Bereich erfahrungsgemäß immer noch ankommt. wenn man von den konkreten Inhalten absieht. Mit ihrer Hilfe kommt man der erwünschten Kontextfreiheit mathematischer Texte ein gutes Stück näher. (Also nachprüfbare, reproduzierbare Argumentationen!) Überdies Iäßt sie sich so weiterentwickeln, daß sie auch das exakte Umgehen mit unscharfen Begriffen und das Offenlassen von Möglichkeiten erlaubt. Beseitigt wird durch sie die willkürliche Interpretierbarkeit von Exaktem oder unexakt Gemeintem.

(1.0.4) **Die elementare (oder naive) Mengenlehre**

- vermittelt einen einheitlichen, aber trotzdem nicht sehr aufwendigen Zugang zu komplexen Strukturen unterschiedlichster Art, welche dem intuitiven Verständnis nicht mehr unmittelbar zugänglich sind. Hierzu gehört insbesondere alle moderne Mathematik und alle etwas anspruchsvolleren Anwendungen derselben,
- erlaubt einen einheitlichen Einstieg in das Verstehen sowie eine einheitliche Darstellung historisch gewachsener wissenschaftlicher Themen unterschiedlichster Art. (Aristotelische Logik, Differentialgleichungen, Thermodynamik,....) Die Darstellung der Themen gewinnt durch die Sprache der Mengenlehre an Effizienz (Kompaktheit) und ganz wesentlich an Kontextfreiheit. Die historischen Formulierungen selbst erlauben keinen einheitlichen Einstieg. sondern fordern eher spezifische Einfühlung),
- erleichtert das Lernen und Verstehen komplexer Theorien. (Zumindest, wenn man diese Sprache beherrscht.) Dies geschieht. weil Analogien zu bereits Bekanntem leichter wahrgenommen werden,
- leistet eine (unbedingt erforderliche) **Präzisierung und Entwicklung umgangssprachlicher Begriffssysteme** und des zugehörigen Denkens. Man denke an das immer wieder auftauchende Problem der gedanklichen Sorgfalt beim Übergang vom Einzelfall zur Verallgemeinerung,
- bildete den Einstieg zu einer effizienten Formulierung und Behandlung der tiefsten **Grundlagenprobleme** (der Mathematik). wie sie aus den Fragen der Gültigkeit, Konsistenz und Vollständigkeit erwachsen. Dies geschieht im Rahmen der axiomatischen (nicht mehr naiven!) Mengenlehre und formalen mathematischen Logik. Worüber man überhaupt exakt reden kann, wird damit einsehbar, allerdings erst nach einiger Verständnisarbeit,
- erlaubt die Formalisierung und Verwendung unscharfer Begriffe und Berücksichtigung offener Möglichkeiten im Rahmen einer einfachen Weiterentwicklung (fuzzy-Mengentheorie). Damit kann man dann exakt auch über Unexaktes reden. Beachten Sie: Weiterentwicklung und Anwendung - nicht etwa Neuanfang oder Alternative.

1.1.1 Mengenbildung

Hier geht es um ein Problem, das aus dem kommunikativen Aspekt entstanden ist, aus dem Wunsch nach Entwicklung einer kontextfreien, eindeutigen und das allgemein Wesentliche erfassenden Symbolsprache.

(1.1.1) Wir nehmen eine (oder mehrere) Eigenschaften, die von der Art sind, dass genau feststeht, ob ein Objekt (zweifelsfrei) diese Eigenschaften hat oder nicht: Etwas ist eine ganze Zahl oder aber nicht. Etwas ist ein (gedachter) Punkt im Raum oder aber nicht. Unter diesen Umständen können und wollen wir die Menge aller Objekte mit genau diesen Eigenschaften als gedankliche Konstruktion einführen. Menge steht also für Gesamtheit ihrer Objekte, die darin zusammengefaßt werden soll. So wie eine Mannschaft die Gesamtheit der Spieler umfaßt.

(1.1.2)

Grundlegendes Kriterium für Mengen und Mengenbildung:
Ist durch eine Kombination von Bedingungen (zumindest im Prinzip) genau und eindeutig festgelegt, ob ein Objekt diese Bedingungen erfüllt oder nicht, dann bilden wir die
Menge aller Objekte mit dieser Eigenschaft als geistige Konstruktion, die alle dies Objekte zusammenfaßt.
Bezeichnet M diese Menge und a irgendein Objekt, so gilt entweder
a$\in M$ (*a ist Element von M*) oder a$\notin M$ (*a ist nicht Element von M*).
Stets genau eine dieser beiden Möglichkeiten, keine weitere.

Die Anwendung dieses Kriteriums auf konkrete Fälle fällt Anfängern vielfach schwer. Wir besprechen zunächst, wie man üblicherweise Mengen bildet und anschließend dabei auftretende Probleme.

☐ *Eine siebenelementige Menge von Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2+3x+4=0$.* Das ist - wie wir wissen - sachlich Unsinn. Aber so etwas soll ja nicht durch Sachwissen, sondern über den Formalismus ausgeschlossen werden. Überdenken Sie den bisherigen Text und besonders auch den weiteren Text daraufhin, wie der Formalismus derartige schön klingende, aber unsinnige Objekte ausschließt.

(1.1.3) **Wie führt man in einer ordentlichen mathematischen Darstellung Mengen ein?** Wir nennen drei Methoden. In Kap. 1.3.12 folgt noch eine weitere, sehr wichtige Methode:

1. Die einfachste Methode besteht in derAufzählung der Elemente:

$$L = \{1, 2, 3\} \quad \text{oder} \quad J = \{a, b, 2, 4\} \quad \text{oder} \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

   Was jeweils in den geschweiften Klammern steht, gibt die Elemente an.

2. Sehr wichtig ist die (vielfach verbale) Festlegung durch eine oder mehrere definierende Eigenschaften. Etwa: Ax=b sei ein lineares Gleichungssystem. Dann sei (bezeichne) $\mathbb{L}$=$\mathbb{L}$(A,b) die zugehörige Lösungsmenge. (Damit ist die Menge $\mathbb{L}$ eingeführt.)

3. Einfach und relativ unproblematisch ist die Rückführung der neuen Menge auf bereits im mathematischen Kontext erfaßte Mengen. Dann stehen Durchschnittsbildung Vereinigung, Differenz (von Mengen) usw. zur Verfügung. Diese einfachen Bildungen besprechen wir hier nicht genauer. Ein Beispiel einer solchen Konstruktion wäre

$$M = (]-1, 0[\cup]0, 1[) \cap \mathbb{Q}.$$

Hauptsächlich b), also die Einführung über eine definierende Eigenschaft, bereitet Schwierigkeiten, weil die Forderungen aus (1.1.3) erfüllt sein müssen. Wir gehen daher auf diesen Punkt genauer ein. Zunächst noch einige technische Ergänzungen und dann die Probleme.

Betrachten wir das angeführte Beispiel der Lösungsmenge. Kriterium (1.1.3) ist hier offensichtlich erfüllt: Entweder ist etwas ein n-tupel reeller Zahlen oder nicht. Und wenn ja, dann erfüllt es diese unsere Gleichung oder nicht. Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

(1.1.4) Üblicherweise stellt man eine derartige Mengenfestlegung stärker symbolisch dar:

$$\mathbb{L} = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{A}\vec{x} = \vec{b}.$$

Gelesen: Menge aller $\vec{x}$, die........ erfüllen. Vor dem senkrechten Strich | steht die gewählte Bezeichnung für das allgemeine Mengenelement, dahinter die festlegenden Bedingungen, für die man die· Eindeutigkeit zu überprüfen hat. Nochmals die Form: {x | ....}. Hierbei ist x stumme Variable und das, was unter ..... einzufügen ist, muß dem Kriterium (1.1.3) genügen.

Wird dagegen eine Spezifikation außerhalb der Klammer vorgenommen, so liegt ein äußerer Parameter vor.

$$\mathbb{L} = \{x|x^2 - ax = 0\} \qquad a \in \mathbb{R} \quad \text{mit a} \geq 0$$

etwa besagt, daß man für jedes a der genannten Art **eine eigene Menge** $\mathbb{L} = \mathbb{L}_a$ hat. Der Index gibt diese Abhängigkeit an. Diese Lösungsmengen kann man im Beispiel unmittelbar durch Elementaufzählung angeben: $\mathbb{L}_a = \{0, a\}$.

☐ Geben Sie die folgenden Mengen an: T={t | t ist Teiler der Zahl 12} sowie T_t,={t}, wobei t ein Teiler der Zahl 12 sein soll. Dabei werden 1 und 12 als *triviale* Teiler mitgezählt. Interpretieren Sie schließlich die folgende Bildung :

$$M = \{X|X = \{t\}, \text{t ist Teiler von 12}\}$$

Geben Sie die Menge M durch Aufzählung an.

(1.1.5) Als weiteres Beispiel wollen wir "die Menge aller natürlichen und durch 3 teilbaren Zahlen einführen". Unser Kriterium ist erfüllt und das Einführungsschema ergibt eine Menge, die wir hier mit T_3 bezeichnen:

$$T_3 = \{n|n \text{ ist natürlich und durch 3 teilbar}\}=\{\text{x}|\text{x} \in \mathbb{N}, \text{ es gibt k} \in \mathbb{N} \text{ mit x=3k}\}$$

Kommentieren wir diese Bildung: Die Wahl des Symbols oder Buchstabens (n,x,a,...), der das allgemeine Element der Menge bezeichnet, ist weitgehend willkürlich, es handelt sich um eine *stumme Variable.* Zur Gedächtnishilfe wird man bei Elementen aus ℕ allerdings meist n oder ähnliches vorziehen.

(1.1.6) Enthalten zwei Mengen dieselben Elemente, so sind sie gemäß (1.1.3) gleich. Symbolisch A=B. Das erklärt das zweite Gleichheitszeichen in (1.1.5). **Dieselben Elemente können durch unterschiedliche Bedingungen oder Formulierungen bestimmt werden**. Auch dies zeigt unser Beispiel. Entsprechend folgen Gleichungen wie {a,a}={a} und {a,b}={b,a} zwischen Mengen, genauer, zwischen **Bezeichnungen für Mengen**, wobei die Bezeichnung zugleich eine Angabe der Elemente enthält.

Die Gleichung

$$[a, b] = \{x|x \in \mathbb{R} \text{ und } \ \text{a} \leq x \ \text{ und } \ \text{x} \leq b\} = \{x|x \in \mathbb{R} \text{ , a} \leq x \leq b\}$$

führt die Intervallbezeichnung für die rechts erklärte Menge ein. Das logische "und" wird meist durch ein Komma ersetzt. D.h rechts steht die **mathematikübliche Schreibweise** der in der Mitte gegebenen Menge. Computersprachen verstehen a≤x≤b meist nicht. Man muß daraus zwei Bedingungen a≤x, x≤b machen.

☐ In der Koordinatenebene sei K_R die Menge aller Koordinatenvektoren, deren Endpunkt auf einem Kreis mit Radius R um den Ursprung liegt. Also K_R={(x,y)|.....}. Geben Sie eine Bedingung, die diese Menge bestimmt. Dasselbe für den Kreis, der durch Verschiebung des Mittelpunktes nach (a,b) entsteht.

☐ Skizzieren Sie die geometrische Form der drei Punktmengen

T={(x,y)|x+2y ≥ 3;x,y ∈ ℝ) und R={(x,y)|x^2-y^2 ≤ 0 oder y ≥ 1}
und S ={(x,y)|x^2-y^2 ≤0 und y≥1}

☐ Stellen Sie die beiden Mengen R und S der letzten Frage als Schnitt bzw. Vereinigung einfacher gebauter Mengen dar. Welche Verallgemeinerung oder Lehre bietet sich an?

☐ Nachfolgend wird ein und dieselbe Menge auf mehrere Weisen vorgegeben:

$$\begin{aligned} M &= \{(x.y)|x^2 + y^2 = R^2; x, y \in \mathbb{R}\} = \{(u, v)|u = \cos t, \quad v = \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi\} \\ &= \{(a, b)|b = \varepsilon\sqrt{R^2 - a^2}, \quad - R \leq a \leq R, \varepsilon = \pm 1\} \end{aligned}$$

Das sind alles **unterschiedliche Darstellungen derselben Menge**. Welcher? Die in diesen Darstellungen auftretenden Buchstaben x, y, u, v, t, a, b, R haben in der jeweiligen Darstellung alle eine bestimmte Rolle? Geben Sie diese an.

(1.1.7) **Und jetzt zu den Problemen. die bei der Mengenbildung auftreten**. Wir besprechen nacheinander eine Reihe von Beispielen, die äußerlich ganz ähnlich wie die soeben gegebenen Beispiele aussehen, aber alle problematisch bis unbrauchbar sind.

(1.1.8) **Eine Nichtmenge:** $\mathcal{M}$= {M|M ist Menge}= "Menge aller Mengen". Diese Bildung erweist sich als unsinnig. Wir gehen auf diese Problematik im Teil über den Mächtigkeitsbegriff in Kap.1.3.9 etwas genauer ein. Für die Anwendungen. wie sie uns hier interessieren, treten solche Bildungen jedoch nicht auf, so daß wir derartige Fälle außer Betracht lassen. Vgl. (3.9.29).

(1.1.9) **Eine Problemmenge:** Sei K ein fester physikalischer Körper. etwa ein Stein. Dieser nimmt einen bestimmten Raumbereich ein. Wir bilden die Menge

$$\mathcal{V} = \{P|\text{P ist ein Körperpunkt }\}.$$

Unser Hintergrundwissen in Physik und unser Kriterium (1.1.3) geraten in Konflikt! Der Stein ist aus Atomen aufgebaut, die alle eine unscharfe Begrenzung haben und für die auch nicht immer klar ist, ob sie noch zum Stein gehören oder sich bereits von der Oberfläche gelöst haben. Für den Grenzbereich ist damit völlig unklar, ob ein (idealer geometrischer) Punkt zum Stein gehört oder nicht! Das Kriterium ist für einen Teil der Punkte nicht erfüllbar. Der übliche Ausweg ist hier **Idealisierung**. Man stellt sich den Stein als **idealen** starren Körper mit genauer räumlicher Begrenzung vor und für einen solchen ist das Kriterium erfüllbar. Und man weiß, daß solche Idealisierungen, das gedankliche Beseitigen der Problemfälle, die Resultate nicht beeinflußen. Im Beispiel, weil das Ausmaß der problematischen Oberflächenpunkte relativ zu den unproblematischen Innenpunkten einfach zu gering ist, so daß physikalischen Größen etwa die Masse innerhalb der üblichen Meßgenauigkeit unabhängig von der genauen Idealisierung bleiben. Nichtsdestoweniger muß man das Problem der Idealisierungsunabhängigkeit bei konkreten Problemen immer im Auge behalten und die Wahl der Idealisierung eventuell rechtfertigen

(1.1.10) **Zwei Problemmengen**: Sei S die Menge *aller schönen Bilder* und V die Menge *der die Raumpunkte beschreibenden Vektoren.*

Was läuft hier schief? Man wird sich nicht darauf einigen können, was gemeint ist. Die Eigenschaftsbestimmung ist unzulänglich: Ist ein Bild schön oder nicht? Die Entscheidung wird von der gefragten Person, aber auch vom Zeitpunkt der Nachfrage abhängen. Und welche Vektoren beschreiben die Raumpunkte? Soll ein fester Ursprung gewählt sein und ist die Menge der zugehörigen Ortsvektoren gemeint? Oder ist ein volles Koordinatensystem gewählt mit zugehörigen

Koordinatenvektoren? Sind beliebige Koordinatensysteme zugelassen? Usw. Im Kontext einer bestimmten Situation ist häufig klar, was genauer gemeint ist, aber aus der formulierten Bedingung nicht. In all derartigen Fällen ist eine **Präzisierung der bestimmenden Eigenschaft** erforderlich, bis Eindeutigkeit erreicht ist. Die Präzisierung ist meist auf mehrere Weisen möglich, es gibt mehrere Interpretationen der Ausgangsformulierung und man muß überlegen und entscheiden, welche dieser Möglichkeiten man wählt.

Meist manifestieren sich diese unterschiedlichen denkbaren Möglichkeiten in Form von äußeren Parametern. In unseren Beispielen läßt sich die Uneindeutigkeit so

weitgehend reduzieren:

$$\begin{aligned} S_{p,a} &= \{B|\text{ das Bild B erscheint der Person P zum Zeitpunkt a schön}\} \\ V_0 &= \{\vec{x}|\ \vec{x} \text{ ist Ortsvektor zum Ursprung } 0 \in E^3\}. \end{aligned}$$

Generell ist bei derartigen unzulänglich entfalteten Festlegungen eine sorgfältige und nicht leichte Analyse des Sachverhaltes erforderlich. die manchmal beträchtliche Erfahrung und Übung verlangt.

Viele physikalische Begriffe erfordern eine entsprechende Entfaltung. Nehmen wir Geschwindigkeif eines Körpers. Genauer und für viele Zwecke erforderlich ist jedoch

Geschwindigkeit des Körpers realtiv zu.... beobachtet von.... mit der Methode.....

Wir sehen. daß auch hier eine Vielzahl zu ergänzender äußerer Parameter auftritt.

(1.1.11) **Eine unscharfe Menge**. Sei G die Menge aller schweren chemischen Elemente. Hier haben wir zunächst wieder ein Präzisierungsproblem: Bedeutet schwer hohes spezifisches Gewicht oder hohe Ordnungszahl?. Nehmen wir die zweite Möglichkeit. Die natürlichen Elemente gehen bis zur Ordnungszahl 92 Uran. Das wird man sicher als schwer ansehen. Auch noch 82. Nicht schwer ist sicher 8 oder auch 26. Aber wie steht es mit 50 oder 60 oder 70? Wo beginnt schwer. In diesem Fall kann man natürlich eine willkürliche Vereinbarung treffen und etwa vereinbaren, daß schwer bei 73 beginnt. Aber das ist eine Vereinbarung, bei der man das Gefühl hat, dass durch sie Wesentliches verloren geht, was durch *schwer* ausgedrückt werden soll. Man stelle sich entsprechendes beim menschlichen Gewicht vor: Ein Mensch von 100.5kg Gewicht ist schwer. Bei einem Kilo weniger ist er es nicht mehr. Wir sehen, dass es bestimmte Begriffe gibt, deren Charakter sich einer vollständigen Festlegung im Sinne von ja-nein widersetzt, wie sie unser Mengenbildungskriterium verlangt. Sie sind zumindest für einen gewissen Bereich - *unscharf.* Ein **alter Mensch**: hierfür eine scharfe Altersgrenze festzusetzen erscheint ebensowenig sinnvoll wie im Fall der schweren Elemente. Am Ende dieses Kapitels werden wir sehen, wie eine Mathematisierung derartiger unscharfer Begriffe möglich ist und zu einer Erweiterung der Mengendefinition führt, die auch derartige unscharfe (*fuzzy*) Fälle erfaßt.

(1.1.12) Fassen wir zusammen: Mengenbildung über Begriffsbestimmung kann aus verschiedenen Gründen Probleme bereiten. Im Anwendungsbereich der Mathematik einmal, weil die benutzte Begriffe nicht ausreichend entfaltet und präzisiert sein können und zum anderen, weil sie ihrer Natur nach unscharf sein können. Hinzu kommen die Fälle, in denen die Entscheidung an operative Grenzen stößt, sachlich nicht möglich oder sehr schwer ist. Hier hilft meist eine geeignete Idealisierung.

(1.1.13) Analysiert man (1.1.3) genauer, insbesondere auch nach den Erfahrungen unserer Beispiele, dann stellt sich die Frage: Was sind eigentlich Bedingungen? Was wird als solche zugelassen, was nicht? Die formale Mathematik liefert hierzu eine möglichst allgemeine Antwort, von der wir nachfolgend die für uns wichtigsten Bedingungskonstruktionen einführen werden. In 1.3.9(21) geben wir eine kurze Zusammenfassung dieser mathematischen Seite des Problems. Natürlich kann man noch weitere Einschränkungen für zulässige Mengen fordern. Manche Mathematiker möchten zu große, operativ nicht zugängliche Mengen ausschließen, was viele mathematische Beweise allerdings enorm erschwert.

Die Physik liefert andere Beispiele von Einschränkungen der Mengenbildung. Gewisse, uns zunächst völlig evident erscheinende Bedingungen erweisen sich als physikalisch unzulässig. So verbietet die Relativitätstheorie Mengen gleichzeitiger Ereignisse an verschiedenen Orten. Physikalisch operativ läßt sich diese Bedingung nicht realisieren. Genauer kann man nicht immer genau und eindeutig festlegen, ob zwei Ereignisse gleichzeitig sfattfinden ader nicht. Auch die Quantenmechanik macht Einschränkungen noch anderer Art.

1.1.2 Beispiele und Rollen wichtiger Mengen.

(1.2.1) Einige Mengen verwenden wir generell mit festgelegter Bedeutung und zugehöriger Bezeichnung. Zunächst einmal die üblichen Zahlmengen:

- $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,.....\}$. Die Menge der natürlichen Zahlen. Wir **vereinbaren**, daß die Null dazu gehören soll.
- $\mathbb{Z}$ = Menge aller ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q}$ = Menge aller rationalen Zahlen,
- $\mathbb{R}$ = Menge aller reellen Zahlen

Weiter benutzen wir (durch Idealisierung gewonnenene) Mengen, die sich auf den uns umgebenden geometrisch-physikalischen Raum beziehen:

- (1.2.2) E^3 Menge aller (idealen) Punkte des geometrischen Raumes
- V_0^3 = Menge aller Ortsvektoren der Punkte aus E^3 bezüglich des (festen) Ursprungs 0 (= geometrische Pfeile mit Ursprung in 0).
- $\mathbb{R}_K^3$= Menge aller Koordinatenvektoren bezüglich des Koordinatensystems K.

(1.2.3) Anmerkung zur Bezeichnung *Raum*. Dieses Wort vetwendet man fast gleichwertig mit Menge. Der einzige Unterschied besteht darin, daß Raum immer auf eine mehr oder weniger ausgeprägte geometrische Rolle hindeutet! Raum ist ein typischer Begriff mit unscharfer Bedeutung.

☐ Bestimmen Sie die folgenden Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente:

$$L = \{n|n = 3ag;\quad a, g \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 3, g \leq 4\}$$
$$L_a = \{n|n = 3ag;\; g \in \mathbb{N}, g \leq 4\} \qquad \text{a=0,1,2,3.}$$

(Wieso wurde in L ; statt , benutzt?)

(1.2.4) Auch für Mengen sind vielfach **Rollenzuweisungen** bedeutsam, so wie wir es bereits für Variable in Termen und Gleichungen kennen. Dies gilt besonders auch für die Erfassung physikalischer Problemsituationen. Dann erhalt eine mathematische Menge über eine physikalische Interpretation eine bestimmte Rolle, die die Richtung der weiteren mathematischen Arbeit weist, die zeigt. was man eher versuchen sollte und was man eher lassen sollte. Erneut sei auf die enorme Bedeutung dieser Richtungsweisung hingewiesen: Zu verhindern, daß die Aktivität im Rahmen einer Problemlösung versiegt.

(1.2.5) Wir führen noch keine Beispiele physikalischer Mengen ein, nennen statt dessen einige Rollen, die besonders wichtig sind, da sie gewisse unverzichtbare Grundelemente der physikalischen Wirklichkeits beschreibung repräsentieren.

(1.2.6) Die **Konfigurationsraumrolle.**

Sie verallgemeinert die Rolle des Raumes E^3 der idealen geometrischen Punkte. Bei einem Raum mit dieser Rolle wird man versuchen, Analogien zu wichtigen geometrisch-physikalischen Eigenschaften zu finden und damit Probleme angehen. Dies Vorgehen erweist sich als ausgesprochen erfolgreich. So kann man in jedem Vektorraum problemlos Geraden einführen und mathematisch deren Eigenschaften übertragen. Was sind die wesentlichen Eigenschaften, die einen solchen Konfigurationsraum ausmachen?

Im Konfigurationsraum (=Menge mit Konfigurationsraumrolle)
♦ lassen sich geometrische Figuren beschreiben (Strecken, Kreise, Würfel...) ♦ kann man die Entwicklung und Bewegung von Figuren verfolgen und beschreiben (Bahnkurven) ♦ kann man gedanklich sich ortsabhängige physikalische und geometrische Beobachtungen und Messungen vorstellen und mathematisch beschreiben
(Felder)

All dies kann in der Realität stattfinden oder als gedankliche Vorstellung. Auch im zweiten Fall sprechen wir von Konfigurationsraum, auch wenn seine Elemente sich extrem von den Punkten des E^3 unterscheiden, wogegen die Beziehungen dazwischen analog oder ähnlich sind. Und darüber entwickeln sich dann gedankliche Analogien, die in nachfolgenden Schritten präzisiert und ausgearbeitet werden.

Neben E^3und E^2 tritt häufig die Zeitachse E^1 in der KonfigurationsraumroIle auf. Ein Zeitintervall ist eine typische Figur und die Natur Iäßt die Zeit unerbittlich ablaufen, wobei man jedoch verfolgen kann, was dabei geschieht. Weitere Konfigurationsräume werden aus diesen beiden - E^3 und E^1 - aufgebaut. In der Physik erfaßt die Konfigurationsraumrolle den Sachverhalt, daß alle physikalischen Ereignisse irgendwie in Raum und Zeit ablaufen.

Aber auch ganz andere Mengen können in dieser Rolle auftreten. In der Bevölkerungsstatistik etwa eine Gesamtheit von Menschen, für die man sich interessiert. Typische Figuren sind dort alle erwachsenen Männer über 50. Eine Beobachtung wäre wie hängt die Zahl der Ehepaare vom Alter ab ? Oder: Welche mittlere Größe haben 10 herausgegriffene Personen? Ein noch ganz anderes Beispiel besprechen wir in 1.3.11.

Im Bereich der Anwendungen der elementaren Mathematik schließlich repräsentiert die unabhängige Variable häufig ein Element einer Menge mit Konfigurationsraumrolle: Der Beobachter kann sich im Konfigurationsraum, der x-Achse, bewegen, d.h. ihren Wert beliebig vorgeben.

Im Laufe des Kurses werden wir dieser Rolle immer wieder begegnen und dabei das soeben Gesagte mit immer neuem und mehr konkretem Inhalt versehen.

(1.2.7) **Die Parameterraumrolle**

Diese Rolle liegt vor, wenn die Elemente der Menge die Funktion haben, die Elemente einer anderen Menge **zu benennen oder quantitativ zu beschreiben**. Jedes Element erhält dann einen Namen etwa in Form einer Zahl. Diese zweite Menge ist vielfach eine mit KonfigurationsraumroIle.

Zählt man die Atome eines Körpers ab, so ist P={1,2.....N} eine typische namensgebende Parametrisierungsmenge ohne rechnerische Bedeutung. Die Punkte einer Ebene lassen sich durch den $\mathbb{R}^2$ parametrisieren und mit Hilfe dieser

Parametrisierung bestimmt man dann rechnerisch Punkte mit besonderen Eigenschaften. Genauer: Deren "Namen" in Form ihrer Parameterwerte. Usw.

Die Parameterraumrolle erfaßt den Sachverhalt, daß qualitativ gedachte oder erfaßte Objekte zu **benennen** sind, um über sie sprechen zu können, und daß sie zu **quantifizieren** sind, damit man sie schließlich mit Meßresultaten in Beziehung setzen kann. Beim Einstieg in ein qualitativ gegebenes Problem besteht einer der ersten Schritte in der Einführung von Benennungen, die man sich der Regel aus Mengen mit Parameterraumrolle verschafft.

Meist kann man dieselben Objekte auf viele unterschiedliche Arten quantifizieren.

(1.2.8) **Die Ergebnisraumrolle**

Nimmt man im Konfigurationsraum Messungen und Beobachtungen vor, so liegen die Resultate. die Ergebnisse. die erfaßten Merkmale jeweils in Mengen möglicher oder denkbarer Meßergebnisse.

Typische Kandidaten für diese Rolle sind V^3 und $\mathbb{R}$.

Mißt man Kräfte, die auf einen Körper wirken mit Hilfe von Federwaagen, so beschreiben sich die Resultate durch Elemente aus V^3. Bestimmt man für eine Personengruppe Gewicht oder Einkommen, so liegen die Ergebnisse in $\mathbb{R}$.

(1.2.9) Meßergebnisse müssen vergleichbar sein und in Beziehung zueinander gesetzt werden können. Hierzu benötigt man die Ergebnisraumrolle. Wesentlich ist, daß man für alle Konfigurationsraumpunkte denselben Ergebnisraum verwendet. Das enthält die stillschweigende Annahme der Parallelverschiebarkeit der Beobachtungsresultate. Ist diese Bedingung nicht erfüllbar und sie erweist sich etwa im Bereich der allgemeinen Relativitätstheorie als sehr problematisch, so ist eine beträchtlich komplizierterer Formalismus erforderlich, den wir im Teil über die Differentialgeometrie behandeln.

1.1.3 Das mengentheoretische Begriffssystem ($\in, \subset, =$)

(1.3.1) Die Vorgabe einer Menge verlangt, dass von jedem Objekt im Prinzip (aber unabhängig vom jeweiligen subjektiven Wissensstand) feststeht, ob es zur Menge gehört oder aber nicht. Die Objekte, die zur Menge gehören, nennt man die Elemente der Menge. Bezeichnet a ein solches Element einer Menge, so schreibt man das $a \in M$. Bezeichnet a dagegen etwas, was nicht zur Menge gehört, so formalisiert man dies durch $a \notin M$. So gilt etwa $3 \in \mathbb{Z}$ und $3.124 \in \mathbb{R}$, aber $3.124 \notin \mathbb{N}$. Beachten Sie, dass das Symbol $\in$ immer eine Hierarchie einführt, eine Art unten und oben, die nicht vertauscht werden dürfen. Die zugehörige Menge steht in der Hierarchie immer höher als das Element. $3 \in \mathbb{N}$, aber nie $\mathbb{N} \in 3$. Und auch nicht $3 \in 3$. Dagegen ist $3 \in \{3\}$ richtig und korrekt. Dabei ist $\{3\}$ nach unseren Vereinbarungen (Mengenbildung durch Aufzählung der Elemente) die Menge, deren einziges Element 3 ist.

(1.3.2) Auch hier - beim Begriffssystem"Mengen"- geht es um Rollenzuweisung: Für die einzelnen Symbole hat man situationsspezifisch zu klären, ob sie als *Element von....* oder als *Menge aller....* anzusehen sind. Für die wichtige Beziehung $\in$ (Elemenf) benutzt man auch andere - sich meist selbst erklärende - Sprechweisen. Etwa *a liegt in M* oder *a gehört zu M.*

Das Elementsymbol $\in$ regelt die hierarchische Beziehung zwischen Elementen und Mengen.

(1.3.3) Daneben gibt es in der Mengensprache aber auch **Beziehungen zwischen Mengen,**. also zwischen Objekten auf derselben hierarchischen Ebene.

♦ Zwei Mengen M und N sind *gleich*, wenn sie genau dieselben Elemente enthalten. Man schreibt $\boxed{M=N}$.
♦ Eine Menge M heißt Teilmenge der Menge N , wenn alle Elemente von M auch Elemente von N sind. Das schreibt man $\boxed{M \subset N}$ (M ist Teilmenge von N)

(1.3.4) Die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Also $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$. Sie enthält unendlich viele Elemente, aber man kennt keine Formel der üblichen Art, die alle Primzahlen liefert. Beachten Sie:

Hiernach gilt natürlich auch M⊂M. Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst. Dies ist eine nützliche (letztlich vereinbarte) Konsequenz unserer Defintion der ⊂-Relation.

(1.3.5) Anfänger und Personen mit geisteswissenschaftlichem Hintergrund stoßen sich vielfach an diesem Sachverhalt, weil nach umgangssprachlichen Vorstellungen ein "Teil immer weniger sein sollte als das Ganze". Aber es gibt keinen Grund, wieso die etwas ungenauen und nicht eindeutigen umgangssprachlichen Vorstellungen bei den mathematischen Definitionen unbedingt übernommen werden sollten. Man hätte alternativ definieren müssen:

> Wenn jedes Element von M auch Element von N ist, es aber **mindestens** ein Element von N gibt, das nicht auch in M liegt.

Den hierdurch beschriebenen Fall nennt man eine ***echte*** *Teilmenge*. Formal: $\boxed{M \underset{\neq}{\subset} N}$. Dieser Fall ist praktisch **weniger wichtig** und bekommt daher das abgeleitete und aufwendigere Symbol nebst Bezeichnung. M selbst dagegen charakterisiert man als eine ***triviale*** *Teilmenge* von M. Teilweise schreibt man in der Literatur auch ⊆ für unser ⊂ und dann steht ⊂ tatsächlich für unser $\underset{\neq}{\subset}$. Aber aus den genannten Gründen ist das nicht besonders zweckmäßig.

☐ Was bedeutet es, daß soeben formuliert wurde: "eine triviale Teilmenge" und nicht "die triviale Teilmenge" ? In mathematischen Texten liefert der Artikelgebrauch vielfach wichtige Informationen.

(1.3.6) Im Bereich der Geometrie lassen sich die üblichen "**Figuren**" als Teilmengen interpretieren! Dreiecke, Kreise in der Ebene sind zunächst einmal bestimmte Teilmengen des E^2. Kugeln, Ebenen Figuren und Teilmengen des E^3 usw. Steht man vor dem Problem, Eigenschaften einer Teilmenge A einer Menge E zu analysieren, dann lohnt sich meist der Versuch einer geometrischen Interpretation. Man stellt sich A als Figur im Konfigurationstraum E vor. Diesem Vorgehen werden wir vielfach begegnen.

(1.3.7) **Zwei Beispiele für Teilmengenbildung in der Physik:**
Es sei E^3 unser üblicher Konfigurationsraum, in dem wir physikalische Beobachtungen vornehmen. Diese Beobachtungen können jedoch üblicherweise nicht im gesamten Raum stattfinden, weil dies nicht machbar ist. Den Bereich, der der Beobachtung zugänglich bzw. zur Betrachtung ausgewählt ist, nennen wir *Beobachtungsgebiet* G. Daher gilt $G \subset E^3$. Natürlich ist $G=E^3$ als Möglichkeit eingeschlossen.
Es sei E^1 der Raum aller Zeitpunkte. Auch zeitlich werden wir in der Regel nur während endlicher Zeitintervalle beobachten. I$\subset E^1$ nennen wir das *Beobachtungsintervall* (der Situation).

☐ Kommentieren Sie (für den Bereich der naiven Mengenlehre) die folgenden beiden zusammengsetzten Bedingungen: "a∈M und a=M" sowie "a∈M und {a}=M". Liegen sinnvolle Bedingungen im Sinne von (1.1.3) vor?

1.1.4 Die leere Menge.

Vielfach verwendet man zur Mengenbildung Bedingungen, für die man zunächst noch nicht weiß, welche Elemente und wieviele Elemente sie erfüllen. Menge aller Zahlen, die eine bestimmte Gleichung erfüllen. Oder Menge aller chemischen (bekannten) Verbindungen, die bestimmte physikalische und chemische Eigenschaffen besitzen. Im Prinzip sollten dies wohldefinierte Mengen sein, auch wenn man (aus Informationsmangel) ihre Elemente nicht kennt. Vielmehr wird man mit solchen Mengen mathematisch arbeiten, um ihre Elemente zu bestimmen oder Eigenschaften der Menge herzuleiten. Und dabei kann es sich durchaus herausstellen, dass es überhaupt kein Objekt gibt, das alle Bedingungen erfüllt. Die Menge erweist sich - was ihren Elementinhalt anbelangt - als leer. Nun wäre es irgendwie merkwürdig, wenn unter diesen Umständen eine Menge plötzlich ihren Mengenchatakter verlöre, abhängig vom Wissenstand. Enthält eine Menge überhaupt kein Element, so nennt man sie *leere Menge*. Bezeichnung ∅ oder {.}.

Haben Sie über die Frage zu (1.1.2) nachgedacht? ("Eine Menge aus 7 verschiedenen Lösungen der Gleichung...."). Das Mengenbildungskriterium verlangt zunächst eine Bildung ganz bestimmter Form. In einem zweiten Schritt wird daraus ein Element gewählt.

- Sei S die Menge aller Mengen, die genau 7 verschiedene Lösungen der Gleichung $x^2 + 3x + 4 = 0$ enthalten.

- Sei $s \in S$ (und das ist dann die verbal beschriebene Menge!)

Aber natürlich ist S leer und damit der zweite Schritt nicht ausführbar!

Nach den oben gegebenen Bestimmungen sind alle leeren Mengen gleich. d.h. es gibt im mengentheoretischen Sinn nur eine einzige leere Menge, die leere Menge. Überdies ist $\emptyset$ Teilmenge von jeder Menge M. Denn jedes Element von $\emptyset$ liegt sicher auch in M, da es ja gar keines gibt, für das dies zu prüfen wäre. Damit kennt man für jede nichtleere Menge bereits zwei Teilmengen: Die leere Menge und die Menge selbst. Oder $\emptyset \subset M$ und $M \subset M$. Diese beiden Teilmengen heißen auch die *trivialen* Teilmengen von M, wogegen alle übrigen *nichttrivial* genannt werden. Damit entsprechen die nichttrivialen Teilmengen am ehestem dem, was man sich umgangssprachlich unter "Teilen des Ganzen" vorsteilt.

(1.4.1) Weitere **Beispiele** von Teilmengen aus geometrisch-physikalischen Bereichen:

- Die Menge aller Geraden aus V^3 und die Teilmenge aller Ursprungsgeraden.
- Die Menge aller Dreiecke in E^2 und die Teilmenge aller zu einem gegebenen Dreieck kongruenten Dreiecke.

(1.4.2) Die (idealisierte) Menge aller denkbaren oder vorstellbaren Bewegungen unter einem gegebenen Einfluß und die Teilmenge der physikalisch tatsächlich möglichen Bewegungen. Die erste Menge ist vielfach nur relativ vage und mit Willkür festgelegt. Das eigentliche, die Richtung des Denkens bestimmende Problem ist das Auffinden der Teilmenge der tatsächlich möglichen Bewegungen.

□

1.1.5 Die Neukonstruktion von Mengen

(1.5.1) Mathematiker haben Tendenz, möglichst intensiv auszunutzen, was sie bereits haben und Neues aus bereits Vorhandenem aufzubauen. Dahinter steckt die Erfahrung, dass die vollständige Neuschöpfung einer mathematischen Struktur meist schwer und arbeitsaufwendig ist.

Im Falle der Mengen legt das die folgende Frage nahe:

??	Wie kann ich aus bereits vorhandenen Mengen neue Mengen konstruieren?

Hierzu gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, von denen wir zwei genauer besprechen und weitere nur nennen wollen. Jede dieser Möglichkeiten ist eine formale Präzisierung von umgangssprachlich gebräuchlichen Operationen. Wir besprechen die *Potenzmenge einer Menge* und das *cartesische Produkt zweier Mengen* Als bekannt setzen wir dagegen die Begriffe *Durchschnitt, Vereinigung und Differenz von Mengen* voraus.

□ Es seien A und B Mengen. Geben Sie die mengentheoretischen Definitionen von $A \cap B$, von $A \cup B$ und $A-B=A\setminus B$. Etwa $A\setminus B=\{x|x\in A,\ \ x\notin B\}$. Was für eine Konstruktion wird durch $A\Delta B=\{x|\ x\in A$ oder $x\in B,$ $x\notin A\cap B\}$ erfaßt? Wie kann man alle diese Konstruktionen graphisch veranschaulichen?

1.1.5a Die Potenzmenge (einer gegebenen Menge).

Sei M eine Menge. Dann können wir die zugehörigen Teilmengen (von M) betrachten. Etwas ist entweder Teilmenge von M oder nicht. Nicht aber beides. Wir können in Gedanken die Gesamtheit all dieser Teilmengen konstruieren und erhalten eine neue Menge:

(1.5. 2)

$\mathfrak{P}(M)=\{A\|A\subset M\}=$	"Menge aller Objekte A, die Teilemenge von M sind" Man nennt diese Menge **die Potenzmenge von M.**

(1.5.3) Ein Beispiel: Sei X ={a,b,c} eine Menge mit drei Elementen, die mit a,b und c bezeichnet sind.

Dann enthält $\mathfrak{P}(M)$ gerade $2^3 = 8$ Elemente, die nebenstehend in selbsterklärender Anordnung aufgeführt sind.

	X={a,b,c}	
{a,b}	{a,c}	{b,c}
{a}	{b}	{c}
	$\emptyset$	

Wir haben hier 6=8-2 nichttriviale Teilmengen.

Sie sollten unbedingt a und {a} auseinander halten . Die zugehörigen korrekten formalen Beziehungen sind a∈ {a} und {a}⊂ {a} . Dagegen ist a∈a Unfug.

☐ Weiter sollten Sie jetzt zur Übung für eine vierelementige Menge die Potenzmenge (in analoger Anordnung) konstruieren. Es müssen 2^4=16 Elemente herauskommen.

> Noch eine kleine formale Spielerei: Sei $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Dies ist eine Menge mit zwei Elementen. In diesem Fall gilt $\emptyset \in M$, aber auch $\emptyset \subset$M. Ebenso gilt $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, also nur **eine** triviale Teilmenge. (Vergleichen Sie mit der Frage nach (1.2.6)!)

☐ Welche Relationen kann man mit der Menge {a,{a}} bilden? Was ist $\mathfrak{P}$({a,{a}})?

Fassen wir zusammen:

(1.5.4) $\boxed{\text{Zu jeder Menge M kann man eine zweite Menge konstruieren, die zugehörige Potrenzmenge } \mathfrak{P}(M).}$

(1.5.5) Beachten Sie: Die hierarchischen Eigenschaften *Element sein* und *Menge sein* sind nicht absolut, sodern nur relativ. Ein Element aus $\mathfrak{P}(M)$ ist **einerseits** Element, **andererseits** aber auch Menge, nämlich Teilmenge von M. Einmal A∈ $\mathfrak{P}(M)$ zum anderen A⊂ M. Nur die hierarchische Beziehung **zwischen 2 Objekten** ist eindeutig festgelegt. Oder auch: Man benötigt immer 2 Zutaten für

.....ist Element von .... und *.....ist Teilmenge von....*

Im Alltagsbereich : Eine Person ist Spieler in einer Mannschaft (Menge). Aber diese Mannschaft kann wieder Mitglied (Element) in einer Liga sein.

