System: Das mathematische Pendel

Verhaltensbeschreibung durch eine Formel (für die Größen)
Zugang zur Formel
Nutzung der Formel
Näherung
Datennahme
Beispiel für modulares Vorgehen

Benötigtes und Benutztes:

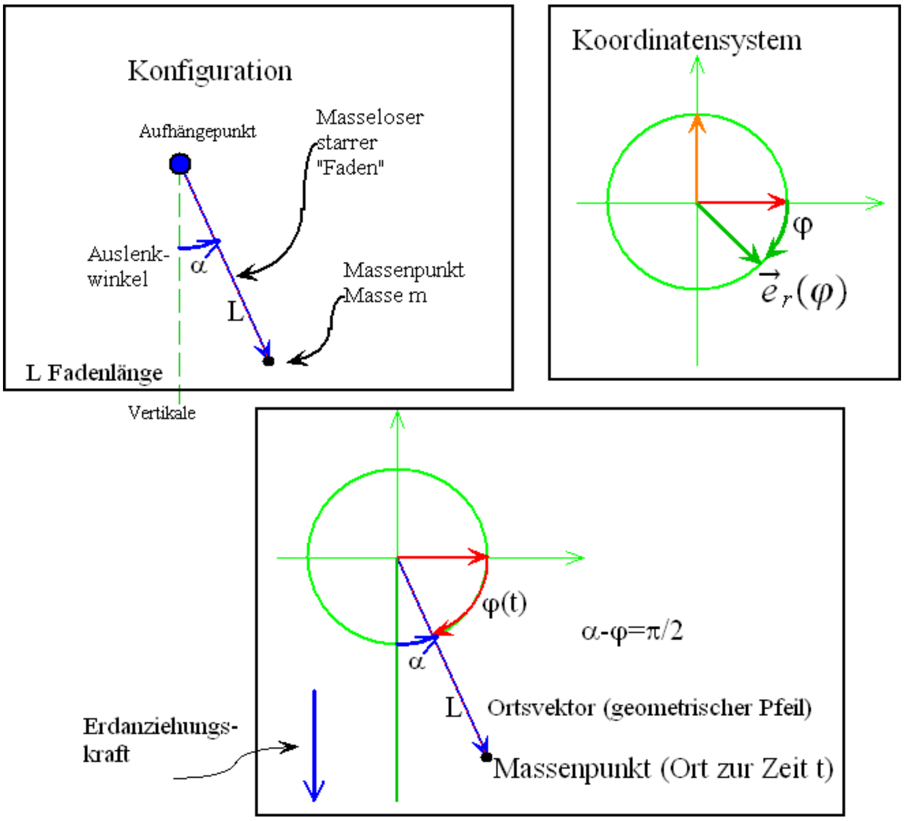
- - (Winkel im Bogenmaß)
  - Trigonometrische Funktionen
  - Ortsvektor: Polare Wegdarstellung und zugehörige Formeldarstellung
  - Änderungsrate: Geschwindigkeit, Winkelgeschwindigkeit

Übersicht über das Vorgehen zur Herleitung der Formel
Auch wenn man einzelne dieser Schritte nicht beherrscht, man kann doch verstehen was sie jeweils leisten und das (modular) in das Gesamtbild einbauen!

- (a) Die Systemidealisierung in einer Skizze "ganzheitlich" zusammenfassen . Benötigt wird der Auslenkwinkel $\alpha(t)$.
- (b) Die Vektorrechnung liefert eine Formel für den interessierenden Ortsvektor $\vec{r}(t)$ zu gegebenem $\alpha(t)$. Darstellung von $\alpha(t)$.
- (c) Newton liefert eine Bestimmungsgl. für $\vec{r}(t)$. Mit Hilfe von (b) wird daraus eine Differentialgleichung für $\alpha(t)$
- (d) Mathematik behandelt die Lösung der Dgl. Numerisch ist sie (bei gegebenen Anfangsbedingungen) einfach zu lösen. Eine exakte Lösungsformel ist problematisch und schwierig. Vergleich mit Experiment.
- (e) Üblich und nützlich ist eine Näherung des Problems für kleine Winkel: Es entsteht ein einfach behandelbares Differentialgleichungsproblem. (Oszillator)
- (f) Eine alternative Auswertung von (d) bzw (e) liefert jeweils eine Formel für die Periode oder Schwingungsdauer (Eine physik. interessante Größe). **Nur die Formel zu (e) ist einfach**.
  - Interpretation und Diskussion der Formel zu (e)
  - Anwendungen - Aufgaben
  - Vergleich mit dem Experiment
- Wie gut ist die Näherung? Zugehörige Diskussion
- Datengewinnung und -auswertung

