

2.4 Das Brechungsgesetz

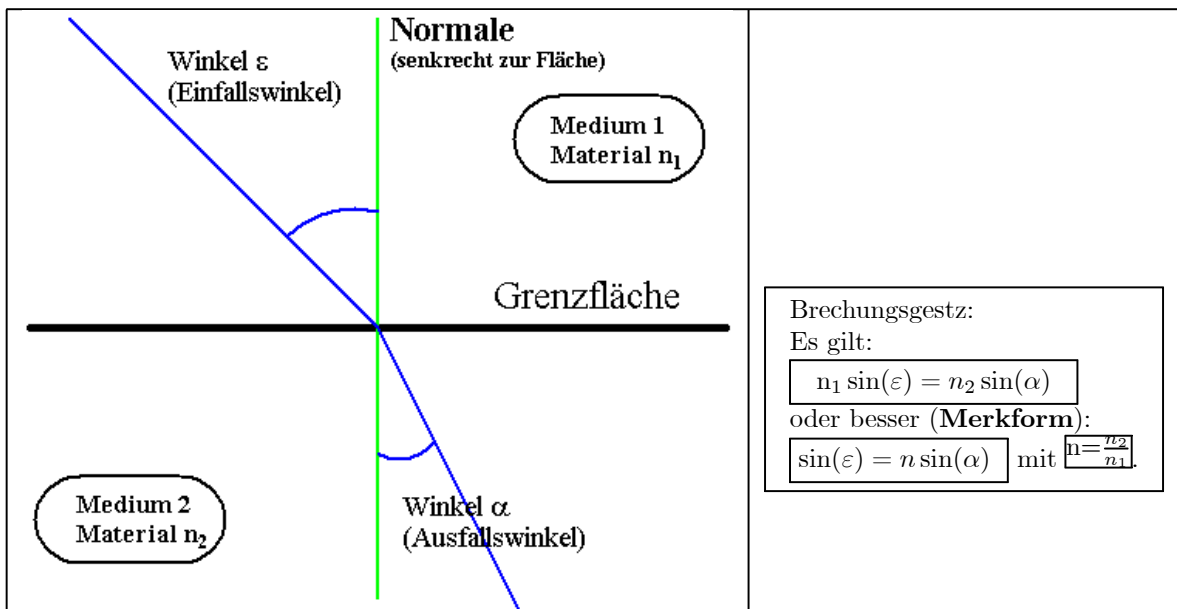
Dieses Gesetz erfasst eine zweite Art von Wechselwirkung von Lichtes mit Materie: Beim Durchgang durch inhomogene Materie verändert der Lichtstrahl (u.U) seine Richtung! (Fata Morgana,.....) Das Gesetz selbst beschreibt, wie sich die Richtung des Lichtstrahles beim Durchgang durch eine scharfe Stoffgrenze (etwa Luft-Wasser) ändert.

(2.4.1) Vorbemerkungen zur Geschichte des Brechungsgesetzes. Die Schwierigkeit, das Gesetz zu finden!!

Übersicht: Zugang zum Gesetz

Umfeld	Formulierung	Anwend.	Begründ.
Geschichte Phänom.	Merken Skizze Mathem.	3x

(2.3.2) Skizze zur Geometrie des Gesetzes



$$n_1 \sin \varepsilon = n_2 \sin \alpha$$

ε Einfallswinkel
 α Ausfallswinkel

Übliche Rollen:

n_1, n_2

ε

α

äußere Parameter.

unabhängige Variable

abhängige Variable

n_1 und n_2 sind *Materialkonstanten*. ("Absoluter Brechungsindex") Sie hängen von der Art der beteiligten Stoffe und deren Temperatur ab. Schließlich hängen sie auch von der Art des gewählten Lichtes (dessen Wellenlänge) ab.

(2.4.2) Damit ist sowohl die Richtung weiterer experimenteller wie auch theoretischer Arbeit klar:

- Experimentelle Bestimmung der Brechungsindizes !
- Theoretische Erklärung, besser vorhersagende Berechnung für einzelne Materialien
- Klärung der Abhängigkeit von weiteren Parametern wie Temperatur, Wellenlänge,....

Dagegen hängen bei festen Materialien die Winkel α und ε nur von der geometrischen Konfiguration des Lichtstrahles ab.

(2.4.3) Wir geben alle Winkel im Bogenmaß an. Einstellung des Modus für Bogenmaß am Taschenrechner Umrechnungsformel:

$$\frac{\alpha_{Bogen}}{2\pi} = \frac{\alpha^0}{360} \quad \alpha_{Bogen} = \underbrace{\frac{2\pi}{360}}_{0.017} \alpha^0 \quad \alpha^0 = \underbrace{\frac{360}{2\pi}}_{57} \alpha_{Bogen}$$

und einige Beispiele

α^0	α_{Bogen}	α_{Bogen}
1^0	0.017	
45^0	0.78	$\frac{\pi}{4}$
57^0	1	1
90^0	1.57	$\frac{\pi}{2}$

(2.4.4) Wir haben $n = \frac{n_2}{n_1} \geq 1$ gesetzt. Das ist der relative Brechungsindex. $n > 1$ besagt, $n_2 > n_1$. dann ist 2 das optisch dichtere Medium. Ist Medium 1 das Vakuum, dann ist $n_1 = 1$ und wir haben $n = n_2$. Für Luft ist der Index auch fast 1. Zur Orientierung geben wir einige Beispiele:

$n_{Luft} \approx n_{vac} = 1$
$n_{Wasser} = 1.33$
$n_{Diamant} = 2.42$

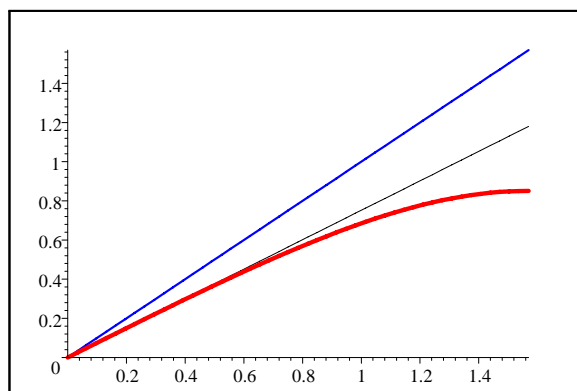
(2.4.5) Wie wirkt sich das Gesetz geometrisch aus? Angenommen wir haben $n > 1$. Dann wird der ausfallende Strahl zur Normalen hin "abgelenkt" oder gebrochen. Das folgende Konkretisierungsbeispiel erläutert diese Verkleinerung des Ausfallwinkels:

$\overset{\leq 1}{\sin(\varepsilon)} = \overset{> 1}{n} \cdot \overset{\text{noch kleiner..}}{\sin(\alpha)}$	
$0.8 = 1.5 \cdot 0.533..$	Konkretisierung
$\arcsin(0.8) = 0.927$	Die beiden Winkel
$\arcsin(0.5333) = 0.562$	

(2.4.6) Jetzt einige Umformungen des Gesetzes $\sin(\varepsilon) = n \sin(\alpha)$
Zuerst lösen nach dem vielfach gesuchten Ausfallswinkel auf:

$\sin(\varepsilon) = n \sin(\alpha)$	$\sin(\alpha) = \frac{1}{n} \sin(\varepsilon)$	$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin(\varepsilon)\right)$
--------------------------------------	--	--

Für Wasser mit $n=1.33$ ergibt das graphisch, wobei wir den unveränderten Winkel noch blau einzeichnen



Für kleine α gilt $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$. Das bedeutet, dass für kleine Einfallswinkel $\alpha \approx \frac{1}{n} \varepsilon$ gilt. In der Figur ist das schwarz mit eingezeichnet. Wir sehen, dass dies für kleine Winkel das Gesetz gut wiedergibt.

Alle Winkel $\sin(\alpha) = \frac{1}{n} \sin(\varepsilon)$	Für kleine Winkel $\alpha \approx \frac{1}{n} \varepsilon$
---	---

- (2.4.7) Was ergibt das Brechungsgesetz für $n=1$? Für $n=\infty$?
- (2.4.8) Geben Sie eine Formel für den "Ablenkwinkel" an. (Wie ist das in der Figur zu interpretieren?)
- (2.4.9) Bestimmen Sie eine vektorielle Formel für den Richtungsvektor des gebrochenen Strahles. Zunächst: Wie muss die aussehen, was muss sie leisten? Die Herleitung selbst ist anspruchsvoller.
- (2.4.10) Denken Sie sich einfache Aufgaben mit unterschiedlicher Rollenverteilung für die vier Größen des Gesetzes aus.
- (2.4.11) Im "optisch dichteren Medium" (das, mit dem größeren n) gibt es das Phänomen der **Totalreflexion**. D.h. der (dortige) Ausfallswinkel (mit der Normalen) kann einen bestimmten Grenzwert nicht überschreiten. Kommt der Lichtstrahl umgekehrt aus dem dichteren Medium, dann wird er an der Grenzfläche vollständig reflektiert! Wie lautet die Formel für diesen Grenzwinkel? Wie groß ist der Grenzwinkel im Fall von Wasser und von Diamant? Wie liest man ihn aus obiger Figur ab?
- (2.4.12) Lichtquelle in Diamant mit ebener Oberfläche. Wieviel Prozent des Lichtes dringt nach aussen? Was für eine Formel wird benötigt? Oder: Wieviel wird total reflektiert? Was wird vernachlässigt?

Begründungen des Brechungsgesetzes:

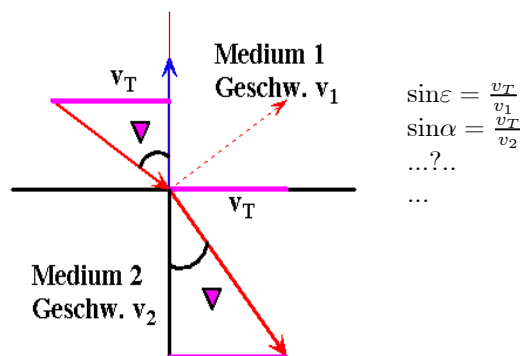
Man findet üblicherweise drei Herleitungen unterschiedlicher Art, die alle von ausgesprochen unterschiedlichen (allgemeineren) Voraussetzungen ausgehen.

(2.4.13) 1. Herleitung: über das Korpuskelmodell des Lichtes: **D.h. Richtung des Lichtstrahles gleich Richtung der vektoriellen Geschwindigkeit!**

An der Grenzfläche wird auf die Korpuskel eine Kraft in Richtung der Normalen ausgeübt, die die Teilchen für $n > 1$ in das zweite Medium "hineinzieht"! Dann ändert sich die Normalkomponente der Geschwindigkeit, nicht aber die der Tangentialkomponente. Aber: Eine Vergrößerung der Normalkomponente gibt Vergrößerung der Gesamtgeschwindigkeit.