(1.5.6) **Beispiele für Potenzmengenbildung im physikalisch geometrischen Bereich**.

1. Sei E^2 die geometrische Ebene. Dann ist die Menge aller Geraden in E^2 eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(E^2)$. Eine andere Teilmenge ist die Menge aller Dreiecke (nach geeigneter Spezifikation der Sonderfälle). Allgemeiner ist alles, was wir als *Figur in der Ebene* interpretieren, ein Element aus $\mathfrak{P}(E^2)$.
   ☐ Welche Unklarheit besteht hier noch hinschtlich der Interpretation des Wortes *Dreieck* ?
2. Die Menge aller Intervalle von $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

   ☐ Es sei M ={a,b,c}. Was ist $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$? Anzahl der Elemente? Einige typische Beispiele.

(1.5.7) Gegeben ein Würfel mit k Augen. Wird dieser geworfen, so kann man jeweils das Resultat beobachten, und angeben, welche Zahl herauskommt. Die möglichen Ergebnisse bilden die Menge E={1,2,...,k}. Oder man beobachtet gröber, ob eine gerade Zahl entsteht, eine oberhalb von 4 usw. Jede solche Fragestellung beschreibt ein denkbares *Ereignis* . Dann können wir die Menge aller Ereignisse bilden, den *Ereignisraum.* Wie sieht der der unserem Fall aus? Nun, zunächst haben wir die Menge P={{1},{2},.....,{k}} der *atomaren* Ereignisse, aus denen alles andere aufgebaut wird. Dann bilden wir $\mathfrak{P}(E)$ mit P⊂ $\mathfrak{P}(E)$. Das ist für das Würfelsystem der zugehörige Ereignisraum, da er alle überhaupt denkbaren Fragestellungen zum Ausgang des Wurfes enthält. Die leere Menge sollte man mitnehmen, auch wenn man zunächst daran zweifeln könnte. Die atomaren Ereignisse bilden die Teilmenge der einelementigen Teilmengen.

Ereignisräume sind immer mit einem bestimmten Typ von Beobachtungen an einem System gekoppelt. Es kann sich bei ihnen um ziemlich komplizierte Teilmengen von Potenzmengen handeln.

1.1.5b Die Produktmenge (zweier Mengen)

(1.5.8) Es seien A und B zwei Mengen und a∈A und b∈B. Dann kann man aus den beiden Elementen a und b ein neues Objekt - *das **geordnete Paar*** (a,b) - bilden. Es enthält als Information die beiden unveränderten Eingabeobjekte und zusätzlich noch eine Reihenfolge. Wir müssen dieses geordnete Paar (a,b) sehr gut von der zweielementigen Menge {a,b} unterscheiden. Für diese gibt es keine Reihenfolge der Elemente. Man hat {a,b}={b,a} . Denn beide Mengen enthalten dieselben Elemente. Ebenso ist (a,a) strikt von a zu unterscheiden, wogegen {a,a}= {a} gilt. Erneut enthalten beide Mengen ja dieselben Elemente, nämlich nur a. Die Bildung geordneter Paare ist eine wichtige, die bisherige Mengenlehre ergänzende Konstruktion. Ohne sie ist Naturbeschreibung schwerlich möglich. Und mit ihrer Hilfe bilden wir jetzt aus 2 Mengen jeweils eine neue Menge, nämlich

$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$	Menge aller geordneten Paare mit erster Komponente aus A und zweiter Komponente ausB.

Die so eingeführte Menge A×B nennt man **das *kartesische Produkt* der Mengen A und B .**

(1.5.10) Beachten Sie : Das Komma zwischen den beiden Bedingungen in (1.5.9) steht für ein "und". D.h. beide Bedingungen müssen erfüllt sein. Dies ist eine übliche Konvention. Vgl. (1.1.6).

Wenn man sagt, A und B seien zwei beliebige Mengen, dann darf man insbesondere A=B wählen, d.h. für beide Faktoren dieselbe Menge nehmen. Will man das ausschließen, so muss man die Verschiedenheit ausdrücklich fordern. Etwa : Seien P und Q zwei verschiedene Punkte ausE^3. D.h. bedeutet hier, dass A×A eine durchaus zulässige Konstruktion ist ebenso wie (a,a).

Speziell besteht die Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ aus allen geordneten Zahlenpaaren. (Mit Hilfe dieser Zahlenpaare hat R. Descartes die Geometrie der Ebene quantifiziert, d.h. den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ eingeführt. Daher der Name "kartesisch". Der lateinische Name von Descartes war Cartesius.)

(1.5.11) Wenn A gerade n Elemente und B genau m Elemente hat, dann hat A×B gerad n·m Elemente. (Bezeichnung "Produkt".)

Das sieht man am besten, wenn man diese Paare, die Elemente von $A\times B$, in einem rechteckigen Matrixschema anordnet. Die beiden unabhängigen Eigenschaften sind hier die Elemente der Faktormengen in irgendeiner Reihenfolge.

A={a,b,c,d} B={1,2,3}
Produktmenge A×B

(a,1)	(a,2)	(a,3)
(b,1)	(b,2)	(b,3)
(c,1)	(c,2)	(c,3)
(d,1)	(d,2)	(d,3)

(1.5.12) Entsprechend kann man auch Produkte mit mehr als zwei Faktoren bilden: A×B×C usw. Hierauf gehen wir nicht weiter ein. Etwa $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit $(1,2,0)\in\mathbb{R}^3$.

(1.5.13) Es folgen Beispiele aus dem **physikalisch geometrischen Bereich**.

(1.5.14) Wie beschreibt man die Lage eines Punktes im Raum? Durch Angabe seines Ortsvektors, also eines Elementes aus V_0^3. Wie die Lage eines Systems aus zwei oder drei Punkten? Durch Angabe des geordneten Paares oder Tripels der zugehörigen Ortsvektoren. Dabei kommt es auf die Reihenfolge an, wenn man die Punkte unterscheiden will. Die *Mengen möglicher räumlicher Lagen solcher Systeme* werden dann durch Mengen wie $V_0^3\times V_0^3$ oder $V_0^3\times V_0^3\times V_0^3$ beschrieben. Derartige Mengen, die Lage von Systemen oder Figuren beschreiben, nennen wir auch **Konfigurationsräume.** Genauer: Sie bekommen unter den genannten Umständen die Konfigurationsraumrolle. Führt man Koordinaten ein, so kann es günstig sein, für jeden Punkt ein individuelles Koordinatensystem zu wählen.

Haben die beiden Punkte (im Falle von zwei Punkten) immer einen festen Abstand L voneinander, dann ist der Konfigurationsraum eine Teilmenge von $V_0^3\times V_0^3$:

$$K=\{(\vec{x},\vec{y})|\vec{x},\vec{y}\in V_0^3,|\vec{x}-\vec{y}|=L\}.$$

(1.5.15) Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge von (physikalischen) Maßeinheiten. Sagen wir $\mathcal{M}$={m,s,kg, m/s^2,....}. Wir bilden die Produktmenge $\mathbb{R}\times\mathcal{M}$. Die Elemente sind geordnete Paare aus einer Zahl (Zahlwert) und einer Einheit. Wie (3,s) oder (5,m/s). Diese Paare schreiben wir jetzt in der Form 3s oder 5m/s. Hierdurch geht natürlich keinerlei Information verloren. Weil man beide Teile besitzt und ihre Reihenfolge über die jeweilige Art immer unterscheiden kann, selbst wenn man s3 statt 3s schriebe. Wählt man $\mathcal{M}$ einelementig, sagen wir $\mathcal{M}=\{m/s^2\}$, so schreibt man anstelle von $\mathbb{R}\times\mathcal{M}=\mathbb{R}\times\{m/s^2\}$ traditionellerweise $\mathbb{R}[m/s^2]$. Das ist nur eine andere Bezeichnung - Schreibweise - für dieselbe Sache: Ein cartesisches Produkt zweier Mengen. Jedes

Element x$\in \mathbb{R}[m/s^2]$ hat daher einen Zahlenwert, den man gerne mit (x)$\in \mathbb{R}$ bezeichnet und eine Einheit, die man mit [x] bezeichnet. [x]$\in \mathcal{M}$ und x=(x)[x].

(1.5.16) Wodurch wird eine räumliche Flugparabel vollständig festgelegt? Durch Angabe von Ort und Geschwindigkeit zu einem festen Zeitpunkt t_0. Also durch das Paar $(\vec{x}_0, \vec{v}_0) \in V_0^3 \times V^3$. Das ist wieder ein cartesisches Produkt. Eine Menge mit dieser (physikalischen) Rolle, dass also ihre Elemente alle denkbaren Bewegungszustände eindeutig festlegen, nennt man auch gerne einen Phasenraum. Im Zusammenhang mit den Differentialgleichungen werden wir dieser Rolle begegnen und ihre große Bedeutung verstehen. Bemerkenswerterweise wird dieser Phasenraum im Rahmen der Quantenmechanik infolge der Unschärferelation problematisch. Seine Elemente sind dann nicht mehr unmittelbar operativ zugänglich, weil es nicht möglich ist, für einen Massepunkt Ort und Geschwindigkeit gemeinsam zu messen.

☐ Sei a∈A und b∈B. In welcher Menge liegt dann die folgende Konstruktion: {a,{a,b}}? Uberlegen Sie sich, ob man mit Hilfe dieser Konstruktion die Paarbildung auf die Mengenbildung allein zurückführen kann? Was ist mit A=B?

☐ Welcher Unterschied besteht zwischen den beiden Mengen $\mathfrak{P}$(A×B) und $\mathfrak{P}$(A)×$\mathfrak{P}$(B), wo A und B zwei Mengen sind? (Anzahl der Elemente im endlichen Fall? Geometrische Veranschaulichung?)

1.1.6 Denken mit Mengen. Das Beispiel des Multinomialsatzes.

(1.6.1) Man arbeitet vielfach mit dem Mengenbegriff, ohne es zu merken und ohne die zugehörige Symbolik zu verwenden.Dabei nähern sich die Resultate des Denkens dem an, was eine mengentheoretische Beschreibung fordert. Und umgekehrt: Gezielte Verwendung der mengentheoretischen Sprache kann die Qualität des Denkens fördern, bis hin zu einer Problemkomplexität, die anderweitig nicht mehr zugänglich ist. Schwieriges erscheint einfacher. Um das zu verdeutlichen, stellen wir uns die Aufgabe:

(1.6.2) **Versteh und beweise den folgenden Multinomialsatz (Trinomialsatz):**

$$\boxed{\text{Für } n=1,2,3,\ldots \text{ und } a,b,c\in \mathbb{R} \text{ gilt :}\quad (a+b+c)^n = \sum_{\substack{k,\ell,m=0\\ k+\ell+m=n}}^{n} \frac{n!}{k!\ell!m!} a^k b^\ell c^m}$$

Zum Summenzeichen siehe Kap. 1.2.15.

Etwas anders formuliert lautet die Aufgabe:

(1.6.3) Leite für $(a+b+c)^n$ eine zum Binomialsatz analoge Formel her.

Wie wird man ein derartiges Problem angehen?

Zunächst sollte man einige Fälle für kleines n explizit rechnen und nach verallgemeinerbaren Eigenschaften suchen. Inspizieren wir die untersten Fälle:

$$\begin{array}{llll} n=2: & (a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c) & =aa+ab+ac+ba+bb+bc+ca+cb+cc & \textit{9 Terme}\\ & & =a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc & \textit{6 Terme}\\ & & =(a^2+b^2+c^2)+2(ab+ac+bc) & \textit{2 Terme}\end{array}$$

$$\begin{array}{lll} n=3: & (a+b+c)^3 & =(a+b+c)^2(a+b+c)=\\ & & =aaa+aab+aac+baa+bab+bac+aca+acb+acc+baa+bab+bac+bba+bbb+bbc\\ \text{27 Terme} & & +bca+bcb+bcc+caa+cab+cac+cba+cbb+cbc+cca+ccb+ccc\\ \text{10 Terme} & & =a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc\\ \text{3 Terme} & & =(a^3+b^3+c^3)+3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc\end{array}$$

Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Schritte genau, möglichst in eigener unabhängiger Rechnung!

(1.6.4) Für n=4 entstehen zunächst 9^4=81 Terme. Diese lassen sich zu 21 Termen des zweiten Typs zusammenfassen und diese wieder zu 4 des dritten Typs. Das Problem ist: Wie kann man die Terme der rechten Seite allgemein schreiben, sie als Rechenausdruck formulieren, der auf beliebiges n verallgemeinerbar ist? Dazu interpretieren wir die rechts stehenden Summanden einfach **als Elemente einer für alle n formulierbaren Menge**.

(1.6.5) Wir sagen, {a.b,c} sei unser Alphabet und nennen jeden Ausdruck aba oder abca usw. ein (mit unserem Alphabet bildbares) **Wort**. Die Anzahl der Buchstaben eines solchen Wortes nennen wir die Länge dieses Wortes. Dann treten in obiger Rechnung bei n=2 alle Worte der Länge 2, bei n=3 in der Formel alle

Worte der Länge 3 auf usw. Insgesamt gibt es immer 3^n Worte der Länge n und die erste Form unseres Rechnung ist damit gefunden:

$$(a+b+c)^n = \text{Summe aller Worte aus a,b und c der Länge 3.}$$

Da wir hier die **Gesamtheit aller Worte** betrachten, haben wir eine Menge eingeführt. Formal:

$$\boxed{\mathcal{W}_3(\text{n})=\{\text{x}_1\text{x}_2....\text{x}_n|\text{x}_i=\text{a oder =b oder =c für i=1,2,..,n}\}.}$$

(1.6.6) Das ist eine Menge von Termen, denn in mathematischer Hinsicht ist jedes unserer Worte natürlich ein Term. Jetzt können wir die übliche Summensymbolik verwenden und schreiben:

$$(a+b+c)^n = \sum_{w\in\mathcal{W}_3(n)} w = \text{Summe aller Worte aus } \mathcal{W}_3(n).$$

(1.6.7) In unseren Beispielen gelangten wir zur zweiten Form, indem wir Terme wie aba und aab und baa zusammenfaßten. Da die Zahlmultiplikation kommutativ ist, haben sie alle denselben Wert. Übrig blieben nur noch Terme, in denen die Reihenfolge der drei Buchstaben a,b,c alphabetisch war. a^2bc, nicht aber baca usw.. D.h.. dass wir eine weitere Wortmenge betrachten, nämlich

$$\boxed{\mathcal{A}_3(\text{n})=\{\text{a}^r\text{b}^s\text{c}^t|\text{r,s,t}\in\mathbb{N} \quad \text{und} \quad \text{r+s+t=n}\}=\text{Menge der alphabetisch geordneten Worte der Länge n.}}$$

$\mathcal{A}_3(\text{n})$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{W}_3(n)$, wozu wir natürlich vereinbaren, dass a^3 für aaa stehen soll usw. Für n=3 haben wir z.B. $\mathcal{A}_3(\text{n})=\{\text{a}^3,\text{b}^3,\text{c}^3,\text{a}^2\text{b},\text{a}^2\text{c},\text{ab}^2,\text{ac}^2,\text{b}^2\text{c},\text{bc}^2\}$. Vergleichen wir das mit der oben gegebenen zweiten Form, so sehen wir, dass dort über alle alphabetischen Worte summiert wird, wobei jeweils noch ein Zahlfaktor hinzuzufügen ist. **Wie wollen wir diesen allgemein bezeichnen und dann berechnen?** Hierzu beobachten wir zunächst. dass wir die alphabetischen Worte in naheliegender Weise parametrisieren können, also durch Zahlangaben festlegen. Dazu führen wir die folgende Exponentenmenge ein:

$$\boxed{\mathcal{E}_3(\text{n})=\{(\text{r,s,t})|\text{r,s,t}\in\mathbb{N}, \quad \text{r+s+t=n}\}.}$$

Das ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}^3$.

Für E=(r,s,t)$\in$ $\mathcal{E}_3$(n) setzen wir w(E)=$\text{a}^r\text{b}^s\text{c}^t \in \mathcal{A}_3(\text{n})$. Die Zuordnung E$\mapsto$w(E) bildet eine Parametrisierung der Worte von $\mathcal{A}_3$(n), so wie sonst die Punkte einer geometrischen Figur parametrisiert wurden. Insbesondere hat $\mathcal{E}_3$(n) ebensoviele Elemente wie $\mathcal{A}_3$(n).

(1.6.8) Unsere Summe läuft jetzt über alle Exponententripel und die Kenntnis der drei Exponenten reicht aus - wie wir unten zeigen werden - um die Zahlfaktoren zu berechnen. Wir bezeichnen die zugehörigen Zahlfaktoren mit K(E)=K(r,s,t). Unten werden wir zeigen, dass K(r,s,t)=$\frac{n!}{r!s!t!}$ ist. Mit dieser Formel sind die Zahlfaktoren dann bekannte oder besser berechenbare Größen und wir bekommen die übliche und eingangs gegebene Form unseres Trinomialsatzes:

$$\boxed{(\text{a+b+c})^n=\sum_{(r,s,t)\in\mathcal{E}_3(n)}\text{K(r,s,t)a}^r\text{b}^s\text{c}^t \qquad \text{mit} \quad \text{K(r,s,t)}=\frac{n!}{r!s!t!}}$$

Schreibt man die Elementbeziehung (r.s,t)$\in$ $\mathcal{E}_3$(n) aus, so erhält man die in der Fragestellung behauptete Form des Trinomialsatzes. Für den Fall n=5 ergeben sich über diese Formel beispielsweise die folgenden typischen Terme:

$$(\text{a+b+c})^n=\frac{5!}{5!0!0!}\text{a}^5+\frac{5!}{4!1!0!}\text{a}^4\text{b}+...+\frac{5!}{2!1!2!}\text{a}^2\text{bc}^2+...=\text{a}^5+5\text{a}^4\text{b}+....30\text{a}^2\text{bc}^2+...$$

Beachten Sie: 0!=1. Insgesamt hat die Summe in diesem Fall 21 Terme, wie man durch Ausschreiben der Menge $\mathcal{E}_3$(5) sieht.

Fassen wir die benutzten Mengenbildung noch einmal zusammen:

$\mathcal{W}_3(n)$	abaacb		n=6	Wort
$\mathcal{A}_3(n)$	$\text{a}^3b^2c^1$			alphab. Wort
$\mathcal{E}_3(n)\subset\mathbb{N}^3$	(3,2,1)		3+2+1=6	Parameter
Summand:	(r,s,t):	K(r,s,t)$\text{a}^r b^s c^t$		Wert K ???

(1.6.10) **Welchen Wert haben die Zahlfaktoren** K(r,s,t)? Zur Beantwortung dieser Frage führen wir eine graphische Codierung unserer Rechnung ein. Wie entsteht beispielsweise in

$$(a+b+c)^5 = (a+b+c)(a+b+c)....(a+b+c)$$

ein Beitrag wie abbac? Nun man wählt im ersten Faktor (a+b+c) den Buchstaben a, im zweiten den Buchstaben b usw.. Alphabetisch entsteht ein Beitrag a^2b^2c. Wir nehmen jetzt 3 Kästen, einen für a mit zwei Plätzen, einen für b mit 2 Plätzen und einen für c mit 1 Platz. Nun codieren wir das Wort abbac wie folgt: 1. Faktor a, also eine 1 in den a-Kasten. 2.Faktor b, also 2 in den b-Kasten. Die Figur zeigt das Ergebnis. Die Plätze der einzelnen Kästen **füllen wir sukzessive von links nach rechts**, so dass die Zahlen in jedem Kasten notwendig wachsen.

[◇◇] [◇◇] [◇]	[1 4] [2 3] [5]	[2 1] [3 4] [5]
a b c	a a b b c	2 vor 1 im Kasten
Die	zulässig	unzulässig!

(1.6.11) Wieviel derartige zulässige Füllungen des Kastens sind möglich? Genau 30 Stück! Begründung: Insgesamt kann man die 5 Zahlen auf 5!=120 Weisen auf die 5 Plätze in den Kästen verteilen. Aber in zu jeder zulässigen Verteilung gibt es weitere unzulässige. So ist (12)(34)(5) zulässig. Dazu -Zahlaufteilung auf die Kästen- gehören die drei unzulässigen Belegungen (21)(34)(5) und (12)(43)(5) und (21)(43)(5). **Auf 4 Belegungen entfällt im Beispiel genau eine zulässige**. Ist x die Zahl der zulässigen, so folgt 4x=120, also x=30 wie behauptet. Diese 30 kann man auch leicht direkt konstruieren. Man klassifiziert nach der Nummer im c–Kasten, das gibt 5 Möglichkeiten. Die restlichen 4 Zahlen lassen sich auf 6 verschiedene Weisen auf die beiden anderen Kästen verteilen.

(12)(34)(5)	(12)(35)(4)	(12)(45)(3)	(13)(45)(2)	(23)(45)(1)
(13)(24)(5)	(13)(25)(4)	(14)(25)(3)	*	*
(14)(23)(5)	(15)(23)(4)	*	*	*
(34)(12)(5)	(35)(12)(4)	*	*	*
(24)(13)(5)	*	*	*	*
(23)(14)(5)	*	*	*	(34)(25)(1)

Habenn Sie die Konstruktion veratanden?

Allgemein erhält der a-Kasten r Plätze, der b-Kasten s und der c-Kasten t. Jede zulässige Belegung der Kästen gehört zu einer Gruppe von r!s!t! Belegungen, bei denen die Zahlen in denselben Kästen verbleiben: Man muß innerhalb der Kästen die Zahlen auf alle möglichen Weisen vertauschen. Bis auf eine haben aber alle Belegungen mindestens eine falsche Reihenfolge, eine größere Zahl kommt vor einer kleineren.

Bezeichnet x wieder die Anzahl der korrekten Belegungen, so folgt n!=x·1!2!3!. Das ist aber die behauptete Formel.

(1.6.13) Bemerkung: Verstehen eines Satzes und seines Beweises bedeutet hier u.a., dass man in der Lage ist, die Überlegung auf beliebiges n zu verallgemeinern und dann auch auf andere Anzahlen von Summanden. Hierzu gehört der übliche Binomiallehrsatz (mit 2 Summanden) und die entsprechende Formel für $(a_1 + a_2 + ...a_k)^n$. Unten folgt ein derartiges Anschlußproblem.

Selbstverständlich kann man die gesamte Überlegung auch **ohne die Mengensymbolik** formulieren. Nur ist sie dann weitaus schwieriger nachzuvollziehen und zu beschreiben. Man erkennt das auch gut, wenn man jemandem, der mit der Mengensymbolik nicht vertraut ist, die Aufgabe stellt, den Multinomialsatz zu finden, eventuell auch nur dessen Form anzugeben. (In der Eingangsformel die rechte Seite durch ein ? ersetzen.) Dabei treten große Probleme auf, die bei Kenntnis der mengentheoretischen Beschreibung entfallen oder zumindest erleichtert werden.

(1.6. 15) **Ein kombinatorisches Anschlußproblem:**

Gegeben sei eine Menge mit n Elementen. Wieviele Teilmengen mit genau k Elementen existieren dazu? ($0 \leq k \leq n$)
Antwort: Das sind $\boxed{K(n,n\text{-}k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$ Stück.

Beweis:

Wir numerieren die n Elemente von M durch. Jetzt sei K irgendeine Teilmenge der gewünschten Art. Wir gehen die n Elemente nacheinander durch und notieren jeweils ein J, wenn das entsprechende Element zu K gehört. ein N. wenn es nicht zu K gehört. Das gibt Worte des Typs JJNJNN aus der Entwicklung von $(J+N)^n$. Verschiedene Worte gehören zu verschiedenen Teilmengen, denn dann gibt es mindestens ein Element, das in einem Wort zu J, im anderen zu N führt. Wieviele dieser Worte haben die gewünschte Zahl von k J-s?

Die beschriebene kombinatorische Methode gibt sofort den behaupteten Wert

$$K(k, n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□ Was für eine kombinatorische Größe bzw. Konstruktion wird durch die folgende Zahlgröße beschrieben: Für $n \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $[n]_k = n(n-1)....(n-k+1)$ für $k>0$ und $[n]_0 = 1$? Wie hängt diese Größe (das "Pochhammersymbol") für $n \in \mathbb{N}$ mit den Binomialkoeffizienten zusammen?

1.1.7 Mit dem Mengenbegriff verbundene Denkfiguren

(1.7.1) In Beweisen und mathematischen Texten kommen im Zusammenhang mit dem Mengenbegriff bestimmte Problemsituationen so häufig vor, dass man in der Lage sein sollte, sie routinemäßig nach einem bestimmten Schema zu bearbeiten. Wir nennen solche Schemata *Denk- oder Argumentationsfiguren* und werden sie für einige wichtige mathematische Leistungen wie hier für den Mengenbegriff ausdrücklich formulieren. Diese Denkfiguren tauchen bausteinartig - modular - in größeren Argumentationen auf und müssen dann routinemäßig ausgeführt werden.

Eingangs wurde gesagt, dass das Alltagsdenken an gewissen Stellen zu präzisieren ist. Hierzu gehört einerseits das Verhältnis Beispiel - allgemeiner Fall - andererseits das Arbeiten mit hierarchischen Begriffssystemen. **Ein großer Teil dieser Probleme sammelt sich in den hier behandelten Denkfiguren.** Und überdies ist dieser Präzisierungsbedarf unabhängig davon vorhanden, ob man den mengentheoretischen Formalismus verwendet oder nicht. Analysiert man Schwierigkeiten und Fehler mit der Mathematik beim Studieneinstieg, dann stößt man überwältigend häufig auf Probleme mit diesen Denkfiguren.

Das was wir jetzt beschreiben, wird üblicherweise in den mathematischen Texten nicht behandelt. Es gehört nicht zur "eigentlichen Mathematik", es ist etwas was man beherrscht, worüber man aber kaum spricht.

1.1.7a Nachweis und Explikation einer Elementbeziehung

Im Zusammenhang mit dem Elementsymbol haben wir es vornehmlich mit zwei Denkfiguren zu tun, die wir *Nachweis und Explikation der Elementbeziehung* nennen. Ist M eine Menge, deren Elemente durch bestimmte Bedingungen festgelegt sind, dann geht es um die folgenden Leistungen, bei denen jeweils ein immer wiederkehrender allgemeinerer Rahmen fallspezifisch auszufüllen ist:

(1.7.2)	a bezeichne etwas, das als Element der Menge M={x|......}in Frage kommt. Es ist zu prüfen, ob $a \in M$ gilt. (Nachweis einer Elementrelation)	
	Im Text:	Da........, gilt $a \in M$.

(1.7.3) Z.B hatten wir in (1.6.7) die Menge $\mathcal{A}_3(n)=\{a^r b^s c^t \mid r+s+t=n\}$ eingeführt. Liegen a^3b^2c und $a^3c^2b^3$ in $\mathcal{A}_3(6)$? Für den ersten Term ist das der Fall, denn die Reihenfolge ist alphabetisch und es ist 3+2+1=6. Für den zweiten Term dagegen gilt $a^3c^2b^3 \notin \mathcal{A}_3(6)$. Beide Forderungen sind verletzt. Im ersten Fall schreibt man: "Da die Ordnung in a^3b^2c alphabetisch ist und 3+2+1=6 gilt, ist $a^3b^2c \in \mathcal{A}_3(6)$."

Oder: Sei N die Menge aller reellen Nullstellen der Gleichung $x^4+x^3+x+1=0$. Man vermutet $-1 \in N$. Dann muss man prüfen, ob eine Lösung vorliegt. Das ist der Fall. Man wird formulieren: "Da -1 die Gleichung erfüllt, gilt $-1 \in N$."

So etwas kann sehr schwierig auszuführen sein. Sei etwa $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ die Menge aller irrationalen Zahlen. Zeige, dass die Kreiszahl π in $\mathbb{I}$ liegt.

(1.7.4) Jetzt die zweite Denkfigur:

Man weiß, dass a∈M gilt. Was lässt sich dann über a aussagen? Im mathematischen Text zeigt sich das typischerweise durch Formulierungen der folgenden Art:
Es ist a∈M. Also........... oder a∈M. D.h.......

Dies nennen wir Explikation einer Elementrelation.

(1.7.5) Nehmen wir a$\in \mathbb{Q}$. Dann geht der Text typischerweise wie folgt weiter: "D.h. es gibt p,q$\in \mathbb{Z}$ mit q$\neq 0$, derart, dass a=$\frac{p}{q}$ gilt." Oder auch " r ist Flugparabel. D.h. es gibt $\vec{r}_0,\vec{v}_0 \in V_0^3$ mit $\vec{r}$(t)=$\vec{r}_0+\vec{v}_0$t+$\frac{1}{2}\vec{g}$t^2."

(1.7.6) Das zweite Beispiel zeigt, dass eine Explikation nicht immer eindeutig ist. Man hätte auch eine andere Darstellung für $\vec{r}$ wählen können. Worauf es ankommt, ist dass man eine angibt, sie anschließend eventuell korrigiert und an die spezifische Problemsituation anpasst. (Nicht aber in die "Was soll ich denn nun tun?" - Falle tappt.)

(1.7.9) Betrachten wir für ein weiteres Beispiel noch beide Leistungen zusammen: Sei V={n|2n = Summe aller Teiler von n}. Gilt 8$\in V$? (Nachweis.) Wir müssen prüfen, ob 8 die definierende Eigenschaft besitzt. Wir suchen alle Teiler von 8, also 1,2,4 und 8 und bilden die Summe. Das gibt die Argumentation: "Da 1+2+4+8=15$\neq 2 \cdot 8$ ist, gilt 8$\notin V$." Ist V vielleicht leer? Nein, denn für 6 hat man: 1+2+3+6=12=2·6. D.h. 6$\in V$.

Bei Nachweis ist meist konkret zu prüfen, ob die definierenden Eigenschaften erfüllt sind oder nicht. Und in mathematischen Texten wird vielfach stillschweigend angenommen, **dass dem Leser klar ist, dass es um die Überprüfung geht.**

(1.7.10) Jetzt umgekehrt die Explikation. Man wisse a∈V. Dann darf man gültig folgern, dass die Summe aller Teiler gleich 2a ist. Weiss man beispielsweise irgendwoher, dass 28∈V gilt, so kann man ohne Rechnung folgern, dass die Summe aller Teiler gleich 56 sein muss. Allgemein folgt weiter für jedes a∈V, dass die Summe aller nichttrivialen Teiler gleich a-l sein muss. Als Text:

> Sei a∈V. Also ist 2a=Summe der Teiler von a. Da 1 und a immer Teiler sind, ist die Summe der nichtrivialen Teiler von a gleich a-l.
>
> Oder: Sei a Lösung der Gleichung x^5-3x^3+2x-7=0. Dann ist a^5=3a^3-2a+7 eine wahre Gleichung, mit der man weiterarbeiten darf. (Das ist eine Denkfigur, deren Nutzung manchem Anfänger unglaublich schwer fällt!)

□ Explizieren Sie zu gegebener Menge Y die folgenden Elementrelationen:

$$X \in \{(U,V)|U \subset V \subset Y\} \qquad\qquad Z \in \mathfrak{P}(Y \times Y).$$

1.1.7b Denkfiguren zur Inklusion und Gleichheit

Im Zusammenhang mit der Inklusionsbeziehung gibt es zwei Denkfiguren, wobei die zweite noch auf die erste zurückgeführt wird.

(1.7.11) Das zugehörige Problem - wobei A und B typischerweise zwei unterschiedlich eingeführte Mengen sind - lautet:

A und B Mengen.	Beweise, dass
a) A⊂B gilt	b) A=B gilt.

Das Vorgehen bei a): Wie zeigt man, dass A eine Teilmenge von B ist? Man geht vielfach über die Elemente: Jedes Element v∈A muss auch Element von B sein: v∈B. Zu beweisen ist die Aussage:

Wenn x∈A gilt, dann gilt auch x∈B. Oder symbolisch: $\boxed{(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)}$.

(1.7.13) Ein Nachweis bzw. Nachweisversuch einer solchen Aussage läuft nach dem folgenden Schema ab, wobei die Figuren Nachweis und Explikation benutzt werden:

I

> Sei x∈A. Explikation dieser Relation. Fallspezifische Überlegungen, die zeigen, dass die Bedingungen für B erfüllt sind (Nachweis). ...
> Also gilt x∈B.

x ist dabei ein ein beliebig gewähltes Element aus A, ausgedrückt durch die Einleitung: "Sei x$\in A$".
(1.7.14) Nun das Schema für das zweite Problem, der Gleichheit der beiden Mengen:

> A=B wird bewiesen, indem man in der skizzierten Weise nacheinander $A \subset B$ und $B \subset A$ nachweist.

(1.7.15) Wenn eine rein definitorische Gleichung vorliegt, wie etwa die Einführung der üblichen Bezeichnungen für Intervalle, dann ist natürlich nichts zu beweisen. Das zugehörige Rollenbewußtsein darf nie fehlen. Beispiel [3,4]= {x|x∈ ℝ, 3$\leq x \leq 4$}. Hier ist die linke Seite eine abkürzende und verdeutlichende Bezeichnung der rechten.

1.1.7c Übungsbeispiel

Wegen der Bedeutung der Denkfiguren zur Inklusion geben wir ein ausführliches Beispiel in Form einer möglichen Übungsaufgabe, bei der die erforderlichen Zwischenschritte bei der Ausführung von (7.1.13) eine Idee erfordern. Wir fügen zugleich einige Hinweise dazu ein, wie man eine solche Aufgabe bearbeiten sollte. Die eigentliche Lösung - wie sie in einem mathematischen Text stehen könnte - ist als solche gekennzeichnet.

Die Aufgabe selbst:

Es sei $A=\{z\in \mathbb{R} \mid z=a+b\sqrt{2}\ ;\ a,b\in \mathbb{Q}\}$ und
$B=\{z\in \mathbb{R} \mid z=\frac{m+n\sqrt{2}}{p+q\sqrt{2}};\ m,n,p,q\in \mathbb{Q}\ ;\ p^2+q^2\neq 0\}$

Beweisen Sie: A=B

Nach Lektüre der Aufgabe **muss** man zugehörige Verständnisfragen beantworten können. Etwa: Wie sieht ein typisches Element von A bzw. B aus? Antwort:

$$a=\frac{2}{7}+\frac{3}{5}\sqrt{2} \quad \text{bzw.} \quad b=\frac{1-3\sqrt{2}}{2+1\sqrt{2}} \quad \text{wegen} \quad 2^2+1^2>0.$$

Oder: Wieso wird $p^2+q^2\neq 0$ verlangt? Antwort: Offenbar, um zu verhindern, dass durch Null geteilt wird. Denn hierdurch wird ja gerade der Fall p=q=0 ausgeschlossen. **Solche Fragen sollte man sich nach der Aufgabenlektüre möglichst selbst stellen und beantworten.** Danach kann man sich an den Beweis machen. Das Vorgehensschema - der Rahmen - ist durch (1.7.13-14) weitgehend vorgegeben und nur noch fallspezifisch auszufüllen.

	Sei a∈A. D.h.: Es gibt zwei rationale Zahlen $p=\frac{c}{d}$ und $q=\frac{r}{s}$ mit d,s$\neq 0$
Explikation	und c,d,r,s∈ ℤ derart, dass $a=p+q\sqrt{2}$ gilt. Einsetzen gibt $a=\frac{c}{d}+\frac{r}{s}\sqrt{2}$.
	Hauptennerbildung: $a=\frac{cs+rd\sqrt{2}}{ds}=\frac{(cs)+(rd)\sqrt{2}}{(ds)+0\sqrt{2}}$. Da cs,rd und ds∈ ℤ
Nachweis	und $(ds)^2+0^2>0$, folgt a$\in B$.
Explikation	Sei jetzt umgekehrt b$\in B$. D.h. es gibt m,n,p,q∈ ℤ und p,q nicht beide Null,
Idee	so dass $b=\frac{m+n\sqrt{2}}{p+q\sqrt{2}}$. Wir erweitern den Bruch mit (p-q$\sqrt{2}$) $\neq 0$. Das gibt
	nach kurzer Rechnung $b=\frac{(mp-2nq)+(np-mq)\sqrt{2}}{p^2+2q^2}$. Oder b=r+s$\sqrt{2}$ mit rationalem
Nachweis	$r=\frac{mp-2nq}{p^2+2q^2}$ und $s=\frac{mp-2nq}{p^2+2q^2}$. Also wie gefordert b$\in A$.

Wir sehen, dass sich der größte Teil dieser Antwort schematisch aus unseren Denkfiguren zusammensetzt. Nur an einer Stelle im zweiten Teil wird eine zusätzliche **Idee** verlangt, die hier im Erweitern mit dem "richtig zu wissenden Faktor" besteht. Der Rest ist reines Handwerk.

☐ Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\{(t^2,t^3)|t \in \mathbb{R}\}=\{(x^{\frac{2}{3}},x)|x\in\mathbb{R}\}$$
$$\{(x,y)|x,y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2=1\}=\{(u,v)|t\in\mathbb{R},\ u=\cos t,\ v=\sin t\ \}$$
$$\{(x,y)|x,y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2=1\}=\{(x,y)|x\in\mathbb{R}, -1\leq x\leq 1, y=\pm\sqrt{1-x^2}\}$$

Wieso darf man bei der ersten Gleichung nicht alternativ $(\mathrm{x},\mathrm{x}^{\frac{3}{2}})$ schreiben?? Welche anschauliche Bedeutung haben diese Gleichungen?

□ Was ist in der zweiten Mengendefinition zu ergänzen:

$$\{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\} = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 1, ...\} \quad ?$$

1.1.7d Endform

(1.7.16) Eine Abart der letzten Denkfigur "Gleichheit zweier Mengen" sieht wie folgt aus:

Eine Menge ist durch eine definierende Relation vorgegeben, aber diese stellt keine optimale Endform dar. Man kann sie noch weiter vereinfachen, eine möglichst **gute Endform** anstreben.

Ein triviales Beispiel: Ist M={2,4,3,2,1,3,4} vorgegeben, so ist i.a. M={1,2,3,4} als Endform vorzuziehen. (Beide Mengen sind ja gleich, da sie dieselben Elemente enthalten.) Bei etwas komplizierteren Definitionen haben Anfänger eine starke Tendenz, solche Vereinfachungen nicht vorzunehmen, was Inspektion und Weiterarbeit erschwert.

(1.7.17) **Weitere illustrierende Beispiele**:

a) Die Lösungsmenge von z^7=1 in $\mathbb{C}$ sollte man von $\mathbb{L} = \{z|z = e^{\frac{2\pi i n}{7}}, n \in \mathbb{Z}\}$ vereinfachen zu $\mathbb{L} = \{z|z = e^{\frac{2\pi i n}{7}}, n = 0, 1, 2, .., 6\}$. In der zweiten Form sieht man sofort, dass es genau 7 verschiedene Lösungen gibt und für diese hat man eine einfache Formel.

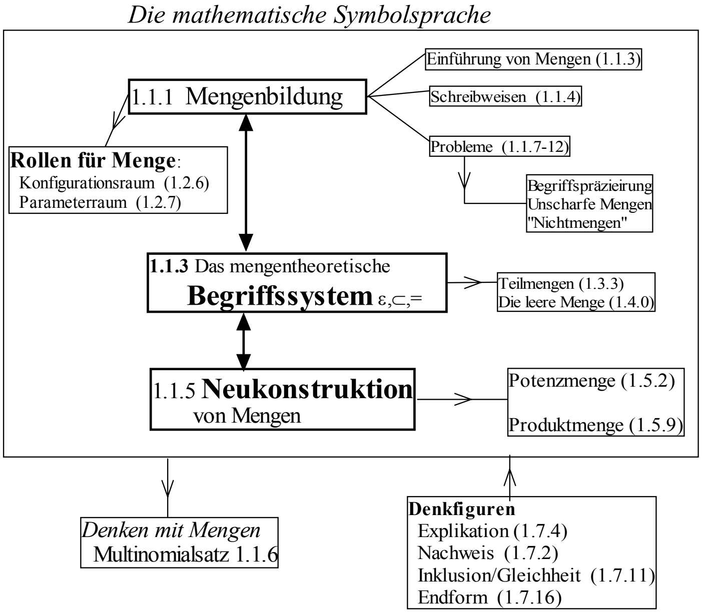
b) Im Rahmen einer studentischen Aufgabe wurde eine Menge bestimmt zu M_ε={n|n∈ $\mathbb{N}$, $\frac{1}{1+n^2} < \varepsilon$}. Fast jeder Student behielt das als Endform bei. Vorzuziehen ist jedoch-es war $0<\varepsilon<1$ - die Endform M_ε={n|n∈ $\mathbb{N}$, n>$\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$} . Hierbei sieht man sofort, dass die Menge alle natürlichen Zahlen oberhalb einer festen Grenze enthält und dass diese Grenze wächst, wenn ε gegen Null geht. Für ε=0.01 etwa kann man noch weiter zu M_ε={n|n∈ $\mathbb{N}$, n>10} konkretisieren.

c) Oder ganz einfach (und ohne Mengenschreibweise): Als Ergebnis einer Überlegung erwiesen sich alle Zahlen a mit 4-2a>0 als zulässig. Fast nie wurde das spontan zu a<2 vereinfacht.

d) Noch allgemeiner taucht das Endformproblem auf, wenn man eine Mengendefinition mit äußeren Parametern oder freien Variablen an einen konkreten Fall anzupassen hat. Nehmen wir irgendeine Polynomgleichung p(x)=0. Die zugehörige Lösungsmenge ist $\mathbb{L}$={x|x∈ $\mathbb{R}$, p(x)=0} und als solche **allgemein** definiert. Jetzt heißt es: Bestimmen Sie $\mathbb{L}$ für p(x)= x^3-6x^2+11x-6. Dann widerspricht die Antwort $\mathbb{L}$={x|x∈ $\mathbb{R}$, x^3-6x^2+11x-6 =0} dem Geist der Aufgabe. Erwartet wird möglichst $\mathbb{L}$={1.2,3}, eine Umformung, die etwas Arbeit erfordert.Nur wenn man überhaupt nicht weiterkommt, wird man eine Antwort des ersten Typs geben. Man muss unterscheiden, ob man einfach die Definition für den speziellen Fall hinzuschreiben hat oder ob das inhaltlich auszuführen ist.

1.7.8 Übersicht über den Aufbau des bisherigen Textes.

