Vektoren

Dieser Anhang enthält eine Kurzeinführung in den für einfache Anwendungen erforderlichen Teil der Vektorrechnung. Er geht nicht primär davon aus, die zugehörige mathematische Struktur zu beschreiben und zugehörige Resultate zu beweisen, sondern von der Aufgabe mit Hilfe der Vektorrechnung physikalische Probleme zu fassen und zu lösen. Der Bereich der Matrixrechnung wird nicht behandelt. Dafür lassen sich durchaus anspruchsvollere Aufgaben aus dem Bereich des Kurses mit den gegebenen Methoden routinemäßig lösen. Meist geht es darum, eine vektorielle formel geometrisch zu interpretieren oder umgekehrt eine geometrische Konfiguration als vektorielle Formel zu sehen!

Hinführung: **Vektorielle Größen**

(0.1) *Vektorielle Größen* erfordern zur Festlegung mehr als eine Zahlangabe. Sie kommen im Rahmen quantitativer Naturbeschreibung häufig vor.
Man möchte nun mit vektoriellen Größen ähnlich erfolgreich rechnen können wie man es mit Zahlgrößen kann. Also Formeln und Gesetze formulieren, Formeln umstellen, Gleichungen auslösen usw. Das führt zur Vektorrechnung.

(0.1a) **Einige Beispiele** zu erfassender Größen oder Problembereiche aus der Geometrie und Physik, die auf vektorielle Größen und Vektoren führen:

(1) Rekonstruierbare und kommunizierbare Angabe eines Ortes oder die Lage eines Punktes

(2) Die Festlegung einer Figur bestimmter Form (Beispiel: Kreis im Raum, Zylinder) und das Beschreiben der Bewegung einer solchen Figur.

(2a) Die Erfassung aller Punkte einer Figur. ..

(4) Die Angabe einer vektoriellen Geschwindigkeit

(5) Eine "bessere" -sachlich angemessene - Datensatzbeschreibung durch einen Mittelwert, eine Streuung und weitere Zahlangaben entwickeln

(5) Die Beschreibung eines Bündels von Lichtstrahlen bestimmter Form

Vektoren

(1.1) **Was sind Vektoren?** Als elementare Bausteine, die nicht weiter hinterfragt werden sollen, nehmen wir **Punkte** (im Raum bzw. einer festen Ebene) und **geometrische Pfeile**.

Ein geometrischer Pfeil ist der kürzeste Weg, der zwei Punkte (des jeweiligen Konfigurationsraumes) gerichtet verbindet. **Parallelverschiebung** soll den Pfeil nicht ändern und ist zulässig, sofern nicht das Gegenteil gesagt wird.

> (1.1a) Die Physik verlangt nun Folgendes: Punkte und geometrische Pfeile müssen nicht nur qualitativ besimmbar und vorgebbar sein, sondern sie müssen eindeutig und kommunizierbar bestimmt werden können! Es zeigt sich, dass man dazu eine quantitative Festlegung durch Zahlangaben benötigt.

(1.2) Das Festlegungsproblem löst man, indem man die geometrischen Pfeile **durch Wege eines bestimmten Typs** darstellt. (Der einfachste Wegtyp ist die kürzeste Verbindung vom Anfangspunkt zum Endpunkt!)

> (1.2a) In der Regel gehört zu jedem (die geometrische Pfeile darstellenden) Wegtyp des Konfigurationsraumes ein zugehöriges **Konstruktionsverfahren**, das vom Anfangspunkt zum Endpunkt führt und so den geom. Pfeil (mit Hilfe der Wegdaten) bestimmt. Zu jedem solchen Konstruktionsverfahren gehören gewisse (gemeinsam) **zu vereinbarende Vorgaben**!
>
> (1.2b) Liefert das Konstruktionsverfahren eine vollständig quantifizierte Darstellung der geom. Pfeile, dann nennen wir die Vereinbarungen **"Vorgabe eines Koordinatensystems"**.
>
> (1.2c) Wir geben die Koordinatensysteme mit Hilfe von Skizzen vor.

- – In den Skizzen stellen wir zum Koordinatensystem gehörige Größen jeweils grün dar! Die zu beschreibende geometrische Konfiguration blau und rot. Blau steht meist für das jeweils gerade zu bestimmende/darzustellende Objekt, etwa den Endpunkt.

(1.3) Jedes Koordinatensystem liefert uns zweierlei:

- – Das Tupel der den Weg beschreibenden Zahlen. Dieses Tupel nennen wir *Koordinatenvektor.*
  – Und eine Formel für den geometrischen Pfeil, die den Weg (im Rahmen der Vektorrechnung geometrisch beschreibt.

(1.4) Ist die Wegbeschreibung so, dass für **jeden** geometrischen Pfeil der Weg dieses Typs durch gewisse Zahlangaben vollständig festgelegt ist, sprechen wir von einer Koordinatendarstellung des Vektors.

(1.5) In einer **Zwischenbemerkung** geben wir zwei Gründe dafür, dass diese Wahl der Grundelemente eine Verbesserung gegenüber Euklid (Punkte und Strecken) erbringt:

> ⧫ a) Wege (eines bestimmten Typs) lassen sich hintereinanderschalten - verknüpfen - mit einem Ergebnis desselben Typs von Weg. **Damit ist es möglich, für Vektoren Formeln aufzustellen und mit ihnen zu rechnen ähnlich zu den (bewährten) Rechnungen mit Zahlen!** Das ist der Einstieg der Mathematik in die Vektorrechnung.
>
> ⧫ b) Erfahrungsgemäß lassen sich viele physikalisch wichtige Größen in Form geometrischer Pfeile darstellen (Einstieg der Physik)

Nochmals: Geometrische Pfeile sollen durch Wege eines bestimmten Typs festgelegt werden. Die Typfestlegung erfolgt jeweils über ein vereinbartes Koordinatensystem!