Die Figur zeigt:

$$n = \frac{v}{v_T} \quad \text{"Erhaltung der Tangentialkomponente!"}$$



- Führen Sie die Rechenschritte zur Figur weiter aus. Ergebnis ist das Brechungsgesetz mit einer zusätzlichen inhaltlichen Interpretation des Brechungsindex:

$$\sin \varepsilon = n \sin \alpha \quad \text{mit} \quad \boxed{n = \frac{v_2}{v_1}}$$

Konsequenz: Lichtgeschw. im optisch dichteren Medium ist 2 größer als in 1. Oder $v_2 > v_1$Das stimmt nicht mit der Erwartung überein und auch nicht mit dem Experiment! Damit haben wir ein erstes Argument gegen die Teilcheninterpretation des Lichtes!

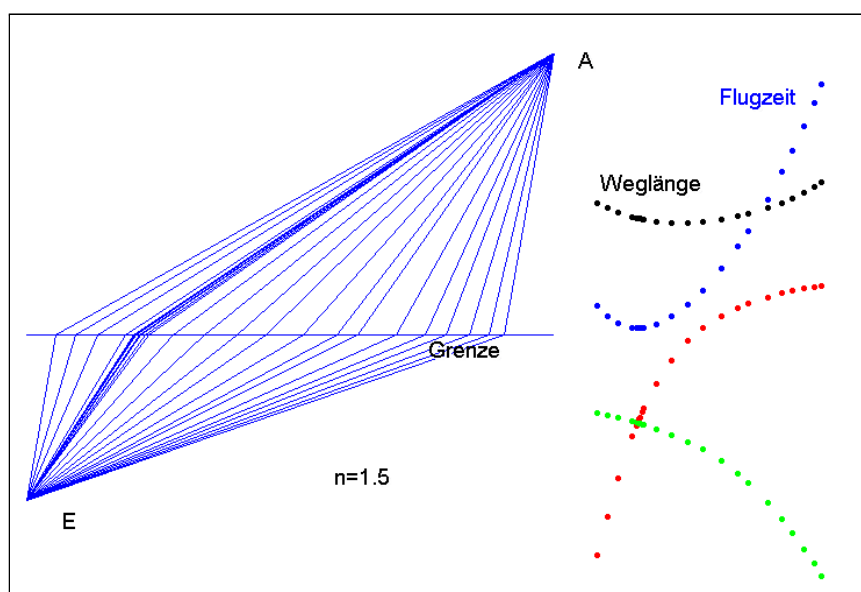
■ (2.4.14) Übung: Wie groß sollte hiernach die Lichtgeschw. v in Diamant im Vergleich Vakuumlichtgeschwindigkeit sein?

(2.4.15) 2. Herleitung Sie erfolgt im Wellenbild des Lichtes und gibt für den Brechungsindex ein plausibleres Resultat, nämlich

$$n = \frac{v_1}{v_2}$$

(2.4.16) 3. Herleitung Über das Fermatsche Prinzip. Auch hier ergibt sich die zweite Formel für den Brechungsindex.

Hier werden Anfangs- und Endpunkt des Lichtweges vorgegeben. Das Licht habe überall eine bestimmte, eventuell ortsabhängige Geschwindigkeit. Man berechnet für jeden denkbaren Lichtweg vom Anfangs- zum Endpunkt die Zeit aus, die das Licht benötigt. Der tatsächliche physikalische Weg ist der, der am wenigsten Zeit benötigt. In einem homogenen Medium mit konstanter Lichtgeschwindigkeit ist das die kürzeste Verbindung. Grenzen zwei Medien mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinandern, folgt das Brechungsgesetz mit derselben Formel für den Brechungsindex wie im Wellenmodell!



In der Figur sind verschiedene Lichtbahnen von A nach E eingezeichnet. Rechts daneben blau die zugehörige Flugzeit und schwarz die Bahnlänge. (rot und grün noch die Flugzeit für die beiden Teilstrecken). Die Bahn mit der kürzesten Flugzeit befindet sich im Bereich mit der Bahnverdichtung. Sie erfüllt das Brechungsgesetz für $n=1.5$ und ist nicht gleich der kürzesten Verbindung von A mit E. Plausibel: Im Medium mit der kleinen Geschwindigkeit - unten- fliegt das Teilchen nur eine kürzere Strecke! . .

□ (2.4.17) Zur vektoriellen Bestimmung der Richtung des gebrochenen Strahles. Wie immer stellt sich hier die Frage, wie man das Koordinatensystem legt. Es liegt nahe, dieses so zu legen dass Einfall- und Ausfallrichtung beide in der x-y-Ebene liegen und dass weiter die horizontale Achse (x-Achse) mit der Grenzlinie zwischen den beiden Medien übereinstimmt. Leiten sie diese Formel her mit nachfolgenden Vorgaben her

Ein Richtungsvektor des einfallenden Strahles: $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$

und $y=0$ ergibt die Grenzfläche

▼ Ergebnis: Wir bezeichnen die Richtungsvektoren des gebrochenen Strahles mit \vec{g} . Man kann zwei Lösungen mit unterschiedlicher Länge angeben, nämlich ($e^2 = \vec{e}^2 = e_1^2 + e_2^2$)

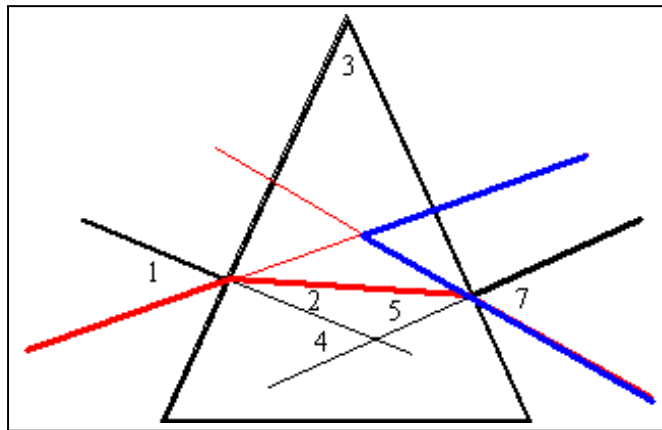
$$\vec{g}_1 = \left(\frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}} \right) \quad \vec{g}_2 = \left(\frac{e_1}{\sqrt{n^2 e_1^2 - e_1^2}} \right)$$

Anmerkung: Für viele Anwendungen ist diese Formel leider nicht brauchbar, weil das Koordinatensystem bereits anders festgelegt ist. Was folgt für $n=1$? Für $n=0$?