Naive Mengenlehre:
Die mathematische Symbolsprache



1.2 Das Begriffssystem *Abbildungen*

1.2.0 Vorbemerkung

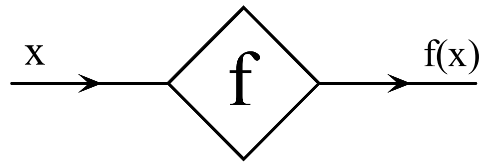
Abbildungen (von Mengen) bilden **das** fundamentale mathematische Handwerkszeug der mengentheoretischen Symbolsprache. Sie tauchen überall auf und erst über sie erhält die Mengensprache ihre eigentliche Bedeutung. Eine Menge beschreibt über ihre Elemente die Dinge, für die man sich interessiert. Eine Abbildung beschreibt (formalisiert) eine eindeutige gerichtete Beziehung zwischen den Elementen zweier Mengen, also den Dingen. Und fast immer sind es **Beziehungen** zwischen den Dingen, die im wissenschaftlichen Bereich und auch sonst interessieren. Das erklärt die überragende Bedeutung des Abbildungsbegriffs, der solche Beziehungen kontextfrei formalisiert. Die in diesem Kapitel unter 1.2.6 gegebene Typisierung üblicherweise auftretender Abbildungen spiegelt dann die enorme Spannweite dieser Begriffsbildung wieder.

1.2.1 Was ist eine Abbildung? Zuordnungen.

(2.1.1) Wir führen dazu den Begriff der (eindeutigen) Zuordnung ein. $\boxed{x \mapsto f(x)}$ bezeichne irgendein Verfahren, das dem mit x bezeichneten Objekt ein anderes Objekt zuordnet, das mit f(x) bezeichnet werden soll. Auf die genauere Funktionsweise des Verfahrens - also das Zuordnungsverfahren selbst - kommt es im Rahmen dar Abbildungstheorie (zunächst) nicht an. Nur auf das Ergebnis, also das, was dem Eingabeelement zugeordnet wird, sowie auf die Richtung, in der die Zuordnung erfolgt. Und das Ergebnis soll eindeutig sein. D.h. das Verfahren soll demselben Eingabeobjekt x immer ein und dasselbe Objekt oder Ergebnis zuordnen. (Der positiv reellen Zahl a wird ihre Quadratwurzel zugeordnet ist ein sinnvoll klingender Satz, der jedoch keine Zuordnung in unserem Sinne festlegt. So könnte der 4 einmal +2 und ein anderes Mal -2 zugeordnet werden. Beides sind ja Quadratwurzeln von 4. Korrekter sollte man daher formulieren:" ..... wird eine ihrer Quadratwurzeln zugeordnet". Und diese Formulierung zeigt direkt die Verletzung der Eindeutigkeitsforderung. Eindeutigkeit erhält man erst durch die Formulierung ".... wird ihre positive Quadratwurzel zugeordnet".

(2.1.1) Die Automateninterpretation.

Es ist vorteilhaft, sich eine Zuordnung als eine Art Automat vorzustellen, in den man x eingeben kann und der daraufhin f(x) automatisch ausgibt. Dabei ist f(x) zunächst einmal eine Bezeichnung für das eindeutig bestimmte Ausgabeobjekt!



f macht aus x ein Objekt, das mit f(x) bezeichnet wird.

Diese Automatenvorstellung verdeutlicht, dass es immer nur auf das **Ergebnis** der Zuordnung ankommt, nicht aber auf die Art, wie die Zuordnung realisiert wird (entsprechend dem nicht sichtbaren Innenleben des Automaten). Wichtig ist die Zuordnung, nicht das Zuordnungsverfahren.

(2.1.3) Die üblichen Rechenausdrücke mit einer unabhängigen Variablen bilden wichtige einfache Modelle derartiger Zuordnungen.

Eine Formel wie $y = x^2 - 2x$ nebst entsprechender Rollenzuweisung kann zwanglos als Zuordnung $x \mapsto x^2 - 2x$ mit den gewünschten Eigenschaften interpretiert werden: Gib irgendeine reelle Zahl a vor. Berechne das zugehörige y. Also $a \mapsto a^2-2a$ oder als spezielle Beispiele: $2 \mapsto 0$ und $1 \mapsto -1$. Auf das "Wie" der Berechnung kommt es nicht an, obwohl der Rechenausdruck manchmal das Wie genauer beschreibt. Bei $x \mapsto (x-1)^2-1$ und $x \mapsto x(x-2)$ etwa handelt es sich um dieselbe Zuordnung wie bei $x \mapsto x^2 - 2x$, nur dass die Zuordnung auf andere Weise realisiert wird!.

Für die jeweils ausgegebenen Werte sind unterschiedliche Bezeichnungen üblich wie y oder f(a) oder eben a^2-2a.

Meist ist es so, dass der Ausgangsterm nicht nur die unabhängige Variable enthält, sondern noch weitere Buchstaben mit der Rolle äußerer Parameter. Etwa $s=s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$ mit den drei äußeren Parametern g,v_0 und s_0. Durch die Schreibweise s(t) - gelesen "von t"-wird angedeutet, dass t hier die Rolle der unabhängigen Veränderlichen, der Eingabegröße übernehmen soll. Dann ergibt jede Wertwahl der drei Parameter eine eigene Zuordnung. Für weitere Überlegungen kann man versuchen, alle diese Zuordnungen gemeinsam zu behandeln.

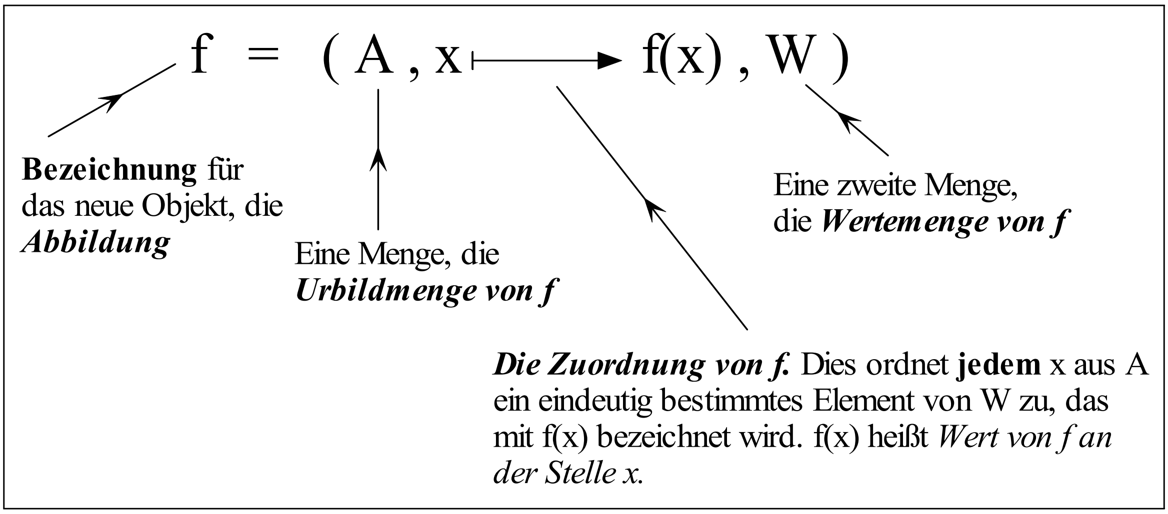
Solche Rechenausdrücke ergeben sowohl die **Zuordnung**, das Ergebnis, wie auch die Festlegung eines **Zuordnungsverfahren**, das zeigt, wie man den betrachteten Rechenausdruck aus anderen, meist einfacheren Zuordnungen aufbaut.

(2.1.4) In sprachlichen Darstellungen von Zuordnungen ist die Reihenfolge der Bezeichnungen teilweise leider vertauscht oder undeutlich. ”3 wird a zugeordnet”? bedeutet speziell nach einer Frage durchaus: dem Element a wird die 3 zugeordnet (also $a \mapsto 3$). Das sollte nicht mit ”a wird der 3” zugeordnet ($3 \mapsto a$) verwechselt werden.

(2.1.5) Aus dem allgemeinen Ziel der Kontextfreiheit folgt, dass festliegen muß, welche Objekte man in eine solche Zuordnung eingeben darf und welcher Art die Ergebnisse sein sollen. Über diesen Präzisierungswunsch gelangt man unmittelbar zum allgemeinen (und dann bereits fertigen) Abbildungsbegriff.

1.2.2 Was ist eine Abbildung. Die Definition

(2.2.1) Eine Abbildung ist ein Tripel, das wie folgt aufgebaut ist:



f(x) heißt der Wert der Abbildung f für das Element x . (Oder ... im Punkte x oder an der Stelle x usw.) Statt ”Wert” sagt man auch das ”Bild von x unter f” . Die Festlegung der Menge W bedeutet, dass immer die zugehörige Explikation möglich ist:

Der Wert $w=f(x)$ liegt in W. Da $W=\{y|......\}$ erfüllt w ....

Beachten Sie, wie durch (2.2.1) eine Formalisierung unserer ursprünglichen Begriffsbestimmung einer Abbildung als gerichtete eindeutige Beziehung erreicht wird.

(2.2.2) Soll ein derartiges Tripel tatsächlich eine Abbildung bestimmen, so müssen die drei Komponenten die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Für **jedes** $a \in A$ muß die Zuordnug einen Wert f(a) produzieren.
2. Dieser Wert f(a) muß **eindeutig** bestimmt sein, nicht aber der Weg, der zu ihm führt.
3. f(a) muß stets in der Menge W liegen.
4. Die Richtung der Zuordnung muß stimmen: von a nach f(a). Dabei ist a vorgebbar und f(a) entsteht gleichsam automatisch.

(2.2.3) Zusätzlich gilt:

Der Buchstabe x bezeichnet (im Tripel) ein beliebig wählbares oder vorgebbares Element aus der Urbildmenge A. Er hat die Rolle einer stummen Variablen, der stets durch ein anderes Symbol ersetzt werden darf, das im Kontext noch keine Bedeutung hat.

Der letzte Punkt bewirkt z.B., dass gilt:

$$f = (A, x \mapsto f(x), W) = (A, y \mapsto f(y).W) = (A, a \mapsto f(a), W)$$

Dagegen wäre (A,W$\mapsto$f(W), W) unzulässig. Das Symbol W hätte in diesem Kontext zwei unvereinbare Bedeutungen.

□ Wie werden Funktionen in den üblichen Computeralgebrasystemen -etwa Maple- eingeführt? Vergleichen Sie das mit dem hier benutzten Tripelkonzept.

1.2.2a Das Einsetzen von Termen

(2.2.4) Für x darf man beliebige Elemente der Urbildmenge einsetzen bzw. allgemeiner Terme, die solche Elemente bezeichnen! Beim Einsetzen erhält x also die Rolle einer freien Variablen. Einsetzen ist ausgesprochen wichtig, der Rollenwechsel wird aber nicht durch ein besonderes Symbol gekennzeichnet. Will man also ein konkretes Element k$\in$A in den Automaten eingeben, so schreibt man auch k$\mapsto$f(k), muss den **Rollenwechsel** also aus dem Kontext wahrnehmen. Etwa 2$\mapsto$f(2)=3.

(2.2.5) Das Einsetzen von Termen führt zu zahlreichen üblen Anfängerfehlern! Für die zugehörigen von-Klammern gilt das Distributivgesetz **nicht**. Einige Beispiele korrekten und fehlerhaften Einsetzens:

x $\mapsto$sin(x)	gibt	(x+y)$\mapsto$ sin$(x+y)$	nicht aber	sinx+siny
		2x$\mapsto$ sin$(2x)$	nicht aber	2sin(x)
x$\mapsto 2x^2+3$	gibt	2a$\mapsto 2(2a)^2+3$	nicht aber	4a$^2+3$
		(2+a)$\mapsto 2(2+a)^2+3$	nicht aber	4+a$^2+3$
		(-3)$\mapsto 2(-3)^2+3$	nicht aber	-18+3

(2,2.7) Je nach Situation und Rollenzuweisung für x kann und wird das Symbol f(x) unterschiedliche Bedeutung haben:

1. Ist x unabhängige Variable, so steht f(x) vielfach für die gesamte Zuordnung x$\mapsto$f(x), ja auch für die gesamte Abbildung.
2. Ist x Konstante oder freier Parameter, so bezeichnet f(x) den zugehörigen Wert aus W, ist also Element von W.
3. Ist x freie Variable, so steht f(x) vielfach für einen den Rechenweg beschreibenden Term, der über Termeinsetzung neue Terme und Zuordnungen produziert.

1.2.2b Das Unterscheiden von Abbildung und Wert.

(2.2.8) **Achtung:** Bei mathematischen Uberlegungen sollte man unbedingt begrifflich zwischen der gesamten Abbildung f und ihren Werten unterscheiden! Zahlreiche Schwierigkeiten im Umgang mit dem Formalismus haben ihre Ursache im Nichtbeachten oder Nichtverstehen dieses Unterschiedes. Viele herkömmliche Texte, die f(x) kommentarlos beide Rollen geben, sind da wenig hilfreich. Wird eine Abbildung über einen Rechenausdruck eingeführt, dann hat man über den definierenden Term eine Bezeichnung für den Wert, aber keine für die Abbildung. **Seien Sie dann schöpferisch**! Scheuen Sie sich nicht, eine zugehörige Bezeichnung für die weitere Argumentation einzuführen, auch wenn diese nicht durch die Problemsituation - sagen wir die Aufgabenstellung - gegeben ist. Die Bezeichnung sollte nicht völlig beliebig sein, sondern möglichst für die weitere Arbeit nützliche Information enthalten oder (besser **und**) gedächtnisunterstützend sein.

Ein Beispiel: Häufig treten Rechenausdrücke des Typs x^n auf. Für die zugehörige Abbildung hat sich keine einheitliche Bezeichnung eingebürgert, so dass sie meist mit dem Wert selbst, also mit x^n bezeichnet wird. Wir führen für die zugehörige Funktion die Bezeichnung h$_n$ ein, so dass wir die Wertegleichung h$_n$(x)=x^n und die Tripelgleichung h$_n$=($\mathbb{R}$,x$\mapsto$x^n,$\mathbb{R}$) zur Verfügung haben und problemlos Wert und Abbildung auseinanderhalten können. Der Buchstabe "h" erinnert an "homogen". Das ist eine wichtige Eigenschaft, der wir häufig begegnen werden und die sich bei diesen Polynomen für die Werte wie folgt ausdrückt: h$_n$(αx)=α^nh$_n$(x). Der Buchstabe n dagegen ist ein äußerer Parameter. Jede Wertwahl liefert eine eigene zugehörige Funktion.

Unzulässig oder zumindest sehr problematisch sind Schreibweisen wie $([0,\infty[, x^2 \mapsto x, \mathbb{R})$ für die Wurzelfunktion. Aber das allgemeine Urbild sollte durch einen einfachen Buchstaben mit der Rolle einer freien Variablen bezeichnet werden, nicht durch einen bereits zusammengesetzten Term. Korrekt wäre höchstens $x^2 \mapsto \sqrt{x^2}$ und dann kann man x^2 auch gleich durch a oder y ersetzen. (Versuchen Sie über $x^2 \mapsto x$ durch einfaches Einsetzen einmal die Wurzel von a+b zu produzieren!)

1.2.3 Die Vorgabe von Abbildungen

(2.3.1) **Wie wird eine Abbildung vorgegeben?** Gemäß der Definition sind Urbildmenge, Wertemenge und Zuordnung festzulegen. Neuartig ist nur die Festlegung der Zuordnung. Einige wichtige Beispiele hierfür:

(2.3.2) **Vorgabe einer Berechnungsformel für f(x).** Dieser Weg wird häufig benutzt.Man gibt für f(x) einen Rechenausdruck - einen Term - an, mit dessen Hilfe man über bekannte Rechenregeln f(x) ausrechnen kann. Etwa f(x) = 3xsin(x). Den Berechnungsausdruck wiederum erhält man meist über eine Formel mit Rollenzuweisung. Die Rollenzuweisung bestimmt unabhängige Variable, abhängige Variable, äußere Parameter usw. Ist die Formel nach den abhängigen Variablen aufgelöst, so hat man unmittelbar eine Zuordnungsvorgabe per Berechnungsausdruck. Vielfach treten in diesen Berechnungsformeln noch äußere Parameter auf: f(x)=3xsin(ωx).

□ Nehmen Sie als Beispiel einer Formel das "Linsengesetz" 1/f=1/g+1/b. Welche Abbildungen erhält man hieraus über welche Rollenzuweisungen? Dasselbe für das Brechungsgesetz. Überlegen Sie sich zugehörige physikalische Problemsituationen mit entsprechenden Rollenzuweisungen.

(2.3.2) **Vorgabe über eine verbal-inhaltlichen Beschreibung** der Zuordnung. Ein Beispiel: Sei M={1,2,.....,10} und $\mathfrak{P}(M)$ die zugehörige Potenzmenge. Ordne jeder Teilmenge T von M die Anzahl ihrer Elemente zu. Das erfüllt unsere Bedingungen. Wir erhalten eine Abbildung A=($\mathfrak{P}(M), T \mapsto$A(T),$\mathbb{N}$) mit A(M)=l0 oder A({1,3.6})=3 usw. Die gewählte Bezeichnung A mag an Anzahl erinnern. Ansonsten ist sie willkürlich.

(2.3..3) **Explizite Angabe der Zuordnung.** Besonders wenn A eine kleine überschaubare Menge ist, kann man die Zuordnung auch durch einfache Aufzählung festlegen.

Sei etwa M={a,b,c,d}. Dann legt das nachfolgende Schema in selbsterklärender Weise je eine Abbildung f=(M,x $\mapsto$ f(x).$\mathbb{N}$) bzw g=(M, x$\mapsto$g(x),M) fest.

Das Schema enthält eine vollständige Wertetabelle. Entsprechend legt jede Wertetabelle das Zuordnungschema fest.

$$\begin{array}{lcl} a & \longmapsto & 3 \\ b & \longmapsto & 7 \\ c & \longmapsto & 7 \\ d & \longmapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} a & \longmapsto & a \\ b & \searrow & b \\ c & \longmapsto & c \\ d & \nearrow & d \end{array}$$

1.2.3a Schreibweisen für Abbildungen

(2.3.4) Je nach Situation verwendet man reduzierte Schreibweisen für Abbildungen. Die meisten erklären sich weitgehend von selbst. Interessiert man sich etwa besonders für die Zuordnung, so schreibt man f:x$\mapsto$f(x) und nimmt an, dass der Kontext die zugehörigen Mengen festlegt. Kommt es dagegen mehr auf die Mengen an, so schreibt man f:A $\to$ B oder A$\xrightarrow{f}$B. Ist der definierende Rechenausdruck von besonderer Bedeutung, schreibt man y=f(x) usw. Vielfach benutzt man anstatt der Tripelschreibweise die folgende dazu offensichtlich gleichwertige Schreibweise

$$\boxed{\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}}$$

Sie ist im üblichen Schriftbild recht sperrig, aber für die mathematische Tafelarbeit besonders geeignet. Beachten Sie die beiden unterschiedlichen Pfeiltypen, die immer die relevante Typunterscheidung "Element / Menge" ermöglicht!

1.2.4 Bild und Graph einer Abbildung

(2.4.1) Ist eine Abbildung einmal (wie beschrieben oder auch anders) festgelegt, so kann man stets **zwei zugehörige Mengen** bestimmen, das Bild und den Graphen von f. Jeder Abbildung kann man diese beiden Mengen zuordnen:

$$f=(A,x\mapsto f(x),w) \quad \begin{array}{l} \mathrm{Bild}(f)=\{y|\text{Es gibt } x\in A \text{ und } y=f(x)\} \\ \mathrm{Graph}(f)=\{(x,y)|x\in A, y\in W \text{ und } y=f(x)\} \end{array}$$

Meist schreibt man auch nur Bildf und Graphf.

(2.4.2) Beispiele: Sei sin $=(\mathbb{R},x\mapsto\sin(x),\mathbb{R})$ die übliche Sinusfunktion. Da die Werte dieser Funktion stets zwischen -1 und 1 liegen. hat man Bild(sin) = [-1,1]. Bei einer Bahnkurve ist Bild ein dauerbelichtetes Foto des Bewegungsablaufes, also die Spur oder Bahn der Bewegung. "Die Planetenbahnen sind Ellipsen". Das ist eine Information über das Bild, nicht aber über die Bahnkurve selbst.

(2.4.3) Bildf ist stets eine Teilmenge der Wertemenge von f. Die Wertemenge repräsentiert die Eigenschaften, die jeder Wert notwendig besitzen **muß**, die man also "ohne Ansehen der Person", d.h. des speziellen Falles für eine Explikation verwenden kann: ("y ist Wert, also Element von W. D.h.......”). Bildf dagegen repräsentiert die Eigenschaften, über die man **tatsächlich verfügen kann**! Hier heißt die Explikation: "$y\in$Bildf. Also gibt es sicher ein Urbild a, so dass y=f(a) gilt. ...".

(2.4.4) Graph(f) dagegen ist eine Teilmenge des *Graphenraumes* $A\times W$. Für $h_2=(\mathbb{R}, x\mapsto x^2,\mathbb{R})$ beispielsweise bildet Graph(h_2) den üblichen "Funktionsgraphen", das Schaubild der Parabelabbildung. Überdies ist Bildh_2 $=[0,\infty[$.

Der Graph als Teilmenge von $A\times W$ legt die Zuordnung vollständig fest und erlaubt somit eine Rückführung des Zuordnungsbegriffs auf die bereits eingeführten Produkt- und Teilmengenbildungen. Wegen der großen Bedeutung des Zuordnungsbegriffs tun wir das hier nicht, sondern führen den Zuordnungsbegriff als fundamentales Objekt ein.

1.2.5 Mögliche Fehler bei der Konstruktion einer Abbildung

(2.5.1) Was kann schiefgehen, wenn man versucht, eine Abbildung zu konstruieren? Oder: Wann ist etwas, das wie eine Abbildung aussieht, in Wahrheit keine? Wir greifen (2.2.2) erneut auf. Es gibt vier typische Schwierigkeiten, die wir nochmals ins

Gedächtnis rufen wollen:

1. (2.5.2) Das benutzte Zuordnungsverfahren liefert keine eindeutige Zuordnung. Dann muß man das Verfahren geeignet abändern, so dass die Eindeutigkeit gesichert wird. Etwa: " .... wähle die nicht negative Quadratwurzel." Auch Sprachlexika enthalten nicht eindeutige Zuordnungen (von Worten).

2. (2.5.3) Die Richtung der Zuordnung wird verwechselt. Manche sprachlichen Formulierungen legen diesen Fehler nahe: *Die Lösung wird der Gleichung zugeordnet,* bedeutet natürlich Gleichung $\mapsto$Lösung. Anfänger sind es teilweise nicht gewohnt, auf die Richtung einer Beziehung zu achten.

3. (2.5.4) Man findet ein $x\in A$, für das die Zuordnung nicht erklärt ist. Man sagt, dieZuordnung sei *nicht universell* .
   Dann muß man entweder das Verfahren geeignet verallgemeinern oder aber die Urbildmenge um die unzulässigen Objekte verkleinern.

4. (2.5.5) Man findet ein $a\in A$ derart, dass f(a) nicht in W liegt. Dann muß man W geeignet vergrößern, was meist leicht ist.

1.2.6 Typisierung der Abbildungen nach der jeweiligen Rolle der beteiligten Mengen.

(2.6.1) Der Abbildungsbegriff ist außerordentlich allgemein und erfasst eine Vielzahl unterschiedlichster Beziehungen, deren Gemeinsamkeit er herauspräpariert. Zur Orientierung in dieser Vielfalt führen wir eine Liste besonders wichtiger Typen von Abbildungen an. Jeder dieser Typen verbindet allgemeine Abbildungseigenschaften mit typspezifischen Besonderheiten, aus denen sich vielfach eigenständige mathematische

Disziplinen entwickelt haben. Über das Wahrnehmen dieser Verbindungen entsteht die enorme Leistungsfähigkeit des Abbildungsbegriffs: In völlig neuartigen Situationen doch wieder Vertrautes zu erkennen und die zunächst chaotische Vielfalt des Neuen zu verstehen. Aber auch per Rollenzuweisung Vorstellungen entwickeln zu können, welche Denkrichtungen man bei Problemlösungen zunächst versuchsweise einschlagen sollte.

(2.6.2) Man sollte daher das Vorliegen eines solchen Typs möglichst unmittelbar erkennen. Außerdem erhalten wir einen großen Fundus an unterschiedlichen konkreten Beispielen von Abbildungen. Ausgangspunkt einer Typeinteilung der Abbildungen können entweder die beiden beteiligten Mengen sein oder aber Eigenschaften der Zuordnung. Zunächst ziehen wir zur Klassifikation die Mengen heran. Später folgt eine andere Klassifikation, die sich auf die Zuordnung bezieht.

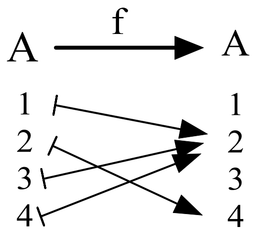
Wir erinnern daran, dass Mengen, die in physikalischen Problemen auftreten, gewisse Rollen annehmen. Die Typisierung benutzt diese Rollenzuweisung, durch die wieder bestimmte erfolgversprechende Denkrichtungen festgelegt werden.

(2.6.3) Nachfolgend seien $\mathbb{N}, \mathbb{R}, ...$ die üblichen festgelegten Zahlmengen. A,B,C.... seien beliebige Mengen (vergleichbar den freien Variablen). Unter E wollen wir immer eine Menge mit Konfigurationsraumrolle verstehen wie E^3 oder E^1 für die Zeitachse usw. Unter P eine Parametrisierungsmenge und unter V eine Ergebnismenge, in der Regel ist V ein Vektorraum.

1.2.6a Abbildungen kleiner endlicher Mengen

Hier ist die gesamte Abbildung problemlos überschaubar.

Diese Abbildungen eignen sich zur raschen Veranschaulichung vieler abstrakter Eigenschaften von Abbildungen. Dazu benutzt man Darstellungen der gegebenen Art.



☐ Sei f die Abbildung der Figur. A={1,2,3,4}. Geben Sie die beiden Mengen Bildf und Graph(f) an. Für welche x gilt f(x)=2? Für welche ist f(x)=l?

☐ Dasselbe A. Wieviele Abbildungen A→ A gibt es?

(2.6.4) Mit Hilfe derartiger Bildchen, die sich selbst erklären, kann man beispielsweise sofort schließen, dass es 4^4= 256 verschiedene Abbildungen A→A gibt. Davon sind 4! umkehrbar. Umkehrbare Abbildungen M→M einer Menge M nennt man suggestiv *Permutationen* der Elemente von M.

Ein Beispiel einer gerichteten Beziehung dieses Typs aus einem Anwendungsbereich: Jedem chemischen Element wird seine Ordnungszahl zugeordnet. Sauerstoff↦8 usw.

1.2.6b Datensätze.

Das sind Abbildungen einer **endlichen** Menge P in irgendeine Menge M. Meist ist M allerdings eine Menge aus Zahlen oder Zahltupeln. Die typische Vorstellung hinter einem Datensatz ist: Die Elemente von P bezeichnen einen Satz von Beobachtungen, denen jeweils ein Beobachtungs- oder Meßresultat zugeordnet wird. Und reale Beobachtungsereignisse eines Typs gibt es in unserer Welt immer nur endlich viele. Datensätze werden vielfach in Form einer Wertetabelle vorgegeben.

Beispiel: Die Schwingungsdauer eines Pendels wird n mal bestimmt. i↦T(i). Der i-ten Messung wird das zugehörige Meßergebnis zugeordnet. Die Statistik befaßt sich intensiv mit diesem Abbildungstyp.

1.2.6c Folgen, insbesondere Zahlenfolgen.

Das sind Abbildungen des Typs a =($\mathbb{N}$, n$\mapsto$$a_n$, W) . Die Urbildmenge ist $\mathbb{N}$ oder eine andere diskrete unendliche Zahlenmenge wie $\mathbb{Z}$. Hier schreibt man gerne a_n anstelle von a(n), benutzt für die Werte also eine *Indexschreibweise.*

(2.6.5) *Zahlen**folge*** bedeutet W=$\mathbb{R}$. Die Vorgabe einer solchen Folge erfolgt meist über eine Berechnungsformel. Etwa $a_n = 1/(n+1)$ oder $b_n = nq^n$ für a=$(\mathbb{N}, n \mapsto a_n, \mathbb{R})$ und b=$(\mathbb{N}, n \mapsto b_n, \mathbb{R})$. Hierbei ist q$\in \mathbb{R}$ äußerer Parameter. Bei Bedarf wird man dann b_q oder etwas ähnliches als Bezeichnung der Abbildung wählen. Ein weiteres Beispiel: $n \mapsto s_n = 1 + 2 + ... + n$.

Zahlenfolgen bilden das einfachste Hilfsmittel, **um den Übergang von endlich vielen zu unendlich vielen Operationen gedanklich zu analysieren, also zu überlegen, was geschieht, wenn man unendlich viele Operationen ausführen könnte**. (Beispiel: Im Falle der unendlichen Summe 1+x+x^2+x^3+...... läßt sich das Verhalten bei diesem Übergang bekanntlich problemlos analysieren.) Die Analysis befaßt sich u.a. mit dem Verhalten von Folgen. Vgl. Kap.6.2.

Beim Auftreten des Wortes "Folge" sollte man stets die Zutat präzisieren im Sinne von "Folge von ....". Folge von natürlichen Zahlen, Folge von komplexen Zahlen, Folge von Funktionen, Folge von Symbolen, Folge von Aussagen.

1.2.6d Reelle Funktionen.

Hier sind Urbild- und Wertemenge Teilmengen von W. Das Wort Funktion weist immer darauf hin, dass es sich um Abbildungen handelt, bei denen irgendwie Zahlen mit im Spiel sind. Historisch und praktisch bilden sie den wichtigsten Beispieltyp für Abbildungen. Die Vorgabe einer reellen Funktion erfolgt typischerweise über eine Berechnungsformel, die wieder aus einer Formel mit Rollenzuweisung entsteht.

$$f(x) = ... \qquad \text{etwa} \quad f(t) = tan(sin(1+t^2))$$

Auch hier ist die Analysis eine wichtige zugehörige Disziplin. Für viele reelle Funktionen bildet der **Graph** eine zeichen- und vorstellbare Teilmenge der Ebene. Das wird zur Beherrschung des Verhaltens dieser Funktionen ausgenutzt. Die reelle Funktion $(\mathbb{R} - \{0\}, x \mapsto \sin(\frac{1}{x}), \mathbb{R})$ besitzt einen gerade noch vorstellbaren, wenn auch nicht mehr zeichenbaren Graphen.

Ein Beispiel aus der Physik: (Zeit t)$\mapsto$ (momentane skalare Geschwindigkeit). Ebenso sind die Koordinatenfunktionen einer Bahnkurve reelle Funktionen.

1.2.6e Parametrisierungen und Indizierungen

Das sind Abbildungen des Typs p:P$\to$E. Der Urbildraum P ist eine Parametrisierungsmenge und E erhält vielfach die Konfigurationsraumrolle. Die interessierende Größe ist häufig Bildp$\subset$E . Das Bild erfaßt etwa eine geometrische Figur im Konfigurationsraum oder das Ergebnis eines Bewegungsablaufs darin. Beispiele sind Parametrisierungen von Geraden und Ebenen im Raum, aber auch eine Numerierung der Eckpunkte einer Figur. Jeder Punkt von Bild p wird durch eine oder mehrere Zahlangaben (zugehörige Parameterwerte) charakterisiert, welche ein **Namensgebungssystem** bilden, mit dem man rechnerisch arbeiten kann.

Zu ein und demselben Gebilde kann und wird es mehrere (viele) Parametrisierungen geben.

(2.6.6) Der Graph einer Funktion kann stets wie folgt parametrisiert werden:

$$(\mathbb{R}, x \mapsto (x, f(x)), \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

Das ist die **kanonische Parametrisierung des Graphen**, die vielfach nützlich ist.

Auch nicht kartesische Koordinaten wie Polarkoordinaten definieren Abbildungen dieses Typs. Im Falle ebener Polarkoordinaten hat man beispielsweise

$$(r, \theta) \mapsto \vec{e}_1 r \cos\theta + \vec{e}_2 r \sin\theta \qquad \text{Vgl. Kap. 6}$$

(2.6.7) Ist P=I$\subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, so nennt man eine Parametrisierungsabbildungk: I$\to$E auch eine **Kurve** (in E) . Die Punkte von Bild(k) können dann durch **einen** (Anzahl!) reellen Parameter beschrieben werden.

(2.6.8) Falls der geometrische Aspekt des Bildes nicht interessiert und hinter dem Namensgebungsaspekt zurücktritt, nennt man eine solche Abbildung eine Indizierung (der Elemente des Bildes). Dann benutzt man meist wieder die Indexschreibweise p_x anstelle p(x). Und für x schreibt man vielfach i oder Ähnliches. Der Charakter dieser Zuordnungen wird erfaßt durch die modellhafte Zuordnung (eindeutiger) Name↦(zugehörige) Person. Statt Indizierung oder indizierter Menge sagt man auch ***Familie*** *von Elementen aus E.*. In Kap. 4 werden wir den Familienbegriff verwenden, um das grundlegende Begriffsystem der Vektorrechnung einzuführen.

1.2.6f. Darstellungen und Codierungen

Hier haben wir es mit zwei Mengen A und B zu tun, die unterschiedliche Strukturen tragen können. D.h. für die Elemente von B kann es andere Beziehungen geben als für die Elemente von A. Dann kommt es vor, dass man die Elemente von A durch Elemente aus B darstellen oder codieren kann. D.h. man hat eine Abbildung d=(A,x↦f(x),B) mit deren Hilfe es nun möglich ist, **Eigenschaften von A nach B zu übertragen** und dann die andersartigen Beziehungen in der Wertemenge B zu verwenden, um Probleme aus A zu lösen! Die Richtung dieser Abbildungen ist somit entgegengesetzt zur Richtung der Parametrisierungsabbildungen, bei denen man von P=A nach E=B geht und wo man die Eigenschaften der Urbildmenge A zur Problemlösung verwendet.

Ein typisches und wichtiges Beispiel ist die Abbildung $(E^3, P \mapsto \vec{x}_P^K, \mathbb{R}_K^3)$, die **die Punkte des Raumes durch Zahltripel, die Koordinatenvektoren, darstellt.** Über diese Darstellung werden geometrische Probleme quantifiziert und analytisch behandelbar. Man kann auch sagen: **Die Punkte werden durch die Zahltripel codiert.**

(2.6.9) Historisch bedingt werden manchmal auch Parametrisierungen als Darstellungen bezeichnet. So versteht man unter Polarkoordinatendarstellung meist eine Abbildung vom Parametrisierungstyp. Für die Ebene z.B. die Abbildung

$$([0,\infty[\times\mathbb{R}, (r,\theta) \mapsto r(\vec{e}_1\cos\theta + \vec{e}_2\sin\theta, \mathbb{V}_K^2) \qquad \text{Vgl. Kap.6}$$

□ Codieren Sie die Eckpunkte eines Würfels im $\mathbb{R}^3$. Dann erlaubt die rechnereische Struktur die Beschreibung des Überganges zum entgegengesetzten Eckpunkt. Nämlich?

1.2.6g Felder einschliesslich Bahnkurven.

Dieser Abbildungstyp ist für die Physik und andere Wissenschaften von herausragender Bedeutung. Definierend ist, dass **der Urbildraum E die Rolle eines Konfigurationsraumes** und der Werteraum W die Rolle eines Ergebnisraumes hat. D.h. man kann irgendwie auf den Punkten von E Beobachtungen ausführen und die Ergebnisse im gemeinsamen Ergebnisraum W mathematisch bearbeiten.

(2.6.10) Ist dabei E insbesondere eindimensional (typischerweise ein Zeitintervall), dann spricht man von Bahnkurven. Jedem Zeitpunkt wird ein zugehöriger Ortsvektor (Punkt,Vektor) zugeordnet. Bei einer Bahnkurve hat V_0^3 nicht nur die Rolle eines Konfigurationsraumes, sondern bei Bedarf zusätzlich die eines Werteraumes. Und die Urbildelemente sind nicht einfach Namensgeber für die Werte wie bei einer Kurve, sondern besitzen inhaltliche Bedeutung. Vom Gehalt her ist eine Bahnkurve einerseits ein Figurenerzeuger und andererseits ein Feld auf einem eindimensionalen Konfigurationsraum, etwa der Zeitachse.

(2.6.11) Ist der Urbildraum dagegen zwei-, drei- oder noch höherdimensional, dann spricht man von Feldern. Diese werden wieder unterteilt in Skalarfelder und Vekforfelder, je nachdem, ob man Zahlen oder Vektoren mißt, d.h. je nachdem, ob der Werteraum $\mathbb{R}$ oder höherdimensional ist. Es gibt aber auch Felder mit Werten noch allgemeinerer Art.

(2.6.12) Sowohl Felder als auch Bahnkurven erfassen Zustände physikalischer Systeme, ermöglichen die idealisierte Beschreibung von Meßresulten eines bestimmten Typs zu einem vorgegebenen Konfigurationsraum. Hieraus erklärt sich ihre enorme Bedeutung.

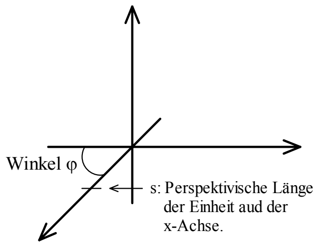
1.2.6h Transformationsabbildungen (Projektionen und Injektionen)

Das sind Abbildungen des Typs E→E′ . **D.h. Urbild- und Werteraum haben beide die Konfigurationsraumrolle.** Sie können verschieden oder gleich sein. Als orientierendes Beispiel wird etwa aus einem Ortsvektor durch eine *geometrische Transformation* ein anderer Ortsvektor gemacht und das als Zuordnung interpretiert. Etwa durch eine Drehung oder Streckung oder Spiegelung. Man kann auch sagen, dass eine Darstellung des Konfigurationsraumes E im Konfigurationsraum E′ vorliegt, wobei jedoch weniger- unterschiedliche als gleichartige Strukturen miteinander verglichen werden. Viele Bezeichnungen der Abbildungstheorie erklären sich aus diesem Abbildungstyp.

(2.6.13) Ist der Werteraum E′ kleiner als der Urbildraum E, so spricht man von einer *Projektion.* Etwa ($\mathbb{R}^3_K$,(x,y.z)$\mapsto$(x,y),$\mathbb{R}^2_K$).

(2.6.14) Die übliche Darstellung räumlicher Figuren in der Eben vermittels Parallelprojektion ist eine weitere Abbildung dieses Typs:

$$\pi = (\mathbb{R}^3_K, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - sx\cos(\varphi) \\ z - sx\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2_L)$$



Die Bedeutung der beiden äußeren Parameter s und φ in dieser Abbildung ist klar: s ist die *gezeichnete* Länge der Einheit auf der x-Achse und φ der Winkel, unter dem diese Achse zeichnerisch abgetragen wird.

(2.6.15) Ist der Werteraum E′ größer als der Urbildraum E, so spricht man von einer *lnjektion .* Etwa $(\mathbb{R}^2_L, (x,z) \mapsto (x,0,z), \mathbb{R}^3_K)$. Hier wird die L-Ebene als x-y-Ebene im dreidimensionalen Raum *eingebettet.* Oder: Ein bestimmter Teil des dreidimensionalen Raumes wird als Ebene interpretiert. Oder: Eine Ebene wird im dreidimensionalen Raum dargestellt.

(2.6.16) Ist E=E′, so liegen *Transformationen im engeren Sinne* vor. Drehungen, Verschiebungen (=Translationen), Spiegelungen usw. sind Beispiele. Etwa:

Spiegelung am Ursprung	$\sigma = (V^3_0, \vec{x} \mapsto -\vec{x}, V^3_0)$
Verschiebung um $\vec{a}$	$\mathrm{t}_{\vec{a}} = (V^3_0, \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}, V^3_0)$
Drehung in der Ebene um den Winkel α	$\mathrm{D}(\alpha) = \left(\mathbb{R}^2_K, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2_K\right)$

1.2.6i Einbettungs- und Idenfikationsabbildungen.

Wir verwenden hier schon vorab den Begriff der injektiven Abbildung (="Injektionen") aus der zweiten Klassifikation in 1.2.8, um diesen wichtigen Abbildungstyp nicht erst nachträglich einführen zu müssen.

Bei den Einbettungs- und Identifikationsabbildungen handelt es sich um einen Speziafall der Injektionen, bei dem es um folgendes Problem geht: **In gewissen Situationen möchte man Dinge, die eigentlich unterscheidbar sind, nicht unterscheiden, sondern identifizieren**. Der Aufwand der Unterscheidung bringt (im betrachteten Kontext) nichts.

> Vergleichen Sie dazu folgende 3 Sätze: " Die Person, die ich mit Müller II bezeichne, trete vor" mit " Die Person, die mit Müller II bezeichnet wird, trete vor" und schließlich: "Müller II trete vor".

Üblicherweise ist die dritte Formulierung angemessen, auch wenn der Sprechende die Namen über eine Liste völlig getrennt von den visuell wahrgenommenen Personen erlernt hat. In gewissen leicht vorstellbaren Situationen wäre jedoch die erste Formulierung angebracht, die Unterscheidbares (Name und Person) tatsächlich auch unterscheidet. Die zweite Formulierung dagegen ist in gewissen philosophischen und formalen Zusammenhängen relevant, die eine **begriffliche Unterscheidung von von Gegenstand und Bezeichnung** des Gegenstandes erfordern. Je nach Situation kann und wird man Bezeichnung und Gegenstand identifizieren oder aber auseinanderhalten. Derartige Identifikationen bzw. umgekehrt Entfaltungen kann man durch die Verwendung injektiver Abbildungen formalisieren, verstehen und kontrollieren.

> Hat man eine injektive Abbildung j=(A,a$\mapsto$j(a),B), so geschieht die Identifikation, indem man die Elemente aus Bild(j) einfach umbenennt. Statt j(a) sagt man a. Damit wird A eine Teilmenge von B. Man sagt, A wird in B eingebettet. Ob das sinnvoll und überhaupt konsistent ist, hängt - das sei nochmals betont - von der Situation ab. Injektiv ist jedenfalls erforderlich.