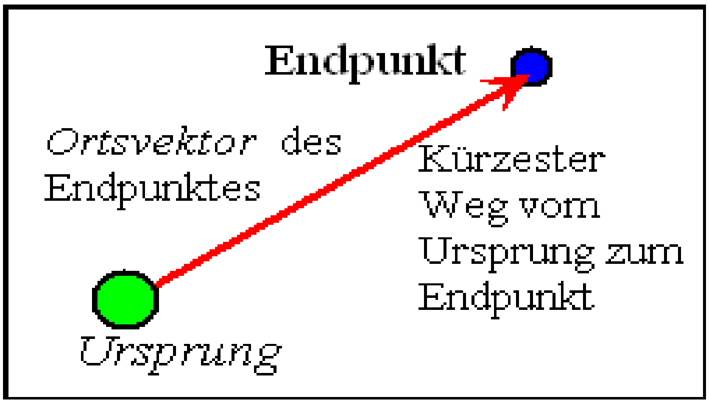
Die drei hauptsächlichen Wegtypen zur Festlegung geometrischer Pfeile

(2.1) Für unsere Zwecke reichen **drei Wegtypen** aus, die wir jetzt einführen. Zwei davon gehören zu bestimmten Koordinatensystemen.

In den erklärenden Figuren verwenden wir so weit es geht folgende Farbkonventionen;

- – Grün: Die vorzugebenden Koordinatenvereinbarungen.
  – Rot: Der Weg, bzw. die Konstruktionselemente des Weges.
  – Blau: Der Endpunkt bzw. der resultierende geometrische Pfeil.

(2.2) **Erster Wegtyp:**
Der erste Wegtyp ist der **kürzeste Weg** (der den Anfangspunkt mit dem Endpunkt verbindet). Er ist weitgehend identisch mit der üblichen geometrischen Pfeildarstellung.



Falls ein fester Startpunkt "*Ursprung*" gewählt ist, bezeichnen wir den Pfeil auch als "*Ortsvektor* des Endpunktes".

■**Dieser Wegtyp wird meist durch** **Vorgabe einer Richtung und eines Betrages .** **festgelegt**. Betrag=Länge des Pfeiles. Die Richtung muss dabei vielfach nicht (über irgendwelche Koordinaten) genauer bestimmt sein. Sie soll nur jeweils als irgendwie (prinzipiell) bekannt oder bestimmbar gelten.

Die Mehrzahl der Vektoren der Physik wird auf diese Weise festgelegt!

(2.2a) Dazu vier Beispiele (Das sind wichtige Beispiele zur Illustration des allgemeinen Falles und der Aussage über die Festlegung von Vektoren in der Physik!)

◊ Die *Ortsänderung (eines Massenpunktes)*, festgelegt über den Verschiebungsvektor.

◊ Die *vektorielle* (konstante) *Geschwindigkeit*.

◊ Eine momentane *Kraft, (die auf einen Massenpunkt wirkt)*

(Die Operationalisierung einer "Kraft" erfolgt im Prinzip über eine den Einfluss kompensierende Federwaage. Und das gibt **??** !)

◊ Beschreibung einer Drehbewegung: *Drehwinkel* und **??** .
(2.2b) Eine Konkretisierung von (1.4a): Das Hintereinanderschalten solcher kürzester Wege liefert unmittelbar die geometrische **??** der Vektoraddition.

Die Erfahrung sagt: Die so festgelegte Vektoraddition ist für Vektorgeschwindigkeit .interpretierbar als Zusammensetzung von Relativgeschwindigkeiten