Zu a): Die folgende Figur enthält die idealisierte Konfiguration, das benutzte Koordinatensystem (ebene Polarkordinaten) und zusammengesetzt die daraus folgende Vektorbeschreibung. Die interessierende Beobachtungsgröße ist der Auslenkwinkel α, der sich mit der Zeit ändert. Also die Funktion $\alpha = \alpha(t)$.

Sie vorherzusagen ist hier das zentrale physikalische Problem. Sobald man diese Funktion kennt, liefert die Figur den Ortsvektor $\vec{r}$ des Pendelpunktes zur Zeit t, also $\vec{r}(t)$. Und das ist die Größe, aus der man mathematisch alle weitere Information folgt.



Zu b) Wir finden mit Hilfe der Figur und den Formeln zu den Polarkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= L \cdot \vec{e}_r(\varphi(t)) = L \cdot \vec{e}_r(\frac{\pi}{2} - \alpha(t)) \\
&= L \cdot (\vec{e}_1 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha(t)) + \vec{e}_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha(t))) \\
&= L \cdot (\vec{e}_1 \sin(\alpha(t)) - \vec{e}_2 \cos(\alpha(t)))
\end{aligned}
$$

Schritte (c-e) später! Jetzt gleich zu f)
Aber beachte:

> **Das mit der Idealisierung verbundene mathematische Modell bestimmt $\varphi(t)$ bei gegebenen Startwerten für alle Ewigkeit vollständig. Und damit auch alle abgeleiteten Größen wie etwa die Schwingungsdauer.**

Zu (f):

Zunächst interessiert die Schwingungsdauer. Das ist die kleinste Zahl T>0, für die $\vec{r}(t) = \vec{r}(t+T)$ gilt. D.h. das Pendel befindet sich zum späteren Zeitpunkt an demselben Ort mit derselben Geschwindigkeit.

Zusammenstellung der **Beschreibungsgrößen des idealen Systems** (äußere Parameter, ergänzt noch a)) :

- – Pendellänge L [m]
  – Pendelmasse m [kg]
  – Erdbeschleunigung g [m/s^2]

Wichtigste Beschreibungsgrößen des (jeweiligen) **Systemzustandes:**

- – Maximaler Auschlagswinkel φ_0
  – Maximale Geschwindigkeit (am tiefsten Punkt) v_0.
  – Periode oder Schwingungsdauer T=T_z. (Kleinstes T>0 mit $\varphi(t+T) = \varphi(t)$)
  – Erwartung: Wie sollte sich das System qualitativ verhalten????

Das Resultat: **Für kleine Schwingungen findet man näherungsweise**

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Vertrautmachen:

- – Einheitenkonsistenz: $\sqrt{\frac{m}{\left(\frac{m}{s^2}\right)}} = s$ stimmt.
  – Monotonieverhalten in L und g wie erwartet.
  – T ist unabhängigkeit von m! Bedeutung, Experimente.
  – Dies T ist unabhängig von φ_0.
  – Typische Aufgaben: □ Länge des Sekundenpendels / Handexperiment (Stabil gegen Bewegung der Hand?? / Schwingungsdauer auf Neutronenstern
  – In der Hierarchie *Nach oben (Verallgemeinerung):* Periodische Bewegungen

---

Wie gut ist die Näherung?

Sei $k^2 = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$. Dann folgt die exakte Schwingungsdauer in Form einer unendlichen Reihe: :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + k^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + k^4\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 + k^6\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + ...\right)$$

Bessere Form

$$\begin{aligned} T &= T_0\left(1 + k^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + k^4\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 + k^6\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + ...\right) \\ T &= \underbrace{T_0}_{\text{Bezugsdauer}} \quad \underbrace{(....)}_{\text{Korrekturfaktor}} \end{aligned}$$

Eine exakte elementare Formel für die gesamte Reihe ist leider nicht unmittelbar verfügbar. **Näherung** durch die ersten Beiträge der Reihe.