(2.6.18) Erstes Beispiel: $\mathbb{R}$ wird über ($\mathbb{R}$,u$\mapsto$j(u)=u+i0=u ,$\mathbb{C}$) konsistent in $\mathbb{C}$ eingebettet. Die reellen Zahlen werden mit den Punkten der 1-Achse identifiziert.

(2.6.19) Zweites Beispiel: In der elementaren Physik unterscheidet man selten zwischen Orts- und Koordinatenvektor. Das geschieht durch die Identifikationsabbildung

$$(V_0^3, \vec{x} \mapsto j(\vec{x}) = \vec{x}^K, \mathbb{R}_K^3).$$

Für j(x) schreibt man $\vec{x}$ und hat $\vec{x}$=$\vec{x}^K$. Solange man nur mit einem festen Koordinatensystem arbeitet, macht das in der Regel nichts.

Damit haben wir ein formales Mittel in der Hand, um einer immer weitergehenden begrifflichen Verfeinerung gegenzusteuern, sobald diese nichts bringt oder gar schädlich wird. Und umgekehrt können wir bei Bedarf Begriffe präzisieren und entfalten.

(2.6.20) Zur Terminologie: Ist j bijektiv, so sprechen wir von einer *Identifikation*, ist j nur *injektiv,* aber nicht bijektiv, von einer Einbettung.

1.2.6j Algebraische Verknüpfungen oder Kompositionen

Das sind die Bausteine, mit deren Hilfe algebraische Rechenausdrücke oder Terme - insbesondere auch Formeln - aufgebaut werden. Entscheidend ist dabei, dass die Urbildmenge ein kartesisches Produkt ist. Die Abbildungen haben demnach die Form A$\times$B$\mapsto$C. Sind alle drei Mengen gleich, also A=B=C, so spricht man von einer *inneren Verknüpfung.* Die entscheidende Funktion dieser Abbildungen beim Termbau ist, dass sie aus zwei Objekten per Zuordnung ein weiteres Objekt machen.

Eine physikalische Rolle ist hier nicht erforderlich.

Zwei Beispiele:

Multiplikation in $\mathbb{R}$	$* = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x,y) \mapsto *(x,y) = x * y, \mathbb{R})$
Skalarprodukt in V^3	$\cdot = (V^3 \times V^3, (\vec{x},\vec{y}) \mapsto \cdot(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}, \mathbb{R})$

Hier sind wieder traditionelle Bezeichnungen für die Werte üblich. Also a+b statt des ganz korrekten +((a,b)).

Die mathematische Disziplin Algebra baut auf diesem Abbildungstyp auf. Wir gehen in Kap.3 auf diesen Typ ein.

1.2.6k Funktionale und Maße

Wenn die Urbildmenge eine Menge von Funktionen ist, nennt man Abbildungen auch gern " Funktionale". Ein Beispiel eines Funktionals kann man sich leicht mit Hilfe der Integration konstruieren.

Sei $\mathcal{F}$ eine Menge integrabler Funktionen. Bilde

$$J_a^b = (\mathcal{F}, f \mapsto \int_a^b dx f(x), \mathbb{R})$$

Bachten Sie: f$\in$ $\mathcal{F}$: bedeutet: f ist reelle Funktion, also f=$(\mathbb{R}, \mapsto f(x), \mathbb{R})$. Und dieser Funktion wird durch unsere Zuordnung eine Zahl zugeordnet. Z.B J$_0^\pi$[sin] = 1. Der Funktion Sinus wird so die Zahl 1 zugeordnet. In der Physik stellt die Arbeit ein wichtiges Beispiel eines Funktionals dar.

Bei einem *Maß auf E* ist die Urbildmenge dagegen eine Teilmenge der Potenzmenge von E. Es liegt eine Abbildung des folgenden Typs vor:

$$\mu = (\mathfrak{M}, F \mapsto \mu(F), \mathbb{R}) \quad \text{mit } \mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(M).$$

Die Elemente F$\in$ $\mathfrak{M}$ sind Teilmengen von E und lassen sich geometrisch als Figuren in E interpretieren (Vgl. (1.3.6)). Ein Maß μ ordnet jeder dieser Figuren eine Zahl zu. Übliches Orientierungsbeispiel ist der *Flächeninhalt ebener Figuren* oder das *Volumen von Körpern.* Ein anderes typisches Maß ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

1.2.61 Operatoren

Hier dürfen Urbildmenge **und** Wertemenge Funktionsmengen sein. Die Ableitung liefert sofort ein Beispiel. Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Polynomabbildungen. Dann kann man für $f \in \mathcal{P}$ die Ableitungsfunktion f′ bilden und das ist erneut ein Polynom. Die Zuordnung f↦f′ definiert einen sog. Differentialoperator. D= ($\mathcal{P}$,p↦ p' $\mathcal{P}$) Etwa $3h_3 \overset{D}{\mapsto} 9h_2$. Der Operatorbegriff wird im Zusammenhang mit den Differentialgleichungen wichtig. Vgl. Kap.7 und 8. In der Physik ist die Quantenmechanik ein Tummelplatz für Operatoren.

1.2.6m Triviale Abbildungen

Die bisherigen Beispielklassen machten alle gewisse Einschränkungen an die beteiligten Mengen. D.h., sie lagen vor, sofern die Urbild- bzw. die Wertemenge bestimmte Eigenschaften besaß. Manchmal interessiert man sich aber auch gerade für Abbildungen von völlig beliebigen Mengen. **In diesem Fall gibt es einige triviale Abbildungen, die man stets als Beispiele zur Verfügung hat**. Man benötigt dann Zuordnungen, die immer bildbar sind. Das ist bei den folgenden Konstruktionen offensichtlich der Fall, wobei sich die gewählten Bezeichnungen selbst erklären sollten:

(2.6.21)	Konstante Abbildung	A, B beliebige Mengen Sei c∈B. Bilde:	$\underset{\sim}{c} = (A, x \mapsto \underset{\sim}{c}(x) = c$,B)
(2.6.22)	Injektion von A in B	Sei A⊂ B	$\mathrm{i}_A = (A, x \mapsto x, B)$
(2.6. 23)	Identische Abbildung	A Menge	$\mathrm{id}_A = (A, x \mapsto x, A)$
(2.6.24)	Kanonische Projektionen	A,B Mengen	pr_1=((A×B),(x,y)↦x,A) pr_2=((A×B),(x,y)↦y,B)

Hat man eine Menge A mit Hilfe einer Identifikationsabbildung j=(A,x↦j(x),B) in B eingebettet, A also zur Teilmenge von B gemacht, so wird aus j die kanonische Injektion i_A.

(2.6.14) Weitere triviale Abbildungen, die sich sowohl für die Integrationstheorie als auch die Einführung der fuzzy-Mengen als wichtig erweisen, sind die charakteristischen Funktionen von Teilmengen. Sie bilden in gewisser Weise ein Gegenstück zu den Injektionen. Sei dazu M Menge und A eine Teilmenge. Wir bilden *die charakterstische Funktion einer Teilmenge A von M* also, A⊂M, wie folgt:

$$\chi_A = (M, x \mapsto \chi_A(x), \mathbb{R}) \quad \text{mit } \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn x} \in A \\ 0 & \text{wenn x} \notin A \end{cases}$$

Damit erkennt man die Elemente der Teilmenge an ihrem Funktionswert.

☐ Sei M Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die zugehörige Potenzmenge. Für jede Teilmenge T von M bilden wir das Komplement, also $\mathrm{T}^c = M - T = M\backslash T$. Von welchem Typ ist die entstehende Abbildung. Dasselbe für die Vereinigung und den Durchschnitt.

1.2.7 Das Veranschaulichen von Abbildungen

(2.7.1) Ein im Zusammenhang mit Abbildungen fast immer auftretendes wichtiges Problem besteht in der **Veranschaulichung ihres Verhaltens**. Eine Zuordnung enthält meist derart viel an Information, dass es kaum je möglich ist, diese unmittelbar und vollständig zu erfassen. Das gilt besonders, wenn diese Zuordnung auf eine abstrakte und formale Weise gegeben ist. Auch eine Formelvorgabe reicht meist nicht. Sie erlaubt die Berechnung beliebiger einzelner Werte, sagt aber zunächst wenig darüber, was für eine Figur alle Werte zusammen ergeben. Die Bewältigung unterschiedlicher Anwendungssituationen verlangt dagegen, dass man das Verhalten der Zuordnung möglichst wirksam und ganzheitlich überschauen sollte, in dem Sinne, dass man schnellen geistigen Zugriff zu jeweils benötigten Verhaltenseigenschaften hat. Man benötigt eine Vorstellung davon, wie die Zuordnung als Ganzes wirkt. Es hat sich gezeigt, dass eine Reihe der unter 1.2.6 beschriebenen Abbildungstypen geeignet sind, solch eine ganzheitliche Verhaltensveranschaulichung zu fördern. Die Veranschaulichung erfolgt in der Regel so, dass man gewisse der zur Abbildung gehörigen Mengen als Konfigurationsraum interpretiert. **Die dem Erfahrungswissen über den Konfigurationsraum $\mathbf{E}^3$ entnommenen Vorstellungen ermöglichen dann eine brauchbare Verhaltensveranschaulichung per Analogiebildung.**

(2.7.2) Wir beschreiben nachfolgend vier Standpunkte, bei denen jeweils bestimmte beteiligte Mengen als Konfigurationsraum interpretiert werden. Die Veranschaulichungen entstehen natürlich zunächst aus

Erfahrungen mit Abbildungen, bei denen diese Rollenzuweisungen tatsächlich charakteristisch ist. Später wird die Methode weitgehend unbewußt auf andere Abbildungen übertragen. Erforderlich ist jedoch eigene übende und reflektierende Auseinandersetzung mit dem Problem.

Ein weiterer Standpunkt ergibt sich, wenn die Abbildung aus einfacheren Abbildungen aufgebaut ist deren Einzelverhalten man beherrscht.

(2.7.3) Der Feldstandpunkt.

Ein wesentliches Merkmal unseres physikalischen Raumes E^3 besteht darin, dass man sich in ihm bewegen und dabei ortsabhängig Messungen vornehmen kann. Dem jeweiligen Punkt wird dann das zugehörige Meßergebnis zugeordnet. Das, was man üblicherweise als Felder bezeichnet, sind Zuordnungen dieser Art. Eine solche Zuordnung läßt sich nun veranschaulichen, indem man sich das Meßresultat am Meßpunkt hinterlegt und geometrisch veranschaulicht denkt. Oder auch: **Das Meßergebnis wird am jeweiligen Meßpunkt angeheftet**. Kann man sich E vorstellen und ebenso die Veranschaulichung des Meßresultates - etwa als geometrischer Pfeil - dann hat man eine Möglichkeit, die Zuordnung als Ganzes zu überschauen. Man entwickelt spontan Vorstellungen der Art: Wenn ich mich an einen bestimmten Ort begebe, dann verhält sich der Feldwert grob so und so.

> **Der Feldstandpunkt geht daher von einer Veranschaulichung der Urbildmenge aus, der man die Rolle eines Konfigurationsraumes gibt zusammen mit einer Anheftung der Meßresultate an geeignet gewählte Punkte.**

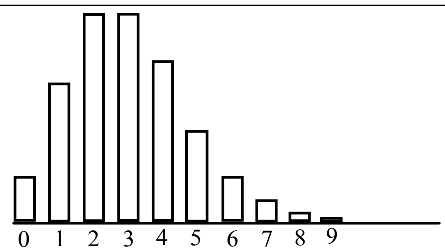
Betrachten wir als Beispiel die Folgenabbildung $(\mathbb{N}, n \mapsto \frac{a^n}{n!}, \mathbb{R})$ wobei wir $\mathbb{N}$ als unseren Konfigurationsraum interpretieren: Das sind die nicht negativen ganzzahligen Werte auf der Zahlengeraden. Wir können den Feldwert für n=0,1,2.... bestimmen und am Meßort auftragen. Das ergibt folgendes Bild, wobei wir a=3 wählen.:

1	3	4.5	4.5	3.4	2.0	1.0	0.43	0.16	0.05

....

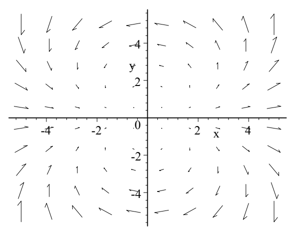
Für n=9 etwa ergibt sich $\frac{3^9}{9!}=\frac{19683}{362880} = 0.05$. Die Lage allein - der zehnte Platzhalter - bestimmt hier das Urbildelement 9. Die weiteren Werte hat man sich extrapoliert zu denken. Das gibt bereits einen instruktiven Einblick in das Verhalten der Abbildung.

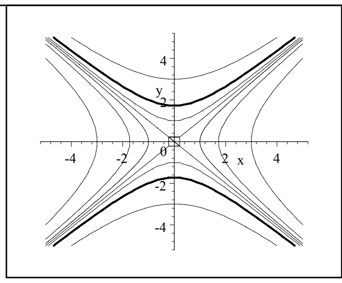
Noch deutlicher wird das Verhalten, wenn man die Werte als Balkenlängen interpretiert, wozu man dann aber eine aus dem Konfigurationsraum hinausführende Dimension benötigt.



Hier sind auch die Bezeichnungen der Urbilder mit angegeben. Erneut muß man sich den weiteren Verlauf extrapoliert vorstellen.

Skalarfelder in der Ebene werden durch Linien gleichen Wertes (Isolinien) veranschaulicht. Vektorfelder durch ein Pfeilgitter oder durch Feldlinien. Meist - so auch im Bild unten - wird man die angehefteten Wertepfeile umskalieren.





Das Vektorfeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

Etwa $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Das Skalarfeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y^2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto 1^2 - 2^2 = -3$

Die beim Skalarfeldbeispiel zum Wert -3 gehörige Niveaumenge ist fett eingezeichnet

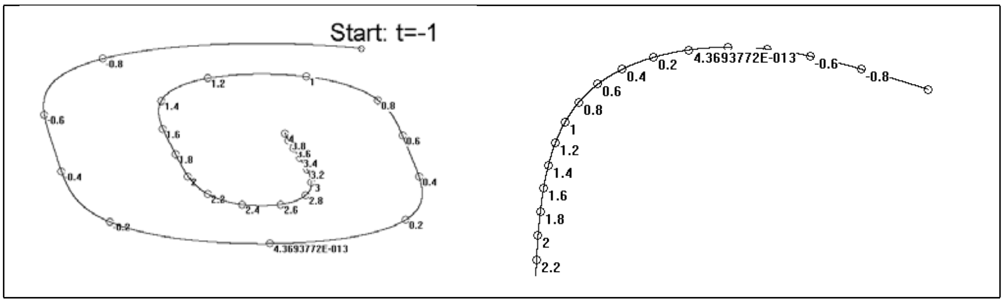
☐ Interpretieren Sie die Abbildung $(\mathbb{R}^3, \vec{x} \mapsto \vec{e}_3 \times \vec{x}, \mathbb{R}^3)$ vom Feldstandpunkt aus.

(2.7.4) Der Parametrisierungsstandpunkt

Ein wesentliches Merkmal der Konfigurationsräume besteht darin, dass man sich in ihnen gewisse Teilmengen als **geometrische Figuren** vorstellen kann und dass man diese Figuren im Konfigurationsraum als Ganzes überblickt. Will man über Punkte von Figuren sprechen, muss man sie geeignet benennen. Eine Parametrisierungsabbildung leistet eben das. Bei dem so entstehenden Parametrisierungsstandpunkt geht man vom **Werteraum** der Abbildung aus und interpretiert ihn als Konfigurationsraum. Darin ist dann eine Teilmenge Bildf ausgesondert, und die Parametrisierungsabbildung heftet jedem Punkt den Satz zugehöriger Namen - Parameterwerte - an. (Beispiel: Flugparabel). Diese Figur mit zugehöriger Namensgebung liefert wieder eine Möglichkeit, sich die Abbildung ganzheitlich vorzustellen.

Parametrisierungsstandpunkt heißt daher: Interpretiere die Abbildung als Figur im Werteraum mit Anheftung zugehöriger zu benennenden Urbilder.

Überzeugen Sie sich davon, dass nachfolgende Figuren Ihnen eine ganzheitliche Vorstellung von Abbildungen [0,2]→ $\mathbb{R}^2_k$ - also des Typs "ebene Kurven" erzeugen. Die Abbildungen beschreiben Bewegungsvorgänge in der Ebene.



☐ Interpretieren Sie die Abbildung $(\mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x, y, 2+x^2+y^2, \mathbb{R}^3_K)$ vom Parametrisierungsstandpunkt.

(2.7.5) Der Transformations- oder Zuordnungstandpunkt

Hier werden **beide** Mengen - Urbildraum und Werteraum - als Konfigurationsraum angesehen. Ist der Urbildraum eine geometrische Ebene, so kann man den Ort oder den Ortsvektor auf gesetzmäßige Weise ändern: Man kann darin Figuren und Bewegungsvorgänge beschreiben und sich das gut vorstellen. Hat man eine Abbildung f des Raumes in eine zweite Ebene, so liefert die Potenzmengenerweiterung $\underline{f}$ zugehörige

Figuren in diesem zweiten Raum. Und mit Hilfe der Zusammensetzung der Abbildungen erhält man in der Werteebene Bilder der Bewegungsvorgänge in der Urbildebene. Kurz: f ist dann eine Abbildung vom Transformationstyp, die jede Figur und jeden Bewegungsvorgang im Urbildraum in etwas Entsprechendes im Werteraum umwandelt.

Das ist der Ausgangspunkt des Transformationsstandpunktes. Bei ihm interpretiert man Urbildraum und Werteraum beide als Konfigurationsräume, die gleichzeitig einsehbar sind. Dann verfolgt man, wie geeignet gewählte Bahnen und Figuren im Urbildraum sich unter der Abbildung im Werteraum verhalten. Erforderlich ist, dass man von beiden Räumen eine (eventuell getrennte) geometrische Vorstellung besitzt.

□ Die Abbildung ($\mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto$(x+2y,y),$\mathbb{R}^2$) beschreibt eine Scherung. Machen Sie sich diese Aussage mit Hilfe des Transformationsstandpunktes klar. Wie sehen etwa die Bilder achsenparaller Rechtecke aus? Wie transformieren sich achsenparallele Bewegungen im Urbildraum?

□ Welches Verhalten zeigt die Abbildung ($\mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto$(-y,x),$\mathbb{R}^2$)?

(2.7.6) Der Graphenstandpunkt

Wie veranschaulicht man sich das Verhalten reeller Funktionen? Über den Graphen der Funktion. D.h. man muß den Graphenraum $A \times W$ als Konfigurationsraum interpretieren und in ihm den Graphen als ganzheitliche Figur wahrnehmen. Ist das möglich, dann ist der Graphenstandpunkt optimal. Er liefert - wie wir am Falle der reellen Funktionen sehen - das gesamte Verhalten der Abbildung "auf einen Blick". Der Nachteil ist, dass der Graphenraum meist zu groß ist, im Sinne zu hoher geometrischer Dimension.

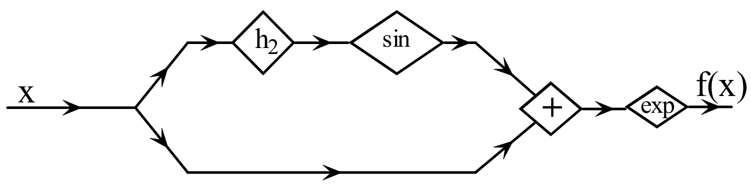
Der Graphenstandpunkt ist eine Verfeinerung des Feldstandpunktes: An jeden Punkt x des Urbildraumes wird der gesamte Werteraum W angeheftet, also der Raum aller denkbaren Ergebnisse und darin wird der zugeordnete Wert markiert. So werden auch die alternativen Werte zum tatsächlichen Wert mit verdeutlicht, was beim Feldstandpunkt nicht der Fall ist. Das zweite Bild aus (2.7.3) kann daher auch vom Graphenstandpunkt aus interpretiert werden.

□ Was für Figurentypen ergibt der Graph von Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?

□ Es sei f:A→B eine Abbildung und π_f =(A,x$\mapsto$ $(x, f(x)), A \times B$) die in (2.6.6) eingeführte kanonische Parametrisierung des Graphen von i. Zeigen Sie, dass Graph(f)=Bild(π_f) gilt. Welche Beziehungen zwischen den verschiedenen Veranschaulichungsstandpunkte ergeben sich hierdurch?

(2.7.7) Automatenstandpunkt -Verlaufsdiagramme

Vielfach sind Abbildungen aus bereits bekannten Abbildungen aufgebaut. Etwa mit Hilfe von Formelausdrücken. Dann ist es empfehlenswert, den Automatenstandpunkt einzunehmen, bei dem man sich vorstellt, die Abbildung sei aus ihren Bestandteilen gleichsam zusammengeschaltet. Der Fluß der Werte kann von Station zu Station verfolgt werden. Häufig sind mehrere Wege mit gleichem Ergebnis möglich (kommutative Diagramme). Beispiel: Der Rechenausdruck der reellen Funktion $x \mapsto e^{\sin(x^2+x)}$ läßt sich damit folgendermaßen darstellen:



(2.7.8) Die Fähigkeit, sich das Verhalten von Abbildungen vorstellen zu können, es zu überschauen, ist sehr wichtig. Diese Fähigkeit trägt entscheidend dazu bei, mit abstrakt gegebenen Dingen eigenständig etwas anfangen zu können. Man sollte sich daher um Verständnis des soeben Gesagten bemühen, auch wenn es manchem auf den ersten Blick als unmathematisch, nicht exakt oder gar unnötig erscheinen mag.

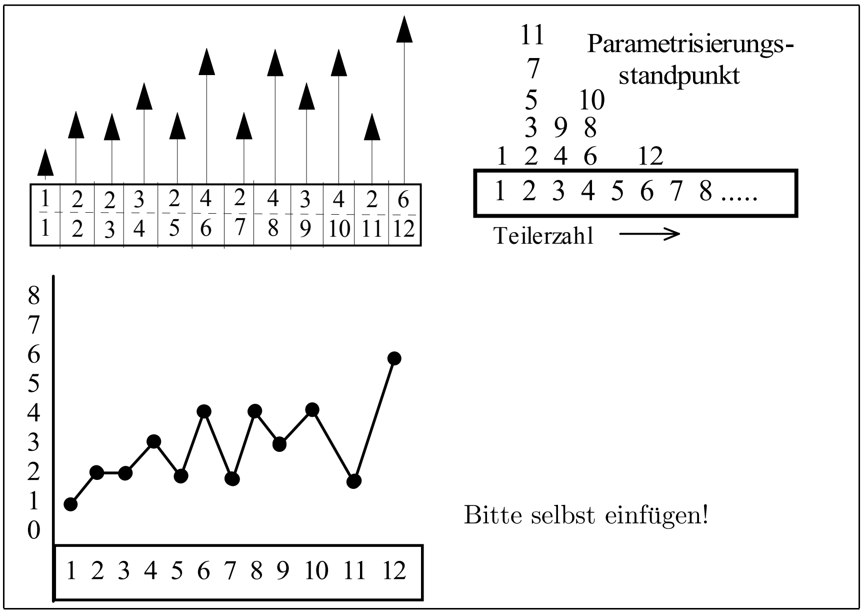
(2.7.9) Wir werden die fünf Veranschaulichungsmethoden in den späteren Kapiteln vielfach einsetzen, um Abbildungen zu verdeutlichen, die als abstrakt und schwierig gelten. Aber wir erwarten vom Leser auch, dass er sich aktiv bemüht, Verständnisschwierigkeiten mit Hilfe dieser Methoden zu überwinden.

(2.7.10) Nachfolgend stellen wir die vier ersten Methoden nochmals parallel für ein einfaches Beispiel zusammen.

Als Abbildung wählen wir die folgende Abbildung kleiner endlicher Mengen:

$$M = \{1.2....,12\}, \quad N = (1,2,....8) \quad \text{und} \quad t = (M, n \mapsto Teilerzahl(n), N).$$

Die beiden trivialen Teiler 1 und n zählen wir mit. Etwa t(6)=4, da die vier Zahlen 1,2,3 und 6 die Teiler von 6 sind.



Jeder der vier Standpunkte verdeutlicht offensichtlich einen etwas anderen Aspekt der Abbildung. Die Unterschiede entstehen dadurch, dass man die Konfigurationsraumrolle jeweils einer andern Menge zuweist.

Jede dieser Figuren gibt Einblick in das Verhalten der gesamten Abbildung, was die Zuordnungsvorschrift $n \mapsto Teilerzahl(n)$ selbst noch nicht tut. Die erlaubt zunächst nur die Berechnung jedes einzelnen Wertes.

1.2.7a Die Veranschaulichung mit Hilfe von Prozessen.

(2.7.11) Wir gehen der Frage der Veranschaulichung abstrakter mathematischer Abbildungen noch etwas weiter nach. Wie kann man sich erfolgreich das Verhalten einer Abbildung als Ganzes vorstellen, wenn man einen der beschriebenen Standpunkte eingenommen hat?

Gerne nutzt man dazu bestimmte physikalisch-geometrische Prozesse und versucht Analogien zu der zu fassenden Abbildung herzustellen. Man sucht eine Anbindung der zu erfassenden Situation an etwas besser Vertrautes.

(2.7.12) Die wichtigsten solcher Prozesse sind Bewegungsvorgänge von Körpern also Bahnkurven und Flüssigkeitsströmungen. Hierauf gehen wir in Kap. 6 ein. Wichtig ist auch die zeitliche Entwicklung einer reellen Meßgröße, etwa ein Temperaturverlauf. Das gibt die kinematische Interpretation von Funktionen.

(2.7.13) Als Beispiel wollen wir hier einen weiteren Prozeß besprechen, den der Deformation eines elastischen Körpers. Dieser Prozeß ist besonders zur Unterstützung des Transformationsstandpunktes geeignet. Er passt aber auch zum Feld- und zum Parametrisierungsstandpunkt, wie wir sehen werden.

Der Einfacheit halber betrachten wir den zweidimensionalen Fall.

(2.7.14) Wir stellen uns vor, in einem Bereich der Ebene - typischerweise einem Rechtack - befinde sich ein elastisches Tuch. Zu jedem Punkt des Raumes gehört ein materieller Punkt des Tuches, den wir bei Bedarf z.B farblich markieren können. Der entspannte Zustand gehört zum Urbildraum. Tuchpunkt liegt über Urbildpunkt. Jetzt wird das Tuch deformiert, nicht nur von den Rändern her, sondern auch im Innern. **Dann kommt jeder Tuchpunkt auf einen neuen Ebenenpunkt zu liegen, den Wertepunkt f(x) oder den transformierten Punkt.**

☐ Konkretisieren sie das am Beispiel der Zuordnung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$. Was macht die Abbildung mit dem elastischen Tuch?

(2.7.15) Eine naheliegende Veranschaulichung sieht so aus, dass man den entspannten und den gespannten Zustand nebeneinander zeichnet, mit dem Abbildungspfeil zwischen den beiden Bildern. Das ist gerade die typische Veranschaulichung vom Transformationsstandpunkt.

Weiter kann man im Urbildbereich Markierungen anbringen, etwa in Form eines achsenparallelen Gitters und verfolgen, wie dieses Gitter im transformierten Zustand aussieht. Das ergibt (bei glatten Abbildungen) eine gute Veranschaulichung des gesamten Feldverhaltens, weil man sieht, wie der gesamte Bereich deformiert wird. In Kap.6 greifen wir dieses Verfahren unter dem Stichwort Parametrisierung auf und bauen es stark aus.

☐ Betrachten sie die Polarkoordinatenabbildung $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$. Was macht diese Transformation aus einem achsenparallelen Gitter im r-φ-Raum?

Man kann aber auch einen Urbildpunkt auswählen, einen kleinen Kreis um ihn schlagen und dann nachschauen, was die Deformation (im Wertraum) aus diesem Kreis macht. Oder man markiert eine von diesem Punkt ausgehende Strecke. Usw. All das gehört zum Transformationsstandpunkt zur Veranschaulichung von Abbildungen

(2.7.16) Vergisst man den Urbildraum mit seinem achsenparallelen Gitter und gibt man dem Werteraum allein die Rolle des Konfigurationsraumes, dann stellt das Wertegitter den Parametrisierungstandpunkt dar. Durch jeden Punkt gehen zwei Kurven, die den Wert der beiden zugehörigen Urbildkoordinaten repräsentieren. Man hat ein System krummliniger Koordinaten vorliegen.

(2.7.17) Unsere Abbildung sei $f = (R, x \mapsto f(x), \mathbb{R}^2)$ wobei R$\subset$ $\mathbb{R}^2$ das Urbildrechteck ist. Dann ist Bild(f) der vom gespannten Tuch überdeckte Bereich.

Wir setzen f(x)=x+u(x). Dann gibt u(x) an, wieweit der entspannt bei x liegende Tuchpunkt verschoben wird! $u = (R, x \mapsto u(x), \mathbb{R}^2)$ ist die zugehörige Verschiebungsabbildung. Diese wird man naheliegend vom Feldstandpunkt aus veranschaulichen: u(x) an x angeheftet gibt an, wohin der Tuchpunkt verschoben ist.

Wir legen also praktisch Urbild- und Wertezeichnung des Transformationsstandpunktes übereinander. Bitte halten Sie f(x) und u(x) samt zugehöriger Bedeutung sorgfältig auseinander.

☐ Wählen Sie für die folgenden Zuordnungen geeignete rechteckige Definitionsbereiche und interpretieren Sie die entstehenden Abbildungen als Tuchverspannungen: $(x, y) \mapsto (x, y^2)$, $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ und $(x, y) \mapsto (\log(x), \log(y)$. Das Tuch darf und sollte nicht nur gespannt, sondern auch gefaltet werden.

1.2.8 Die Typisierung der Abbildungen über die Struktur der Zuordnung: Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen

(2.8.1) Für viele - besonders auch mathematische - Zwecke ist eine Einteilung der Abbildungen nach **Eigenschaften der Zuordnung** nützlich. Wie unterscheiden sich Abbildungen hinsichtlich ihrer Zuordnung formal, also unabhängig von der inhaltlichen Bedeutung? Nun, das augenfälligste Merkmal ist die Anzahl der Zuordnungspfeile, die auf die einzelnen Werteelemente zeigen.

(2.8.2) Als formale Frage:

Sei	f=(A,x$\mapsto f(x), W$) eine Abbildung und b$\in W$ ein Element der Wertemenge.
??	**Wieviele zugehörige Urbilder gibt es dann?**
	D.h. wieviele a$\in$A gibt es, für die f(a)=b bzw. a$\mapsto$f(a)=b gilt?

Oder ganz konkret: Wir betrachten die Zuordnung Person$\mapsto$Alter(Person) für eine gegebene Personenmenge und fragen nach der Anzahl der Personen der Gruppe, die ein bestimmtes Alter besitzen (=Zahl der Pfeile!).

(2.8.3) Wir können die Frage auch formaler fassen:

Zu jedem b$\in W$ bilden wir die Menge	$L_{b,f} = \{a \mid a \in A, f(a) = b\}$
???	Wieviel Elemente hat $L_{b,f}$?

Oder vom Parametrisierungsstandpunkt aus gesehen: **Wieviele Urbilder sind an a angeheftet?** Ein Beispiel: f=cos und b=l. Dann ist cos(a)=l zu lösen. Also

$$L_{1,\cos} = \{0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, ...\}.$$

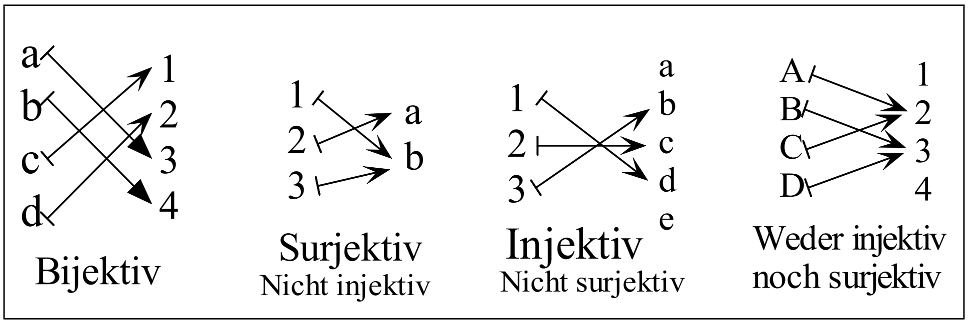
Es gibt unendliche viele Urbilder, die durch cos auf 1 abgebildet werden.

(2.8.4) Infolge der Allgemeinheit unseres Abbildungsbegriffs kommt alles, was denkbar ist, auch vor. D.h. L kann leer sein oder L kann genau ein Element umfassen oder L kann mehr als ein Element enthalten. Zunächst ist man versucht, nach der Anzahl der Elemente von L zu klassifizieren. Das ist weniger gut, da man auch immer die zugehörigen Verneinungen benötigt. Und die Verneinung von "L hat genau 2 Elemente" ist wegen der erforderlichen Fallunterscheidung (0, 1 und >2) schlecht handhabbar.

(2.8.5) Besser und üblich ist die folgende Klassifikation (die Verneinung von "L hat mindestens ein Element" ist einfach: "L hat kein Element" usw.) :

f heißt surjektiv,	wenn es zu jedem b$\in W$ **mindestens** ein a mit f(a)=b gibt.
f heißt injektiv im Punkte b$\in W$	wenn es **höchstens** ein a mit f(a)=b gibt.
f heißt injektiv,	wenn es zu jedem b$\in W$ **höchstens** ein a mit f(a)=b gibt.
f heißt bijektiv,	wenn es zu jedem b$\in W$ **genau** ein a mit f(a)=b gibt.

(2.8.6) Die so eingeführten Eigenschaften lassen sich gut mit Hilfe von Abbildungen kleiner endlicher Mengen veranschaulichen. Bei Schwierigkeiten mit diesen Begriffen sollte man sich immer Bildchen der nachfolgenden Art anfertigen, um den Sachverhalt zu verstehen.



(2.8.7) Mit dieser Einteilung fällt jede Abbildung in eine der in der Skizze angedeuteten vier Klassen. Die meisten fallen in die vierte Klasse, sind also weder injektiv noch surjektiv. Liegt eine Abbildung dagegen in einer der drei anderen Klassen, so ist das häufig eine nützliche Information.

	injektiv	nicht injektiv
surjektiv	bijektiv (inj. u. surj.)	surj., n. injekt.
nicht surjektiv	injekt., n. surj.	weder inj. noch surj.

(2.8.8) Betrachtet man unsere bisherigen Definitionen, so sieht man:

$$f : A \to W \text{ ist genau dann surjektiv, wenn } \mathit{Bild}(f) = W \text{ gilt.}$$

(2.8.9) Einige Beispiele illustrieren das:

- $h_2 = (\mathbb{R}, x \mapsto x^2, \mathbb{R})$ ist weder injektiv noch surjektiv. Bild$h_2 = [0, \infty[\neq \mathbb{R}$.
- $p = (\mathbb{R}, x \mapsto x^2, [0, \infty[)$ ist surjektiv, aber nicht injektiv. Bildp=$[0, \infty[$.

Beide Ergebnisse folgen sofort über Inspektion des Funktionsgraphen.

(2.8.10) Vom Feldstandpunkt aus ist es meist relativ schwierig, zu erkennen, welche der betrachteten Eigenschaften vorliegen. Leichter ist das vom Graphen- bzw. vom Parametrisierungsstandpunkt aus.

(2.8.11) Einbettungsabbildungen, wie wir sie in Kap1.2.6i definiert haben, sollten immer injektiv sein. Denn wenn man Namen und Person identifizieren will, sollte der Name genau eine Person festlegen. Darstellungsabbildungen wie Person$\mapsto$ (Postleitzahl des Wohnortes) müssen keineswegs injektiv sein. Andere wie P$\mapsto \vec{x}_P^K$ sind sogar bijektiv.

Trotz ihrer Einfachheit bereitet diese Klassifikation vielen Anfängern große Schwigrigkeiten. Man sollte sich daher sorgfältig mit den Begriffen vertraut machen.

(2.8.12) Nochmals aus anderer Perspektive: Eine Zuordnung ist immer **eindeutig**. D.h. von jedem Urbild x geht genau ein Pfeil los. Aber die Anzahl der Pfeile, die auf ein y aus der Wertemenge zeigen, ist nicht festgelegt. Und danach wurde hier klassifiziert.

1.2.9 Gleichungen.

(2.9.1) Schaut man sich das an, was man normalerweise unter "Gleichung" versteht, so erkennt man, dass mindestens drei Typen zu unterscheiden sind. Da sind einmal die **Definitionsgleichungen**, die vornehmlich dazu dienen, abkürzende Bezeichnungen einzuführen.

$$f = (A, x \mapsto f(x), W)$$

ist eine solche. Der Ausdruck rechts ist schreibaufwendig. Daher vereinbart man, dass man ihn nach Belieben durch das Symbol f ersetzen darf. Nach Belieben , dass sich am sachlichen Gehalt der Überlegungen nichts ändern darf, wenn man diese Abkürzung irgendwo einführt oder aber rückgängig macht. Oder auch: Durch eine solche Definitionsgleichung wird eine Hilfsvariable eingeführt. Eine derartige Gleichung "lösen" zu wollen ist Unfug.

(2.9.2) Dann hat man **allgemeingültige Gleichungen** mit freien Variablen, wie etwa die binomische Formel. Diese haben den Sinn, dass man durch Termeinsetzung (bestimmter Art) in die freien Variablen gültige Gleichungen produziert. Auch hier stellt sich die Frage nach der Lösung nicht. Formal ist jede korrekte Termeinsetzung eine Lösung. Die Frage als solche ist irrelevant.

(2.9.3) Neben diesen beiden gibt es noch einen dritten Typ, den der **Bestimmungsgleichungen**. Etwa x^2+3x-7= 0. Welche x$\in \mathbb{R}$ erfüllen diese Gleichung? Inspiziert man derartige Gleichungen genauer, so stellt man fest, dass sie stets zu einer Abbildung gehören oder bei ausreichender Präzisierung der Problemsituation zu einer solchen Abbildung führen.

(2.9.4) Das Problem der Bestimmungsgleichung ist das folgende:

Gegeben eine Abbildung $f = (A, x \mapsto f(x), W)$ und ein Element b$\in W$. Dann werden alle x$\in A$ gesucht, die f(x)=b erfüllen.
Die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \vert x \in A,\ f(x) = b\}$ wird gesucht.
Meist in Form einer Parametzrisierung (J,a$\mapsto p(a), \mathbb{L}$)

(2.9.5) Diese Formulierung enthält alles, was am Gleichungsbegriff unabhängig von der jeweiligen inhaltlichen Bedeutung ist. In praktischer Hinsicht folgt aus unseren Überlegungen, dass man sich eine gesonderte "Gleichungslehre" weitgehend ersparen kann. Alles was über Gleichungen zu sagen und zu wissen ist, folgt aus dem Abbildungsbegriff oder ist im Rahmen der Abbildungen diskutierbar.

(2.9.6) Eine Bestimmungsgleichung drückt intuitiv eine **Bedingung** aus, die x erfüllen muss. Und eine solche läßt sich stets in geeigneter Weise als Zuordnung formulieren. Die quadratische Gleichung $x^2-2x+2 = 0$ z.B. gehört entweder zur Abbildung $q = (\mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2x + 2, \mathbb{R})$ oder zu $c = (\mathbb{C}, z \mapsto z^2 - 2z + 2$,$\mathbb{C}$). Zu lösen ist q(x)=0 bzw. c(z)=0. Im ersten Fall sind nur die reellen Lösungen gesucht und zugelassen. Im zweiten Fall auch komplexe. Die erste Bedingung ist unerfüllbar, die zweite liefert $z_{12} = 1 \pm i$.

Ist $\mathbb{L}$ die Lösungsmenge einer Gleichung f(x)=b und ist a$\in \mathbb{L}$, dann ergibt Einsetzen eine gültige Gleichung, eine wahre Aussage, nämlich f(a)=0.

(2.9.7) In der Physik geht es immer wieder darum, in Mengen denkbarer, möglicher Systemzustände die physikalisch tatsächlichen zu bestimmen. Hierzu werden Bestimmungsgleichungen für Bahnkurven oder Felder formuliert, die meist zu Abbildungen vom Operatortyp ("Differentialgleichungen") gehören. Mehr dazu in 1.2.13.

1.2.10 Einige nützliche Denkfiguren für Abbildungen und Gleichungen.

(2.10.1) Unsere Abbildungsklassifikation über die Zuordnung sowie der eingeführte Gleichungsbegriff ergeben zusammen die rein logische, inhaltsunabhängige Gültigkeit einer Reihe wichtiger Denkfiguren. Hierzu gehören:

(2.10.2)	**Sei** f eine surjektive Abbildung A$\rightarrow B$ und b$\in B$ Man interessiere sich für die Bestimmungsgleichung f(x)=b **Dann** hat diese Gleichung **mindestens** eine Lösung.
(2.10.3)	**Sei** f:M$\rightarrow N$ **injektiv**. Man wisse $f(a_1) = f(a_2)$. Dabei können a_1 und a_2 ganz unterschiedlich eingeführt sein. **Dann** gilt $a_1 = a_2$.
(2.10.4)	**Sei** f:A$\rightarrow B$ **nicht surjektiv.** (Z.B. in einem indirekten Beweis) **Dann** gibt es mindestens ein b$\in B$ für das f(x)=b unlösbar ist. Und mit diesem b darf man dann weiter arbeiten.

(2.10.5) Eine weitere wichtige Denkfigur sieht so aus:

Wann sind zwei Abbildungen f=(A,x$\mapsto$f(x),B) und g=(M,y$\mapsto$g(y),N) gleich?
Laut Definition müssen die Tripel gleich sein. D.h. aber:
☐ A=M und B=N. Gleichheit der Mengen. ☐ Und f(x)=g(x) für jedes x$\in A = M$. Gleichheit der Zuordnung. Das können je nach Zahl der x **sehr viele** Bedingungen sein Beispiel: sin(2x)=2sin(x)cos(x) für **alle** x$\in \mathbb{R}$.

1.2.11 Die Neukonstruktion von Abbildungen aus gegebenen Abbildungen.

1.2.11a Änderung des Abbildungstripels

(2.11.1) Hat man einmal eine oder auch mehrere Abbildungen vorliegen, so kann man daraus - neben den Mengen Bild und Graph - eine Reihe weiterer Abbildungen konstruieren. Dabei geht man vom Abbildungstripel aus und fragt, welche Teile (des Tripels) man jeweils wie abändert und welche fest bleiben sollen.