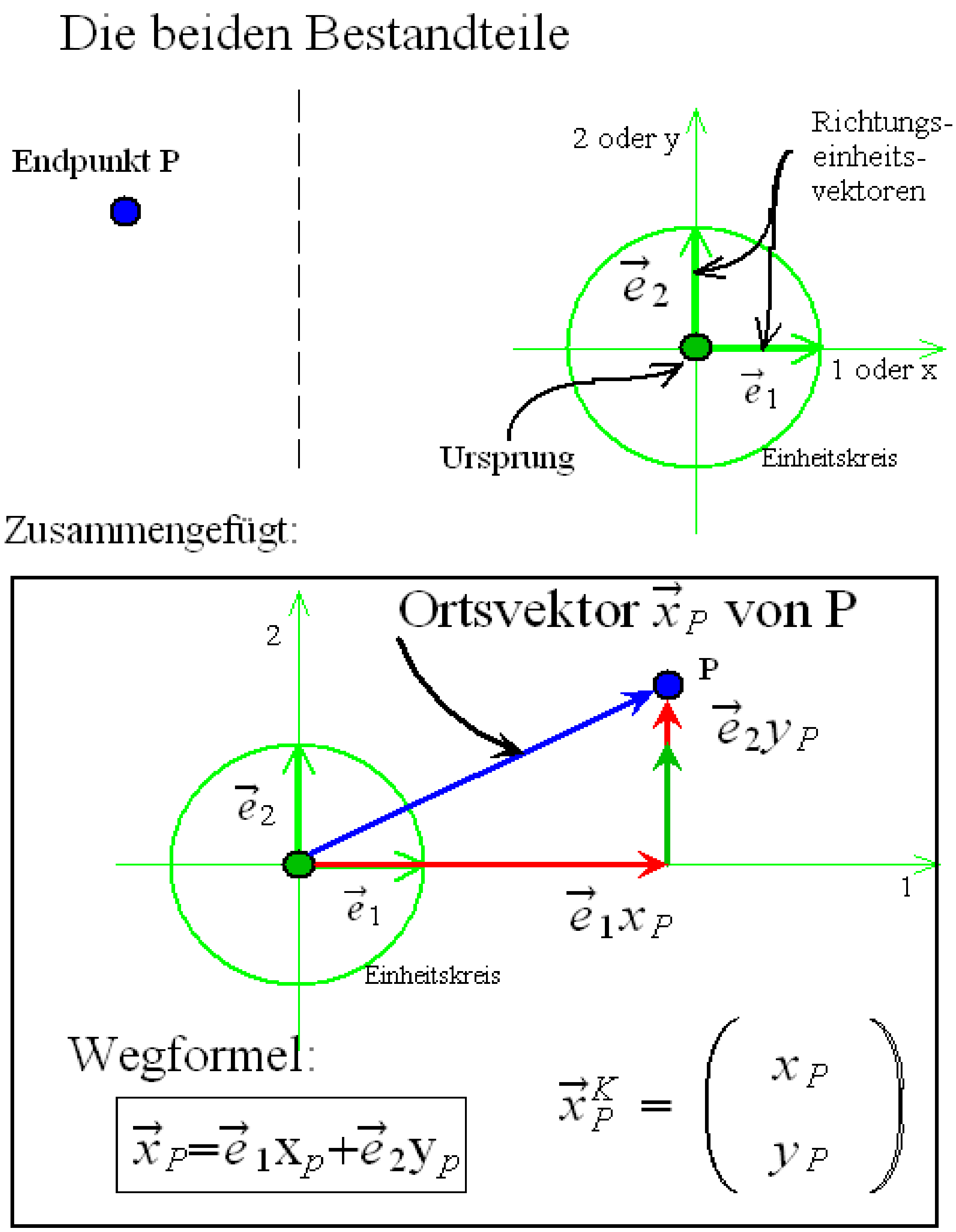
und im Kraftfall beschreibt sie (erfahrungsgemäß) die Superposition von Kräften.

Aber Vorsicht: Bei relativistischen Geschwindigkeiten erweist sich eine andere Art von $\boxed{??}$ als korrekt.

(2.3) **Der zweite Wegtyp: "Achsenparallele (kartesische) Wege."**

Punkte bzw. geometrische Pfeile lassen sich in kartesischen Koordinaten in der Ebene bzw. im Raum leicht durch **achsenparallele Wege** festlegen.

Vorgabe Punkt ´(oder geometrischer Pfeil) und kartesisches Koordinatensystem



Beschreibung des Weges:

- – Starte im Ursprung des Koordinatensystems
  – Gehe um x_P Einheiten auf der 1-Achse weiter
  – Dann parallel zur 2-Achse um y_P Einheiten
  – Verbinde den Anfangspunkt mit dem Endpunkt. Das gibt den darzustellenden geometrischen Pfeil.

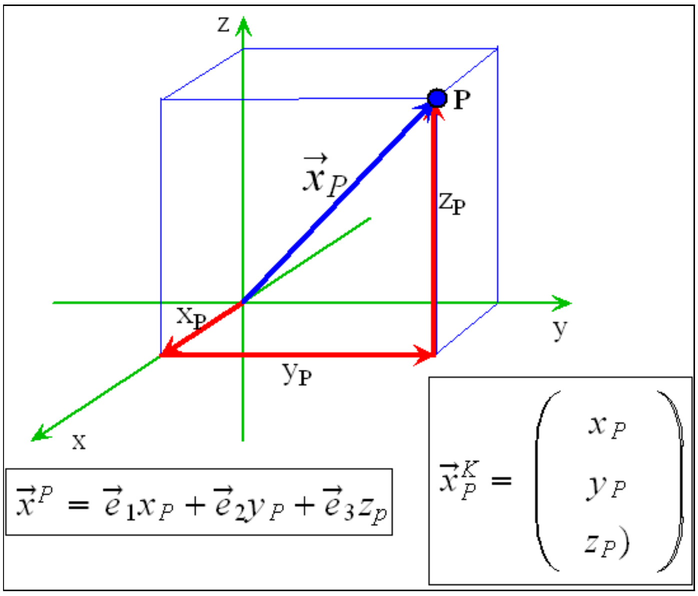
(2.3a) Was wird benötigt, um solch ein Koordinatensystem vorzugeben?

- ♦ Ein Ursprung,
- ♦ zwei (bzw. drei) davon ausgehende aufeinander senkrechte Richtungen,
- ♦ mit zugehörigen Einheiten.

(2.3b) Die zwei bzw. drei Zahlangaben, das zugehörige Zahltupel, bezeichnen wir als *Koordinatenvektor des Endpunktes bzw. des geometrischen Pfeiles!* Im Raum:

$$\vec{x}_P^K = \begin{pmatrix} x_p \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$$

Gehe x_p Einheiten in 1-Richtung, dann
y_p Einheiten parallele zur 2-Richtung weiter
.....