▲

Bemerkung: Totalreflexion erfolgt für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ also $\sin \varepsilon = 1$ und damit $\vec{g}_{\text{grenz}} = (1, \sqrt{n^2 - 1})$.
Also $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{n^2 - 1}^2}} = \frac{1}{n}$ wie früher bereits bestimmt.

- (2.4.18) Eine weitere Konsequenz des Brechungsgesetzes ist das Verständnis des Lichtverlaufes in einem Prisma. Zunächst eine Skizze mit ersten Bezeichnungen in Form einer Durchnummerierung beteiligter Winkel

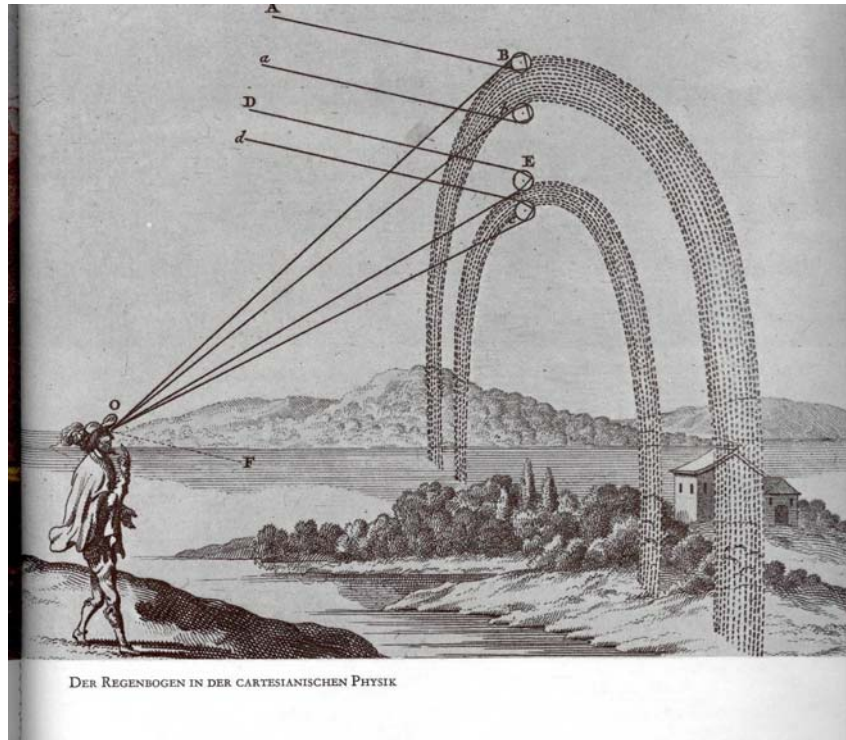


- Welche Bedeutung hat der blau markierte Winkel? **Wie sollte eine Formel aussehen, die die Lichtablenkung in einem Prisma beschreibt?** Was sollte sie leisten?

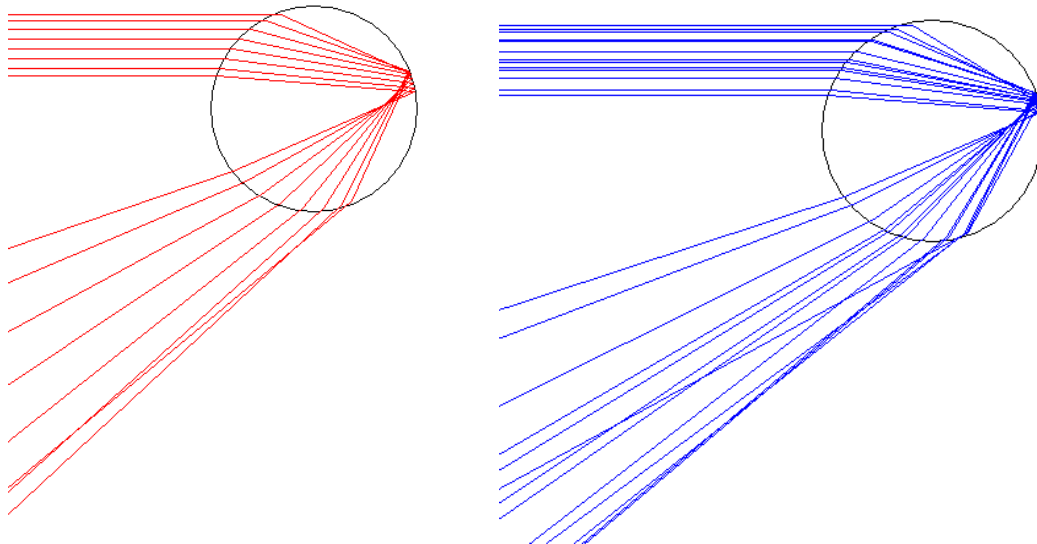
Genauer: Welche (abhängige) Größe sollten durch die Formel durch welche unabhängige ausgedrückt werden, was wird dabei als äußere Parameter eingehen?