Änderung der Mengen, aber Zuordnung fest.

Hier gibt es zwei Möglichkeiten:

(2.11.2) ***Urbildrestriktionen*** : Sei f = (A,x$\mapsto$f(x),B) und T$\subset$A Teilmenge.

Dann kann man stets bilden $f_{|T}$T=(T,x$\mapsto$f(x),B)

(Die Definitionsformel sollte das Konstruktionsprinzip ohne weitere Erläuterung verständlich machen)

(2.11.3) ***Wertemengenänderungen*** : Sei f=(A,x$\mapsto$f(x), B) und C mit Bild(f)$\subset C$.

Dann kann man stets bilden $f^{|C}$ =(A,x$\mapsto$f(x),C).

(Gilt Bildf $\subset$C$\subset B$, so wird man von einer Bildmengen**restriktion** sprechen. Ist dagegen B$\subset$C, von einer Bildmengen**erweiterung** .

Beachten Sie: B=Bildf bedeutet : f ist surjektiv.)

(2.11.4) Im physikalischen Bereich werden Urbildrestriktionen immer benutzt, wenn man bei Feldern den Konfigurationsraum verkleinert. Speziell bei zeitabhängigen Feldern haben die Restriktionen große, auch für die Anschauung wichtige Bedeutung.

☐ Sei M endliche Menge mit n Elementen und f:M$\to$W eine Abbildung. Wieviel Urbildrestriktionen gibt es? Welches Zusatzproblem entsteht?

Änderung der Zuordnung, aber Mengen unverändert

(2.11.5) Hier kommt hauptsächlich die Konstruktion der inversen Abbildung in Frage, die durch Umkehrung der Zuordnung erfolgt.

Sei f=(A,x$\mapsto y = f(x), B)$ eine **bijektive** Abbildung. **Dann** erhält man durch Umkehrung der Zuordnung *die zu f inverse Abbildung* $f^{-1} = (B, y \mapsto f^{-1}(y), A) = (B, x \mapsto f^{-1}(x), A)$.

(2.11.6) Ist f nicht bijektiv, muß man zunächst restringieren, also in (2.11.3-4) besprochene Änderungen vornehmen.Ist f injektiv, so genügt die Wertemengenrestriktion auf Bild(f). Ist f nicht injektiv, so ist eine Urbildrestriktion erforderlich, die jedoch nicht eindeutig bestimmt ist.

(2.11.7) eine weitere Konstruktion, bei der vornehmlich die Zuordnung geändert wird, ist die **Zusammensetzung (Hintereinanderschaltung) von Abbildungen.**

Sei $f : A \to B$ und $g : B \to C$. !!!! Beachten Sie: Der Wertebereich von f ist Definitionsbereich von g. **Dann** bildet man die Abbildung $g \circ f = (A, x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)), C)$ Veranschaulichung mit dem Automatenstandpunkt: $x \mapsto f(x) = y \mapsto g(y) = g(f(x))$

1.2.11b Die kanonische Erweiterung der Abbildung auf die Potenzmengen.

(2.11.8) Bei den jetzt zu besprechenden Neukonstruktionen werden zunächst neue Mengen festgelegt. Die alte Abbildung bewirkt (induziert) dann eine eindeutig bestimmte zugehörige Zuordnung zwischen diesen Mengen. Eine solche **Konstruktion ohne Wahlfreiheit** nennt man auch gerne eine kanonische Konstruktion. Man spricht also von **der** *kanonischen Erweiterung einer Abbildung auf die Potenzmengen.*

(2.11.9) Genauer kann man generell zu einer beliebig vorgegebenen Abbildung f=(A,x$\mapsto$f(x),B) zwei neue Abbildungen kanonisch wie folgt konstruieren:

$$\underline{f}=(\mathfrak{P}(A), M \mapsto \underline{f}(M), \mathfrak{P}(B)) \qquad \text{mit } \underline{f}(M)=\{y|y\in B \text{ und es gibt } x\in A \text{ mit } y=f(x)\}$$
$$\overset{-1}{\underline{f}} = ((\mathfrak{P}(B), N \mapsto \underline{f}(N), \mathfrak{P}(A)) \qquad \text{mit } \overset{-1}{\underline{f}}(N) =\{x|x\in A \text{ und es gilt } f(x)=y\in N\}$$

Diese beiden Neukonstruktionen sind immer möglich, **auch wenn f nicht bijektiv ist**. Also: Auch wenn die inverse Abbildung $\overset{-1}{f}$ nicht existiert, gibt es doch die Erweiterung $\overset{-1}{\underline{f}}$ auf die zugehörigen Potenzmengen!

(2.11.10) Zum Verständnis der Konstruktion ist meist einige eigenständige Konkretisierungsarbeit erforderlich. Interpretieren Sie das als nützliche Übung für den Umgang mit abstrakten Definitionen. Studieren Sie bitte genau die definierenden Tripel und konkretisieren Sie sie dann am Beispiel einer Abbildung kleiner endlicher Mengen. Bestimmen Sie etwa für f aus 1.2.6a die Größen $\underline{f}(\{1,2\})$ und $\overset{-1}{\underline{f}}(\{1,2,3\})$ sowie ähnliche Beispiele. Nehmen Sie auch eine reelle Funktion, etwa sin und bilden Sie $\overset{-1}{\underline{\sin}}(\{1\})$. Scheuen sie sich nicht, die Definitionen sprachlich zu formulieren. Etwa $(\mathfrak{P}(A), M \mapsto \underline{f}(M), \mathfrak{P}(B))$: "Jeder Teilmenge M von A wird eine mit $\underline{f}$(M) bezeichnete Teilmenge von B zugeordnet." Usw.

☐ Welche Beziehung besteht zwischen Bild(f) und $\underline{f}$(A)? Was ist $\overset{-1}{\underline{f}}$(B) ? Was ist $\underline{f}(\emptyset)$?

Wann ist $\overset{-1}{\underline{f}}(\{y\})=\emptyset$?

☐ Wieder sei f:A$\to$B. Weiter sei M$\subset$A und N$\subset$B. Zeigen Sie, dass $\overset{-1}{\underline{f}}(\underline{f}(M))\supset M$ gilt. Verwenden Sie dazu die Denkfigur aus 1.1.7b. Zeigen Sie, dass i.a. die beiden Mengen **nicht** gleich sind. Suchen Sie den Grund dafür und formulieren Sie eine Bedingung, die Gleichheit sichert.

☐ Dasselbe für $\underline{f}(\overset{-1}{\underline{f}}(N))$ und N.

☐ Es sei f bijektiv. Beweisen Sie, dass **dann** auch f bijektiv ist und dass $\overset{-1}{\underline{f}}$ die zu $\underline{f}$ inverse Abbildung ist.

(2.11.11) $\underline{f}$ ist besonders im Zusammenhang mit dem Transformationsstandpunkt zur Veranschaulichung von Abbildungen wichtig. Ist F$\subset$E eine Figur im Urbildraum (eine Strecke, ein Kreis,ein Zylinder,....), dann ist $\underline{f}$(F) deren Bild im Werteraum. Bild im Sinne von "Menge aller Bildpunkte oder Werte". Oder auch: $\underline{f}$ transformiert die aus Punkten gebildeten Figuren, während f die Punkte selbst transformiert. Und $\overset{-1}{\underline{f}}$ beschreibt, woraus eine Figur (im Werteraum) unter der Transformation entstanden ist, zumindest die Teile, die zum Bild gehören.

(2.11.12) Die eingeführte Abbildung $\overset{-1}{\underline{f}}$ liefert uns auch eine kurze und nützliche Symbolik zur Behandlung von Bestimmungsgleichungen, die genau das dafür Benötigte darstellt.

Sei f=(A,x$\mapsto f(x), B$) und b$\in B$
Gesucht ist die Lösungsmange zu f(x)=b, also $\mathbb{L}=\{x|x\in A, f(x)=b\}$.
Dann ist $\mathbb{L}=\overset{-1}{\underline{f}}(\{b\})$.

Beachten Sie: Das ist keineswegs eine Gleichung, die die Lösungsmenge konkret angibt, keine allgemeine Lösungsformel. Aber sie zeigt, wie man das Gleichungsproblem bei Bedarf auf ein Abbildungsproblem zurückführen kann.

(2.12.13) Folgende Verallgemeinerung des Gleichungsproblems liegt nahe:

Sei $B_0\subset B$ irgendeine Teilmenge
Man fragt: **Für welche x**$\in A$ gilt f(x)$\in B_0$?
Dann gilt für die zugehörige Lösingsmenge: $\boxed{\mathbb{L}=\overset{-1}{\underline{f}}(B_0)}$

(2.12.14) Durch diesen Formalismus werden beispielsweise reelle Ungleichungen erfaßt. Nehmen wir die Ungleichung $1\leq x^3+2x\leq 2$. Sie gehört zur reellen Funktion $k=(\mathbb{R}, x\mapsto x^3+2x, \mathbb{R})$. Gesucht ist

$\overset{-1}{\underset{\sim}{k}}([2,3])$. Die tatsächliche numerische Bestimmung dieser Menge ist etwas ganz anderes als die begriffliche Problemerfassung. (Verdeutlichen sie sich das Problem graphisch!)

1.2.11c Die kanonische Erweiterung von Abbildungen auf Produktmengen

(2.2.13) Hierbei geht es um folgende selbsterklärende Konstruktion, die auf der Produktbildung für Mengen basiert:

f=(A,x$\mapsto f(x), B$) und g=(M,y$\mapsto g(y), N$) **seien** zwei Abbildungen
Dazu läßt sich **dann** folgendes Abbildungsprodukt bilden:
$f \times g = (A \times B, (x,y) \mapsto (f \times g)(x,y)) = (f(x), g(y)), B \times N)$

Dabei haben wir wieder f(x,y) statt f((x,y)) geschrieben. Die Ausdehnbarkeit der Konstruktion auf mehr als zwei Faktoren ist klar. Falls die beiden Urbildmengen gleich sind, also A=M gilt, benutzt man vielfach auch die folgende Produktkonstruktion

$$\boxed{(A, x\mapsto(f(x),g(x)), B\times N)}$$

Hier bleibt die Urbildmenge unverändert. Man kann diese Abbildung wie folgt mit der ersten Konstruktion in Beziehung setzen: f×g wird restringiert auf D⊂A×A mit D={(a.a)|a∈A} = "Diagonale von A×A". Dann wird D über (a,a)↦a mit A identifiziert.

Etwas zur Interpretation dieser Konstruktion: Mit den Elementen a von A werden zwei Operationen f und g ausgeführt. Und jedem Element werden beide Ergebnisse als geordnetes Paar zugeordnet. Bei f×g dagegen werden beliebige Kombinationen der Urbilder zugelassen mit ihren zugehörigen Zuordnungswerten.

☐ Welcher Bezug besteht zu den Komponentenabbildungen einer Bahnkurve, etwa einer Flugparabel?

☐ Wir nehmen die Logarithmusabbildung ln=(]0,1[, x↦ln(x),]-∞, 0[. Damit bilden wir

$$\pi = \ln \times \ln = ((Q, (x,y) \mapsto (ln(x), ln(y), R)$$

mit Q=]0,1[×]0,1[und R=$]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[$. Interpretieren Sie diese Abbildung vom Transformationsstandpunkt (Tuchmodell aus 1.2.7a). Wie transformiert R insbesondere achsenparallele Rechtecke?

1.2.12 Mengen von Abbbildungen

(2.12.1) Wir können jetzt unser Mengenbildungskonzept auf Abbildungen anwenden und beispielsweise - sich als sehr nützlich erweisende - *Mengen von Abbildungen* einführen.

(2.12.2) Spätestens an dieser Stelle ist es wichtig, begrifflich sauber zwischen der Abbildung und den einzelnen Werten dieser Abbildung zu unterscheiden. Also dem Tripel f und einzelnen Elementen f(x) aus der Menge Bild(f). Oder dem Automaten und einzelnen konkreten Produkten des Automaten. Vgl. 1.2.2b.

(2.12.3) Und jetzt zu den Mengen von Abbildungen: Seien A und B zwei Mengen. Dann können wir die Menge aller Abbildungen A→B einführen. In der Regel werden wir diese Menge mit $\mathfrak{F}$(A,B) bezeichnen ("F" von Funktion).

Konkretisieren wir das einmal: A={1,2,3}, B={a,b,c,d}. Sei f:A→B **irgendeine** zugehörige Abbildung. Dann hat man für den Wert f(l) vier Möglichkeiten zur Wahl, nämlich die vier Elemente von B. Ebenso für f(2) und f(3). Also gibt es insgesamt $4^3 = 64$ Möglichkeiten. Die Menge $\mathfrak{F}$(A.B) hat folglich in diesem Fall 64 Elemente. Soviele Abbildungen diese Typs gibt es. Oder etwas anders: Jedes f∈ $\mathfrak{F}$(A.B) wird durch seinen Graphen G_f ⊂A×B bestimmt. Nun gibt es aber in unserem Fall $2^{4\cdot 3}$=2^{12} = 4096 Teilmengen von A×B. Und davon sind nur 64 Graphen von Abbildungen! Verglichen mit der Anzahl der Elemente der Ausgangsmengen - nämlich 3 und 4 - ist das immer noch eine große Zahl.

☐ Es seien M und N zwei endliche Mengen mit m bzw. n Elementen. Wieviel Elemente hat dann $\mathfrak{F}$(M,N)? Wieviel injektive Abbildungen sind darunter? (Nutzen Sie das in der Frage nach (1.6.15) eingeführte Pochhammersymbol $[n]_m$)

(2.12.4) Der nächste Schritt (in unserer Analyse der Abbildungsmengen) besteht darin, dass man (geeignete) Teilmengen solcher Abbildungsmengen einführt. Im Vorkurs etwa wurde die Menge $\mathfrak{E}$(I) aller elementar konstruierbaren Funktionen I$\mapsto$ $\mathbb{R}$ für I$\subset$ $\mathbb{R}$ eingeführt. Dies ist eine Teilmenge von $\mathfrak{F}$(I,$\mathbb{R}$). Die bijektiven Abbildungen M$\to$M bilden eine Teilmenge von $\mathfrak{F}$(M,M) Usw.

(2.12.5) Die Mengen aller Funktionen eines bestimmten Typs (aller elementar konstruierbaren oder aller stetigen usw.) sind meist "sehr groß". Zu ihrer quantitativen Beschreibung benötigt man dann unendlich viele Zahlangaben. Vielfach betrachtet man weitaus kleinere Teilmengen, die durch einige wenige Zahlangaben festgelegt werden.

(2.12.6) Dazu gehören insbesondere die *Funktionsscharen*. Formal handelt es sich dabei um Abbildungen des folgenden Typs $(\mathbb{R}^k, \vec{\alpha} \mapsto \mathrm{f}_{\vec{\alpha}}, \mathfrak{F})$. wobei $\mathfrak{F}$ der betrachtete "große" Funktionenraum ist.

$$\mathrm{f}_{\vec{\alpha}}(x) = \tfrac{\alpha_1}{\alpha_2 x^2+\alpha_3} \qquad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Ein Beispiel einer Schar mit drei Parametern. $\alpha_2 \neq 0$.

Man kann auch sagen: $\mathrm{f}_{\vec{\alpha}}(x)$ ist ein Term mit drei äußeren Parametern. Inspizieren wir diese Funktionsschar etwas genauer, so sehen wir:

(2.12.7) Diese Parametrisierung ist nicht injektiv! Unterschiedliche Parametertupel können zu derselben Funktion (Zuordnung) x$\mapsto$ $f_{\vec{\alpha}}(x)$ führen. Im Beispiel gibt Erweitern mit $\frac{1}{\alpha_2}$ und den Definitionen a=$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ und b=$\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$ den neuen Rechenausdruck

$$f_{\vec{\alpha}}(x) = g_{ab}(x) = \frac{a}{x^2+b}$$

Und diese neue Parametrisierung (a,b)$\mapsto$ g_{ab} ist injektiv. Will man etwa eine Diskussion so einer Kurvenschar vornehmen, so ergibt sich eine beträchtliche Aufwandsreduzierung, sofern es gelingt wie hier die Zahl der Parameter von drei auf zwei oder gar einen zu reduzieren.

☐ Wieso hat man es im Beispiel praktisch nur noch mit einem Parameter zu tun?

1.2.12a Eine nützliche Identifikationsabbildung.

(2.12.8) Wir betrachten als Beispiel ein Element des $\mathbb{R}^3$, sagen wir a=(0,0.5,-1). Dann können wir dazu die folgende Abbildung j_a:{1,2,3}$\to$ $\mathbb{R}$ konstruieren:$j_a(1) = 0$ und $j_a(2) = 0.5$ und $j_a(3) = -1$. Der i-te Wert wird gleich der i-ten Komponente des Tupels a gesetzt. Umgekehrt bestimmt jede Abbildung {1,2,3}$\to$ $\mathbb{R}$ über das Tupel der Werte ein Element aus $\mathbb{R}^3$.

(2.12.9) Wir haben damit eine Abbildung

$$\boxed{\mathrm{j}=(\mathbb{R}^3, \vec{a} \mapsto j_{\vec{a}}, \mathfrak{F}(\{1,2,3\}, \mathbb{R}))}$$

konstruiert. Dieses j ist surjektiv, da jede Abbildung des gegebenen Typs über das Tripel der Werte entsteht. Sie ist injektiv, da ein Unterschied in irgendeiner Komponente sofort zu unterschiedlichen Abbildungen führt. **Also ist j bijektiv**! In gewisser Weise ist $\mathrm{j}_{\vec{a}}$, einfach nur eine andere Schreibweise für $\vec{a}$. Manchmal identifiziert man daher auch beide Mengen. j ist eine Abbildung vom Darstellungstyp: Die Tupel werden als Abbildungen interpretiert. Wir werden bei Bedarf stillschweigend zwischen beiden Darstellungen wechseln, besonders bei Folgen.

(2.12.10) Wie merkt man sich ein derartiges durchaus nützliches Resultat möglichst effektiv? Günstig ist es, von der zentralen Idee auszugehen und das ist die Zuordnung $\vec{a} \mapsto j_{\vec{a}}$. Und diese Zuordnung veranschaulicht man sich wieder günstig vom Feldstandpunkt. I={1,2,3} ist hier der Konfigurationsraum, den man durch drei Kästen (=Felder) auf der Achse repräsentiert und in diese drei Felder sind dann die Werte einzutragen.

Die drei Felder

1	0.5	-1

Mit eingetragenene Feldwerten für $\vec{a} = (1, 0.5, -1)$.

Von diesem Bild - der konkreten Idee -ausgehend, sollte man dann sowohl das Tupel als auch die Abbildung rekonstruieren können und auch entsprechend die Verallgemeinerungen bilden. Nochmals: Man merkt sich die Idee, das Feldbild. Daraus sollte man dann die Zuordnung ablesen, daraus das Abbildungstripel konstruieren und erforderlichenfalls Verallgemeinerungen bilden.

(2.12.11) Die Verallgemeinerung auf n Faktoren (statt 3) ist klar. Ebenso kann man $\mathbb{R}$ durch eine beliebige Menge ersetzen. Fassen wir zusammen:

M^n und $\mathfrak{F}(\{1,2,..,n\}, M)$ beschreiben zwei unterschiedliche Darstellungen derselben Menge.

☐ Was ergibt dieselbe Idee für Abbildungen vom Folgentyp? Diese wurden ja in 1.2.6c als *Abbildungen* eingeführt, wogegen ihre übliche Form eher die eines Tupels ist.

☐ Das Resultat läßt sich noch weiter verallgemeinern. Allerdings nicht auf Produktmengen mit unterschiedlichen Faktoren, sagen wir auf A×B×C mit A≠B. Überlegen Sie, was dabei schief geht! Denken Sie an (1.2.8) und das Stichwort "Parallelverschiebung".

1.2.13 Zustände physikalischer Systeme

(2.13.1) Wir können jetzt den formalen Gehalt einfacher phyikalischer Syteme wie "Massenpunkt im Kraftfeld" oder "starrer Körper" erfassen. Derselbe formale, nicht physikalische Gehalt - nur mit anders zu bestimmenden Abbildungen - findet sich dann auch in Systemen wie den quantenmechanischen wieder, die der Vorstellung viel schwerer zugänglich sind.

(2.13.2) Als Ausgangspunkt zum Erfassen eines solchen Systems wählen wir eine Menge von Abbildungen, die wir Zustandsraum $\mathfrak{Z}$ nennen wollen. Im Falle eines Massenpunktes im konstanten Feld sind das gerade die zugehörigen Flugparabeln. Allgemein fordern wir, dass wir aus der Kenntnis des Zustandes, also einer zugehörigen Abbildung mathematisch auf alle im System beobachtbaren, durch die Idealisierung abstrahierten Größen schließen können. Kennen wir die Flugparabel (als Abbildung!), können wir daraus den momentanen Ort, die momentane Geschwindigkeit, die kinetische Energie usw. berechnen.) Die Zustandsabbildungen sind in der Regel Feldabbildungen von einem Konfigurationsraum in einen Ergebnisraum, also vom Typ E→V. Ist der Konfigurationsraum die Zeitachse, so liegen Bahnkurven vor wie im Fall der Flugparabeln.

(2.13.3) Aber der Zustandsraum (eines Systems) enthält **nicht alle** mathematisch möglichen, denkbaren Abbildungen E→V, sondern nur die, die tatsächlich im System auftreten, durch dieses realisiert werden können. So findet man im konstanten Kraftfeld immer nur Parabeln eines bestimmten Typs, nie Kreisbewegungen oder Spiralbahnen oder Schwingungen, die ja zunächst auch denkbar wären. Der Zustandsraum $\mathfrak{Z}$ ist erfahrungsgemäß in der Regel eine (relativ kleine) wohlbestimmte Teilmenge von $\mathfrak{F}$(E,V), der Menge aller überhaupt *denkbaren* Zustände. Das Hauptproblem einer theoretisch-physikalischen Behandlung eines solchen Systems ist immer, $\mathfrak{Z}$ als Teilmenge von $\mathfrak{F}$(E,V) zu bestimmen. Im Falle der Flugparabeln sind diese unter allen Bahnkurven zu finden.

(2.13.4) Mathematisch wird die Bestimmung meist so realisiert, dass man eine Bestimmungsgleichung für das System aufstellt, deren Lösungsmenge gleich dem Zustandsraum Systems ist. Typischerweise handelt es sich dabei um eine **Differentialgleichung**, auf die aber natürlich alle unsere allgemeinen Überlegungen zu Gleichungen und Abbildungen aus 1.2.9 zutreffen. Bei Systemen des Typs Massenpunkt im gegebenen Kraftfeld ist die gesuchte Bestimmungsgleichung die Newtonsche Bewegungsgleichung (für das jeweilige System). Es erscheint außerordentlich bemerkenswert, dass ein formal derart einfacher Rahmen zu einer so erfolgreichen Naturbeschreibung führt, wie es sich immer wieder gezeigt hat!

(2.1 3.5) Fassen wir die zentralen Punkte zusammen:

- Die Systeme werden durch ihre möglichen Zustände bestimmt.
- Jeder Zustand wird durch eine zugehörige Zustandsabbildung E→V vom Feldtyp festgelegt.
- Der Zustandsraum $\mathfrak{Z}$ des Systems ist die Menge aller zu physikalisch möglichen, - *tatsächlichen*- Zuständen gehörigen Zustandsabbildungen.
- $\mathfrak{Z}$ wird in der Regel als Lösungsmenge einer gewissen Bestimmungsgleichung bestimmt.
- Für sehr viele Systeme hat man passende Bestimmungsgleichungen gefunden, meist in Form von Differentialgleichungen. Vgl. Kap. 7.

1.2.13a Sprachliche und mathematische Darstellung eines Begriffsystems: Der physikalische *Arbeitsbegriff*.

(2.13.6) Zum physikalischen Begriff der Arbeit gehört üblicherweise eine Situation der folgenden Art, besser, das folgende Szenenbild, innerhalb dessen man dann konkrete Überlegungen ausführt:

Ein Massenpunkt der Masse m befindet sich unter dem Einfluß eines äußeren Kraftfeldes $\vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x})$. Es entsteht ein Zustandsraum $\mathfrak{Z}$ zugehöriger physikalischer Bahnkurven $t \mapsto \vec{r}(t)$. Nur Bahnen aus $\mathfrak{Z}$ können im ungestörten System beobachtet werden. (Im konstanten Schwerefeld erhält man Flugparabeln, aber nie eine Kreisbahn.)

Aber ein Beobachter des Systems kann in den Bewegungsablauf eingreifen und den Massenpunkt zwangsweise auf einer anderen Bahnkurve t$\mapsto \vec{s}$(t) führen. Das entspricht der ursprünglichen Konzeption des Arbeitsbegriffes: Ein Arbeiter trägt/zieht/wälzt eine Masse auf einem vorgegebenem Weg t$\mapsto \vec{s}$(t) und trotzt dabei der Schwerkraft! Dieser Arbeiter gehört nicht zum System *Massenpunkt im Kraftfeld*, leistet aber Arbeit am System, beeinflußt den Energiezustand des Systems.

> Kurz: Unphysikalische, glatte Bewegungen kann man erhalten, indem man eine Führung durch einen äußeren Einfluß vornimmt. Diese Führung erfolgt auch über Kräfte, deren genauen Wert man jedoch in der Regel nicht benötigt, nur ihre Wirkung in Form der geführten Bahnkurve wird benötigt! Und die Arbeit ist eine Zahlgröße, die diesen Sachverhalt charakterisiert. Die Zuordnung Bahnkurve $\mapsto$ (geleisteter Arbeitswert) ist vom Maßtyp.

(2.13.7) Meist ist es nützlich, die physikalischen Bewegungen als Spezialfall der geführten zu interpretieren: Man wählt einfach für die Führungskraft den Wert Null. Dann lassen sich alle Fälle gemeinsam behandeln.

(2.13.8) Fassen wir das gesamte Szenenbild zusammen:

- Ein Massenpunkt befindet sich unter dem Einfluß eines Kraftfeldes $\vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x})$ und wird entlang einer (u.U. unphysikalischen) Bahnkurve t$\mapsto \vec{s}$(t) geführt.
- Dann läßt sich diese Situation durch eine Zahl, die *geleistete Arbeit* charakterisieren. Mit den Rechenmethoden des Vorkurses erhält man diese Zahl wie folgt:
  - Man bildet durch Zusammensetzung die Kraftkurve t$\mapsto \vec{F}(\vec{s}(t))$, also die Feldkraft, die der Körper zur Zeit t verspürt und gegen die angearbeitet werden muß.
  - Durch Ableiten nach t erhält man die momentane Geschwindigkeit t$\mapsto \dot{\vec{s}}$(t) der geführten Bewegung.
  - Skalarproduktbildung ergibt die reelle Funktion $t \mapsto \dot{\vec{s}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{s}(t))$. Diese Funktion wird über den Beobachtungszeitraum integriert, was die gewünschte Arbeit ergibt. Sind $\vec{s}$ und $\vec{F}$ gegeben, so ist besteht die gesamte Konstruktion mithin aus einer Folge mathematischer Routineoperationen!
  - Da in der Regel das Feld $\vec{F}$ fest ist, wogegen verschiedene Bewegungsabläufe verglichen werden sollen, erhält man eine Abbildung vom Funktionaltyp:

$$\vec{s} \mapsto A(\vec{s}) = \int_I dt\ \dot{\vec{s}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{s}(t))$$

    Der Kurve wird eine Zahl zugeordnet, das Feld ist äußerer Parameter.

(2. 13.9) Bemerkenswerterweise wird in der physikalischen Lehrbuchliteratur dieser Sachverhalt in der Regel nicht sprachlich erläutert, sondern eher über Rechenbeispiele eingeübt.

Eine typische Formulierung aus einem Lehrbuch:

> Wenn eine konstante Kraft $\vec{F}$ den Massenpunkt, auf den sie wirkt, um die Strecke $\Delta\vec{r}$ verschiebt, führt sie ihm die Arbeit W zu mit W=$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$.

Der Unterschied zwischen Führungskraft und Feldkraft wird nur selten sprachlich dargestellt. Unter dem Slogan "ist doch klar, wie das gemeint ist" wird beides identifiziert und auf Klärung durch Rechenbeispiele vertraut. Beachten Sie: Die Führungskraft ist es, die den Punkt verschiebt, aber nicht diese, sondern die Feldkraft ist in die Formel einzusetzen. (Nur im Fall einer physikalischen Bewegung stimmen beide überein.) Diese *Sprachlosigkgeit* wirkt auch dann nach, wenn eine sachlich korrekte Definition gegeben wird. Ein Beispiel:

Legt ein Massenpunkt in einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ das Wegelement $\Delta\vec{r}$ zurück, so nennen wir das Skalarprodukt $\Delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r}$ die *mechanische Arbeit*, die von der Kraft $\vec{F}$ am Massenpunkt entlang des Weges $\Delta\vec{r}$ geleistet wird.

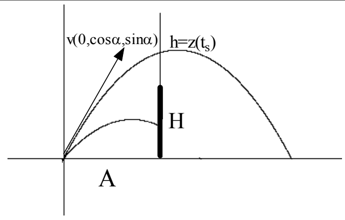
Eine Erläuterung, dass hier eine geführte, nicht durch die Feldkraft bewirkte Verschiebung zulässig und der **sachlich wichtigere** Fall ist, erfolgt auch in diesem Text nicht.

☐ Inspizieren Sie einige einführende Physikbücher zu der hier angesprochenen Frage.

1.2.14 Denken mit Abbildungen: Abbildungsbegriff und Verständnisbildung

(2.14.1) Viele naturwissenschaftliche Probleme verlangen, Beziehungen zwischen Größen zu erkennen und zu bestimmen. Das erfordert dann immer geistige Anstrengung, bei der man auch leicht fehlgehen kann. Nachfolgend geben wir ein Beispiel einer einfachen Aufgabe, bei deren Lösung nichtsdestoweniger viele Anfänger in Schwierigkeiten geraten. Man kann die Schwierigkeiten verringern, wenn man es sich angewöhnt, die auftretenden Beziehungen als Abbildungen zu sehen und danach strebt, diese zu präzisieren und festzulegen.

(2.14.2) Die Aufgabe:

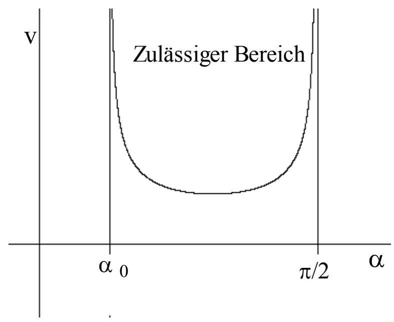
Eine Flugparabel soll eine Mauer der Höhe H, die sich im Abstand A vom Abschußort befindet, überwinden.	Skizze und Wahl geeigneter Bezeichnungen
Wie ist die vektorielle Abschuß-geschwindigkeit zu wählen?	

(2.14.3) Die Skizze und ein gewisses Vorwissen über Flugbahnen zeigen, dass es hier um die folgende Beziehung geht: Wählt man α und v, so ist die Flugbahn festgelegt, insbesondere auch die Höhe h, in der die Flugbahn die Mauerebene trifft. Die Abschußzeit ist für das Problem unwesentlich. Schießt man bei t=0 ab, so gibt es einen zugehörigen späteren Zeitpunkt t_s (Bezeichnung!) zu dem die Mauerebene getroffen wird.

Man benötigt daher die Zuordnung μ: $(\alpha,v) \mapsto (t_s,h)$ mit $h=z(t_s)$. Unser physikalisches Vorwissen sagt uns, dass diese Zuordnung existiert, und das Flugparabelschema erlaubt es uns - natürlich!-, sie auch zu bestimmen.

Die Aufgabe fragt: Wann ist h>H ? D.h. $\mathbb{L} = \overset{-1}{\underline{\mu}}(]H,\infty[)$ ist zu bestimmen.

Physikalisch wissen wir: Vergrößert man v, also die Abschußgeschwindigkeit, so vergrößert sich auch h. Der zulässige Bereich in der α-v-Ebene muß daher nebenstehende Form haben. Insbesondere kann man diesen Bereich über seine

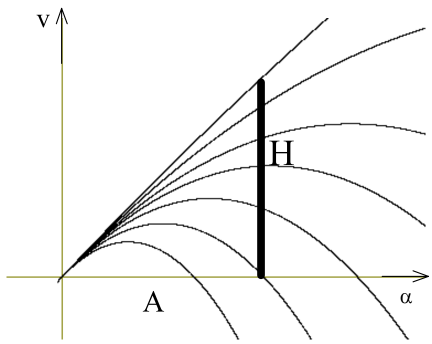


Begrenzungskurve bestimmen:

$$v_m = (]\alpha_0, \frac{\pi}{2}[, \alpha \mapsto v_m(\alpha), \mathbb{R}).$$

Auf die Bestimmung dieser Funktion wird man zusteuern. Über den Grenzwinkel $\alpha_0$kann man noch Genaueres sagen:

Die Flugbahn verläuft immer unter der Anfangstangente. Schießt man mit sehr großer Anfangsgeschwindigkeit, so verläuft die Bahn praktisch geradlinig. Folglich muß $\tan(\alpha_0) = \frac{H}{A}$ gelten. Für kleineres α gelangt man nie über die Mauer.



(2.14.4) Kennt man v_m, so wird der Rest trivial. Für die Menge zulässiger Anfangswerte ergibt sich :

$$\mathbb{L} = \{(\alpha, v) | \alpha \in]\alpha_0, \frac{\pi}{2}[\quad \text{und} \quad v > v_m(\alpha)\}$$

(2.14.5) *Zweifellos sind das (anzahlmäßig) recht viele Überlegungen, über die man zunächst leicht die Übersicht verliert. Wenn man aber routinemäßig nach den relevanten Zuordnungen sucht, gelangt man rasch zu μ und v_m und dann ist alles nur noch Präzisierung und Analyse dieser Abbildungen.*

(2.14.6) Die eigentliche Rechnung ist eine Wiederholung der Überlegungen. Alle Information über die Bewegung steckt in der zugehörigen Flugparabel. Diese ergibt sich aus Skizze und zugehörigen Vorüberlegungen ($t_0 = 0$, Bewegung in der y-z-Ebene) zu

$$\vec{r}(t) = (0, vt\cos\alpha, vt\sin\alpha - \frac{g}{2}t^2).$$

Gesucht ist der Schnitt mit der Mauerebene (parallel zur x-z-Ebene mit y=A). Es folgt wie üblich

$$\boxed{\begin{array}{l} vt_S\cos(\alpha) = A \\ vt_S\sin(\alpha) - \frac{g}{2}t_S^2 = h \end{array}} \qquad \begin{array}{l} t_S = \frac{A}{v\cos\alpha} \\ h = A tan\alpha - \frac{g}{2}\frac{A^2}{v^2\cos^2\alpha} \end{array}$$

Damit haben wir unsere gesuchte Abbildung μ bereits gefunden:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_S \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{v\cos\alpha} \\ A\tan\alpha - \frac{g}{2}\frac{A^2}{v^2\cos^2\alpha} \end{pmatrix}}$$

Eine Kontrollüberlegung: α fest und v vergrößern. Dann wächst h manifest wie erwartet.
Die Grenzabbildung v_m, ist jetzt leicht über h = H zu bestimmen. Man erhält:

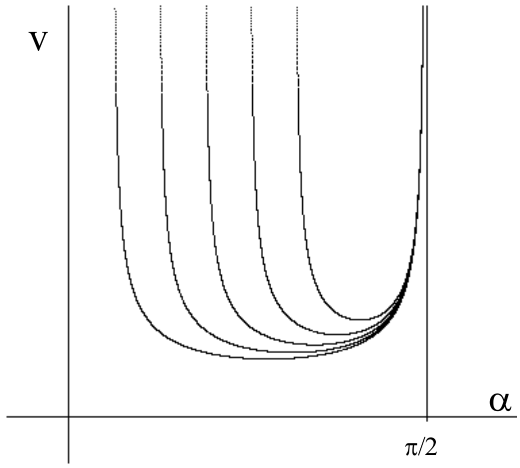
$$H = A\tan\alpha - \frac{gA^2}{2v^2\cos^2\alpha} \qquad \underset{\text{Auflösen nach v}}{\text{Also}} \qquad v = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}gA}}{\cos(\alpha)\sqrt{\tan\alpha - \tan(\alpha_0)}}.$$

Mit geeigneten Abkürzungen folgt schließlich.

$$\boxed{v_m = (]\alpha_0, \tfrac{\pi}{2}[, \alpha \mapsto v_m(\alpha) = \tfrac{P}{\cos\alpha\sqrt{\tan\alpha - Q}} \qquad P = \sqrt{\tfrac{gA}{2}} \qquad Q = \tfrac{H}{A} = \tan\alpha_0.}$$

Und daraus folgt sofort $\mathbb{L}$.

Die Grenzkurve hängt im wesentlichen nur von einem einzigen Parameter ab, nämlich Q.
Für einige Q-Werte geben wir diese Kurve wieder. Interessant, aber physikalisch verständlich ist, dass Minimum so ausgesprochen flach wirkt. Je kleiner A wird, desto größer wird α_0. Auch das ist sachlich klar. Ebenso wächst α_0 mit H.



präzisieren Si

☐ Die Grenzkurve kann als spezielle Niveaumenge eines Skalarfeldes interpretiert werden. Präzisieren Sie das.

1.2.15 Vom Nutzen der Symbolsprache: Das Summenzeichen.

(2.15.1) Es sei I eine endliche Menge, die *Indexmenge.* Meist wird I eine Abzählmenge $I=I_N=(1,2,......,N)$ sein. Aber auch andere Mengen sind zulässig wie $I=\{2,4,6,8\}$ oder $I=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ oder $I=\{-1,0,1\}$ usw.

Jedem $i\in I$ soll eine Zahl a_i zugeordnet sein, d.h. wir haben es mit einer Indizierungsabbildung vom Datensatztyp zu tun: $a=(I,i\mapsto a_i,\mathbb{R})$.

(2.15.2) Vielfach interessiert man sich für die Summe aller Zahlen a_i. Da es in $\mathbb{R}$ auf Reihenfolge und Beklammerung von Summen nicht ankommt, ist das der Term $a_1 + a_2 + ... + a_N$ für $I=\{1,2,...,-n\}$ und $a_\alpha+a_\beta+a_\gamma$ für $I=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ usw.

Es ist nützlich, für solche Summenterme über eine einheitliche abkürzende Bezeichnung zu verfügen, die zugleich die effiziente Anwendung der Rechengesetze unterstützt

Die übliche und eingebürgerte Schreibweise, die dies leistet, ist:

$\sum_{i\in I}a_i$	*Summe der a_i über alle i aus I.*

(2.15.3) Je nach Situation sollte man für den Term Σa_i zwei Rollen unterscheiden:

- Im ersten Fall ist das Ergebnis der Summation, also eine Zahl gemeint
- und im zweiten zusätzlich der Rechenweg, der zu diesem Ergebnis führt und der durch das Symbol beschrieben wird.

Infolge der Rechengesetze steht dieser Term sogar für eine Vielzahl gleichwertiger Rechenwege, unter denen man fallspezifisch den jeweils günstigsten aussuchen kann.

Beispiel: $I=\{1,2,3,4,5\}=\{2,4,3,5,1\}=....$usw. Entsprechend ist

$$\Sigma_{i\in I}a_i = a_2 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_2 + a_4 + a_3 + a_5 + a_1 = ...$$

Es gibt 5!=120 Permutationen der Elemente von I. Und für jeden dieser Ausdrücke noch 14 zulässige Beklammerungen. Damit steht $\Sigma_{i\in I}a_i$ für insgesamt 1680 mögliche Rechenwege.

(2.15.4) Bitte beachten Sie: I kann, muss aber keine Zählmenge sein. Ist M etwa eine Menge von Atomen und m_α die Masse des Atoms $\alpha\in M$, dann steht $\Sigma_{\alpha\in M}m_\alpha$ für die Massensumme, die Gesamtmasse des Atomsystems. Es ist gut, sich von vornherein diese allgemeine Interpretation einzuprägen.

Man ändert die Schreibweise auch noch in meist selbst erklärender Weise ab, um weitere Information über I einzubauen oder aus dem Kontext Selbstverständliches fortzulassen.

(2.15.5) Einige Beispiele

- Ist klar, über welche Menge I zu summieren ist, so schreibt man kurz $\Sigma_i a_i$ oder sogar nur Σa_i.
- Im Falle einer Zählmenge $I_N = \{1, 2, ...n\}$ schreibt man üblicherweise

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{oder entsprechend} \quad \sum_{k=5}^{10} a_k \qquad \text{usw.}$$

  Die Reihenfolge der Summanden ist hier meist vorgegeben.
- Auch Schreibweisen wie die nachfolgenden erklären sich von selbst:

$$\sum_{0\leq i\leq 10} a_i \quad \text{oder} \quad \sum_{\substack{i=0\\ i\neq 5}}^{10} b_i$$

(2.15.6) Häufig hat i nicht nur reinen Bezeichnungscharakter, sondern dient dazu, für a_i einen Berechnungsausdruck anzugeben. Etwa:

$$\Sigma_{n=1}^{5}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \qquad \text{oder} \qquad \Sigma_{n=1}^{3}(i+\frac{1}{n})^{n^2}=(i+1)^1+(i+\frac{1}{2})^4+(i+\frac{1}{3})^9.$$

Im letzten Beispiel ist i äußerer Parameter.

(2.15.7) Das Summensymbol unterstützt die Anwendung zahlreicher Rechengesetze, indem es Schreibarbeit spart und zugehörige Umformungen vereinfacht und besonders in komplizierten Fällen durchsichtiger gestaltet. Und sobald es um kompliziertere Umformungen geht, erweist sich der Summenzeichensymbolismus der Pünktchen- usw- Schreibweise als überlegen. Spätestens dann ist $\Sigma_i a_i$ besser als $a_1 + a_2 + ... + a_N$.

(2. 15.8) Erfahrungsgemäß bereitet der Umgang mit dem Summensymbol zunächst allerdings Schwierigkeiten. Wir besprechen daher eine Reihe zugehöriger Regeln, deren Analyse diesen Umgang schulen sollten.