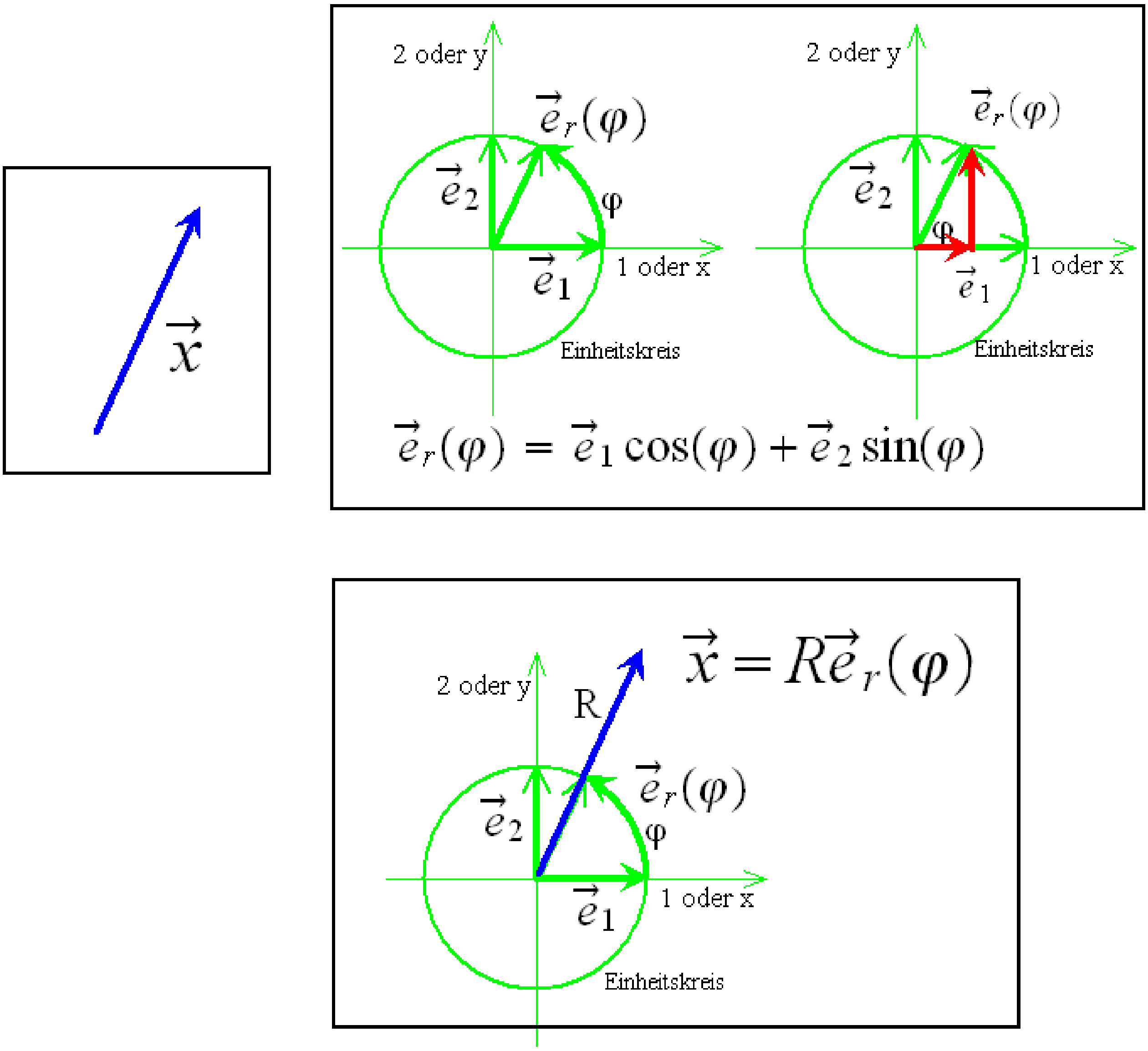


(2.3c) Die Figuren zeigen die geometrische Konstruktion und die zugehörige Vektorformel, die die Wegkonstruktion durch Hintereinanderschalten erfasst und Schließlich den Koordinatenvektor, der die benötigten Zahlangaben zusammenfasst.

(2.4) **Der dritte Wegtyp: Polare (ebene) Wege**

Wir beschränken uns hier auf den ebenen Fall. Die Skizze gibt erneut den zu quantifizierenden Pfeil (anstatt des Endpunktes), die Koordinatenvorgaben und die daraus resultierende Wegbeschreibung.

(2.4a) Folgende Größen werden zur Festlegung eines polaren (ebenen) Koordinatensystems benötigt:



$\vec{x}$
2 oder y
$\vec{e}_r(\varphi)$
$\vec{e}_2$
φ
$\vec{e}_1$
1 oder x
Einheitskreis
2 oder y
$\vec{e}_r(\varphi)$
$\vec{e}_2$
φ
$\vec{e}_1$
1 oder x
Einheitskreis
$\vec{e}_r(\varphi) = \vec{e}_1 \cos(\varphi) + \vec{e}_2 \sin(\varphi)$
$\vec{x} = R\vec{e}_r(\varphi)$
2 oder y
R
$\vec{e}_r(\varphi)$
$\vec{e}_2$
φ
$\vec{e}_1$
1 oder x
Einheitskreis

Figure 1:

♦ Ein Ursprung,

♦ Eine Richtung und eine Orientierung

♦ Eine Winkeleinheit. Bei uns immer das Bogenmaß

(2.4b) **Die Festlegung des Pfeiles** über die quantitative Wegbeschreibung erfolgt durch eine Winkelangabe (zwischen 1-Richtung und Pfeil, φ) und eine Betragsangabe (Länge des Pfeiles, R). Das ergibt folgende Formel

$\boxed{\vec{x}=\vec{e}_r(\varphi)\cdot \mathrm{R}}$ r steht hier für *radial.* Häufig benutzen wir noch einen zweiten Einheitsvektor $\vec{e}_t(\varphi)$ mit t für *tangential*

(2.4c) Was ergeben die Gesichtspunkte aus (1.4) für die polare Darstellung? Man hat hier eine Quantifizierung der Richtungen (in der Ebene) gegeben. D.h. man ist nahe an der üblichen Art, geometrische Pfeile in der Physik vorzugeben. Aber man hat in diesen Koordinaten keine einfache Formel f ür die Vektoraddition, also das Hintereinanderausführen der Wege. Dagegen liefert diese Darstellung eine einfache geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen.