(2.4.19) Anwendung des Brechungsgesetzes: ?? und seine ?? :

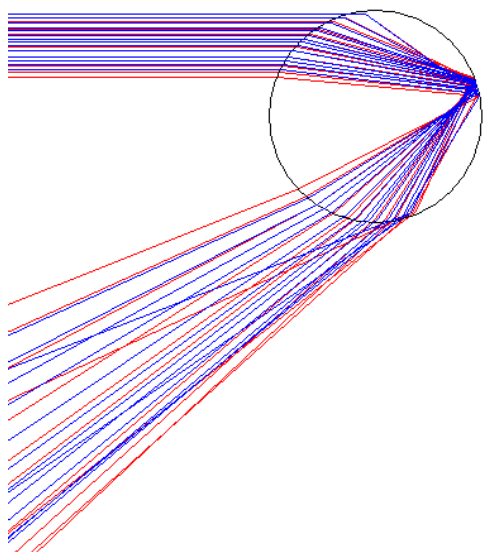
Das Bild zeigt die Erklärung des Regenbogenphänomens. Für uns ist der untere Bogen relevant. Verfolgen Sie den Strahlengang. Das Bündel entsteht über die gemeinsame Wirkung vieler Regentropfen.



Wir machen eine Computersimulation des Strahlenganges: Von links fällt ein Bündel paralleler Strahlen ein und trifft auf einen kugelförmigen Regentropfen. Im Schnitt mit der Ebene ein Kreis. Die Lichtstrahlen werden gebrochen, an der Rückwand (zumindest teilweise) reflektiert und dann erneut gebrochen. Das ERgebnis ist ein nicht mehr paralleles Bündel. Dabei entsteht die untere Grenze des ausfallenden Bündels **nicht** durch die allerobersten Lichtstrahlen des Einfallsbündels. Vielmehr liegt ein Minimum des Ausfallswinkels etwas darunter vor. Links haben wir rotes Licht, rechts blaues Licht einfallen lassen. Der Brechungsindex ist etwas unterschiedlich.

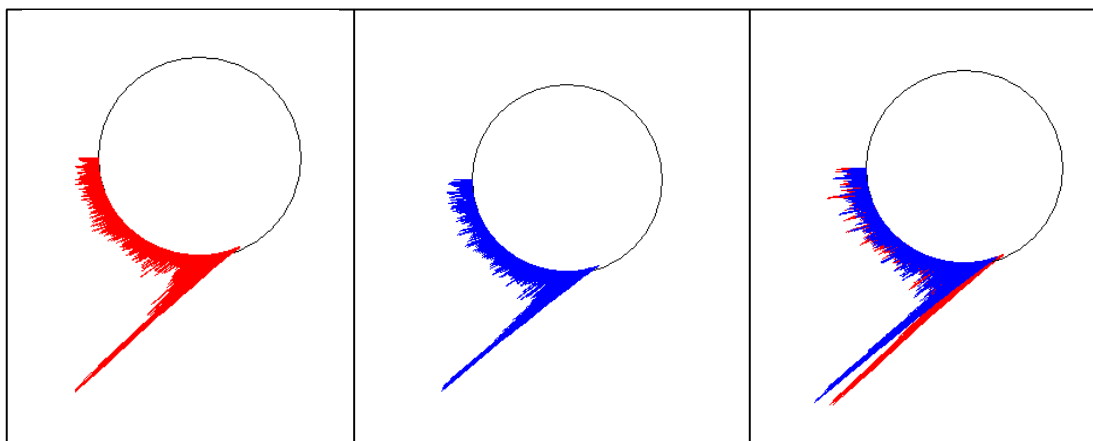


Im nächsten Bild überlagern wir beide Einfallsbündel, um zu sehen, was der unterschiedliche Brechungsindex bewirkt:



Tatsächlich hat das Minimum des Ausfallswinkels im roten Fall einen etwas größeren Wert als im blauen. Und das liegt nicht an unserer Wahl der gezeichneten Einfallstrahlen. **Aber wir ausfallende Strahlen mit einer Vielzahl überlappender Winkelwerte. Wieso sollte man gerade die zum Minimum gehörigen sehen?**

Dazu machen wir ein weiteres Computereperiment. Wir wählen die Höhe des einfallenden Strahles gleichverteilt aus und tragen die Lage des ausfallenden Strahles dann histogrammartig am zugehörigen Ausfallswinkel an. D.h. doppelte Höhe - doppelte Anzahl der mit diesem Winkel austretenden Strahlen

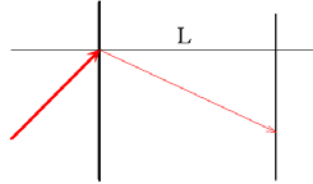


Und jetzt sehen wir: zum Minimum gehören viel mehr Lichtstrahlen als zu den übrigen Winkeln. D.h. dort ist die Intensität des Lichts deutlich höher. Und das Minimum für das rote Licht hat einen größeren Ausfallswinkel als das für das blaue, erscheint daher dem beobachtenden Auge steiler. Und so entsteht durch das Zusammenwirken vieler Tropfen die Farbtrennung im Bogen.

(2.4.
20) Übung: Der Brechungsindex von rotem und blauem Licht unterscheidet sich etwas. Für Wasser gilt $n_{\text{blau}} = 1.34$ und $n_{\text{rot}} = 1.33$. Der für beide Farben gleiche Einfallswinkel sei $\frac{\pi}{4}$. Wie weit muss der Strahl im Wasser laufen, damit sich roter und blauer Strahl etwa 1cm voneinander entfernen? (Auf einer zur Grenzfläche parallelen Ebene im Abstand L)

Wo liegen in der nachfolgenden Skizze α , ε und d ?

