Geometrische Optik

In disem Teil des Kurses geht es um das Verständnis einiger elementarer Eigenschaften des Lichtes mit bedeutenden Konsequenzen für unser Alltagsleben. Das läuft meist unter dem Stichwort "geometrische Optik" und wir bringen dazu einen Einstieg. Neben dieser sachlich inhaltlichen Bedeutung verfolgen wir hier weitergehende Ziele:

- *Einübung in den Umgang mit wichtigen Größenformeln,*
- *Nutzung der Vektorrechnung*
- *sowie Herleitung praktischer Anwendungsformel aus übergeordneten Regeln und mit Hilfe von Näherungen. Mathematische Details lassen wir aus, möchten aber, das der Weg verstanden wird.*
- *Aufbau und Verständnis komplexer Sachverhalte aus einfachen Grundregeln (Konsolidierung des Gehaltes der Eingangsbeispiele)*

Wir beginnen mit einer vorbereitenden übergeordneten Frage zum Licht, die den weiteren Gang der Dinge leitet. Was sollte eine physikalische Theorie im Zusammenhang mit dem Licht beantworten können? Derartige Fragen sollte man sich beim Einstieg in einen neuen Themenbereich vorab stellen.

☐ (2.1.1) **Welche Eigenschaften sind im Zusammenhang mit der Beschreibung des Verhaltens von Licht wesentlich und voneinander weitgehend unabhängig ??? Was sollte man messend erfassen und quantifizieren?**

Versuchen Sie eine Analogie zum Schall herzustellen!!! Es kann günstig sein, die Antwort in Form von Fragen zu formulieren. Die zugehörigen Antworten sollten prüfbar sein und Erklärungen und korrekte Vorhersagen liefern und die Konstruktion technischer Hilfsmittel ermöglichen.

Wir schlagen etwa 5 solcher Fragen vor und nennen hier die erste:

▼ a) Wie breitet sich Licht aus? ("Ruhendes" Licht?)
b)
c)
d)
e) ▲

Kommentar und Antwort zu a) **Die idealisierte Lichtausbreitung (für einen bestimmten Gültigkeitsbereich) erfolgt durch $\boxed{\text{"Lichtstrahlen"}}$. Die Gültigkeitsgrenzen sind zunächst vage, aber in vielen (alltäglichen) Fällen unproblematisch. Technisches Hilfsmittel zur Herstellung von Lichtstrahlen sind etwa Blenden. In homogenen Medien (Licht, Wasser, Vakuum) verlaufen die Lichtstrahlen geradlinig. Eine Ausbreitungsgeschwindigkeit ist nicht zu beobachten (obwohl vorhanden und sehr groß).**

(2.1.2) Geraden (also Lichtstrahlen) lassen sich vektoriell beschreiben und festlegen. Wichtig für die Optik und unsere Überlegungen sind dann $\boxed{\text{"Lichtbündel"}}$, die von einem Punkt ausgehen. Sie werden zum Verständnis des Sehvorganges benötigt. Ebenso $\boxed{\text{Bündel paralleler Lichtstrahlen}}$.

☐ (2.1.3) Die Aufgaben zur vektoriellen Beschreibung von Lichtbündeln.

☐ (2.1.4) Wie versteht man mit Hilfe des Lichtstrahlmodelles das " **Sehen von Gegenständen** - Vom Gegenstand bis zum Augenhintergrund?" Wieso benötigt man hierzu Lichtbündel?

▼ Vorbemerkung: Man betrachtet einen einfachen Fall: Wie sieht man einen leuchtenden Punkt? (Und denkt sich später das Gesamtbild aus derartigen Punkten zusammengesetzt!)

Dann eine Skizze! Wieso benötigt man ein ganzes Lichtbündel? Nicht nur einen einzigen Strahl? Erst das Problem bewußt machen! Antwort etwas weiter unten.

▲

(2.1.5) **"Was ist Licht?"**: Die Erfahrungen mit der Ausbreitung des Lichtes, mit den Lichtstrahlen legen ein **Teilchenmodell** nahe!

Ein Lichtstrahl besteht (danach) aus einem Schwarm kleiner Teilchen, die sich unter gewissen Umständen geradlinig mit sehr großer konstanter Geschwindigkeit bewegen! An Grenzflächen werden Sie reflektiert oder beeinflußt (gebrochen)

Dieses Modell liefert bereits große Erfolge zum Verständnis vieler Lichtphänomene sowie der optischen Instrumente und deren Konstruktion! Was wäre in einem Wellenmodell anders? Analogie zum Billardbeispiel.

(2.1.6) **Ausgeschieden** (aus dem Kreis grundlegender Sachverhalte zum naturwissenschaftlichen Verständnis des Lichtes ist beispielsweise das Konzept einer Verbindung von "Licht" mit "gut" und "dunkel" mit "böse".