(2.15.9)	Ist I∩J=∅ gilt Gilt so nicht für I∩J≠ ∅!	$\Sigma_{i\in I}a_i + \Sigma_{j\in J}a_J = \Sigma_{i\in(I\cup J)}a_i$
(2.15.10)	$\Sigma_{i\in I}a_i + \Sigma_{i\in I}b_i = \Sigma_{i\in I}(a_i+b_i)$	und $\quad \Sigma_{i\in I}(\alpha a_i) = \alpha\Sigma_{i\in I}a_i$

(2.15.9) **Klammerersparnis**: Σ wirkt auf alle unmittelbar rechts stehenden Faktoren. Zugehörige Klammern läßt man fort:

Also $\Sigma_{i=0}^{2}(2a_ib_i) = \Sigma_{i=0}^{2}2a_ib_i = 2a_0b_0 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2$.

Sorgfältig unterscheiden sollte man dagegen

$$\Sigma_{i=1}^{3}(a_i+3) = (a_1+3)+(a_2+3)+(a_3+3) = \Sigma_{i=1}^{3}a_i + 9 \qquad \text{von } \Sigma_{i=1}^{3}a_i + 3\ .$$

Dies bedeutet z.B. $\Sigma_{i=1}^{3}1 = 1+1+1 = 3$. Dagegen ist $\Sigma_{n=1}^{n}a_n$ Unfug. Andererseits gilt $\Sigma_{i=1}^{n}a_n = a_n\Sigma_{i=1}^{n}1 = a_n n$. Mit Klammerersparnis schreibt man $a_n\Sigma_{i=1}^{n}b_i$ statt $a_n\,(\Sigma_{i=1}^{n}b_i)$.

(2.15.13) **Grundlegendes Beispiel für eine Rechnung mit dem Summenzeichen:** Sei immer $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$ und j$\in J = \{1, 2, ..., m\}$. Es geht um das distributive Ausmultiplizieren zweier Summen mit dem üblichen Stichwort *Jeder Summand mit jedem.* Der Vergleich der beiden Kalküle sollte den Vorteil der Summenschreibweise verdeutlichen. Die Pünktchenschreibweise sollte man sich selbst erstellen, sobald einem irgendein Schritt in einer Rechnung mit dem Summenzeichen unklar ist.

$\underline{\underline{(\Sigma_i a_i)\,(\Sigma_j b_j)}}$	$= \Sigma_i a_i(\Sigma_j b_j)$	$(a_1+a_2+...a_n)(b_1+...+b_m) = \begin{cases} a_1(b_1+...+b_m)+\\ a_2(b_1+....+b_m)+...\\ ..+a_n(b_1+.....b_m).\end{cases}$
	$\underline{\underline{=\Sigma_{i,j}a_ib_j}}$	$= a_1b_1+...+a_1b_m+a_2b_1+.......+a_nb_m$
	$=\Sigma_{i,j}b_ja_i$	$= b_1a_1+....+b_ma_1+.....+b_ma_n$
	$=\Sigma_j(\Sigma_i b_ja_i)$	$= (b_1a_1+....+b_1a_n)+(b_2a_1+..+b_2a_n)+....(b_ma_1+...)$
	$=\Sigma_j b_j(\Sigma_i a_i)$	$= b_1(a_1+...a_n)+b_2(a_1+...a_n)+...b_m(a_1+..+a_n)$

Die unterstrichene Gleichung wird im Summenkalkül gerne benutzt.

(2.15.15)) Man sollte es sich angewöhnen, als Grundkonzept *Summe über eine endliche Menge* zu verwenden und nicht *Summe von i=1 bis n*. Letzteres ist nur ein Spezialfall. Denn in vielen Fällen hat man keine natürliche Numerierung vorliegen. Häufig kann man Umformungen der die Menge festlegenden Bedingung sofort in Umformungen der Summe umsetzen. Eine wichtige und nicht leichte Anwendung dieses Konzeptes sieht wie folgt aus:

(2.15.16) Verstehen Sie , wie man die **Vertauschung der Summationsreihenfolge** im folgenden Beispiel durch Umformulierung der Mengenbedingung erhält. Machen Sie dazu eine Skizze der folgenden Menge $M \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} M &= \{(m,n)|m,n \in \mathbb{N}, 0 \le n \le 5 \text{ und } 0 \le m \le 2n\} \\ &= \{(m,n)|m,n \in \mathbb{N}, 0 \le m \le 10 \ \text{ und } \ \frac{m}{2} \le n \le 5 \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\boxed{\Sigma_{(m,n)\epsilon M}\mathrm{A}_{mn}=\Sigma_{n=0}^{5}(\Sigma_{m=0}^{2n}\mathrm{A}_{mn})=\Sigma_{m=0}^{10}(\Sigma_{n=0}^{\frac{m}{2}}\mathrm{A}_{mn}).}$$

Diese Beispielrechnung sollten Sie so gut verstehen, dass Sie sie auf ähnliche Fälle verallgemeinern können.

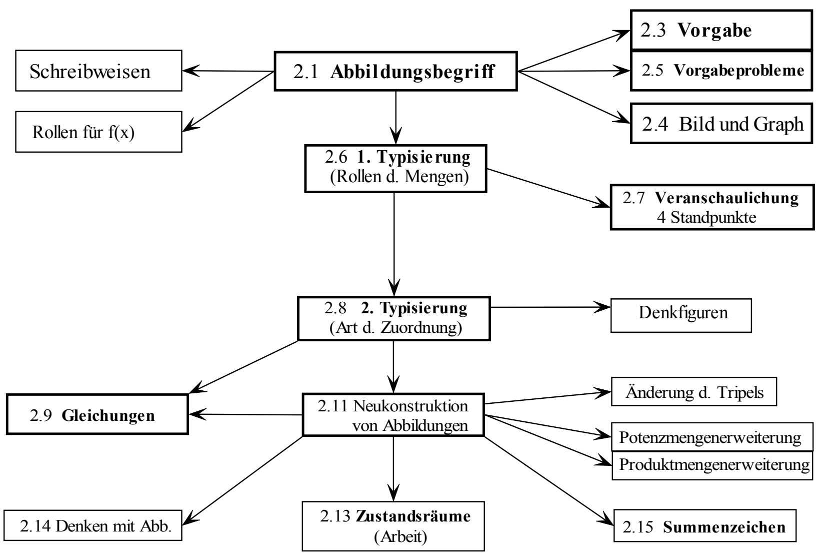
☐ Wie lassen sich Indexmengen und ihre Umformungen vom Feldstandpunkt bzw. alternativ vom Indexstandpunkt aus veranschaulichen?

☐ Erklären bzw. decodieren Sie analog zu $\Sigma_{i \in J} a_i$ die folgenden Termsymbole:

$$\prod_{i \in J} a_i \quad \text{(Produkt!)} \qquad \cap_{i \in J}\, a_i \qquad \cup_{i \in J}\, a_i$$

In welchen Fällen darf man problemlos eine beliebige (=beliebig groß e) Indexmenge zulassen? Was ist beispielsweise $\cup_{M \in \mathfrak{P}(A)} M$ für eine beliebige Menge A?

1.2.16 Übersicht über das Teilkapitel *Abbildungen*



1.3 Partitionen und Äquivalenzrelationen

1.3.0 Vorbemerkung

(3.0.1) Ein wichtiges Hilfsmittel wissenschaftlichen Denkens ist das **Klassifizieren** von Elementen einer Menge und die darauf basierende **Abstraktion einer Eigenschaft**, die durch eine solche Klassifikation repräsentiert wird. Die Worte deuten bereits die Art des Vorgehens an: Man hat eine (tendenziell schlecht überschaubare) Menge und sortiert deren Elemente in überschaubarere Klassen (=Teilmengen einer bestimmten Art) mit Hilfe einer unterscheidenden Eigenschaft.

(3.0.2) **Beispiele**: Im mathematischen Bereich klassifiziert man Mengen nach der *Anzahl ihrer Elemente*. In der Geometrie Teilmengen des E^3 nach *Kurven, Flächen, Körpern und sonstigen Teilmengen*. Und in diesem sonstigen Rest befinden sich die in den vergangenen Jahren immer wieder als Computerbild gezeigten Objekte, die mit Attributen wie *fraktal*, *chaotisch, seltsam* usw. versehen werden. Bei der Inspektion solcher Bilder sollte die Herausforderung einer verständnisbildenden Klassifikation auf den Studienanfanger wirken wie der Anblick eines Siebentausender auf den angehenden Bergsteiger.

Im Bereich der Chemie klassifiziert man homogene materielle Stoffe nach chemischen Verbindungen wie Wasser, NaCl usw. In der Biologie sortiert man die unüberschaubare Zahl der individuellen Lebewesen nach Arten. Dabei werden die Klassifikationen noch hierarchisch ineinander verschachtelt. Usw.

Im Alltag klassifiziert man Autos nach Herstellern oder Typen. Personen werden nach ihrem Beruf oder ihrer Nationalität klassifiziert. Usw.

Bei der Flugparabelaufgabe aus 1.2.14 haben wir (stillschweigend) die Flugparabeln in drei Klassen eingeteilt: Die erste enthielt alle durch den Ursprung gehenden, die Mauer nicht überwindenden, die zweite alle durch den Ursprung gehenden, die Mauer überwindenden Flugbahnen. Und die dritte den Rest.

Die Worte abac usw. beim Multinomialsatz wurden in (1.6.7) zu Klassen *aller Worte* zusammengefaßt, *die zu demselben alphabetischen Wort* führten.

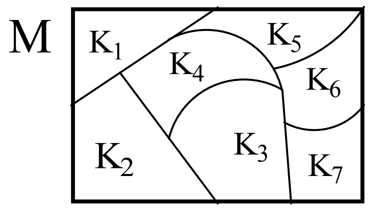
Das sollte reichen, um die enorme Spannweite zu verdeutlichen, die der Klasssifikationsfrage zukommt.

1.3.1 Partitionen

(3.1.1) Wir beginnen damit, die mengentheoretische Struktur zu formalisieren, durch die **fertige** Klassifikationen beschrieben werden. Und zwar geben wir die zugehörige Definition in drei Formen, einer verbalen kommunikationsorientierten, einer anschaulich - vorstellungsorientierten und einer operativ - formalen. Letztere ist für die eigentliche mathematische Arbeit geeignet. Auf das Problem der Eigenschaftsabstraktion gehen wir in 1.3.4 ein.

Definition (verbale Form):
Eine *Partition* einer Menge M ist eine disjunkte Zerlegung von M in nichtleere Teilmengen, die *Klassen* (der Partition) genannt werden.

Anschauliche Form



M ist in 7 Klassen K_1-K_7 zerlegt.

(3.1.2) Die Klassen bilden zusammen eine neue Menge, die Klassenmenge oder Partition. Diese neue Menge ist es, die uns interessiert. Jetzt die **mathematische** Definition der Struktur:

Definition (formale und arbeitsorientierte Form):
Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Dann heißt $\mathcal{P}$ (genau dann) eine *Partition von M,* wenn gilt
(P.0): $\mathcal{P} = \{p, q, ...\} \subset \mathfrak{P}(M)$ ist Menge von Teilmengen von M.
(P.1) Für alle $p \in \mathcal{P}$ gilt $p \neq \emptyset$.
(P.2) Für $p,q \in \mathcal{P}$ und $p \neq q$ gilt $p \cap q = \emptyset$.
(P.3) Es gilt $\cup_{p\in\mathcal{P}} p = M$.

Die Teilmengen $p \in \mathcal{P}$ nennt man die *Klassen* von P. Die Anzahl der Klassen ist beliebig, kann unendlich sein.

(3.1.3) Es dürfte offensichtlich sein, dass und wie die verbale und die anschauliche Definition den Inhalt von (P.0-3) wiedergeben. Das hierarchische Niveau der Potenzmenge machen wir in diesem Teilkapitel durch den Schrifttyp kenntlich.

(3.1.4) Einige Beispiele zum Einstieg:

- a) M={1,2,3,4}. $\mathcal{P}$ ={{1,3},{2,4}} ist eine Partition von M in zwei Klassen.

Man sieht, dass $\mathcal{P} \subset \mathfrak{P}(M)$ gilt. Oder auch $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$.

Die Menge $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ hat für unser M gerade 2^{16}=65.536 Elemente. Darunter sind nur 15 Partitionen, wie man sich durch Aufzählung leicht überzeugt. D.h. nur sehr wenige Teilmengen von $\mathfrak{P}(M)$ sind Partitionen von M.

- b) Jede Menge M besitzt zwei triviale Partitionen, $\mathcal{G}$={M} und $\mathcal{A} = \{\{m\}|m \in M\}$. Die Partition $\mathcal{A}$ nennen wir auch die *atomare Partition von M.* Ihre Atome sind die kleinsten als Klassen zulässigen Teilmengen, die einelementigen Mengen. Natürlich kann man über die bijektive Abbildung $m \mapsto \{m\}$ diese Partition mit der Ausgangsmenge M identifizieren. Meist ist es besser, das **nich**t zu tun!
- c) Jede nichttriviale Teilmenge A von M erzeugt die zweielementige Partition {A,A′} von M, wobei A′ das Komplement von A in M ist. Die die Teilmenge A definierende Eigenschaft ist erfüllt (A) oder sie ist es nicht (A′).
- d) {J_k| J_k=]k,k+l], k∈ $\mathbb{Z}$} ist eine Partition von $\mathbb{R}$ in Intervalle der Länge 1. Beachten Sie, wie die Intervalle aneinander grenzen, um die Disjunktheit (P.2) zu sichern.

(3.1.5) Anmerkung: Partitionen sind keineswegs die einzigen interessanten Teilmengen von $\mathfrak{P}(M)$, auch nicht unter dem Aspekt der Klassifikation. Aber sie sind zunächst die wichtigsten. Läßt man etwa (P.2) fort, erhält man etwas, das man suggestiv Überdeckung von M zu nennen pflegt. Und wenn man sagt, man klassifiziere Funktionen nach ihrer Glattheit, dann denkt man an eine andere Struktur, die man eher mit dem Stichwort "Filter" verbinden könnte.

☐ Überlegen Sie selbst, was dann anstelle von (3.1.2) stehen könnte.

1.3.2 Parametrisierungen von Partitionen

(3.2.1) Partitionen werden günstig über zugehörige Parametrisierungen vorgegeben, weil man die Klassen mit Hilfe der Namensgebung meist besser handhaben und man über die Wahl der Bezeichnungen unmittelbar inhaltliche Bedeutungen einbauen kann.

Definition: Sei J eine Indexmenge und $\mathcal{P}$ eine Partition von M. Eine *Parametrisierung von P* ist dann eine Abbildung $\pi_{\mathcal{P}} = (J, j \mapsto P_j, \mathfrak{P}(M))$, für die $\boxed{\mathcal{P} = Bild\pi_{\mathcal{P}}}$ gilt.

(3.2.2) Wann liefert umgekehrt eine Abbbildung π :J→ $\mathfrak{P}(M)$ eine Parametrisierung einer Partition von M?

(3.2.3) Die Definition (3.1.2) ist so formuliert, dass man nur wenig zu modifizieren hat, um eine Antwort zu erhalten. Also :

Bildπ ergibt eine Partition von M, wenn gilt:
(P.0′) : J ist nicht leer und $\pi = (J, j \mapsto P_j, \mathfrak{P}(M))$
(P.1′) : Für alle j∈ J gilt $P_j \neq \emptyset$
(P.2′) : Aus $P_j \neq P_k$ folgt $P_j \cap P_k = \emptyset$
Achtung: Nicht etwa aus j≠k.
(P.3′) : $\cup_{j \in J} P_j = M$.

(3.2.4) In einer solchen Parametrisierung kann die Indexmenge J auf unterschiedliche Weise Bedeutung erhalten. Sie kann ein reines *Namensgebungssystem* für die Klassen liefern, sie kann aber auch die Klassen charakterisieren, indem sie das zu abstrahierende Merkmal beschreibt, oder sie kann so etwas wie ein Meßresultat wiedergeben, mit dessen Hilfe die Klassifikation bewirkt wird. Wir geben zwei Beispiele, wie man in konkreten Fällen auf natürliche Weise eine Parametrisierung einer Partition erhält.

(3.2.5) Als Beispiel für die erste Möglichkeit zerlegen wir die natürlichen Zahlen wie folgt in zwei Klassen: N_g ={0,2,4,....} und N_u ={1,3,5,...}. Inspektion der Klassen zeigt uns das die Klassen erzeugende Merkmal: *gerade* bzw. *ungerade*. Genauer sind das die beiden möglichen Werte oder Ausprägungen des Merkmales! (Das Merkmal selbst könnte man Parität nennen.) Wir führen eine Indexmenge I={g,u} ein und die zugehörige Parametrisierung (I.i$\mapsto$$N_i, \mathfrak{P}(\mathbb{N})$) mit aussagekräftiger Indizierung.

(3.2.6) Ein Beispiel für die zweite Möglichkeit: Sei A ein Alphabet und W=W(A) eine nicht leere Menge von aus A gebildeten Worten. Wir klassifizieren die Worte nach ihrem ersten Buchstaben. Für a$\in$A sei K(a) = {w| w beginnt mit a}. Dann haben wir die Abbildung (A,a$\mapsto$K(a),$\mathfrak{P}$(W)). Unter einer kleinen Zusatzforderung ist das eine injektive Parametrisierung einer Partition von W. Der Name ist hier als erster Buchstabe der in der Klasse zusammengefaßten Worte inhaltlich bedeutsam. Man denke an ein Lexikon, das die Worte nach ihren Anfangsbuchstaben sortiert.

☐ Wie sieht die kleine erwähnte Zusatzforderung aus? Die Bedingungen aus (3.2.3) durchgehen!

(3.2.7) Zu einer Parametrisierung $\pi : J \to \mathfrak{P}(M)$ kann man natürlich auch die Restriktion J$\to$ $\mathcal{P}$ = Bild$\pi \subset \mathfrak{P}(M)$ bilden. Auch diese Abbildung ist eine Parametrisierung von $\mathcal{P}$. Sie ist surjektiv.

1.3.3 Abgeleitete Größen einer Partition

(3.3.1) Zu jeder Partition $\mathcal{P}$ von M kann man einige weitere nützliche Größen konstruieren (so wie zu einer Abbildung die Mengen Bild und Graph konstruiert wurden) :

(3.3.2) **Die Klassenabbildung $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ von** $\mathcal{P}$. Darunter versteht man die folgende Abbildung

$\mathcal{K}_\mathcal{P}$=(M,x$\mapsto$$\mathcal{K}_\mathcal{P}$(x),$\mathcal{P}$) . Hierbei ist $\mathcal{K}_\mathcal{P}$(x) diejenige Klasse aus $\mathcal{P}$, in der x liegt. Wegen (P.3) muss es eine solche Klasse geben und wegen (P.1) ist sie als Klasse eindeutig bestimmt. $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ ergibt eine i.a. nicht injektive Parametrisierung von P. (Injektiv ist sie für die atomare Partition.) Anschaulich suggestiv: $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ ordnet jedem Schüler seine Klasse zu. Manchmal ist es besser, als Wertemenge $\mathfrak{P}(M)$ statt $\mathcal{P}$ zu nehmen.

(3.3.3) Ein **Vertretersystem (von** $\mathcal{P}$) : Darunter versteht man eine Teilmenge V von M mit der Eigenschaft, dass V von jeder Klasse von $\mathcal{P}$ genau ein Element enthält. Die Restriktion von $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ auf V ist daher bijektiv. Ein Vertretersystem liefert offensichtlich eine bijektive Parametrisierung von $\mathcal{P}$ nämlich (V,x$\mapsto$$\mathcal{K}_\mathcal{P}$(x),$\mathcal{P}$). D.h. jedem Vertreter wird seine Klasse zugeordnet. Die Umkehrabbildung nennen wir v. Also v=($\mathcal{P}$,C$\mapsto$v(C),V). v ordnet jeder Klasse den zugehörigen Vertreter ("Klassensprecher") zu. Offenbar gilt $\mathcal{K}_\mathcal{P} \circ v = id_\mathcal{P}$. Dagegen ist v$\circ\mathcal{K}_\mathcal{P}$ i.a. nicht id_M.

Sugesstiv: Schüler$\overset{\mathcal{K}_\mathcal{P}}{\mapsto}$ Klasse $\mapsto$Klassensprecher. Im nichtatomaren Fall gibt es viele Vertretersysteme.

(3.3.4) Die Konstruktion eines Vertretersystems bedeutet, dass man aus jeder Klasse genau ein Element - den Vertreter - auswählt und dass man diese Vertreter sodann zu einer neuen Menge zusammenfaßt. Im Gegensatz zu $\mathcal{P}$ ist V Teilmenge von M, nicht von $\mathfrak{P}(M)$. Das Vertretersystem liefert eine Art Modell der Zerlegung innerhalb von M selbst. Oder auch: v ist Abbildung vom Darstellungstyp. Jede Klasse wird durch genau ein Element aus M vertreten.

(3.3.5) Ein Beispiel: Bei unserer Diskussion des Multinomialsatzes führten wir die Wortmenge $\mathcal{W}_3(4)$ mit 27 Elementen ein. Sie zerfiel in 10 Klassen, wenn man die Worte in alphabetische Reihenfolge brachte. Geben wir diese 10 Klassen einmal an:

{aaa}, {bbb}, {ccc}, {aab, aba, baa}, {aac, aca, caa}, {abb, bab, bba}, {acc,cac, cca}, {bbc, bcb, cbb},

{bcc, cbc, ccb}, {abc, bca, cab, acb, bac, cba}.

Die Anzahl der Elemente der Klasse lieferte gerade unseren kombinatorischen Koeffizienten K. Die 10 alphabetisch geordneten Worte aaa=a^3, bbb=b^3, ccc=c^3, aab=a^2b, ...,abc

bilden ein zugehöriges Vertretersystem. Beispiele für die Klassenabbildung in diesem Fall:
$\mathcal{K}$(aba)={aab,aba,baa} oder
$\mathcal{K}$(abc)={abc,bac,...} usw. Und für die Vertreterabbildung V({bbc, bcb, cbb})=bbc.

(3.3.6) Im Bereich der Summenzeichensymbolik ermöglicht der Partitionsbegriff die folgende Summenumformung:

> Sei M endliche Menge und $\mathcal{P}$ eine Partition von M. Dann gilt
> $$\Sigma_{\alpha\in M} \;\; A_\alpha = \Sigma_{c\in\mathcal{P}} \left(\Sigma_{\alpha\in c} \; A_\alpha\right)$$

☐ Überlegen Sie sich eine einfache Konkretisierung dieser Formel. Formulieren Sie den Inhalt der Formel verbal.

☐ In 1.1.6 haben wir diese Formel stillschweigend benutzt. Spezifizieren Sie das.

(3.3.7) Wir beschreiben jetzt eine wichtige **Konstruktionsmethode für Partitionen**. Das zugehörige Resultat liefert einem in vielen Fällen auf einfache Weise benötigte Partitionen.

> Sei f:M→N eine surjektive Abbildung und $\mathcal{Q} \subset \mathfrak{P}(N)$ eine Partition der Wertemenge N.
> Dann ist $\mathcal{P} = \left\{ p |\text{ Es gibt } q \in \mathcal{Q} \text{ mit } p = \overset{-1}{\underline{f}}(q) \right\} = \left\{ \overset{-1}{\underline{f}}(q) \mid \mathrm{q} \in \mathcal{Q} \right\}$
> eine Partition der Urbildmenge M. Überdies ist q↦ $\overset{-1}{\underline{f}}(q)$ eine Parametrisierung der gebildeten Partition $\mathcal{P}$ von M durch die Klassen von $\mathcal{Q}$.

(3.3.8) Man bildet also für die Klassen q aus $\mathcal{Q}$ die Urbilder p(q)=$\overset{-1}{\underline{f}}(q) = \{x | x \in M, f(x) \in q\}$. Und diese Teilmengen von M bilden die Klassen einer Partition von M. Kurz: Hat man eine Partition der Wertemenge, dann induziert diese eine Partition der Urbildmenge. Beachten Sie den Richtungswechsel gegenüber der Zuordnung von f.

☐ Sei M={1,2,...,10} und N={a,b,c}. Für f:M→ N gelte die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	b	a	a	b	a	a	a	c	b	b

Auf N wähle man folgende zwei Partitionen $\{\{a\},\{b,c\}\}$ und $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$. Welche Partitionen entstehen auf M? (Sie müssen inspizieren, dass die Konstruktion wirklich eine Partition und nicht irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{P}(M)$ liefert) Welche weiteren Partitionen gibt es auf N?

☐ Sei s:V→ $\mathbb{R}$ ein Skalarfeld auf einem Konfigurationsraum. (Stellen Sie sich etwa ein Temperaturfeld vor.) Wählen Sie für Bild(s) die atomare Partition. Was für eine Partition von V entsteht gemäß (3.3.7)? Welche physikalisch-geometrische Interpretation haben die Klassen?

(3.3.9) **Beweis** von (3.3.7): Wir müssen (P.1-3) überprüfen.

(P.1): Sei p∈ $\mathcal{P}$ mit p=p(q)=$\overset{-1}{\underline{f}}(q)$ und q∈ $\mathcal{Q}$. q ist als Klasse nicht leer. Etwa y∈q. Da f surjektiv ist, gibt es x∈M mit f(x)=y. Laut Definition ist x∈p(q) und diese Menge ist somit **nicht leer**.

(P.2): Nehme p(q)=$\overset{-1}{\underline{f}}(q)$ und p(r)=$\overset{-1}{\underline{f}}(r) \in \mathcal{P}$. Angenommen x∈p(q)∩p(r). Laut Definition ist dann f(x)∈q und f(x)∈ r. Also f(x)∈q∩r. Da q und r Klassen der Partition $\mathcal{Q}$ sind, folgt q=r. D.h. aber p(q)=p(r) wie gewünscht.

(P.3): Sei x∈M beliebig. Bilde f(x). Das gehört zu einer Klasse q der Partition $\mathcal{Q}$. Also ist x∈p(q) und M ist die Vereinigung aller p(q).

(3.3.10) **Bemerkungen:** 1) Für q wählt man häufig die atomare Partition {{y} | y∈N} von N. Die Klassen der entstehenden Partition von M bestehen dann aus den Lösungsmengen der Gleichungen f(x)=y, wobei y freier Parameter ist. Ordnet etwa f einer Gruppe von Menschen ihr jeweiliges Alter in Jahren zu, dann entstehen Klassen von Personen gleichen Alters.

☐ Welche anderen Zerlegungen der Altersskala könnte man für dasselbe f nehmen?

2) Wir haben auch $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}(x) = \overset{-1}{\underline{f}}\left(\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}(f(x))\right)$. Die Klasse von x∈M ist das Urbild der Klasse von f(x) in N.

3) Ist f nicht surjektiv, so kann man statt f die Restriktion von f auf Bildf nehmen, also gleichsam eventuelle nicht zulässige leere Klassen fortlassen.

4) Hat man eine Partition im Urbildraum M von f:M→ N vorgegeben, so kann man dazu analog eine Partition in N **nicht** konstruieren, da die Bilder der Klassen im Gegensatz zu den Urbildern **nicht disjunkt sein müssen**. Beispiel : M={1,2,3}, N={a,b} , $\mathcal{P}$ = {{1,2},{3}} und f(l)=a, f(2)=f(3)=b. $\underline{f}$ ({1,2})={a,b} =N und $\underline{f}$ ({3})={b}. Aber {{a,b},{b}} ist natürlich keine Partition von N. Nochmals (und das ist zu merken):

Die Partitionskonstruktion aus (3.3.7) läuft entgegengesetzt zur Richtung von f.

1.3.3a Konkretisierung durch ein Beispiel: **Auswertung eines Zufallsexperimentes**

Da der nachfolgende Gedankenversuch in Statistik und Physik zahlreiche Anwendungen besitzt, ist zugehöriges Verständnis sehr nützlich. Am Ende dieses Kapitels lösen wir mit seiner Hilfe ein nicht leichtes Wahrscheinlichkeitsproblem. Im Augenblick geht es mehr um die Fähigkeit, den allgemeinen Formalismus der Partitionen mit konkret inhaltlichen Vorstellungen zu verbinden.

(3.3.11) Es geht um ein sogenanntes Zufallsexperiment. Wir denken uns einen Behälter (eine Urne), in dem sich K Kugeln befinden. Die Menge dieser Kugeln sei (=werde bezeichnet durch) K_m. Die Kugeln seien farbig mit F Farben. Die Menge der auftretenden Farben sei F_m (Der Buchstabe m steht hier immer für Menge=Anzahl).

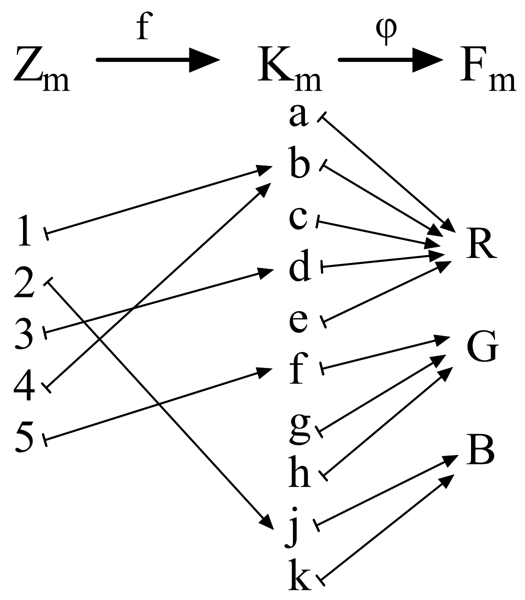
(3.3.12) Jetzt ziehen wir eine zufällig gewählte Kugel heraus, notieren sie und damit auch ihre Farbe und legen sie zurück. Diesen Vorgang wiederholen wir Z-fach. Die Züge numerieren wir und erhalten so die Zugmenge Z_m={1,2,...,Z}. Den gesamten Vorgang nennen wir ein *Experiment.* (Nicht Ziehung, um Einzelzug und Gesamtvorgang besser auseinander zu halten.)

(3.3.13) Zwischen den Elementen der drei Mengen gibt es Beziehungen, die wir durch Abbildungen formalisieren. Die Farbabbildung φ=(K_m,x↦ φ(x),F_m) gibt an, dass die Kugel x der Kugelmenge K_m die Farbe φ(x) hat. Und f=(Z_m,j↦f(j),K_m) gibt an, dass im j-ten Zug die Kugel f(j) gezogen ist. Die Abbildung f legt ein Experiment (genauer: dessen Resultat) vollständig fest. Schließlich beschreibt g=$\varphi \circ f$, welche Farbe dem jeweiligen Zug zuzuordnen ist.

(3.3.14) Für die Menge K_m haben wir eine Partition, die nach den Kugelfarben. Sie entsteht gemäß (3.3.7) aus der atomaren Partition von F_m durch φ. Ihre Klassen $\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{c\})$ bestehen aus allen Kugeln, die die Farbe c haben. Ebenso besteht $\overset{-1}{\underline{g}}(\{c\})$ aus allen Zügen, die eine Kugel der Farbe c liefern. Diese Menge kann leer sein, so dass nicht automatisch eine Partition von Z_m entsteht.

(3.3.15) Der Einschub enthält ein konkretes Beispiel mit weiteren formalen Beschreibungsgrößen und deren inhaltlicher Interpretation.

Beispiel mit F=3 Farben, K=10 Kugeln und Z=5 Zügen.



g=$\varphi \circ f$

♦ Farbpartition von K_m :

$\{\{a,b,c,d,e\},\{f,g,h\},\{j,k\}\}$

♦ Farbpartition von Z_m über g:

$\{\{1,3,4\},\{2\},\{5\}\}$

♦ $\varphi(f) = G$ $\quad \overset{-1}{\underline{\varphi}}(\underline{\varphi}(\{f\}))=\{f,g,h\}$

alle Kugeln ders. Farbe wie f$\in K_m$.

♦ g=$\varphi \circ f$ $\quad \overset{-1}{\underline{g}}(\underline{g}(\{1\}))=\{1,3,4\}$

.....alle Züge, die ders. Farbe wie 1

♦ $\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\underline{g}(\{1\}))=\{a,b,c,d,e\}$

Alle Kugeln, die dieselbe Farbe wie die erste haben.

(3.3.16) Die Farbpartition der Kugeln besitzt die natürliche Parametrisierung durch die Farben, also (F_m,c$\mapsto \overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{c\}),\mathfrak{P}(K_m)$). Man kann aber auch die Klassenabbildung (K_m,x$\mapsto \overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{\varphi(x)\}),\mathfrak{P}(K_m)$) bilden. Ein Vertretersystem dieser Partition für das Beispiel des Einschubs ist {a,f,j}.

1.3.4 Eigenschaftsabstraktion

(3.4.1) Bisher hat der Partitionsbegriff rein beschreibenden Charakter. Es sieht so aus, als müsse man die Klassen bereits kennen, bevor man die Zerlegung bildet. **Wie kann man die Klassen selbst finden oder erzeugen?** Und wie erfaßt und beschreibt man die zu abstrahierende Eigenschaft? Hierzu führen wir den Begriff der Äquivalenzrelation ein. Damit ist es möglich, Partitionen zu konstruieren, ohne dass man die Klassen bereits kennt. Das entspricht dem, was man (in Alltag und Wissenschaft) tut, wenn man mit Hilfe geeigneter Eigenschaften Klassifikationen neu bildet und über die Arbeit mit den Klassen letztlich neue Begriffe (zur Charakterisierung der Klassen) abstrahiert. Zur Verdeutlichung der beiden Zugangsmöglichkeiten je ein Beispiel:

(3.4.2) Sie haben eine Menge von Büchern und Zeitschriften und wollen diese nach ihrer Sprache klassifizieren. Dann können Sie vorab eine Liste der potentiellen Sprachen erstellen, für jede einen Ablageplatz (=Klasse) bestimmen und anschließend der Reihe nach alle Bücher auf den zugehörigen Haufen legen. Das Ergebnis ist eine parametrisierte Partition mit der Sprachenmenge als Parametermenge. **Die Klassen waren vor der Bildung der Partition bekannt.**

(3.4.3) Oder aber Sie beginnen mit irgendeinem Buch, eröffnen damit eine Klasse, nehmen dann ein zweites Buch und vergleichen mit dem ersten. Falls dieselbe Sprache benutzt wird, tun Sie es zum ersten Haufen, andernfalls eröffnen Sie eine neue Klasse. Usw. Wichtig ist, dass Sie das nächste Buch nicht etwa mit allen vorher sortierten Büchern vergleichen müssen, sondern jeweils nur mit einem Buch jeder bereits vorhandenen Klasse - einem beliebigen Vertreter. Am Ende haben Sie die **gesuchte Klasseneinteilung ohne Vorkenntnis der Klassen** produziert.

(3.4.4) Das zuletzt beschriebene Verfahren werden wir unter dem Stichwort *Äquivalenzrelation* verallgemeinern und mathematisch fundieren.

(3.4.5) Jetzt zum zweiten Problemkreis: Welche Eigenschaft wird durch das System der Klassen repräsentiert?

(3.4.6) Versuchen Sie selbst für die folgende Klasseneinteilung von M={1,2,3,....,20} herauszufinden, nach welcher Eigenschaft sortiert ist:

p_0={1,2,3,5,7,11,13,17,19} $p_1 = \{9\}$
$p_2 = \{6, 8, 14, 15\}$ $p_3 = \{16\}$ $p_4 = \{12, 18, 20\}$

Die Partition von M ist also {p_0,p_1,p_2,p_3,p_4}. Ausreichend lange Inspektion und Beschäftigung müßten die Antwort offensichtlich machen. Unten werden wir sehen, wie der mathematische Formalismus neben der Klassifikation hier auch das klassifizierende Merkmal liefert.

- ☐ Auch das folgende Beispiel zeigt die Problematik: Sei M endliche Menge mit n Elementen. Weiter sei $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Partitionen von M. Entwickeln Sie eine Klasseneinteilung dieser Partitionen, derart, dass jede Klasse möglichst gleichartige, verwandte Partitionen zusammenfaßt. Man benötigt wieder eine gute klassifizierende Eigenschaft. Die Antwort ist nicht leicht (und natürlich nicht eindeutig). Wir gehen in Kap3.3 darauf ein.
- ☐ Eine (schwierige) Anschlußfrage: Wieviele Elemente enthält $\mathcal{P}(M)$, d.h. wieviele Partitionen besitzt eine n-elementige Menge?
- ☐ Seien M und N zwei endliche Mengen. Dieselben Fragen - Klassifikation und Anzahl - für die Menge aller Abbildungen M→ N.

1.3.5 Äquivalenzrelationen

(3.5.1) Zur Einführung des benötigten Formalismus holen wir etwas aus:

Definition: Sei M eine Menge.
Dann nennt man die Teilmengen von M×M *Relationen auf M.*

(3.5.2) Für f:M→M ist der Graph von f eine Relation auf M. Hat M gerade n Elemente, so gibt es 2^{n^2} verschiedene Relationen auf M. Das sind i.a. sehr viele. Zu Herkunft und Bedeutung der Bezeichnung *Relation* vgl. Kap. 1.3.10.

(3.5.3) Wir wollen untersuchen, inwieweit auch eine Partition eine Relation bestimmt. Dazu betrachten wir wieder unser Beispiel: M={1,2,3,4} und $\mathcal{P}$={{1,2},{3,4}}.

Die mit × markierten Stellen definieren in offensichtlicher Weise eine Teilmenge von M×M, also eine Relation.

M\M	1	2	3	4
1	×	×	·	·
2	×	×	·	·
3	·	·	×	×
4	·	·	×	×

Wie erhält man die Stellen mit einem × aus der Partition? Offensichtlich sind es genau die Paare (x,y)∈ M, für die x und y **in derselben Klasse liegen**. 1 und 3 etwa liegen in verschiedenen Klassen und (1,3) hat entsprechend kein ×.

(3.5.4) Sobald man sich für einige weitere Partitionen von M das entsprechende Diagramm konstruiert hat, erkennt man gewisse gemeinsame Eigenschaften. Diese Eigenschaften kann man dann zu folgender Begriffsdefinition abstrahieren:

Definition:	Sei M≠ ∅ eine Menge und R⊂ $M \times M$ eine Relation auf M. Wir schreiben xRy anstelle von (x,y)∈ R.	
Dann	heißt R eine *Äquivalenzrealtion auf M,* (genau) wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:	
(Ä.1)	aRa für alle a∈ M	(*Symmetrie)*
(Ä.2)	aRb ⟹ bRa	(*Reflexivität*)
(Ä.3)	(aRb und bRc) ⟹ aRc)	(*Transitivität*)

(3.5.5) In verbaler Formulierung: *Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf M.* Dabei bedeutet "aRb gilt", dass im Analogon zu obiger Tabelle ein × steht. "aRb gilt nicht" ergibt dagegen einen Eintrag ·.

(3.5.6) **Vorgegeben** wird eine Äquivalenzrelation meist durch eine Formulierung der folgenden Art:

M sei die Menge........ Für x,y$\in M$ gelte:	
xRy $\Longleftrightarrow$	*konkrete Beziehung zwischen x und y, die gelten kann oder auch nicht.*

Die rechte Seite muß für jedes (x,y)$\in M \times M$ eindeutig festlegen, ob ein Kreuz oder ein Punkt zu machen ist, ob also die Beziehung gilt oder nicht. Im Anschluss an eine derartige Definition ist zu prüfen, ob die drei Eigenschaften *Symmetrie, Reflexivität und Transitivität* erfüllt sind oder nicht.

(3.5.7) **Ein Beispiel:**

M sei die Menge {1,2,3,...,20}.	Für x,y$\in M$ sei definiert:
x$\sim$y $\Longleftrightarrow$ x und y haben dieselbe Zahl nichttrivivialer Teiler.	

(3.5.8) 1,2,3 und alle weiteren Primzahlen haben null nichtriviale Teiler und damit dieselbe Zahl. Es gilt daher z.B. 2$\sim$5 (Richtung $\Longleftarrow$ von $\Longleftrightarrow$ der Definition) oder 3$\sim$13, aber nicht 3$\sim$12 ($\Longrightarrow$). Die Zahl 12 hat 2,3,4,6 als nichttriviale Teiler. Sicher gilt 12$\sim$12. Sucht man weiter, so findet man 12$\sim$18 und 12$\sim$20. Beide haben auch 4 nichttriviale Teiler. Gehen wir alle Elemente von M durch und fassen wir dabei immer die Zahlen mit gleicher Anzahl nichttrivialer Teiler zusammen, so finden wir die folgende Einteilung: {1,2,3,5,7,11,13,17,19}, {9}, {6,8,10,14,15}, {16}, {12,18,20}. Das ergibt gerade die in (3.4.6) gegebene Partition von M, deren Klassifikationsmerkmal wir suchten! Die zu findende und zu abstrahierende, die Klassen erzeugende Eigenschaft ist *Gleiche Zahl nichtrivialer Teiler* ! Beachten Sie, dass in der Definition der Äquivalenzrelation weder explizit gesagt wird, wieviele Klassen es gibt, noch wie groß sie sind. **Trotzdem erhält man damit die Partition.** Man muß nur immer paarweise prüfen, ob a$\sim$b erfüllt ist oder nicht. Und Symmetrie und Transitivität stellen sicher, dass es genügt, zu jeder Klasse nur mit einem Vertreter zu vergleichen.

☐ Darf man *nichttrivial* fortlassen, also nach gleicher Teilerzahl klassifizieren?

(3.5.9) Noch ein Beispiel: Die neue Relation soll mit $\underset{k}{\equiv}$ bezeichnet werden. Dabei sei k$\in \mathbb{N}$. ($m \underset{k}{\equiv} n$ wird gelesen "m kongruent n modulo k")

Für m,n$\in \mathbb{Z}$ gelte:
$m \underset{k}{\equiv} n \iff$ Es gibt a$\in \mathbb{Z}$ mit m-n=ak .

Die Relation zwischen zwei ganzen Zahlen m und n besteht also genau dann, wenn ihre Differenz durch k teilbar ist. Differenz *linke minus rechte Seite*! Für jedes k bekommen wir eine andere Relation. Beispielsweise gilt $8 \underset{4}{\equiv} 12$ da (8-12)=(-1)4. Dagegen gilt $8 \underset{5}{\equiv} 12$ nicht, da -4 nicht durch 5 teilbar ist.