Was vermuten Sie? Wie groß wird etwa L sein?



2.4 Dünne Linsen: Die Linsenformel.

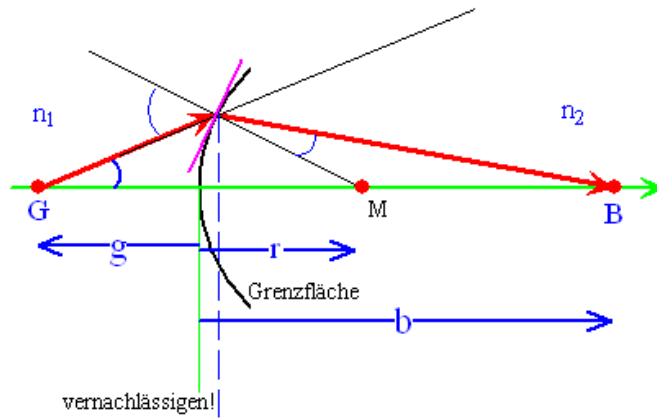
Mehrfache Anwendung des Brechungsgesetzes liefert den Lichtweg durch Linsen. Für dünne Linsen erhält man ein Resultat, dass sich durch eine einfache Formel darstellen läßt. Und diese Formel hat dieselbe Form wie die für die Reflexion achsennaher Strahlen bei einer Kugel. Und mit Hilfe von Linsen läßt sich wieder die Funktion von der Lupe, der Brille, dem Mikroskop oder dem Fernrohr verstehen. D.h. wir sind mit unseren Überlegungen an einem Punkt angelangt, der größte kulturhistorische und technologische Bedeutung hat.

(2.6.1) Mit etwas aufwendigeren Rechnungen können wir das folgende allgemeine Programm angehen und ausführen:

1. Berechne bzw. bestimme den Durchgang eines Lichtstrahl durch eine Kugeloberfläche, die **zwei** Medien trennt. Der relative Brechungsindex sei gegeben.
 - (a) Führe wieder eine optische Achse samt zugehörigen Koordinaten ein. (Richtungswahl jetzt etwas anders als oben im Fall der Kugelreflexion)
2. Bestimmen erneut eventuelle Fokuspunkte
3. Suche eine vereinfachende Näherung für achsenparallele Strahlen
 - (a) Formuliere das Näherungsergebnis als Formel,

(2.6.2) Von diesem Programm führen wir 1a) und 3a) aus.

Zur Koordinatenwahl: Der Lichtweg geht wieder von links nach rechts. Und die 1-Achse hat jetzt dieselbe Richtung (grün). Der Koordinatenursprung liegt wieder im Schnitt Achse - Kugeloberfläche. Die Größen g und b und r sind positiv in den eingezeichneten Richtungen, d.h. der Koordinatenvektor des Punkte G ist $\vec{r}_G^K = \begin{pmatrix} -g \\ 0 \end{pmatrix}$. In der Figur ist ein Lichtweg (rot) eingezeichnet. Man sieht wie er an der Kugeloberfläche gebrochen wird. Die Vereinfachung in Schritt 3 für achsenparallele Strahlen besteht vornehmlich darin, die x-Koordinate des Auftreffpunktes Null zu setzen, was natürlich nur für achsennahe Strahlen korrekt ist.



Die Durchführung dieses Programms ergibt:

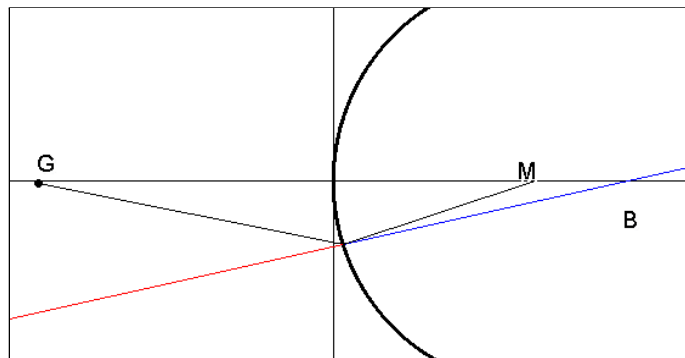
(2.6.3) Ein achsennahes Lichtbündel, das von G ausgeht, hat B als Fokuspunkt, sofern die folgende Beziehung erfüllt ist:

-

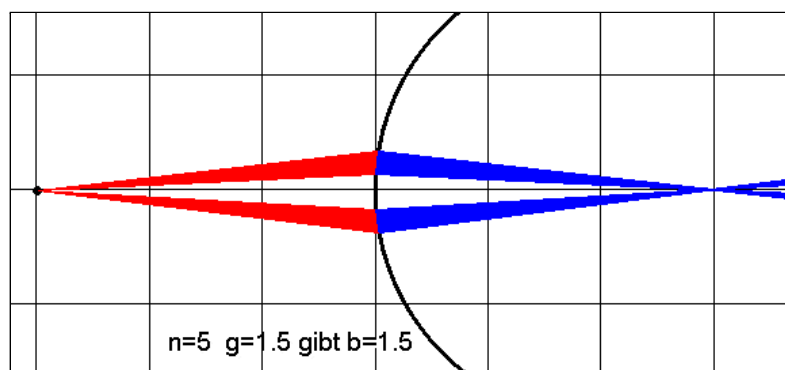
$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Differenz, nicht Quotient!!!