Eine hier **offene Frage:** Wie groß ist der übliche Erfahrungsbereich, der mit diesem korpuskularen Modell vereinbar ist? Wo liegen seine Schranken? Wie feine Lichtstrahlen sind überhaupt möglich? Wie quantifiziert man das?

2.2 Das Reflexionsgesetz.

Das ist eine erste elementare Gesetzmäßigkeit, die (in idealisierter Form) das Verhalten der Lichtstrahlen bei der Wechselwirkung mit Materie steuert, Wir werden sehen, dass bereits die beiden ganz einfachen elementaren Bestandteile (Lichtstrahlen - Reflexionsgestz) komplexes Verhalten liefern. Das Reflexionsgesetz ist zunächst einmal ein empirisch gefundenes Gesetz dessen Auswirkungen man im Alltagsbereich vielfach begenet.

Das Reflexionsgestz ist ein empirisch gefundenes Gesetz (allgemeine Regel) über das Verhalten der Lichtstrahlen mit zahlreichen Anwendungen, von denen wir einige vorführen

---

(2.2.1) *Wie geht man als Lernender vor, wenn man sich ein derartiges wichtiges Gesetz (ohne Beweisteil und Herleitung) aneignen will? Schematisch kann und sollte man folgende Punkte durchgehen*

⧫ Problembeschreibung und -verständnis, Umfeldinfomation, Verallgemeinerungen

⧫ Die allgemeine Formulierung in (1) Merkform, (2) möglichst in einer zusammenfassende Skizze, (3) in mathematischer Formulierung

⧫ Konsolidierungsaufgaben und -fragen überlegen und behandeln (*Regel-Beispiel*)

⧫ Anwendungsbeispiele (zur Verdeutlichung der Regel). In unserem Fall hier:

◊ Brennpunkt bei Parabel und Ellipse

◊ Lichtstrahl und Sehen

◊◊ Einführung des Begriffs des allgemeinen **Fokuspunktes**

◊ Kugelspiegel (mit zugehöriger verallgemeinerungsfähiger Formel)

(2.2.2) Zur **Problemerfassung**: Trifft ein Lichtstrahl auf eine scharfe Grenze zwischen zwei Stoffen, dann beeinflußt diese Grenze in der Regel den weiteren Lichtweg. Der einfachste Fall ist der der "Reflexion", bei dem der Strahl auf symmetrische Weise vollständig zurückgeworfen wird. Das beobachten wir bei einer Reihe von Stoffgrenzen mehr oder weniger ausgeprägt ("Spiegel"). Weitere Phänomene an solchen Grenze sind diffuse Reflexion, Brechung und Absorbtion.

☐ (2.2.3) Das Teilchenmodell der Lichtstrahlen "erklärt das Gesetz" und erlaubt seine Verfeinerung im Sinne, dass weitere Umfeldphänomene mit einbezogen werden. Wieso?

(2.2.4) Formulierung des **Reflexionsgesetzes:** Es lautet in Kurzform zum Merken:

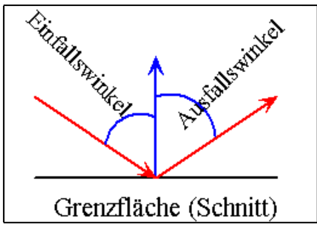
$$: \boxed{\text{Einfallswinkel} = \text{Ausfallswinkel}}$$

Bemerkung: Die (vom Gesetz beschriebenen) Erscheinungen sind unabhängig von Wellenlänge und Intensität des Lichtes, rein geometrischer Art. Winkel bedeutet dabei immer "Winkel mit der Normalen der Grenzfläche".

☐ (2.2.5) Man könnte allgemeiner vermuten, dass die Intensität des ausfallenden Strahles eine Funktion der Intensität des einfallenden ist. Was für eine Formel ist im einfachsten Fall zu erwarten? (Zunächst Bezeichnungen einführen) :

(2.2.6) **Skizze zum Verstehen der Merkformel (Ein besonders wichtiger Teil)**

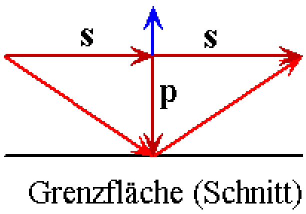
Geometrisch benötigen wir (hier, Reflexionsgesetz) den Begriff der **Normalen.** Genauer: "Normale an die Fläche F im Punkte P" Die Normale wird festgelegt durch Angabe eines Punktes und eines Richtungsvektors. Bezeichnung: *Normalenvektor,*