Bezeichnungen:

$$T_1 = T_0\left(1+k^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \quad \text{und damit} \quad \mathrm{T}_1 - T_0 = T_0 \cdot k^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$T_2 = T_0\left(1+k^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + k^4\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\right) \quad \text{und damit} \quad \mathrm{T}_2 - T_0 = ...\text{usw.}$$

Wie gut ist die jeweilige Näherung???

- – T ist **immer** unabhängig von m. (Legt was für ein Experiment nahe?)
  – Für kleine φ_0 ist T auch (näherungsweise) unabhängig von φ_0. Experiment? Frage: Wie beschreibt man den Fehler quantitativ?

Fehlerbeschreibung: Zunächst für die Näherung von sinφ durch φ.

T,T_0	Wert und Näherungswert
T-T_0	absoluter Fehler
$\frac{T-T_0}{T_0}$ $\left(\text{oder} \quad \frac{T-T_0}{T}\right)$	**relativer Fehler**

Maximaler Ausschlag φ_0. Länge L=1m. wie groß ist die Ausschlagsweite Lsinφ_0 ??

\\φ_0	0.01	0.1	0.2	0.5	1
Lsinφ_0	9.9998×10^{-3}	9.9833×10^{-2}	0.198 67	0.479 43	0.841 47
Lφ_0	0.01 (dh. 1cm)	0.1 d.h. (10cm)	0.2	0.5	1
L$\frac{\sin(\varphi_0)-\varphi_0}{\sin\varphi_0}$	-1.6×10^{-5}	-1.7×10^{-3}	-6.7×10^{-3}	-4.3×10^{-2}	-0.19
L$\frac{\sin(\varphi_0)-\varphi_0}{\varphi_0}$	-1.6×10^{-5}	-1.7×10^{-3}	-6.7×10^{-3}	-4.1×10^{-2}	-0.16
$\mathrm{k}^2 = \sin^2\varphi_0$	1×10^{-5}	$1{\times}10^{-3}$	$4{\times}10^{-2}$	0.2	0.71

☐Die Korrekturen für die Schwingungsdauer graphisch darstellen:

☐ Wie ändert sich die Schwingungsdauer, wenn sich die Pendellänge um 10% vergrößert?

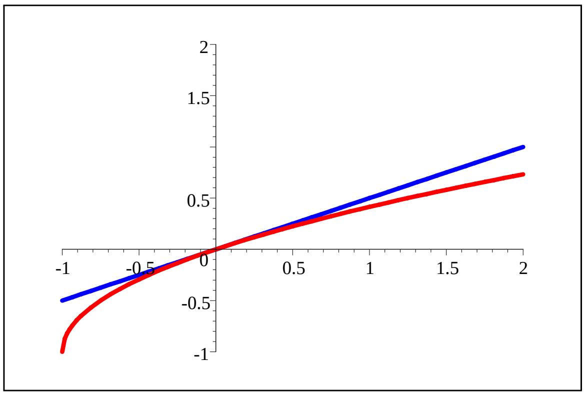
$$\Delta T = 2\pi\left(\sqrt{\frac{L(1+\alpha)}{g}} - \sqrt{\frac{L}{g}}\right) \quad \text{Einsetzen, absol. Änderung}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\sqrt{1+\alpha}-1\right) \quad \text{Umformen} \quad \mathrm{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \sqrt{1+\alpha} - 1 \approx \frac{1}{2}\alpha$$

Endform für **relative Änderung** samt Näherung für kleine α.

Das Bild zeigt die relative Änderung im Bereich $-1 < \alpha < 1$ samt der Näherung (blau)



Die Aufgabe verlangt $\alpha = 0.1$. Also $\frac{\Delta T}{T_0} \approx 0.05$, was einer Änderung von 5% entspricht.
(Exakter Wert $\sqrt{1.1} - 1 = 0.049$)