Der zugehörige Koordinatenvektor $\vec{x}^P = \begin{pmatrix} R \\ \varphi \end{pmatrix}$ ist daher zunächst für den Formelbau wenig nützlich und wir verwenden ihn hier nicht.

3 Wichtige Problemsituationen

(3.1) Zu jeder derartigen durch ein Koordinatensystem gegebenen Wegbeschreibung gehören eine Reihe von **typischen Problemsituationen**, die man für konkrete Beispiele/Fälle erkennen und behandeln sollte:

♦ (K) Lege in einer bestimmten Situation ein zugehöriges geeignetes Koordinatensystem fest.

♦ $(\vec{x}, K) \longmapsto \vec{x}^K$ Bestimme zu einem gegebenen Pfeil den Koordinatenvektor

♦ $(\vec{x}^K \longmapsto \vec{x})$ Bestimmen zu einem gegebenen *Koordinatenvektor den geometrischen Pfeil*

(graphische Konstruktion / Betrags- und Richtungsbestimmung)

♦ Wandle eine geometrische Konfiguration in eine vektorielle Formel um.

♦ (K$\longmapsto L$) Darstellungswechsel. D.h.: ein und derselbe Pfeil soll durch unterschiedliche Wege darstgestellt / beschrieben werden. Wie übersetzt man eine Darstellung in die andere?

4 Die Rechenoperationen für Vektoren

(4.0) Mit Hilfe dieser einzuführenden Vektoroperationen werden die erstrebten Formeln für Vektoren gebildet! Beachten Sie: Wie die Einführung der Koordinaten zeigte, haben diese Formeln in der Regel unmittelbare geometrische Bedeutung.

■■ (4.1) **Vektoraddition:** ***Die Parallelogrammkonstruktion***

Zwei geometrische Pfeile (Typ "kürzester Weg") können mit Hilfe der Parallelogrammregel zu einem Weg desselben Typs verknüpft werden.

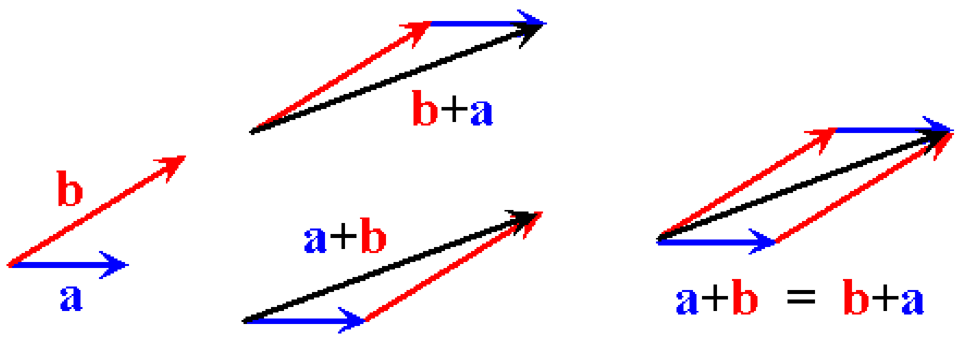
♦ Gegeben zwei geometrische Pfeile $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sowie ein Ursprung O.

♦ Starte mit $\vec{x}$ vom Ursprung.

♦ Gehe vom Endpunkt von $\vec{x}$ mit $\vec{y}$ weiter.

♦ Verbinde O mit dem (neuen) Endpunkt von $\vec{y}$

♦ Der so entstehende Pfeil wird mit $\boxed{\vec{x}+\vec{y}}$ bezeichnet.



Bemerkung: Es gilt $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, weil die Konstruktion eine gemeinsame Parallelogrammdiagonale ergibt.

☐ Begründen Sie konstruktiv (in der Ebene), dass $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ gilt.

(4.1a) **Vektoraddition: *Tupelrechnen - komponentenweise Addition***

Für Zahlpaare oder Zahltripel liegt die folgende Rechenweise nahe.

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$

Das beschreibt offensichtlich das Hintereinaderschalten achenparalleler Koordinatenwege

(4.1b) ■ **Die Verbindung der beiden Rechenarten!**

Es seien $\vec{a}^K = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}^K = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Koordinatenvektoren. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die zugeörigen geometrischen Pfeile. Wir bilden den Summenpfeil $\vec{a}+\vec{b}$. Dann gilt

$$\boxed{(\vec{a}+\vec{b})^K=\vec{a}^K+\vec{b}^K}$$

☐ Begründen Sie das genauer.

(4.2) ■■ **Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar *Längenänderung der Pfeile***

Geometrisch geht es um Folgendes: Es sei a eine Zahl und $\vec{x}$ ein geometrischer Pfeil. Dann soll a$\vec{x}$ den geometrischen Pfeil bezeichnen, der dieselbe Richtung, aber die a-fache Länge hat. Ist a negativ, dann soll a$\vec{x}$ zu $\vec{x}$ entgegengesetzt gerichtet sein. Ist a=0, dann entsteht der Nullpfeil.

Beschreibt man $\vec{x}$ duerch einen achsenparallelen Weg, dan wird jedes einzelne Wegstück um a velängert. D.h. man hat Auch bei dem achsenparallelen Wegen wird jede Wegstrecke um a verlängert.