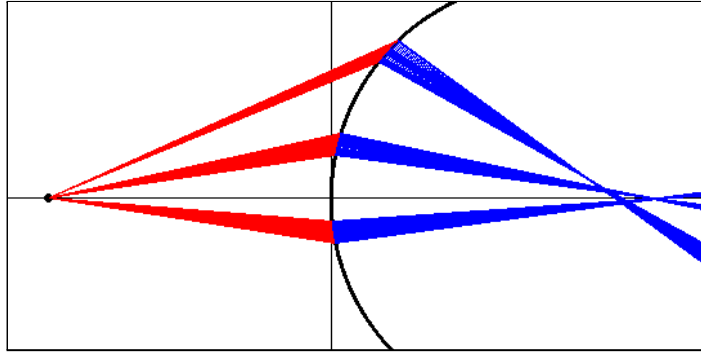
Einige Bilder einer Computersimulation, die nicht etwa diese Formel, sondern die exakte Brechung benutzt. Zunächst ein Einzelstrahl. Der gebrochene Strahl ist rot nach links verlängert.



Das nächste Bild zeigt das Verhalten von zwei achsennahen Bündeln. Es ist $n_1 = 1$ und $n_2 = n = 5$. Man verifiziert sofort, dass die abgeleitete Beziehung erfüllt ist.



Schmale Bündel, die nicht achsennah sind, können auch einen Fokuspunkt haben, aber dieser liegt an einer anderen Stelle. Dies zeigt das nächste Bild.

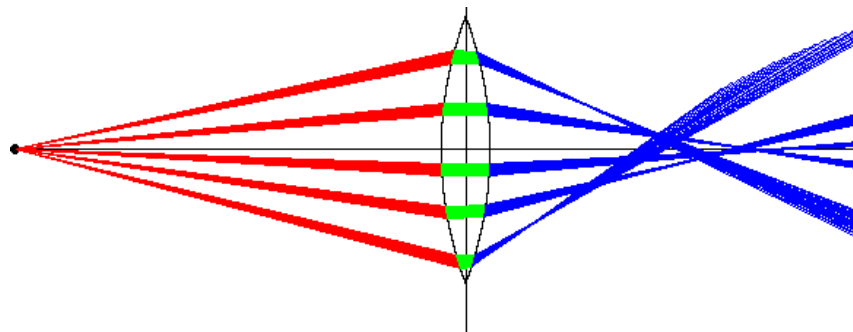
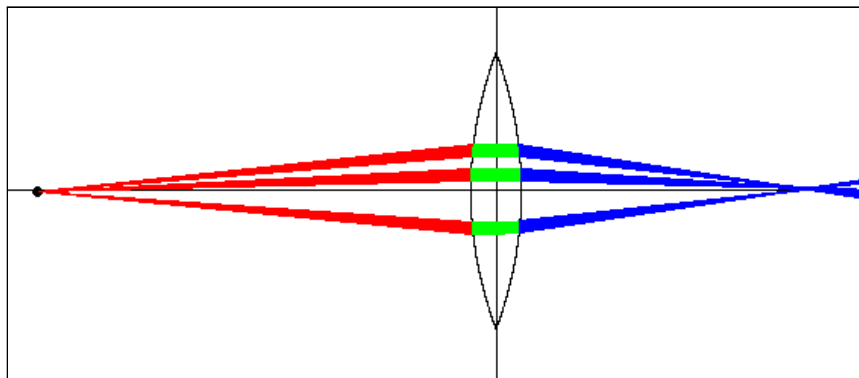


(2.6.4) Zugehörige Überlegungen

- $g \rightarrow \infty$ ergibt ein achsenparalleles Bündel einfallender Strahlen. Dann liegt $b = \frac{n_2 - n_1}{n_2}$. Für $n_2 = n_1$ wird $b = \infty$, d.h. die Lichtstrahlen nehmen die Grenze nicht wahr. Ist $n_2 - n_1 < 0$, dann wird b negativ und wir erhalten einen virtuellen Fokus.
- ist $g = \frac{n_2 - n_1}{r}$, dann wird $b = \infty$, d.h. das gebrochene Bündel ist ein achsenparalleles.
- Die beiden Punkte F_r mit $b_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2}$ und F_l mit $g_l = \frac{n_2 - n_1}{r}$ haben daher die *Brennpunkteigenschaft*: Ein Achsennahes Bündel durch diese Punkte wird auf der anderen Seite der Brechungsfläche zu einem Parallelbündel.

(2.6.5) Eine Linse entsteht nun dadurch, dass wir zwei derartige Grenzflächen hintereinander schalten und bei jedem Durchgang obige Formel anwenden. Wir betrachten hier nur den Fall, dass beide Grenzflächen ganz nahe beieinander liegen, dass man den Abstand der beiden Scheitel vernachlässigen kann.

Zunächst einmal wieder zwei Bilder eines Computerprogramms, das den Durchgang exakt mit Hilfe des Brechungsgesetzes berechnet. Im ersten Bild werden nur achsennahe Bündel betrachtet, im zweiten auch einige achsenferne. Der Lichtweg innerhalb der Linse ist grün gezeichnet.