1.3.5a Der Nachweis einer Äquivalenzrelation

(3.5.10) Das erste, was nach Vorgabe einer solchen Relation (auf den Elementen von M oder wie soeben $\mathbb{Z}$) zu tun ist, ist nachzuprüfen, ob die Forderungen (Ä.l-3) aus (3.5.4) erfüllt sind oder nicht. (Im ersten Beispiel haben wir das unterlassen, aber sie gelten, wie man sich leicht überzeugt.) Beim Überprüfen ist genau darauf zu achten, welche Richtung von $\Longleftrightarrow$für die jeweilige Argumentation zu wählen ist .

Alle drei Punkte können nach der Tunnelmethode angegangen werden. Dabei liegen Anfang und Ende der Argumentation jeweils fest. Diese Teile werden wir zur Verdeutlichung unterstreichen. Die Zwischenstücke sind fallspezifisch argumentativ auszufüllen.

(3.5.11) Es liegt ein wichtiges Beispiel einer Denkfigur vor: *Nachweis einer Aquivalenzrelation.*

(3.5.12) Die konkrete Ausführung der Denkfigur für die Definition (3.5.9) sieht wie folgt aus:

$\boxed{\text{(Ä.1)}}$ <u>Sei a$\in \mathbb{Z}$ beliebig.</u> Dann gilt a-a=0k mit 0$\in \mathbb{Z}$. Anwenden der Definition ($\Longleftarrow$) liefert $a \underset{k}{\equiv} a$, also <u>die gewünschte Reflexivität</u>.

$\boxed{\text{(Ä.2)}}$ <u>Sei $a \underset{k}{\equiv} b$ für a,b$\in \mathbb{Z}$.</u> D.h. (laut Definition Richtung $\Longrightarrow$): Es gibt ein r$\in \mathbb{Z}$ mit a-b=rk gilt. Es folgt (b-a)=(-r)k. Da aber mit r$\in \mathbb{Z}$ auch (-r)$\in \mathbb{Z}$ ist, können wir mit $\Longleftarrow$ der Definition folgern, dass $b \underset{k}{\equiv} a$. <u>D.h. die Relation ist symmetrisch</u>.

$\boxed{(\text{Ä}.3)}$. <u>Sei</u> $a \underset{k}{\equiv} b$ <u>und</u> $b \underset{k}{\equiv} c$. Wegen $\Longrightarrow$ gibt es r,s$\in \mathbb{Z}$, so dass a-b=rk und b-c=sk gilt. Addition der beiden Gleichungen gibt a-c = (r+s)k. Nun ist (r+s)$\in \mathbb{Z}$. Dann gibt $\Longleftarrow$ der Definition aber $a \underset{k}{\equiv} c$ <u>Die Relation ist auch transitiv</u>.

Zusammen dürfen wir schließen: **(3.5.9) definiert eine Äqivalenzrelation!**

1.3.6 Die Beziehung zwischen Partitionen und Äquivalenzrelationen

(3.6.1) Was bedeutet es nun, wenn man sicher ist, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt? Nun wir haben bereits angedeutet und im Beispiel gesehen, dass daraus eine Partition festgelegt wird.

(3.6.2) Genauer gesagt gilt der folgende **Satz:**

Es sei	M$\neq \emptyset$ eine Menge.
a) Sei	$\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M.
Dann	gibt es eine (zugehörige) eindeutig bestimmte Partition $\mathcal{P}_\sim$ von M, deren Klassen wie folgt definiert sind: $C_x = \{y \mid y \in M \text{ und } y \sim x\}$ für x$\in M$ beliebig.
b) Sei	$\mathcal{P}$ eine Partition von M. Setze "x$\sim$y $\Longleftrightarrow$ x,y liegen in derselben Klasse von $\mathcal{P}$ ".
Dann	ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und es gilt für die nach a definierte Partition $\mathcal{P}_\sim$ von M : $\boxed{\mathcal{P}_\sim = \mathcal{P}}$.

(3.6.3) Die im Satz gegebenen Konstruktionen sollten nach dem Vohergehenden verständlich sein. Der Satz zeigt, dass Partitionen und Aquivalenzrelationen wirklich gleichwertig sind. Das übliche Vorgehen (in der mathematischen Arbeit) stützt sich auf a) aus (3.6.2). Man gibt eine Relation vor, weist nach, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt und darf automatisch folgern, dass es eine zugehörige Klasseneinteilung gibt, mit der man arbeiten kann. Wenn es nötig ist, kann man dann auch (über b)) die Klassen bestimmen und interpretieren.

(3.6.4) Der Satz ermöglicht es generell, eine Klasseneinteilung zu bilden, ohne dass man die Klassen bereits kennen muß. Die Klassen entstehen - werden abstrahiert - aus Beziehungen, die zwischen den Elementpaaren (x,y) bestehen. Den Paaren aus M$\times$M kommt im Sinne der Teilmengenbildung eine bestimmte klassenbildende Eigenschaft entweder zu oder nicht. Und über diese Eigenschaft läßt sich die zugehörige Klasseneinteilung konstruieren.

(3.6.5) Im zweiten Beispiel (3.5.9) liefert die Definition gerade k **verschiedene** Klassen:

$$\mathcal{C}_r = \{n \mid n = r + ks, s \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{r=0,1,...,k-1 freier Parameter.}$$

Die Klasse $\mathcal{C}_r$ besteht aus allen Zahlen, die bei ganzzahliger Division durch k den Divisionsrest r aufweisen. Die gegebene formale Definition gilt auch für beliebiges r$\in \mathbb{Z}$. Die Zuordnung $(\mathbb{Z}, r \mapsto \mathcal{C}_r, \mathfrak{P}(\mathbb{Z}))$ ergibt eine nicht injektive Parametrisierung. Für die angegebenen r (also r=0,l,..,k-1) wird diese Parametrisierung injektiv. Weiter ist {0,1,2,...,k-1} ein *Vertretersystem*, das man üblicherweise als solches wählt. Die *klassenbildende Eigenschaft* lautet schließlich: *Die Differenz der beiden Zahlen ist durch k teilbar.* Oder *Die beiden Zahlen haben bei Division durch k denselben Divisionsrest***.**

(3.6.6) **Ein mathematischer Satz wie (3.6.2) muß natürlich bewiesen werden**. Dieser Beweis verlangt keine zusätzlichen Ideen. Er ist weitgehend Routine, wegen der vielen zu behandelnden Details jedoch länglich. Wir lassen ihn hier aus.

(3.6.7) Stattdessen ein weiteres Beispiel: Oben in (3.3.7) haben wir mit Hilfe einer surjektiven Abbildung f:M$\to$N aus einer Partition $\mathcal{Q}$ der Wertemenge N eine solche der Urbildmenge M gemacht. **Wie sieht die zugehörige Äquivalenzrelation aus**?

$$a \sim b \iff \text{f(a) und f(b) liegen in derselben Klasse von } \mathcal{Q}.$$

Das ergibt eine Äquivalenzrelation, wie man sich sofort überzeugt. Ist insbesondere $\mathcal{Q}$ die atomare Zerlegung von N mit ihren einelementigen Klassen, dann ist die definierende Relation einfach f(a)=f(b). Ist f nicht injektiv, dann ist die erzeugte Partition der Urbildmenge M nicht atomar.

(3.3.7) ist eine Folgerung aus (3.6.2). Der gesonderte Beweis (3.3.9) ist nicht mehr erforderlich.

1.3.6a Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen

(3.6.8) Und noch ein Beispiel als kleine Fingerübung zum Umgang mit dem Formalismus: Beliebt und interessant sind Äquivalenzrelationen in Produkträumen. Nehmen wir M=$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Unsere zu klassifizierende Menge besteht also aus Paaren natürlicher Zahlen wie (2,3) oder (4,1) oder (4,4). Für diese Paare führen wir die folgende Äquivalenzrelation ein:

$$(n, m) \sim (p, q) \iff \text{n+q=p+m} \qquad \text{für m,n,p,q} \in \mathbb{N}.$$

(3.6.9) Routinemäßig verifiziert man, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt. Dann geht es an die Konstruktion der Klassen. Da M eine Produktmenge ist, benutzt man günstig das übliche Matrixschema zur Veranschaulichung. Zwei Beispiele entstehender Klassen: {(1,0),(2,1),(3,2),.....} und {(0,4),(1,5),(2,6.),.....}. Allgemein:

m \ n	0	1	2	3	4	
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	...
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	
4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	
5	....					

(m,n) gehört zur Gleichung m+x=n.
Die Klassen sind Mengen gleicher Lösungen!
Die horizontal beginnendnen Klassen haben die Lösung x=n-m$\in \mathbb{N}$, sind in $\mathbb{N}$ lösbar.
Die vertikal beginnenden Klassen gehören zu in $\mathbb{N}$ unlösbaren Gleichungen wie x+2=1.

(3.6.10) Was ist die vereinigende inhaltliche Eigenschaft dieser Klassen? Offenbar die Differenz n-m. Sie ist innerhalb jeder Klasse konstant, kann als Index für die Klassen benutzt werden. Welche Werte durchläuft dieser Index? Er durchläuft ganz $\mathbb{Z}$. Und das ist bei genauerem Nachdenken eine Sensation! Hineingesteckt haben wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Damit haben wir die Klassen gebildet. Und diese Klassen übernehmen die Rolle der ganzen Zahlen, auch der negativen. Die in der Figur vertikal beginnenden Klassen gehören zu Gleichungen m+x=n. die in $\mathbb{N}$ **formulierbar, aber unlösbar** sind, wie 4+x=1. Sie haben eine negative Zahl als Lösung. Führt man die Analyse der Klassen genau durch, so gelangt man auf diese Weise von den natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen. Oder auch: **Man hat mit Hilfe der natürlichen Zahlen die ganzen Zahlen erschaffen**! So ist (5,1) ein Vertreter einer Klasse, die als negative Zahl -4 abstrahiert wird. (Lösung der Gleichung x+5=1.)

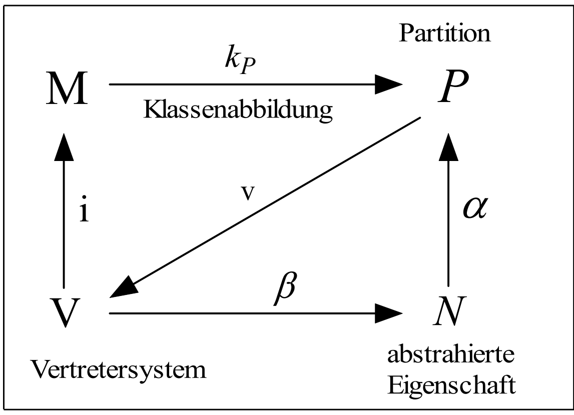
(3.6.11) Zusammenfassung: Man beginnt mit einer Äquivalenzrelation, bei der immer nur Individuen paarweise miteinander verglichen werden (Im Beispiel: "m+x= n und p+x=q haben dieselbe Lösung".). Ist man sicher, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt (Nachweis!), entsteht eine Partition (Im Beispiel: Klassen von Gleichungen a+x=b mit gleicher Lösung). Über Inspektion der Relation bzw. durch ausreichend lange Arbeit mit diesen Klassen abstrahiert man den durch sie repräsentierten Begriff (im Beispiel den der *ganzen Zahl*) und führt für jede Klasse eine eigene Bezeichnung ein. Das gibt eine neue Parametermenge $\mathcal{N}$, deren Elemente die möglichen Werte der abstrahierten Eigenschaft benennen. Schließlich hat man die bijektive Parametrisierung $\mathcal{N} \to \mathcal{P}$, mit deren Hilfe man die Klassen und ihre abstrahierten Bezeichnungen bei Bedarf identifizieren kann. Im Beispiel ist $\mathcal{N} = \mathbb{Z}$.

☐ Entwickeln Sie eine Idee, wie man jetzt analog die rationalen Zahlen aus den ganzen erschaffen kann!
☐ Wie steht es mit der Addition der ganzen Zahlen. Überelgen Sie sich ein Programm dafür, was mathematisch auszuführen ist.

Beachten Sie: Die Menschheit brauchte einige Jahrtausende, um das zu klären, was uns soeben als kleine Fingerübung für den Umgang mit Äquivalenzrelationen begegnete.

1.3.7 Übersicht über den Formalismus

(3.7.1) Inzwischen dürften viele Leser ob der Vielzahl der eingeführten Abbildungen ein gewisses (durchaus gesundes) Unbehagen verspüren. Um an einer solche Stelle wieder Übersicht zu erhalten, sollte man den Automatenstandpunkt der Abbildungsveranschaulichung einnehmen, also alle Mengen und vermittelnde Abbildungen in ein Diagramm eintragen. Das zu tun. sollte man sich angewöhnen!



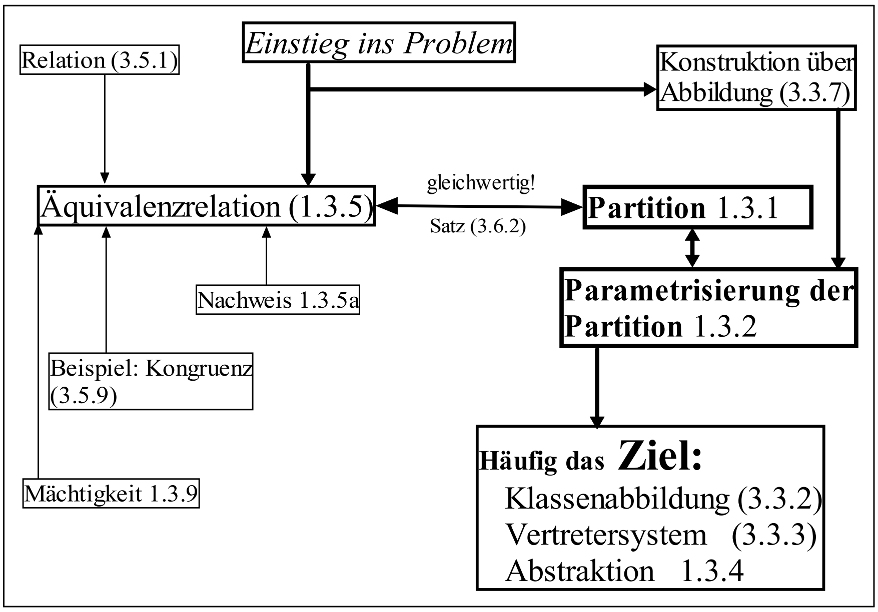
k_p die Klassenabbildung
v die Vertreterabbildung
V Vertretersystem
N Abstrahierte Eigenschaft
i Injektion der Vertreter in M

$\beta : V \to N$ ordnet jedem Vertreter seinen Eigenschaftswert zu und $\alpha : N \to P$ ordnet dem Eigenschaftswert die Klasse aller Objekte zu, die gerade diesen Wert haben. (Wir unterscheiden: Die abstrahierte Eigenschaft und die einzelnen Werte, die diese Eigenschaft annehmen kann. So wie wir den Begriff *Länge* haben und davon die *möglichen Längenwerte* einzelner Objekte trennen.)

Die beiden Abbildungen v und β sind beide bijektiv. Man hat: $\alpha \circ \beta = v^{-1}$.

(3.7.2) Der üblichen Angabe einer abstrahierten Eigenschaft ("John hat rote Haare" , d.h. John$\in M$, "rote Haare"$\in N$) entspricht jetzt die Abbildung $\alpha^{-1} \circ k_P$. D.h.: John gehört hinsichtlich des Haarfarbevergleichs einer Klasse an, die den Gebrauchsnamen "rot"$\in N$ erhält. Das Diagramm hilft einem, derartige Zusammenhänge zu überschauen.

(3.7.3) Jetzt fassen wir den eingeführten Begriffsapparat auf etwas andere Weise zusammen. Diese Zusammenfassung entspricht vielfach dem gedanklichen Ablauf, der auftritt, wenn man den Begriffsapperat zur Problemlösung verwendet. Der Verlauf ist andererseits ziemlich parallel zu unserer bisherigen Darstellung. Schließlich bildet er ein erstes gutes Beispiel dafür, wie man mit mathematischen Methoden komplexe Situationen erfasst.



(3.7.4) **Der übliche Weg zusammengefasst**: Man beginnt mit einer Relation, die sich als Idee oder Stichwort aus der Problemsituation ergibt. Hat man nachgewiesen, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt, wendet man das allgemeine Resultat (3.6.2) an. Der Übergang zur Partition ist dann nicht mehr gesondert zu beweisen. Auch die Klassenabbildung liegt fest. Die beiden weiteren Teile - die Konstruktion eines Vertretetsystems und die Eigenschaftsabstraktion - müssen dagegen noch für den jeweiligen Fall ausgeführt werden. Alternativ kann man mit einer Anwendung des Satzes (3.3.7) beginnen, die einen sofort zu der klassifizierenden Partition führt.

☐ Es sei M eine Menge von Atomen, möglichst in Richtung "Menge aller Atome". Dann liefern die Stichworte "Element" und "Isotop" je eine Partition von M. Wie sehen die zugehörigen Äquivalenzrelationen aus?

☐ Ein Beispiel einer Partition mit geometrischer Bedeutung: Gegeben die Ebene V_0^2 und zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ daraus, die nicht auf einer Geraden liegen sollen. Ergänzen Sie die beiden geometrischen Pfeile zu einem Parallogramm und verlängern Sie alle 4 Seiten dieses Parallelogrammes. Das ergibt in naheliegender Weise eine Partition der Menge aller Punkte der Ebene (mit einigen kleinen Nichteindeutigkeiten). Beschreiben Sie diese Partition. Denken Sie sich dann alle Vektoren aus V_0^2 in der Form $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ dargestellt. Betrachten Sie die durch $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \mapsto (\alpha, \beta)$ festgelegte Abbildung. Welche Anwendung von (3.3.7) liegt nahe?

Bisher haben wir vornehmlich den Formalismus, die mengentheoretische Symbolsrache, eingeführt. Der Rest dieses Kapitels soll diese Grundlage etwas konsolidieren. In 1.3.9 geben wir eine anspruchsvolle und interessante Anwendung: Wir klären den Begriff der ***unendlichen Anzahl.*** *In 1.3.11 und 1.3.12 folgen zwei weitere grundlegende Anwendungen. In 1.3.10 gehen wir auf die uns sehr wichtige Verbindung von alltäglichem Denken und Sprechen und unserer Symbolsprache am Beispiel des Relationsbegriffes ein.*

1.3.8 Erholungspause: **Ein Beispiel für den Formalismus.**

(3.8.1) Beim Einarbeiten in Formalismen wie dem eingeführten ist das Durchgehen eines konkreten Falles nützlich. Man sollte es sich angewöhnen, das eigenständig parallel zur Bearbeitung des abstrakten mathematischen Textes zu tun. Hier stellen wir ein solches Konkretisieren durch Weiterführung eines früheren Beispiels vor. Im Gegensatz zum Urnenbeispiel 1.3.3a ist das eine Konkretisierung ohne Inhaltsbezug, rein mengentheoretisch.

(3.8.2) Als Menge wählen wir M={1,2,3,4}. Also ein vierelementiges M. Dann hat $\mathfrak{P}(M)$ gerade 2^4= 16 Elemente. Welche Partitionen kann man bilden? Wir organisieren - klassifizieren - die Partitionen von M nach *Anzahl der Klassen je Partition* wie folgt:

P={{1234}} $= \{M\}$ mit {1234} statt $\{1,2,3,4\}$.	Eine Klasse
$Q_1 = \{\{1\},\{234\}\}$, $Q_2 = \{\{2\},\{134\}\}$, $Q_3 = \{\{3\},\{124\}\}$, $Q_4 = \{\{4\},\{123\}\}$ $Q_1' = \{\{12\},\{34\}\}$, $Q_2' = \{\{13\},\{24\}\}$ $Q_1' = \{\{14\},\{23\}\}$	Zwei Klassen
R_1={{1},{2},{34}}, R_2={{1} {3} {24}}, R_3={{1} {4} {23}} R_4={{2},{3},{14}}, R_5={{2} {4} {13}}, R_6={{3} {4} {12}}	Drei Klassen
A={{1},{2},{3},{4}}	Vier Klassen

(3.8.3) Man überzeugt sich leicht durch Inspektion, dass etwa durch die 6 Klassen R_i **alle** dreielementigen Partitionen erfasst werden! Dort, wo in einer Menge Elemente vertauschbar sind, wählen wir die Reihenfolge alphabetisch. Wir sehen, dass es insgesamt 15 Partitionen von $\{1,2,3,4\}$ gibt. Da die Menge $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\{1,2,3,4\}))$ insgesamt 2^{16}=65536 Elemente enthält, kann man die Partitionen als recht selten bezeichnen.

(3.8.4) Jede dieser Partitionen läßt sich aber auch als Relation, also als Teilmenge von M×M darstellen. Bei vier Elementen hat $\mathfrak{P}(M \times M)$ zufälligerweise auch 2^{16} Elemente.

Wie stellen wir Teilmengen von M×M, also Relationen, dar? Wir bilden das Matrixschema für M×M und tragen (anstelle von $*$ und $\cdot$) eine 1 ein, wenn das zugehörige Element in der Teilmenge liegt, eine 0, falls nicht. Nehmen wir R_1. Dann liegen 3 und 4 in derselben Klasse, also kommt eine 1 an die Stelle (3,4). Dagegen liegen 1 und 2 in verschiedenen Klassen, also kommt eine 0 an die Stelle (1,2). Einige sich so ergebende Beispiele:

Q_1	1	2	3	4
1	1	o	o	o
2	o	1	1	1
3	o	1	1	1
4	o	1	1	1

R_1	1	2	3	4
1	1	o	o	o
2	o	1	o	o
3	o	o	1	1
4	o	o	1	1

P	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1

(3.8.5) Das sollte ausreichen, um zu zeigen, wie die zugehörigen Aquivalenzrelationen aussehen und wie man sie darstellt.

(3.8.6) Kann man die Relation, die jeweils die Klassen produziert, auch noch inhaltlich beschreiben? Nehmen wir als Beispiel $Q_1 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$. Eine zugehörige Relation kann wie folgt festgelegt werden :

$$\text{Für a,b} \in M \qquad a{\sim}b \iff (a,b \le 2 \quad \text{oder } a,b \ge 2).$$

Das produziert genau die richtigen Klassen

Wie sieht hier die **Klassenabbildung** k_{Q_1}:M→ $\mathfrak{P}(M)$ aus? Offensichtlich ist $k_{Q_1}(1)=k_{Q_1}(2)=\{1,2\}$ und $k_{Q_1}(3)=k_{Q_1}(4)=\{3,4\}$. Ein mögliches **Vertretersystem** ist $V=\{1,3\}$.

(3.8.7) Schließlich kann man in der Hierarchie noch einen Schritt höher gehen und Mengcn von Partitionen bilden. Etwa die Menge $\mathfrak{Q}_2$ aller Partitionen von M mit genau 2 Elementen. Nach unserer Liste gilt

$$\mathfrak{Q}_2 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q'_1, Q'_2, Q'_3\} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M)))$$

Natürlich sollte man das nicht ausschreiben!

Wie kommt die Mengenangabe zustande? Es liegt eine Menge von Elementen aus $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ vor, also ein Element der zugehörigen Potenzmenge. Ebenso könnte man die Menge aller Partitionen von M bilden, die nach obiger Liste ja 15 Elemente enthält. Die auftretende Menge $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M)))$ ist schon recht groß. Sie enthält $2^{65536} \approx 10^{20000}$ Elemente. Das sind weitaus mehr Elemente, als es Atome im Universum gibt, was erneut zeigt, dass sich die Mathematik in gewisser Weise mit sehr seltenen Objekten beschäftigt.

In obiger Aufzählung haben wir bereits eine strukturgerechte Partition der Partitionsmenge selbst angedeutet. (Klassifikation der Partitionen). Vgl. die Frage nach (3.4.6). In Kapitel 3.3.4a werden wir diese Frage allgemein behandeln und eine allgemeine Klassifikation geben.

1.3.9 Ein kleiner Ausflug in die Mengenlehre. **Der Mächtigkeitsbegriff.**

1.3.9a Die Äquivalenzrelation gleichmächtig.

> (3.9.1) Sei jetzt $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen. Für gewisse dieser Mengen bietet die **Anzahl ihrer Elemente** ein wichtiges Merkmal. Die Aussage "M∈ $\mathcal{M}$ hat 13 Elemente" ist offensichtlich eine bedeutsame Information über die Menge M. Aber wie steht es mit Mengen, die man üblicherweise als *nicht endlich* bezeichnen würde. Was bedeutet *unendlich* hier überhaupt? Gibt es verschiedene Arten unendlicher Anzahlen oder nicht? Usw.

Zunächst: **Offenbar gehört zum Anzahlbegriff stets eine Klasseneinteilung von** $\mathcal{M}$. Klassen mit Mengen gleicher Elementzahl!.

(3.9.2) Die Menge $\mathcal{M}$ sollte in Klassen von Mengen zerfallen mit gleicher Anzahl (von Elementen). Dem Anzahlbegriff würde eine Abbildung $\#:\mathcal{M} \to \mathcal{A}$ vom Maßtyp (Kap. 1.2.6k) entsprechen, wobei $\mathcal{A}$ die Menge möglicher auftretender Anzahlen ist. Diese Anzahlen sind nach unserem Konzept aus den Klassen zu abstrahieren. Zunächst gibt es Klassen mit den uns vertrauten Anzahlen. Jede wird durch eine natürliche Zahl n∈ ℕ beschrieben. Etwa die Klasse aller M∈ $\mathcal{M}$ mit 13 Elementen. Die Frage ist: Gibt es weitere Klassen, wie finden wir sie, wie können wir mit ihnen vertraut werden? Formal: Was sollte $\mathcal{A}$ außer ℕ noch enthalten? Die übliche Erfahrung gibt uns hierauf keine Antwort außer dem vagen Stichwort *unendlich.*

(3.9.3) Im Falle von ℕ ist man bereits dazu übergegangen, Bezeichnung und Klasse zu identifizieren. D.h. man wird eine Aussage des Typs "M gehört zur Klasse, die u.a. die Menge {a,b,c,d,e,f,g} enthält", ersetzen durch Aussage "die Anzahl von M ist 7" , kurz #(M)=7.

(3.9.4) **Um das gestellte Problem zu lösen, benötigen wir nach unserer Konzeption eine Äquivalenzrelation, die uns die gesuchte Klasseneinteilung und damit alles weitere liefert.** Denn damit können wir ja die Einteilung bilden, ohne die Klassen vorher zu kennen! Genauer benötigen wir eine *Beziehung (Relation) zwischen zwei beliebigen Mengen*, die darüber entscheidet, ob die beiden Mengen gleichviele Elemente haben oder nicht.

(3.9.5) Für **endliche Mengen** findet man eine solche Beziehung leicht, eine Beziehung, die überdies ganz und gar unsere operativen Erfahrungen mit dem Zählen wiedergibt:

$$\boxed{M{\sim}N \iff \text{Es gibt (mindestens eine) bijektive Abbildung } \beta\text{:M}\to\text{N.}}$$

Das ist eine Äquivalenzrelation, da id_M und β^{-1} beide bijektiv sind. Und mit β und γ ist auch $\beta \circ \gamma$ bijektiv. Zusammen sichert das Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

(3.9.6) **Nun ist es naheliegend, diese Relation auch für nicht endliche Mengen als Kriterium für "gleiche Anzahl" zu nehmen.** (Unsere erste und entscheidende Idee!)

(3.9.7) Das tun wir. D.h. wir befinden uns am Ausgangspunkt von (3.7.3) mit einer vorgegebenen Äquivalenzrelation. Was ergibt die weitere Analyse? Zunächst können wir wegen Satz (3.6.2) sicher sein, dass eine konsistente Klasseneinteilung herauszukommt, auch für große unendliche Mengen, für die wir noch keinerlei Vorerfahrung haben. Diese Erfahrung können wir uns jetzt über mathematische Arbeit verschaffen.

(3.9.8) Die eingeführte Äquivalenzrelation bezeichnet man als *Gleichmächtigkeit (von Mengen).* Nochmals: **M und N sind definitionsgemäß gleichmächtig, genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung M→N gibt**.

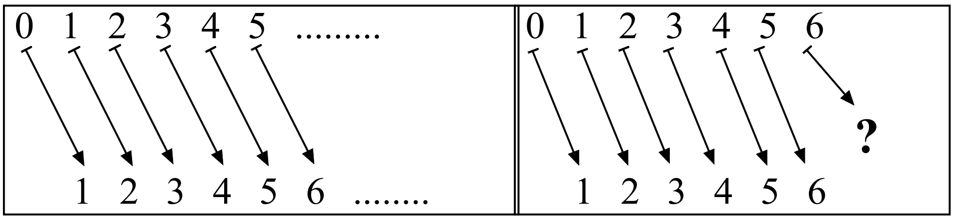
1.3.9b Endliche und unendliche Mengen

(3.9.9) Bemerkenswerterweise können wir als erstes genauer klären, woran endliche und damit auch unendliche Mengen erkennbar sind.

(3.9.10) Endliche Mengen haben nämlich die folgende Eigenschaft:

> Nimmt man aus einer endlichen Menge (mindestens) ein Element fort,
> so ändert sich die Mächtigkeitsklasse.
> Oder: Es ist bei einer endlichen Menge nicht möglich, eine bijektive Abbildung zwischen der Menge und einer echten Teilmenge zu konstruieren.

(3.9.11) Ganz anders steht es mit den Mengen, die man üblicherweise als unendlich charakterisiert. Nehmen wir etwa $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}-\{0\}$. Die Abbildung $(\mathbb{N}, n \mapsto n+1, \mathbb{N}-\{0\})$ ist offensichtlich bijektiv. Und es ist eine Abbildung zwischen der Menge und einer echten Teilmenge. Eine Skizze vom Zuordnungstyp verdeutlicht das, verdeutlicht auch, wieso Entsprechendes bei endlichen, also "rechts" abbrechenden Mengen nicht funktioniert.



☐ Was halten Sie von der folgenden Aussage: "M und N seien zwei Mengen. M hat eine echt geringere Anzahl von Elementen als N, wenn es eine injektive, aber nicht surjektive Abbildung M→ N gibt."

(3.9.12) Man abstrahiert die folgende

> **Definition**: Eine *unendliche Menge* ist eine Menge, die gleichmächtig ist zu einer echten Teilmenge von sich selbst ist.

(3.9.13) Damit entstehen zwei zu klärende Fragen:

- a) Fallen alle endlichen Mengen in eine der durch $\mathbb{N}$ bestimmten Mächtigkeitsklassen?
- b) Was für Mächtigkeitsklassen gibt es im Bereich der unendlichen Mengen? Nur eine oder mehrere?

  Zu b) lautet die Antwort: **Viele. Insbesondere haben die beiden uns vertrautesten unendlichen Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ unterschiedliche Mächtigkeit.**

(3.9.14) Bemerkenswert ist, dass wir mit diesen beiden Fragen den Bereich der *naiven Mengenlehre*, die wir einleitend als ideale Symbolsprache charakterisierten, verlassen und zu den Resultaten der im mathematischen Sinne eigentlichen Mengenlehre übergehen müssen. Was die zugehörigen Beweise und Argumentationen angeht, so bedeutet das einen riesigen Sprung in der Komplexität, so als käme man aus der Technik des

Mittelalters plötzlich in den Bereich der heutigen Hochtechnologie. Wir können daher hier auch nur einige wenige Resultate skizzieren, die in geistig philosophischer Hinsicht jedoch enorme Tragweite haben.

(3.9.15) Beginnen wir mit der ersten **Frage nach allen endlichen Mengen.** Über das Prinzip der vollständigen Induktion findet man zunächst, dass jede Menge, die zu einem Anfangsstück von $\mathbb{N}$ (also einer Menge der Form {0,1,2,...,n-1} mit n$\in \mathbb{N}$) gleichmächtig ist, auch in dem obigen Sinne endlich ist, dass sie keine Bijektion auf eine echte Teilmenge erlaubt. Jetzt schliest sich die Frage an: Gibt es eventuell noch weitere nach (3.7.12) nicht unendliche Mengen? Also mit der Eigenschaft, dass sie zu keiner echten Teilmenge von sich selbst gleichmächtig sind?

1.3.9c Denkbar und tatsächlich.

Zur Behandlung dieser Frage müssen wir weit ausholen. Im Bereich des philosophischen Denkens gab es bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts eine ausgeprägte Grundvorstellung, die wir als "Eine-denkbare-Welt-Konzeption" bezeichnen wollen. Man stellte sich vor, dass es möglich sein müsse, die gesamte reale Welt irgendwie durch reines Denken zu verstehen und nachzuvollziehen. D.h. aber, dass es nur eine einzige konsistent denkbare Welt geben und dass diese dann natürlich gleich der tatsächlichen sein müsse. Also "denkbar= tatsächlich". Man konnte, besser wollte sich einfach nicht vorstellen, dass es etwas gäbe, was man nicht durch reines Denken herausbekommen könne.

Die Erfahrungen, die die Mathematik des 19. Jahrhunderts bei der Analyse des Parallelenaxioms von Euklid machte, zwangen dazu, dies Konzept aufzugeben: Man versuchte nachzuweisen, dass nur eine geometrische Struktur unserer Welt möglich, also konsistent denkbar sei. Hierzu benötigte man insbesondere die Aussage, dass es zu einem Punkt und einer Geraden im Raum immer genau eine parallele Gerade gibt, die durch den gegebenen Punkt geht. Das ist ein Sachverhalt, der im Rahmen unserer physikalisch-geometrischen Alltagserfahrung völlig evident erscheint.

Nach jahrhundertelangen Bemühungen fand die Mathematik aber heraus, dass es mehrere vom reinen Denken her völlig gleichwertige geometrische Welten (Modelle) gibt, die sich hinsichtlich der Anzahl der möglichen Parallelen unterschiedlich verhalten: Keine, genau eine oder viele Parallelen. Welche Geometrie dann in der tatsächlichen Welt vorliegt, läßt sich vermutlich nicht ausschließlich durch denkerische Spekulation, sondern nur durch experimentelle Analyse herausfinden. Also:

"Konsistent denkbar" muß keineswegs gleich "tatsächlich" sein!

(3.9.16) Was ist der tiefere Grund dieser Diskrepanz? Will man die denkbaren Welten analysieren, dann ist man immer gezwungen, über den Bereich der unmittelbaren Erfahrungswelt hinauszugehen. Im Falle der Geometrie über die unmittelbaren geometrischen Erfahrungen und allgemeiner hinsichtlich der Zahl der beteiligten Operationen.

Alle unsere Erfahrung basiert immer auf endlich vielen meist noch ungenauen Operationen. Was aber geschieht, wenn man diese Einschränkung fallen läßt? Gibt es dann nur eine Möglichkeit der Extrapolation, wie es unsere Vorstellung es uns gerne vorgaukelt oder sind mehrere möglich?

1.3.9d Das Auswahlaxiom

(3.9.17) Im Bereich der Mengenlehre bildet das Auswahlaxiom das Paradebeispiel der skizzierten Problematik. Es geht um das Problem der Rechtfertigung der folgenden Grundannahme:

Das Auswahlaxiom:
Sei $\mathcal{M}$ eine nicht leere Menge von nicht leeren Mengen.
Dann gibt es eine zweite Menge $\mathcal{V}$, die ein Vertretersystem für $\mathcal{M}$ bildet. D.h. für jedes M$\in \mathcal{M}$ gibt es genau ein a=a(M) mit a$\in \mathcal{V}$.
Oder auch: Es gibt eine Abbildung a=$(\mathcal{M}, M \mapsto a(M), \mathcal{V})$ mit der Eigenschaft a(M)$\in M$ für alle M$\in \mathcal{M}$.

(3.9.18) Unsere Erfahrung bezieht sich auf den Umgang mit kleinen endlichen Mengen. Und für diesen Bereich ist die Aussage des Axioms immer wieder bestätigt worden. Man geht die Mengen nacheinander durch, wählt aus jeder Menge genau ein Element aus, sammelt diese Vertreter sukzessive ein, vereinigt sie zu einer neuen Menge und fertig.

(3.9.19) Aber darf man diese Erfahrungen auf große, unendliche Systeme von Mengen ausdehnen, für die wir keinerlei operative Erfahrung haben? Wie soll dort das Auswählen, Einsammeln und Vereinigen stattfinden? Man hat versucht diese Möglichkeit, also das Auswahlaxiom, zu beweisen, aber das ist nicht gelungen. Das Ergebnis ist vielmehr: Man kann obiges Axiom fordern oder auch nicht. Und beide Möglichkeiten liefern konsistente Welten mit recht unterschiedlichen Eigenschaften.

Weiter kam bei diesen Beweisversuchen heraus: Es gibt eine Vielzahl zum Auswahlaxiom gleichwertiger aber völlig anders aussehender Aussagen. Gilt die eine, so auch alle anderen.

(3.9.20) Für unsere **Suche nach allen endlichen Mengen** folgt: Nur wenn man das Auswahlaxiom fordert, kann man ausschließen, dass alle im Sinne von (3.9.10) nicht unendlichen Mengen bereits durch die Anfangsstücke von $\mathbb{N}$ erfaßt werden, also gleichmächtig zu einer Menge der Form {0,1,...,n-1} sind.

Man kann auf folgende Weise sehen, dass man wirklich an ein unendliches Auswahlproblem gerät:

> Nehmen wir eine im Sinne von (3.9.10) **endliche** Menge A, die zu keiner der Mengen $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0,1\}$, ... , $\{0,1,2,...,n\}$,...... mit $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig ist. Dann können wir eine Injektion f:$\mathbb{N} \to A$ bilden, falls wir folgende unendliche Reihe von Operationen ausführen dürfen: Zunächst wähle $a_0 \in A$ und setzen f(0)=a_0. Dann wähle $a_1 \in A$, $a_1 \neq a_0$ und setze f(l)=a_1. Und so immer fort. Jeder einzelne Schritt ist zu machen: Für $a_0, a_1,...,a_n \in A$ gibt es stets ein "neues" weiteres Element a_{n+1}, da A sonst zu {0,...,n} gleichmächtig wäre. **Das Problem besteht einzig darin, all diese neuen Elemente simultan eindeutig auszuwählen.**

(3.9.21) Haben wir erst einmal f wie beschrieben, so können wir sofort folgende Bijektion g von A auf A-$\{a_0\}$ bilden: Setze g(f(i))=f(i+l), i$\in \mathbb{N}$, und setze g(a)=a für a$\notin$Bildf. **Und damit wären A und A-$\{a_0\}$ gleichmächtig und A entgegen der Annahme doch unendlich.**

Und das bedeutet insgesamt, dass alle endlichen Mengen, in die durch die Anfänge von $\mathbb{N}$ bestimmten Mächtigkeitsklassen fallen. Vgl. mit (3.9.11).

(3.9.22) Läßt man das Auswahlaxiom dagegen **nicht** zu, so gibt es Modelle der Mengenlehre mit folgender Eigenschaft: $\mathbb{N}$ enthält dann Teilmengen, die einerseits endlich sind, also nicht gleichmächtig zu einer echten Teilmenge, die aber andererseits nicht gleichmächtig sind zu einem der Anfänge von $\mathbb{N}$, also einer der üblichen natürlichen Zahlen! Kurz: Es gibt endliche Mengen, die sich nicht durch eine Anzahl aus $\mathbb{N}$ beschreiben lassen.

1.3.9e Unterschiedliche unendliche Anzahlen.

> *Wie steht es mit der zweiten Frage, ob es **verschiedene** Mächtigkeitsklassen für unendliche Mengen gibt? Diese Frage läßt sich bereits im Bereich der elementaren Mengenlehre beantworten: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind beides unendliche Mengen, aber sie sind nicht gleichmächtig.*

(3.9.23) Der Beweis läuft unter dem Namen *Cantorsches Diagonalverfahren.* Cantor war der Begründer der Symbolsprache der Mengenlehre und initiierte durch seine Arbeit Anfang des 20. Jahrhunderts auch die weitergehenden Untersuchungen.

(3.9.24) Der **Beweis** (von "$\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht gleichmächtig") verläuft indirekt. Es lohnt sich, diesen Beweis unter dem Gesichtspunkt anzuschauen, wie eine derartige auf der Annahme des Gegenteiles basierende mathematische Argumentation zwangsläufig zu einem bestimmten unumgehbaren Ergebnis führt. Hinzu kommt, dass man für ein solches Resultat eine gute - hier recht einfache - Idee benötigt.

> ♦ Angenommen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ wären gleichmächtig. Dann muß es eine bijektive Abbildung $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ geben. Demnach ist β surjektiv und jede reelle Zahl muss in Bild(β) liegen. Andererseits ist β nach unserer Typisierung der Abbildungen eine Folge. Wir setzen b_n =β(n) und dann ist Bild(ß)=$\{b_0,b_1,b_2,....\}$. Diese Folge muß also **alle** reellen Zahlen enthalten.
>
> Konstruiert man jetzt andererseits eine reelle Zahl c, die nicht in dieser Folge vorkommt, ist man fertig: Denn dann wäre β einerseits surjektiv, andererseits aber nicht. Eine solche Zahl c läßt sich wie folgt konstruieren:
>
> ♦ Jede reelle Zahl, insbesondere β(n)=b_n, läßt sich als unendlicher Dezimalbruch schreiben. Bei abbrechenden Brüchen verwenden wir die Neunerfolgenform. Für 1 etwa schreiben wir 0.999999... Wir wissen: Wenn zwei derart geschriebene Zahlern sich in mindestens einer Dezimalstelle unterscheiden, sind sie voneinander verschieden.

♦ Jetzt konstruieren wir c wie folgt durch Angabe ihrer Dezimalbruchdarstellung: c=0,$y_0 y_1 y_2 y_3$...... . Dabei soll y_i eine Ziffer (von 1 bis 9) sein, die ungleich z_i sein soll, wobei z_i die (i+1)-te Nachkommaziffer der Dezimalbruchentwicklung von b_i sein soll. **Das ist das** *Diagonalverfahren!* Dann ist c eine Zahl aus $\mathbb{R}$ und sie kommt in der Folge b nicht vor. Denn sie unterscheidet sich von jedem Folgenglied in wenigsten einer Nachkommastelle! Und sie ist auch kein abbrechender Dezimalbruch, da $y_i = 0$ nicht zulässig. Ein illustrierendes Beispiel:

$b_0 =$	0.**3**79999.....	Die Diagonalstellen sind fett geschrieben
$b_1 =$	12.4**3**257.....	Wir wählen beispielsweise
$b_2 =$	0.00**0**123...	$y_0 = 2 \neq 3$, $y_1 \neq 2 \neq 3$, $y_3 = 1 \neq 0$
$b_3 =$	3.313**1**31...	usw. Das gibt c=0.2212.......
.....	usw.	Also c$\neq b_0, b_1, b_2, b_3, ...$

(3.9.25) Also haben $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ tatsächlich unterschiedliche Mächtigkeit. Man kann die Idee des Diagonalverfahrens benutzen, um allgemeiner zu zeigen, dass **für jede unendliche Menge die zugehörige Potenzmenge eine andere Mächtigkeit hat**. Auf diese Weise erhält man immer neue Mengen mit immer größerer unendlicher Mächtigkeit.