(4.2a) Führt man daher die komponentenweise Tupelrechnung wie folgt ein

$$\mathrm{a}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{a}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{pmatrix}$$

dann folgt die folgende Verbindungsformel zwischen Pfeilen und Koordinatenvektoren

$$\boxed{(\mathrm{a}\vec{x})^K = \mathrm{a}\vec{x}^K}$$

(4.2b) Mit (4.1b) folgt folgende wichtige Regel:

$$\boxed{(\mathrm{a}\vec{x}+\mathrm{b}\vec{y})^K = \mathrm{a}\vec{x}^K + \mathrm{b}\vec{y}^K}$$

(4.3) Meist werden wir vektorielle Formeln über die folgenden Schritte bestimmen:

♦ Zunächst wird geometrisch ein Weg über eine Skizze konstruiert.

♦ Dann wird daraus die zugehörige Formel für Pfeile gebildet.

♦ Ein günstiges kartesisches koordinatensystem wird eingeführt (oder ist bereits vorhanden)

♦ Mit Hilfe von (4.2b) wird zu den Koordinatenvektoren übergegangen und mit diesen wird weitergerechnet.

☐ Numerische Rechenbeispiele!

☐ Verdeutlichungsbeispiele: Zykloide, Parabelbrennpunkt!

---

5 Das Skalarprodukt zweier Vektoren:

(5.1) Das Skalarprodukt ist eine Konstruktion, die aus zwei Vektoren eine Zahl macht. Und mit Hilfe dieser Zahl wieder kann man wichtige geometrische Eigenschaften der beiden hineingesteckten Vektoren bestimmen.

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die beiden hineigesteckten Vektoren, dann ist

$\boxed{(\vec{a}\cdot\vec{b}) \text{ eine Bezeichnung für herauskommende Zahl}}$, also das Skalrprodukt der beiden Vektoren!

Genauer: Mit Hilfe des Skalarproduktes kann man

- Die Länge eines Vektors bestimmen,
- Einen Vektor $\neq \vec{0}$ zu einem Einheitsvektor machen
- Den Winkel zwischen zwei Vektoren $\neq \vec{0}$ bestimmen
- Einen Vektor in die zu einem zweiten Vektor $\neq \vec{0}$ senkrechte und parallele Komponente zerlegen
- ...und vieles mehr.

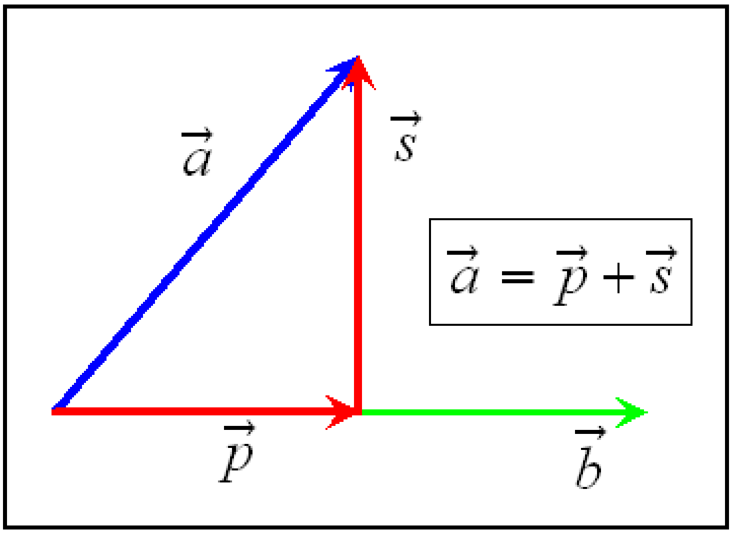
(5.2) Die **Berechnung des Skalarproduktes** kann kann mit Hilfe aller drei eingeführten Wegdarstellungen der Vektoren erfolgen. Hierzu gehören die folgenden Formeln, die man meist mehrschrittig realisieren sollte:

Betrag (Länge) des Vektors $\vec{a}$	$\boxed{\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})}}$	$\vec{a}^2 = (\vec{a}\cdot\vec{a})$ andere Schreibweise
Geometrische Form (für geom.Pfeile)	$\boxed{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta}$	
Komponentenform Für Berechnung mit Koordinatenvektoren	$\left(\vec{a}^K\cdot\vec{b}^K\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$	
Verbindung	$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{a}^K\cdot\vec{b}^K\right)$	K kartesisches Koordinatensystem
Polardarstellung	Für $\vec{R} = R\cdot\vec{e}_r(\varphi)$ ist $\lvert\vec{R}\rvert = R$	

(5.3) Und jetzt die Formeln für die wichtigsten Anwendungen des Skalarproduktes:

Länge des Pfeiles $\vec{a}$	$\boxed{\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})} = \sqrt{\vec{a}^2}}$	oder $\lvert\vec{a}\rvert^2 = \vec{a}^2$
Einheitsvektor zu $\vec{a} \neq \vec{0}$	$\boxed{\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{\lvert\vec{a}\rvert}\vec{a}}$	$\vec{e}_{\vec{q}}$ hat dieselbe Richtung wie $\vec{a}$, aber die Länge 1
Winkel θ zwischen $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$	$\boxed{\cos\theta = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}}$	
"senkrecht"	$\left(\vec{a} \text{ steht senkrechet auf } \vec{b}\right) \Leftrightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0$	

(5.4) Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien gegeben mit $\vec{b} \neq \vec{0}$. Nun soll $\vec{a}$ in eine zu $\vec{b}$ parallele und eine dazu senkrechte Komponente zerlegt werden. Das geschieht wie folgt (Skizze - Formeln)



$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{p} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\vec{b}^2}\vec{b} \\ \vec{s} = \vec{a} - \vec{p} \end{array}}$$

Die beiden Formeln der rechten Seite zeigen, wie man nacheinander mit bereits vorhandenen Größen die beiden gesuchten Größen bestimmt!