(2.6.6) **Herleitung der Linsenformel:** Wir haben die allgemeine Formel für die achsennahe Brechung an einer Kugeloberfläche

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

positiv: g nach links
r, b nach rechts
vom Scheitel

Diese (mit Radien r_1 und $-r_2$) ist jetzt zweifach hintereinander anzuwenden. Dabei sollen die Abstände der beiden Oberflächen vernachlässigt werden

Das gibt folgende Rollenzuweisung für die Formelgrößen: (Selbst eine Skizze anfertigen!)

n_1	n_2	g	b	r	Allgemein
1	n	g	b_1	r_1	1. Grenze
n	1	$-b_1$	b	$-r_2$	2. Grenze

Anwenden der Formel auf die beiden Fälle gibt zwei Beziehungen:

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{r_1}$$

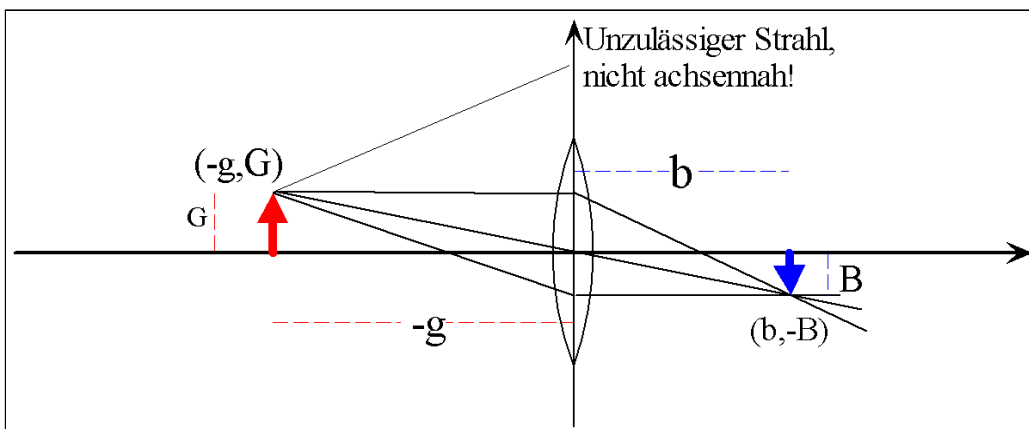
$$\frac{n}{-b_1} + \frac{1}{b} = \frac{1-n}{-r_2}$$

Die Größe b_1 , die zum Zwischenbereich gehört, muss herausgeworfen werden! Addieren gibt die gesuchte Linsenformel:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

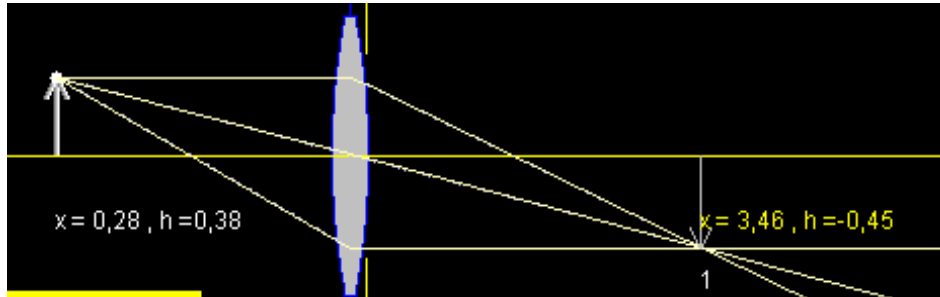
(2.6.7) Diskussion: Wie oben gesagt liefert diese Formel eine einfache Beschreibung der exakten Suche nach Fokuspunkten. Das Ergebnis sieht wie folgt aus:



Geht von einem Punkt mit Ortsvektor $\begin{pmatrix} -g \\ G \end{pmatrix}$ ein achsennahes Lichtbündel aus, dann ist der Punkt mit Ortsvektor $\begin{pmatrix} b \\ -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b \frac{G}{g} \end{pmatrix}$ (näherungsweise) ein zugehöriger Fokuspunkt! Dabei erfüllen die beiden Größen b und g die Linsengleichung! Sind somit etwa g und G gegeben, dann erhält man unmittelbar den zugehörigen Bildpunkt!

Weitere Bemerkungen:

- Anders als in (2.6.3) haben wir es nur noch mit einer Brennweite für beide Seiten zu tun.
- $g=f$ gibt ausgehendes Parallelbündel
- Einfallendes Parallelbündel gibt $b=f$.
- $g=b$ genau für $g=b=\frac{1}{2}f$ usw.
- Wenn man sicher ist, dass ein Bündel einen Fokuspunkt besitzt (das ist der schwere Teil!) , dann **genügen zu dessen Bestimmung zwei Lichtstrahlen des Bündels**. Deren Schnittpunkt liefert dann den Fokuspunkt. Mit Hilfe der Linsenformel kann man - bei bekanntem f - sofort drei Strahlengänge angeben, also immer problemlos den Fokuspunkt bestimmen. Das zeigt die Bedeutung dieser Formel. Sie macht ein ansonsten ohne Computer sehr schwieriges Problem leicht zugänglich.



(2.6.8) Hinzu kommt, dass diese Formel samt zugehöriger Konstruktion nicht nur für Punkte auf der optischen Achse gilt, sondern auch für solche in deren Nähe, so daß man das man ein gesamtes Bild konstruieren kann.

Natürlich sind das alles nur Näherungen, Abweichungen machen sich als "Linsenfehler" bemerkbar.

Eine Inspektion des Inhaltsverzeichnisses und der Überschriften kann sich als ausgesprochen nützlich erweisen:

□ Im Zusammenhang mit dem Stichwort "Vergrößerungsleistungen optischer Instrumente" findet man drei herausgearbeitete Begriffe, die unterschiedliche Aspekte des Themas quantitativ erfassen:

- Vergrößerungsfaktor (ein Winkelverhältnis)
- Abbildungsmaßstab (ein Längenverhältnis)
- Auflösungsvermögen (eines Gerätes, einer Methode...)

Zu jedem dieser "Bezeichnungen" gehört eine den Sachverhalt quantifizierende Zahlangabe. Überlegen Sie sich vermittle der sprachlichen Bedeutung dieser Worte worum es dabei physikalisch inhaltlich gehen wird.