☐ Machen Sie sich Gedanken darüber, wie man im unendlichen Fall "größere Mächtigkeit" präzisieren bzw. definieren wird.

(3.9.28) Damit haben wir für unsere Anzahlmenge zwei weitere Elemente, nämlich #($\mathbb{N}$) und #($\mathbb{R}$). Für beide gibt es eine größere Zahl historisch entstandener Bezeichnungen. Wir sagen meist *Mächtigkeit von* $\mathbb{N}$ *bzw. von* $\mathbb{R}$. Alternativ für "Mächtigkeit von $\mathbb{N}$" sagt man "abzählbar unendlich". Und unendliche Mengen mit größerer Mächtigkeit nennt man "überabzählbar".

(3.9.27) Eine weitere Frage liegt jetzt nahe: Gibt es zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ noch andere Klassen unendlicher Mengen? Genauer, kann man eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ finden, die weder zu $\mathbb{R}$ noch zu $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist? Das ist das sog. *Kontinuumsproblem.* Seine Behandlung erwies sich als unerhört schwierig. Erst 1966 kam heraus, dass auch hier sehr verschiedene Welten (Zahlenwelten) konsistent denkbar sind: In einer dieser Welten gibt es keine weitere Mächtigkeit zwischen der von $\mathbb{N}$ und der von $\mathbb{R}$, in einer anderen deren unendlich viele. (Dies Resultat gilt, obwohl für beide Welten das Auswahlaxiom zugelassen wird). Es ist gegenwärtig nicht absehbar, ob es jemals Argumente dafür geben wird, die eine dieser Welten hinsichtlich unserer realen Welt vor der anderen auszeichnen. Allerdings hat die erstgenannte Welt (ohne Mächtigkeiten "dazwischen") den Vorzug, gewisse theoretische Vereinfachungen mit sich zu bringen. Ebenso ist die Welt mit Auswahlaxiom mathematisch viel besser handhabbar als die ohne.

1.3.9f Formal zulässige Mengenbildungen

Ja, das Problem *denkbar- tatsächlich* stellt sich für diese Zahlwelten noch radikaler: Man hat praktisch keine Chance, die Konsistenz auch nur einer der besagten Mengenwelten zu beweisen. Bewiesen hat man vielmehr: **Wenn eine einzige von ihnen konsistent ist, dann sind es auch die anderen**. Aber es ist beruhigend, zu wissen, dass eine immer ausgefeiltere Mathematik mit diesen Begriffssystemen außerordentlich erfolgreich gearbeitet hat, fruchtbar und ohne Widersprüche.

(3.9.28) Insofern kann man das ursprüngliche Grundlagenproblem der Mathematik als in praktischer Hinsicht gelöst betrachten. Dies Problem erwuchs aus der naiven Mengenrehre durch die Frage nach zulässigen Mengenbildungen, so wie wir sie *naiv* in Kap.1.1.1 benutzt haben und beschwor zu Beginn des 20. Jahrhunderts eine schwere Grundlagenkrise der Mathematik herauf: Das gesamte System der (naiven) Mengenlehre, Cantors schöne Grundidee, erschien plötzlich widersprüchlich, problematisch und damit für die Mathematik unbrauchbar.

(3.9.29) Man sieht den Grund dieser Krise schnell ein etwa über **Russells Paradox:**

Es sei N "die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten". In der üblichen Formalschreibweise: N={A|A ist Menge, A∉A}. Das klingt nach einer sinnvollen Bildung. Wie steht es nun mit N selbst? N ist Menge. Gilt N∉N, dann erfüllt N die definierende Bedingung für N - enthält sich nicht selbst als Element - und es müßte N∈N sein. Ist umgekehrt N∈N , dann besagt die definierende Eigenschaft dieser Menge - also die Explikation - N∉N.

Das sind offensichtliche Inkonsistenzen, **diese** Mengenbildung ist unsinnig. Und damit steht zu fürchten, dass auch weitere, wenn nicht alle derartige Bildungen unsinnig sind.

(3.9.30) Die tiefergehende Analyse hat jedoch gezeigt:

Solche "Mengen" muß man in der Mathematik und ihren Anwendungen gar nicht bilden. Es genügen vielmehr als wirklich "gewagte" Mengenbildungen:

- Eine unendliche Menge $\mathbb{N}$,
- zu jeder Menge die Potenzmenge,
- die Menge der Abbildungen zwischen zwei Mengen,
- und als äußerstes schließlich: Bildung von Auswahlmengen gemäß Auswahlaxiom.

Mit Hilfe der axiomatischen Mengenlehre ist es dann gelungen, eine scharfe Grenze zu ziehen zwischen unsinnigen Mengenbildungen wie in Russells Paradoxon und den mathematisch erwünschten und benötigten. Insbesondere liegen Begriffsbildungen wie "Menge der denkbaren Zustände eines physikalischen Systems" immer auf der sicheren Seite. Oder auch: Sicher ist "**eine** Menge von Mengen", die man mit den angegebenen Verfahren konstruiert hat. Problematisch und unzulässig "**die** Menge U **aller** Mengen". Und damit sehen Sie, wieso wir bei der Einführung der Mächtigkeiten in (3.9.1) geschrieben haben "...**eine** Menge von Mengen", nicht aber "...**die** Menge aller Mengen". Gemeint sind immer Bildungen, die mit obigen Konstruktionen entstehen.

□ Wir haben aus $\mathbb{N}$ bereits $\mathbb{Z}$ konstruiert, dann gefragt, wie man weiter zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gelangt. Jetzt erhebt sich die anspruchsvolle Frage: Wie erhält man $\mathbb{R}$?

□ Zeigen Sie: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig.

1.3.10 Die umgangssprachliche Herkunft des Relationsbegriffs.

(3. 10.1) Wir wollen am Beispiel des Relationsbegriffs exemplarisch vorführen, wie mathematische und umgangssprachliche Begriffe zusammenhängen. Herkömmliche mathematische Darstellungen, die weitgehend kommentarlos definieren: "Eine Relation auf R ist eine Teilmenge von R×R" wirken vielfach irritierend, verstärken Vorstellungen, abstrakte Mathematik sei irrelevant, von der praktischen Wirklichkeit abgehoben, ja letztlich nur erfunden, um in der Ausbildung als Prüfungs- und Diskriminierungsmechanismus zu fungieren.

(3.10.2) Man muß es sich angewöhnen, wichtige mathematische Definitionen nach Art des vorliegenden Beispiels möglichst selbst zu durchdenken und zu verstehen, um in der Lage zu sein, die zugehörige Mathematik als Unterstützung des eigenen Denkens adäquat zu nutzen. Sachlich vertiefen wir hier Überlegungen aus Kap.l.l.l. zur Mengenbildung.

(3.10.3) Umgangssprachlich benutzt man Aussagen wie "Müller und Strauß kommen aus derselben Stadt" . Für einen wisssenschaftlichen Text ist eine solche Aussage (in der Regel) nicht brauchbar, da das Wort *kommen* zu unpräzise ist. Wir geben drei mögliche Präzisierungen (Begriffsentfaltungen) für *kommen*:

- sind geboren in...
- wohnen (besser haben ersten Wohnsitz) in ...
- sind auf einer Reise, die in der Stadt begann oder darüber führte.

(3.10.4) Im Alltag ist in der Regel aus dem Kontext klar, welche dieser (oder weiterer) Interpretationen gemeint ist. Im wissenschaftlichen Beteich sollte die Bedeutung aus dem Text selbst hervorgehen, und im mathematischen Bereich ist Kontextfreiheit erklärtes Ziel.

(3.10.5) Wir wählen eine der Präzisierungen - *sind geboren* - und arbeiten damit weiter.

(3.10.6) Auch umgangssprachlich hat man bestimmte Typvorstellungen, was man alles in die Leerstellen unseres Satzgerüstes " ..... und ..... sind in derselben Stadt geboren" einsetzen darf, was als Zutaten zulässig ist. Sicherlich die Bezeichnung zweier Menschen, nicht aber "Dies Auto und die Nordsee sind in derselben Stadt geboren". Auf Gegenstände derartigen Typs ist der Begriff "geboren" nicht anwendbar. Oder "Bier und Weißwurst sind in derselben Stadt geboren." Das setzt erneut eine Präzisierung der gemeinten Bedeutung von *geboren* voraus. Unter Umständen erscheint der Satz sinnvoll.

Wie steht es mit "Valentin und Valentin sind in derselben Stadt geboren". Wobei wirklich beide Male dieselbe Person, nicht einmal Carl V. und einmal Barbara V. gemeint sein soll. Umgangssprachlich schätzt man eine solche Einsetzung nicht. Allerdings nicht, weil sie typmäßig unzulässig wäre ("C.V und B.V. sind.. " ist ja inOrdnung), sondern weil dieser Satz keine Information übermittelt. Er erscheint irgendwie aus inhaltlichen Gründen trivialerweise wahr und wird daher vermieden. Im Bereich der Mathematik geht es dagegen neben der Informationsvermittlung auch um die Gültigkeit einer Argumentation. Und dabei ist es meist der Sache dienlich, wenn man trivialerweise zulässige Einsetzungen erlaubt.

(3.10.7) Sei dem, wie es sei: Will man Kontextfreiheit erlangen, so muß irgendwie festgelegt sein, was man alles in "W1 und W2 sind in derselben Stadt geboren" für W1 und W2 einsetzen darf. D.h. aber, man muß zwei zugehörige Mengen M1 und M2 bestimmen, deren Elemente eingesetzt werden dürfen. Umgangssprachlich gibt es Beziehungen, bei denen es zur Natur der Sache gehört, dass M1=M2 gewählt werden sollte und andere, bei denen das nicht der Fall ist. Die Verbindung "und" deutet auf den ersten Fall hin. Zwei weitere Beispiele: "Fahrer und Wagen kommen aus derselben Stadt" und "Valentin aß die Weißwurst, und beide kamen aus derselben Stadt". In beiden Fällen sollte man die Mengen verrschieden wählen. Einwand: -Aber im ersten Fall darf man doch sagen "Wagen und Fahrer kamen aus derselben Stadt." Richtig, aber das ist eine andere Beziehung, die umgangssprachlich auch eine etwas andere Betonung ausdrückt. Zu dieser zweiten Beziehung gehören dieselben unterschiedenen Mengen, nur mit vertauschter Reihenfolge.

(3.10.8) Damit hat unsere Beziehung durch Präzisierung folgende Form angenommen:

" W_1 und W_2 kommen(i) aus derselben Stadt" mit $W_1 \in M_1$ und $W_2 \in M_2$..
Der Index i gibt die gemeinte Bedeutung von "kommen" an, etwa
kommen(l) = geboren . Usw.

(3.10.9) Wir erwähnten bereits, dass man umgangssprachlich die Sätze in der Regel eher zur Informationsübermittlung verwendet, nur manchmal - seltener - allerdings auch zum Argumentieren. Auch das ist kontextabhängig. Stellen wir uns unseren Satz im Kontext eines Kriminalromanes vor: "Valentin und Strauß kommen beide aus derselben Stadt. Sie haben beide eine Vorliebe für Weißwürste und kein Alibi. Aber was könnte das Motiv sein?" Klar, hier wird versucht, einen Täter argumentativ zu finden.

(3.10.10) Wieder werden in der Wissenschaft beide Aspekte - Informationsvermittlung und Argumentation - deutlich getrennt, und das sollte kontextunabhängig erkennbar sein. Und für die Mathematik ist korrekte Argumentation besonders wichtig.

(3.10.11) Für beide Zwecke ist es weiter sinnvoll und wichtig, zwischen Bildbarkeit und Wahrheitsgehalt einer Aussage zu unterscheiden. Bisher haben wir nur das Problem der Bildbarkeit diskutiert. Unser Resultat war:

> Für alle $(\mathrm{W}_1,\mathrm{W}_2)\in M_1 \times M_2$ ist die Aussage "W_1 und W_2 kommen(i) aus derselben Stadt" zulässig und bildbar. Insgesamt ergibt das $\mathrm{n}_1 \cdot n_2$ Bildungsmöglichkeiten, wenn $\mathrm{n}_1 = \#(M_1)$ und $\mathrm{n}_2 = \#(M_2)$ die Elementzahlen der entsprechenden endlichen Mengen sind.

(3.10.12) Wenn wir weiter argumentieren, ist es mühsam, diese Beziehung - den gesamten Satz mit allen Erläuterungen - immer wieder hinzuschreiben. Umgangssprachlich löst man das durch unpräzise, aber kurze Ausdrucksweise mit der stillschweigenden Erwartung, dass - über den Kontext! - doch klar wird, was gemeint ist. In der Mathematik dagegen löst man es mit Hilfe geeigneter Abkürzungen und Definitionen, einer geeigneten Symbolsprache, die für den weiteren Text vereinbart wird. Wir vereinbaren etwa:

Für W,V$\in M$ soll nachfolgend		
"W(k1)V" stets bedeuten		W und V sind in derselben Stadt geboren".
Stärker formalisiert:	Für W,V$\in M$:	W(k1)V $\Longleftrightarrow$ W und V sind in derselben Stadt geboren

(3.10.13) Sind W und V nicht beide aus M, so ist für sie nichts gesagt hinsichtlich der Beziehung (k1). Bei Bedarf kann man dieser Frage unabhängig nachgehen und (k1) allgemeiner - für größere Mengen - formalisieren.

(3.10.14) Damit können wir die **Frage des Wahrheitsgehaltes** unserer bildbaren Aussagen - es sind $\mathrm{n}_1 \cdot n_2$ Stück! - angehen. Manche von ihnen sind wahr, andere nicht. Die zulässigen Einsetzungen, die zu einer wahren Aussage führen, fassen wir wie inzwischen üblich zu einer Menge zusammen:

> $\mathrm{R}_1 = \{(W,V)|\ \mathrm{W(k1)V\ ist\ wahr}\}$
> Ist diese Menge bekannt, können wir damit sowohl argumentieren als auch Information übermitteln, mit geklärter Bedeutung!

(3.10.15) Liegt die Grundmenge M fest, so ist es üblich und nützlich, die Relation (k1) mit dieser Menge R, zu identifizieren. Vergleichen sie jetzt mit der mathematischen Definition des Relationsbegriffs in (3.5.1)!

Bei der Behandlung konkreter Probleme kann die Situation jedoch eine andere sein: Die Relation ist als Beziehung zwischen zwei Objekten operativ gegeben, man weiß jedoch nicht, auf welche Mengen sie genau anwendbar ist. Dann sollte man unterscheiden zwischen Relation wie (k1) und einer Relationsmenge wie R_1. Übrigens wird auch diese Situatian von der (axiomatischen - nicht der naiven) Mengenlehre formal erfaßt (Stichwort: Klassenbegriff als Verallgemeinerung des Mengenbegriffs - nicht zu verwechseln mit den Klassen einer Partition).

(3.10.16) Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung der Relationsmenge. Durch die Vorgabe einer solchen sind unsere beiden Forderungen offensichtlich formalisiert und erfüllt:

Die **Informationsübermittlung** ist klar: (Valentin,Strauß)$\in\mathrm{R}_1$ steht für "V und S sind (tatsächlich) in derselben Stadt geboren". Alternativ: (Valentin,Kennedy)$\notin\mathrm{R}_1$. Usw. Ebenso könnte man ar**gumentieren**: "W stammt aus München und U aus B., wie wir vom Amt erfahren haben. Weiter gilt (W,V)$\in R_1$ wie wir aus dem gefundenen Briefstück wissen. Der Mörder X aber stammt aus B., wie es im Bekennerbrief steht, und weil alle Indizien auf (X,U)$\in$R deuten...." So etwa könnten Überlegungen in einem Kriminalroman aussehen, wobei allerdings alle Einzelaussagen als entweder voll gesichert (100%) oder sicher falsch (0%) behandelt werden, was natürlich unrealistisch ist.

(3.10.17) Fassen wir unsere Überlegungen zusammen, so erhalten wir insgesamt eine rechtfertigende Erläuterung der "trockenen mathematischen" Relationsdefinition (3.5.1):

Präzisierung und Entfaltung umgangssprachlicher Beziehungsn zwischen zwei Objekten gleichen Typs erfolgt durch Bestimmung einer Menge M (zulässiger Objekte) und einer Teilmenge R von M×M , der Relationsmenge. Deren Elemente legen fest, für welche Objektpaare die Beziehung wahr ist und für welche nicht, (aber im Prinzip wahr sein könnte).

(3.10.18) Und jetzt weiter in Richtung auf das genauere Verständnis von (3.5.4), der Definition von Äquivalenzrrelation. Beim (alltäglichen) Argumentieren benutzt man bestimmte allgemeine Gesetze, von deren Gültigkeit man überzeugt ist. Wieder weiß man vom Kontext her, in welchen Fällen so eine Regel anwendbar ist und wann nicht. Hat man beispielsweise a(kl)b und b(kl)c, so wird man üblicherweise a(kl)c folgern. Alle drei haben denselben Geburtsort. Das ist die Transitivität aus der Äquivalenzrelation.

(3.10.19) Aber wie steht es mit a(v)b $\iff$ (a und b gehören demselben Verein an) ? Wieder ist die Bedeutung nicht ganz präzis. Ist nur ein einziger Verein (Bayern München) gemeint oder aber, dass es irgendeinen Verein gibt, dem beide gemeinsam angehören? Oder

a(v1)b $\iff$ (a und b gehören dem Verein V an)
a(v2)b $\iff$ Es gibt einen Verein, dem a und b gemeinsam angehören.

Bei (vl) ist der Verein V äußerer Parameter. D.h. jedes V gibt seine eigene Relation! Im Falle von (v1) gilt wieder unsere Transitivitätsregel: Falls a(vl)b und b(vl)c, dann auch a(vl)c. Im zweiten Fall dürfen wir sie offensichtlich **nicht** verwenden.

Wie steht es mit den anderen Forderungen der Äquivalenzrelation? Etwa der Reflexivität? A(V1)A bzw. A(V2)A können beide gelten oder auch nicht. Je nachdem, ob, A dem Verein V bzw. irgendeinem Verein angehört oder aber, ob dies nicht der Fall ist. Insbesondere weist NICHT(A(V2)A) die Person A als Vereinsmuffel aus.

(3.10.20) **Lösen vom Kontext** verlangt wieder, dass man Regeln, die gelten können oder auch nicht, abstrahiert. Die drei für die Äquivalenzrelation eingeführten Regeln erweisen sich als besonders nützlich. Das ist eine Erfahrungstatsache, wobei wir die dahinter stehenden Erfahrungen hier nur sehr unzureichend wiedergeben können. Die Mathematik untersucht dann, was diese Regeln allein, kontextfrei leisten. Es ist insbesondere der Satz (3.6.2), der zeigte, wie man klassifizieren kann, ohne die Klassen vorher zu kennen.

Ein Beispiel aus dem Alltagsbereich, das mit der Wirkung der Transitivität spielt, ist folgende Inschrift auf einem Becher: "Nobody is perfect. I'm nobody!")

(3.10.21) Schauen wir uns einige Beispiele von Relationsmengen an, die zu (kl), (vl) bzw (v2) gehören könnten.

	A	B	C	D
A	⋆	·	·	·
B	·	⋆	·	·
C	·	·	⋆	⋆
D	·	·	⋆	⋆

⋆ deutet jeweils an, dass das zugehörige Paar die Relation erfüllt. Das Beispiel könnte zu (k1) gehören. Dann hat man es mit drei Geburtsstädten zu tun. C und D stammen aus derselben Stadt.
Die Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Das nächste Beispiel gehört nicht zu einer Äquivalenzrelation, da die Reflexivität verletzt ist.

	A	B	C	D
A	⋆	·	·	·
B	·	·	·	·
C	·	·	⋆	⋆
D	·	·	⋆	⋆

Dies könnte zu (v2) gehören! B ist Vereinsmuffel
A gehört einem Verein an, dem aus der betrachteten Personengruppe niemand sonst angehört. C und D gehören einem anderen Verein an.

Auch das nächste Beispiel gehört nicht zu einer Äquivalenzrelation. Hier ist sogar die Transitivität verletzt.

	A	B	C	D
A	⋆	⋆	·	·
B	⋆	⋆	⋆	·
C	·	⋆	⋆	·
D	·	·	·	·

Erneut ist (v2) möglich. A und B gehören einem ersten, B und C einem zweiten Verein an. D ist Vereinsmuffel.
Es gilt A(v2)B und B(V2)C, aber keineswegs A(v2)C!
A und C gehören keinem gemeinsamen Verein an.

Jetzt formalisieren wir eine ganz andere Beziehung (Relation). Und zwar:

$$a(v3)b \quad \Longleftrightarrow \quad \text{"Es gibt einen Verein, dem a echt länger als b angehört".}$$

Die Reflexivität ist immer verletzt. Offensichtlich kann die Symmetrie verletzt werden. Kann, muß nicht. Eine mögliche Realisierung sieht wie folgt aus:

	A	B	C	D
A	·	⋆	·	·
B	⋆	·	⋆	⋆
C	·	·	·	⋆
D	·	·	·	·

A gehört einem ersten Verein echt länger als B an.
B dagegen ist in einem anderen Verein länger Mitglied.
In einem dritten Verein ist B länger als C und dieser länger als D. (Ist noch eine andere Interpretation möglich?

(3.10.22) Damit beenden wir die Diskussion der Frage, wie umganssprachlicher und mathematischer Realtionsbegriff zusammenhängen. Es sollte klar geworden sein, dass es sich beim mathematischen Begriff um eine sinnvolle Präzisierung des umgangssprachlichwen handelt, der insbeondere Kontextunabhängigkeit sichert. Und dass es sich generell lohnt, über derartige Zusammenhänge gezielt nachzudenken.

(3.10.23) Als wichtige geistige Fingerübung zur Konsolidierung dieses Abschnittes sollten Sie nun die folgende Struktur eigenständig analysieren und sich mit ihrer Bedeutung vertraut machen:

Sei ω eine Relation auf der Menge M.
Dann heißt ω *Ordnungsrelation auf M*, wenn ω
wie eine Äquivalenzrelation **symmetrisch** und **transitiv** ist,
aber statt der Reflexivität die folgende Eigenschaft besitzt:
$(x(\omega)y$ und $y(\omega)x) \Rightarrow$ x=y. (für x,y$\in M$).

- ☐ Sei M Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die zugehörige Potenzmenge. Zeigen Sie, dass die Teilmengeninklusion $\subset$ eine solche Ordnungsrelation ergibt.
- ☐ In $\mathbb{R}$ ist $\leq$ eine Ordnungsrelation.
- ☐ Sei M Menge und P(M) die Menge aller Partitionen von M. Wie kann man auf P(M) eine solche Ordnungsrelation einführen? Welche inhaltliche Bedeutung hat diese Relation?

1.3.11 Das einfachste mathematische Modell des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

(3.11.1) Die historisch erste und klassische Methode, den Wahrscheinlichkeitsbegriff mathematisch zu fassen und zu modellieren, besteht im Auszählen endlicher Mengen. Genauer gesagt, geht man von einer endlichen Menge gleichwertiger Fälle aus, unter denen man einen bestimmten Typ - also eine Teilmenge (der Fallmenge) - aussondert. Als Wahrscheinlichkeit für einen Fall des ausgesonderten Typs nimmt man die relative Häufigkeit (=Zahl der ausgesonderten Fälle geteilt durch die Zahl der überhaupt möglichen Fälle). Das Bestimmen derartiger Wahrscheinlichkeiten besteht somit vornehmlich in der Bestimmung der Anzahlen der beiden beteiligten endlichen Mengen.

(3.11.2) Beim trivialen Fall eines Würfels sind 6 gleichwertige Fälle (=Ergebnisse) möglich. Drei davon ergeben einen ungeraden Wert. Die Wahrscheinlichkeit, einen ungeraden Wert zu würfeln, ist danach $\frac{3}{6}$=0.5.

(3.11.13) **Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit:**

Sei F eine endliche Menge (von als gleichwertig angesehenen Fällen).
Sei T$\subset$F Teilmenge daraus ausgesonderter Fälle. Die Anzahlen seien #F und #T.
Dann wird w=w$_T$=$\frac{\#T}{\#F}$ als Wahrscheinlichchkeit, einen in F Fall aus T zu finden, interpretiert. Laut Konstruktion gilt stets $0 \leq w \leq 1$.

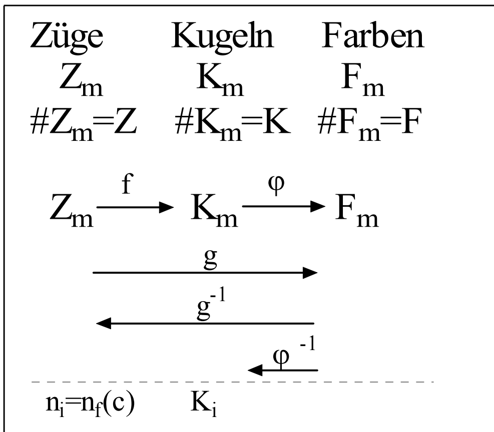
(3.11.4) Beachten Sie, dass die Anwendung dieses Modelles zwei wesentliche Voraussetzungen verlangt: Die Fälle sollen alle gleichwertig -hinsichtlich ihres Auftretens symmetrisch - sein und die Menge aller denkbaren Fälle muss endlich sein. Ist die zweite Bedingung nicht erfüllt, ergeben sich beim Versuch, das Modell auszudehnen, beträchtliche Schwierigkeiten. Im Kapitel 14 werden wir daher einen allgemeineren Zugang zur Wahrscheinlichkeit suchen.

(3.11.5) Meist ist es günstig, die Fälle mathematisch als Abbildungen zu repräsentieren und dann die entsprechenden Abbildungsmengen auszuzählen. Als Beispiel betrachten wir das in 1.3.3a eingeführte Urnenmodelll

(3.11.6) Nochmals kurz das Modell:

> Wir stellen uns eine Urne vor, in der sich eine Menge K_m von K Kugeln befindet. Jede Kugel hat eine Farbe. Die auftretenden Farben bilden die Farbmenge F_m der Anzahl F. Die Farbabbildung φ: $K_m \to F_m$ ordnet der Kugel x ihre Farbe φ(x) zu. K_m zerfällt in Farbklassen von Kugeln gleicher Farbe. Die Zuordnung $c \mapsto \overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{c\})$ parametrisiert diese Klassen. $\#\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{c\})$ ist die Anzahl der Kugeln der Farbe $c \in F_m$.
> **Jetzt wird eine Kugel gezogen, notiert und zurückgelegt**. Z-fache Wiederholung dieses Vorganges ergibt ein Experiment. Die einzelnen Züge indizieren wir durch Z_m={1,2,...,Z} Das Ergebnis des Experimentes wird beschrieben durch eine Abbildung f: $Z_m \to K_m$, wobei f(j) gleich der im j-ten Zug gezogenen Kugel ist. Wir setzen noch $g=\varphi\circ f$, so daß g(j) gleich der im j-ten Zug erhaltenen Farbe ist. $c \mapsto \overset{-1}{\underline{g}}(\{c\}) \subset Z_m$ enthält alle Züge, die eine Kugel der Farbe c ergeben. Und $n_f(c)=\#\overset{-1}{\underline{g}}(\{c\})$ ist die Anzahl der Züge des Experimentes, die die Farbe c ergeben.

Zum Überschauen all dieser Beiehungen sollte man häufig und sorgfältig die Abildungskette $Z_m \xrightarrow{f} K_m \xrightarrow{\varphi} F_m$ vom Automatenstandpunkt aus betrachten. Dieser Standpunkt gibt ja an, wie sich komplexe Beziehungen aus elementaren Abbildungen aufbauen.



Von oben nach unten:
Objekte
Mengen, deren Elementzahl
Die Abbildungen
Für den Einzelzug
relevante Größen.
c: Numerierung der Farben.

Der Beweis, den wir gleich führen werden, ist komplizierter, als die meisten unserer sonstigen Argumentationen. Entsprechend nimmt die Bedeutung derartiger übersichtsbildender Hilfen zu.

(3.11.7) **Was interessiert am Urnenmodell**? Die Ergebnisse der Experimente unterscheiden sich durch die jeweilige Abbildung f. Die Menge $\mathfrak{F}(Z_m,K_m)$ all dieser Abbildungen bildet die Menge aller möglichen und zueinander gleichwertigen Fälle. Das ist die Fallmenge F aus (3.11.3). Die Elementzahl von F ist K^Z. Oder $\#\mathfrak{F}(Z_m,K_m)=K^Z$. (Für jeden Zug sind unabhängig K Werte möglich!). Welche Fälle sollen nun ausgesondert werden und die Teilmenge T aus (3.11.3) bilden? **Man verlangt, daß die Anzahl der gezogenen Kugeln mit bestimmter Farbe festliegt, wogegen man offenläßt, bei welchen Zügen des Experimentes die Farben entstehen.** Also : Welche f führen auf dieselbe Farbverteilung? (Bei Z=6 wäre 3 rote, 2 grüne und eine blaue Kugel eine Möglichkeit unabhängig davon, wann welche Farbe gezogen wird.) Oben wurden die Farbzahlen bereits eingeführt, so dass wir jetzt bilden können:

$$T = T(\vec{n}) = \{f \mid \text{ f:}Z_m \to K_m,\ n_f(c_i) = n_i, \quad \text{i=1,2,..,F}\}$$

Hierbei soll $i \mapsto c_i$ eine fest gegebene Durchnumerierung der Farbmenge F_m sein: c_i die i-te Farbe. Und n_i soll die vorgebbare Zahl von Kugeln der Farbe c_i sein. Gesucht ist die Anzahl der f, die auf die durch $\vec{n}=(n_1,n_2,...,n_F)$ festgelegte Farbverteilung führen. (Im obigen Beispiel mit Z=6 wäre $\vec{n}$=(3,2,1)).

(3.11.8) Die Durchnumerierung der Farben gibt auch eine Durchnumerierung der Farbklassen der Kugeln. Wir setzen $K_i=\#\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{c_i\})$ = Zahl der Kugeln in K_m mit Farbe c_i. Natürlich ist ΣK_i=K , der Gesamtzahl der Kugeln. Die Zahlen K_i hängen im Gegensatz zu den $n_f(c_i)$ nicht vom Experiment ab!

(3.11.9) Unter diesen Umständen gilt das folgende Resultat, mit dessen Hilfe wir die Wahrscheinlichkeiten gemäß (3.11.3) sofort erhalten:

> Sei $\vec{n}$=(n_1,...,n_F) mit Σn_i=Z=#Z_m gegeben. Dann ist die Anzahl der Abbildungen f: $Z_m \to K_m$ mit $n_f(c_i) = n_i$ für jedes i gegeben durch
> $$\boxed{A(\vec{n}) = \frac{Z!}{n_1!n_2!.....n_F!}K_1^{n_1}K_2^{n_2}.......K_F^{n_F}.}$$

(3.11.10) **Beweis**: (Nochmals: Dieser Beweis bildet ein Beispiel einer komplexeren Argumentation. Gehen Sie zum Verständnis immer wieder auf das Diagramm aus (3.11.6) zurück. Der Beweis zerfällt in zwei Teile a) und b). Elementare Rechnungen und Konkretisierungen selbst ergänzen!

- a) Wir konstruieren ein f der gewünschten Art. Dazu müssen wir n_1 Elemente aus den Z Elementen der Zugmenge Z_m für die erste Farbe auswählen, also alle Indizes, bei denen die Farbe 1 gezogen wird. Das gibt $W_1 = \binom{Z}{n_1}$ Möglichkeiten. n_1=0 ist mit (genau einer Möglichkeit) eingeschlossen. Die gewählten n_1 Elemente nehmen wir aus Z heraus. Es verbleibt eine Teilmenge von (Z-n_1) Elementen. Aus dieser wählen wir jetzt die n_2 Elemente (=Züge) aus, die zur Farbe 2 führen sollen. Das gibt W_2=$\binom{N-n_1}{n_2}$ Möglichkeiten. Wieder mit W_2=l falls $n_2 = 0$ ist. Zusammen sind das bereits $W_1 \cdot W_2$ Möglichkeiten (Produkt, da unabhängig). Usw.
  Setzt man in das endgültige Produkt $W_1W_2....W_F$ die Formel für die einzelnen Binomialkoeffizienten ein, so kürzen sich systematisch zahlreiche Faktoren fort und man erhält den kombinatorischen Faktor K(n) der behaupteten Formel. Das ist der kombinatorische Faktor, den wir bereits aus dem Multinomialsatz kennen.

- b) Nun wissen wir, welche n_i Indizes aus der Zugmenge Z_m zur Farbe i führen, aber wir wissen noch nicht, welche Kugel dieser Farbe vom einzelnen Index konkret ausgewählt wird. Zur Farbe c_i soll es ja K_i =#$\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{c_i\})$ Kugeln dieser Farbe in der Urne geben. Oder auch : Sei Z_i ⊂Z die Teilmenge der n_i gewählten Indizes aus Z und J(i)=$\overset{-1}{\underline{\varphi}}(\{c_i\})$ die Klasse der Kugelindizes, die zur Farbe i führen. Wieviel Abbildungen K(i)→J(i) gibt es? Nun wieder $(K_i)^{n_i}$ Stück! Kombiniert man alle Farben unabhängig, so gibt das gerade $(K_1)^{n_1}(K_2)^{n_2}.....(K^{n_F})^{n_F}$ Möglichkeiten (= Abbildungen Z_m →K_m, die zu der betrachteten Farbpartition der Zugmenge Z_m gehören.). Da es K(n) solche Partitionen gibt - alle mit **derselben Zahl** zugehöriger Abbildungen Z_m →K_m, erhalten wir insgesamt für die Zahl gesuchter Abbildungen: K(n)$(K_1)^{n_1}(K_2)^{n_2}.....(K_F)^{n_F}$. **Damit ist der Beweis geführt.**

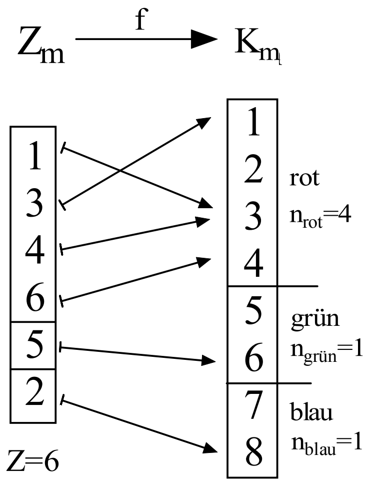
(3.11.11) Nach unserer eingangs in (3.11.3) formulierten Regel zur Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit müssen wir die gefundene Zahl einschlägiger Fälle noch durch die Gesamtzahl aller möglichen Abbildungen aus $\mathfrak{F}$(Z_m,K_m) (=Anzahl aller möglichen Fälle) teilen. Das war aber K^Z=$K^{n_1}K^{n_2}.....K^{n_F}$. Beim Ausführen der Division gehen alle absoluten Häufigkeiten K_i (=Zahl der Kugeln in der Urne mit Farbe i) in die zugehörigen relativen Häufigkeiten h_i=$\frac{K_i}{K}$ über. D.h., die absoluten Häufigkeiten der Farben sind für die Wahrscheinlichkeiten bedeutungslos, sofern nur die relativen Häufigkeiten übereinstimmen.

(3.11.12) Man erhält als Resultat:

> **Satz:** Die Urne enthalte Kugeln mit F Farben in den relativen Häufigkeiten h_i. Es werden Z (gleichwertige) Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Weiter sei $\vec{n}$=(n_1,n_2,...,n_F) eine mögliche vorgegebene Farbverteilung der Zugfolge.
> Dann ist die Wahrscheinlichkeit, eben diese Farbverteilung zu finden, gleich
> K(n)$(h_1)^{n_1}(h_2)^{n_2}.......(h_F)^{n_F}$ mit K($\vec{n}$)=$\frac{Z!}{n_1!n_2!.....n_F!}$ 0!=1

(3.11.13) Illustrierendes Beispiel: In der Urne seien 3 Farben mit Häufigkeiten h_2= h_3=0.25 und h_1=0.5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit N=6 Zügen je eine Kugel der Farben 2 und 3 und 4 der Farbe 1 zu ziehen? Es ist K(4,1,1)=30, also w=30$\cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 20 \cdot 2^{-8}$ ≈0.12. Unter 8 Fällen ist also etwa eine

Farbverteilung der gewünschten Art.



Die Figur zeigt eine mögliche Partition der Zugmenge $Z_m=\{1,2,...,6\}$ und eine Abbildung f, die über diese Partition zur gewünschten Farbverteilung führt.
Da die Kugel jeweils zurückgelegt wird, kann dieselbe Kugel mehrfach gezogen werden. Im Beispiel f(1)=f(4)=3. Beim ersten und beim dritten Zug wird die (rote) Kugel Nr. 3 gezogen.
Andere Kugeln wie 2 oder 5 wurden im Experiment f nie gezogen.

Zur betrachteten Partition von Z_m gehören insgesamt $4^4 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$ Abbildungen mit der gewünschten Farbverteilung. Und es gibt - wie berechnet - 30 Partitionen von I, die vom gewünschten Typ (4,1,1) sind, jede mit 1024 zugehörigen Abbildungen. Die Zahl der Abbildungen $Z_m \to K_m$ ist $K^Z = 8^6 = 8^4 \cdot 8 \cdot 8$. Das gibt den Quotienten $\frac{4^4 \cdot 2 \cdot 2}{8^4 \cdot 8 \cdot 8} = 2^{-8}$ wie oben.

☐ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit im Modell bei zwölf Zügen 6 mit der Farbe 1 und je 3 mit den beiden anderen Farben zu erhalten, also genau die Farbverteilung in der Urne?

☐ Testen Sie Ihr Beweisverständnis, indem Sie folgende Verallgemeinerung behandeln: **Was ist, wenn man ohne Zurücklegen zieht?** Offenbar ändern sich nur die zulässigen Abbildungen f. Welche f sind noch zulässig? Was ändert sich in a), was in b)? Zeigen sie, dass man in (3.11.9) einfach K^n durch $[K]_n$=K(K-1)....(K-n+1) zu ersetzen hat. $[K]_n$ ist das in früheren Fragen bereits eingeführte Pochhammersymbol. Wieso kann man ein zu (3.11.12) analoges Ergebnis nicht erwarten? Spezialisieren Sie auf den Fall F=2, also zwei Farben.

1.3.11a Ein exotischer Konfigurationsraum

(3.11.14) Wir wollen die Resultate zum Urnenmodell benutzen, um die Bedeutung des Konfigurationsraumbegriffes zu verdeutlichen. Dazu betrachten wir den Fall einer Urne mit drei Farben, die wir suggestiv mit r,g und b bezeichnen wollen. Wir ziehen N Kugeln und erhalten die absolute Farbhäufigkeit $\vec{n} = (n_r, n_g, n_b)$ mit $n_r+n_g+n_b=N$. Übergang zu relativen Häufigkeiten ergibt $h=\frac{\vec{n}}{N}=(h_r,h_g,h_b)$. Wegen $h_r+h_g+h_b$=l genügt die Angabe von 2 dieser Komponenten, etwa von h_r und h_b zur Festlegung. Die Menge aller möglichen Häufigkeiten beschreibt für festes N ein Gitter von $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ Elementen. Variiert man N, so liegen alle Häufigkeiten im Dreieck $K_3=\{(r,b) \mid 0 \leq r,b \leq 1$ und $r+b \leq l\}$ der r-b-Ebene.

(3.11.15) Für viele Problemsituationen ist es hilfreich, diesem Dreieck der r-b-Ebene die Rolle eines Konfigurationsraumes zu geben, sich also vorzustellen, es handele sich um einen physikalisch-geometrischen Lebensraum. Diese Vorstellung hilft einem, die Art und Richtung einer benötigten Argumentation festzulegen und zu verstehen. Und der Fall mit den 3 Farben läßt sich problemlos auf den der f Farben verallgemeinern.

(3.11.16) Wählt man N fest, so erhält man eine Teilmenge von K_3 in der anschaulich-geometrischen Form eines Gitters. Auch dieses Gitter können wir als Konfigurationsraum interpretieren, was wir jetzt tun wollen. $K_{3,N}$ sei nachfolgend ein solcher Gitterraum. Jedem Gitterpunkt kann man nach (3.11.12)) das zugehörige $h(\vec{n})$ zuordnen, was ein Feld auf dem Gitter $K_{3,N}$ ergibt. Ebenso kann man für fest vorgegebene Farbhäufigkeiten $\vec{h}$, die oben berechneten Wahrscheinlichkeiten als Wahrscheinlichkeitsfeld (Typ Skalarfeld) auf dem Gitter auffassen.

(3.11.17) Nehmen wir an, wir hätten ein festes derartiges Feld, das jedem Gitterpunkt seine zugehörige Wahrscheinlichkeit w zuordnet. Dann sehen typische Konfigurationsraumvorstellungen, die man entwickeln kann, so aus:

Man gibt sich einen Wahrscheinlichkeitswert vor. sagen wir $p_0 = 0.1$. Dann zerlegt das Feld den gesamten Raum in drei Teile G, H und P, je nachdem ob der dortige Feldwert kleiner (G) gleich (H) ader größer (P) als p, ist. Eine Landkarte wird entsprechend durch ein bestimmtes Höhenniveau zerlegt. Typische von der Konfigurationsraumvorstellung induzierte Fragen sind jetzt: Wie groß sind die drei Teilmengen? Wenn man einen bestimmten Gitterpunkt vorgibt, wo liegt er? In G,H oder in P? Wenn er in P liegt, auf welchem Weg gelange ich zur Grenze H? Gibt es einen möglichst kurzen Weg? Eine Folge von Gitterpunkten wird als Bahnkurve im Konfigurationsraum interpretiert Usw.

All diese anschaulichen Vorstellungen lassen sich in jedem unserer Gitterkonfigurationsräume mathematisch ausführen und behandeln. Und umgekehrt sind viele mathematische Strukturen gerade so entwickelt, dass sie der Anschauung entsprungene Vorstellungen präzisieren und durchführbar machen.