Der geometrische Pfeil $\vec{a}$ wird ersetzt durch einen Weg, der zuerst in Richtung $\vec{b}$ geht und dann in einer dazu senkrechten Richtung.

(5.5) Beispiele zur Erläuterung der Formeln und zugleich als Beispiel sinnvollen rechnerischen Vorgehens.

☐ Sei $\vec{a}^K = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Wie groß ist der Winkel α zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

▼

- (1) Die allgemeine (zu verwendende) Formel $\boxed{\cos(\alpha) = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert} = \frac{(\vec{a}^K\cdot\vec{b}^K}{\lvert\vec{a}^K\rvert\lvert\vec{b}^K\rvert}}$
- (1a) Man benötigt: $\boxed{(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}^K\cdot\vec{b}^K) = 4}$ und $\boxed{\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{a}^K\rvert = \sqrt{14}}$ und $\boxed{\lvert\vec{b}\rvert = \lvert\vec{b}^K\rvert = \sqrt{3}}$
- (2) Einsetzen $\boxed{\cos(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{42}}}$

- (2a) Also $\boxed{\alpha = \arccos \frac{4}{\sqrt{42}} \approx 0.9}$ ▲

(1a) kann noch fortgelassen werden, Zahlwerte im Kopf und direkt in die Formel einsetzen. Ebenso wird (2a) vielfach nicht benötigt. Es genügt dann, cosα zu anzugeben.

.

☐ Sei $\vec{a}^K = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zerlegen Sie $\vec{a}$ in die zu $\vec{b}$ parallele und senkrechte Komponente und dann $\vec{b}$ in die zu $\vec{a}$ parallele und senkrechte Komponente

▼

- (1) Die zu verwendenden Formeln sind im ersten Fall (in der zu verwendenden Reihenfolge, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 1 + 3 = 4$ usw.)

$$\vec{p}_b = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\vec{b}^2}\vec{b} \qquad \vec{s}_b = \vec{a} - \vec{p}_b \qquad \vec{a} = \vec{p}_b + \vec{s}_b$$

- (2) Das gibt nacheinander:

$$\vec{p}_b^K = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_b^K = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a}^K = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}}$$ Die erste Zerlegung

- Probe: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4+2 \\ -4+7 \\ 4+5 \end{pmatrix} = \vec{a}^K$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 - 7 + 5 = 0$

- Und die zweite Zerlegung :

$$\vec{p}_a = \frac{4}{14}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{b} = \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}}$$ Die zweite Zerlegung

- Probe: $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4+3 \\ 2-9 \\ 6+1 \end{pmatrix} = \vec{b}^K$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 - 9 + 3 = 0$ ▲

---

6 Anwendung: Die vektorielle Beschreibung einfacher geometrischer Figuren

(6.1) Genauer liegen zwei Probleme vor:
a) Bestimmung der **Lage einer Figur** (Kreis, Würfel, Gerade usw.) im Raum.
b) Angabe **der Ortsvektoren aller Punkte einer gegebenen Figur**

(6.2) Wir betrachten hier b)
Die Lösung des Problems erfolgt durch Aufzählung ("Parametrisierung") aller Ortsvektoren bzw. Koordinatenvektoren, deren Endpunkte die Figur ausmachen!

♦ Allgemeine **Idee:** Man gibt jedem Punkt der Figur F einen Namen in Form einer Zahl oder eines Zahltupels α, derart, dass diese Zahl oder dieses Zahltupel einen (eindeutig konstruierbaren) geometrischen Weg vom Ursprung zum betrachteten Punkt festlegt. Dann formuliert man die Gleichung

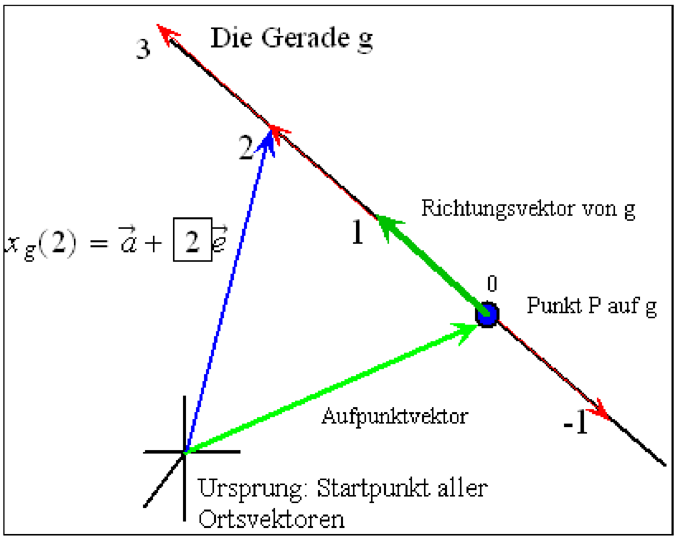
$$\vec{r}_F(\alpha) = ..\text{Vektorausdruck des Weges}$$

Links steht die Bezeichnung des betrachteten Ortsvektors, rechts der gewählte zugehörige Rechenweg.

♦Die Zahlen oder Zahltupel α nennt man "Parameter" und den gesamten Vorgang eine "Parametrisierung der Figur". (Eigentlich "Parametrisierung der Punkte der Figur")

(6.4) Erstes. Beispiel: **Eine Gerade g im Raum.**

Man verschafft sich einen Punkt P auf der Geraden mit Ortsvektor $\vec{x}_p$ sowie einen Richtungsvektor $\vec{d}$ in Richtung der Geraden. Dann hat man folgenden Weg: Vom Ursprung nach P und von dort weiter zum Endpunkt von $\alpha\vec{d}$.



Vorgaben
(Was man benötigt)
$\vec{x}_P$, $\vec{d}$

Wegkonstruktion
für alle Punkte
auf der Geraden

Formelbau	
$\boxed{\vec{x}_g(a) = \vec{x}_P + a\vec{d}}$	
$\vec{x}_g(a)$	Bezeichnung
$\vec{x}_P + a\vec{d}$	Berechnungsverf.

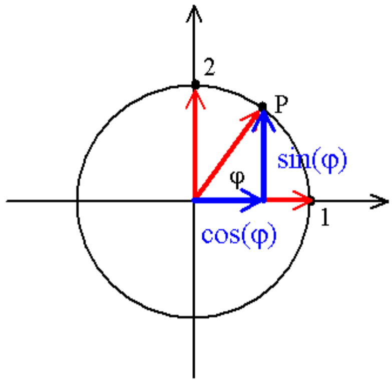
Programm $\boxed{??}$ $\boxed{\vec{x}_g(3)}$ bezeichnet den Ortsvektor des Punktes auf g,....und die rechte Seite

$\boxed{\vec{x}_P + 3\vec{d}}$ erlaubt die Berechnung dieses Ortsvektors!

☐ Wie beschreibt man vektoriell eine gerdalinig gleichförmige Bewegung?

(6.5) Zweites Beispiel: **Die Vektoren des Einheitskreises** und die Beschreibung der gleichförmigen Kreisbewegung

b



Als Parameter wählen wir den Winkel φ des Ortsvektors $\vec{x}_P$ mit der 1-Achse. Dann wissen wir

$$\boxed{\vec{e}_r(\varphi) = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi}$$

Oder als Koordinatenvektoren

$$\vec{e}_r^{\,K}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Das ist bereits die gesuchte Parametrisierung. Hat der Kreis den Radius R, dann ist ein Faktor R anzubringen. Liegt der Mittelpunkt nicht im Ursprung, sondern An einem Ort mit Ortsvektor $\vec{M}$, dann ist ein Summand $\vec{M}$ anzubringen.

☐ Was für ein Kreis wird durch die folgende Parametrisierung beschrieben

$$\vec{x}^K(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 + 2\cos(\alpha) \\ -1 + 2\sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad ?$$

Kreisbeschreibung ohne Koordinaten

$$\vec{r}(\alpha) = \vec{R}_0 + \mathrm{r}(\vec{e}\cos(\alpha) + \vec{f}\sin(\alpha)) \qquad \begin{array}{l} |\vec{e}| = |\vec{f}| = 1 \\ (\vec{e} \cdot \vec{f}) = 0 \end{array}$$

☐ Wie erhält man alle Punkte des Einheitskreises (Fläche mit Rand)?

▼

♦Wähle eine Zahl zwischen 0 und 1. Genauer $0 \leq r \leq 1$.

♦ Wähle einen Winkelwert zwischen 0 und 2π. Genauer $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

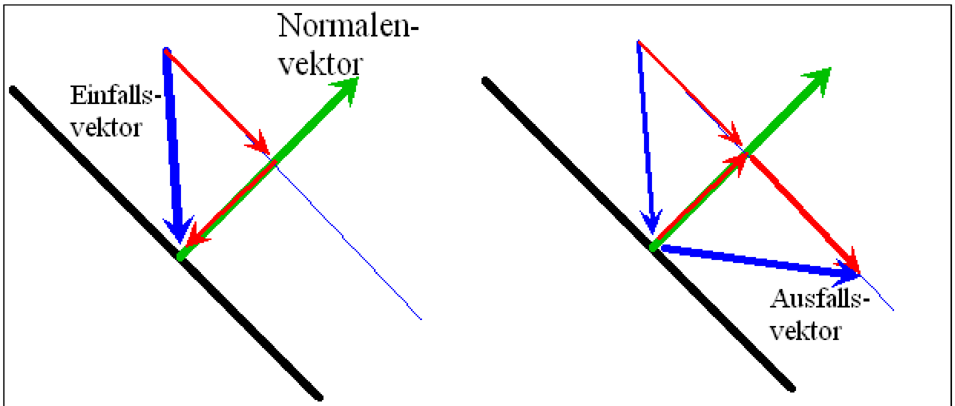
♦ Laufe den zugeörigen polaren Weg.

♦♦ Tut man das auf alle möglichen Weisen, erhält man alle gesuchten Punkte (zum Teil mehrfach!)

☐ Und im Raum?   Einheitskugel / Alles durch zwei Winkel beschreiben!

(6.6) Vektorielle Form des Reflexionsgesetzes

Man zerlegt den Einfallsvektor $\vec{e}$ in die zur reflektierenden Ebene senkrechte und parallele Komponente. Das gibt den links gezeichneten Weg $\vec{e} = \vec{s} + \vec{p}$. Damit folgt der rechts gezeichnete Weg für den reflektierten Ausfallsvektor. $\vec{r} = -\vec{p} + \vec{s}$. Die Kongruenz der beiden Dreiecke sichert *Einfallswinkel=Ausfallswinkel.*



$\vec{e} = \vec{s} + \vec{p}$	$\vec{r} = -\vec{p} + \vec{s} = (\vec{s} + \vec{p}) - 2\vec{p}$	$\vec{r} = \vec{e} - 2\vec{p}$