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Drei Vektoren:
Normalenvektor $\vec{n}$
Einfallsvektor $\vec{e}$
Ausfallsvektor $\vec{r}$</td>
<td>Dreidimm.
Skizze ??
☐ Wieso genügt
ebene Skizze?</td>
</tr>
</table>

Beachte: Der zu wählende Winkel ist der <u>zwischen Strahl und Normale</u>! Liegen P und die Normale vor, dann bestimmt die Richtung des einfallenden Lichtstrahles die Richtung des ausfallenden. Wird die Einfallsrichtung durch den Richtungsvektor $\vec{e}$ bestimmt, dann determiniert die folgende Konstruktion eindeutig einen Richtungsvektor $\vec{r}$ des ausfallenden Strahles. ($\vec{r}$ ist hier zunächst nur Bezeichnung)

(2.2.7) Das Schema zur **vektoriellen Bestimmung des reflektierten Strahles.**

Mit Hilfe unseres Wegkonzeptes für Vektoren folgt sofort:
$\vec{n}$ Normalenvektor, $\vec{p}_{\vec{n}}$ die Komponente von $\vec{e}$ in Richtung $\vec{n}$ und $\vec{s}$ die dazu senkrechte



$$\vec{e} = \vec{s} + \vec{p}_{\vec{n}}$$
$$\vec{r} = -\vec{p}_{\vec{n}} + \vec{s} = \vec{e} - 2\vec{p}_{\vec{n}}$$
$$\boxed{\vec{p}_{\vec{n}} = \frac{(\vec{e}\cdot\vec{n})}{\vec{n}^2}\vec{n}}$$

$$\vec{n}^K = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}^K = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$
$$(\vec{e}\cdot\vec{n}) = e_1 n_1 + e_2 n_2 + e_3 n_3$$
$$\vec{n}^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \quad \text{mit } n_1^2 = (n_1)^2 \text{ usw.}$$

(2.2.8) *Zur **Konsolidierung** einer derartigen Formel liegen zwei Typen von Konkretisierungsaufgaben nahe: Einmal solche, die die Ergebnisformeln konkret durchgehen und dann solche - Typ vertrauensbildende Maßnahmen, bei denen man das berechnete Resultat auch geometrisch finden und somit kontrollieren kann.*

Aufgaben beider Art sollte man durchaus bei Bedarf selbst erfinden!

☐ Numerisches Beispiel $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimme $\vec{r} =$

Hier kommt es darauf an, das Ergebnis rechnerisch möglichst schnell zu erhalten.

☐ Erfinden Sie jetzt ein Beispiel, für das man das Resultat selbst unmittelbar geometrisch kontrollieren kann. Also einerseits rechnen und andererseits geometrisch bestimmen.

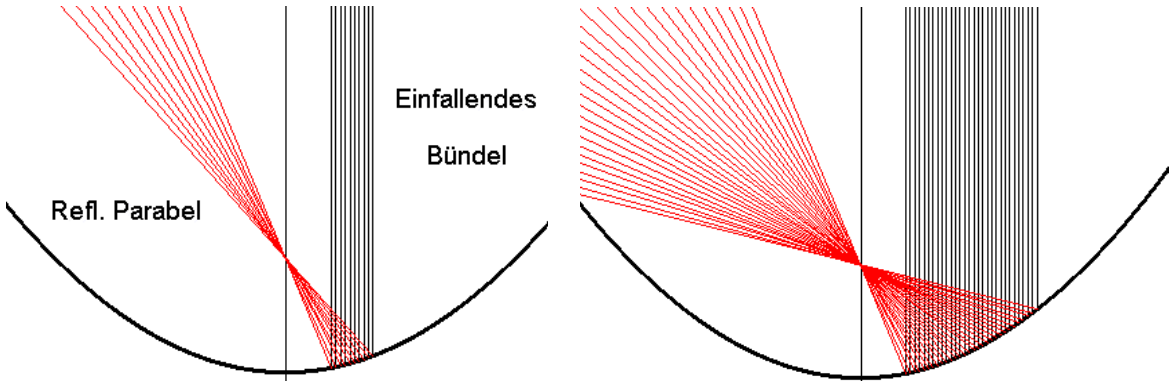
Das beendet die Einführung der Regel selbst. Jetzt kommen Beispiele der Anwendung und Nutzung.

2.3 Einige Anwendungen der

Vektorrechnung und des Reflexionsgesetzes

(2.3.1) Die **Brennpunktseigenschaft der Parabel und der Ellipse**.

Wir zeigen einige Bilder eines Computerprogrammes, bei dem Lichtstrahlen an einfachen Flächen reflektiert werden. Als Flächen wählen wir einen Rotationsparaboloiden, von dem wir nur den Schnitt in einer Ebene betrachten. Ein achsenparalleles Lichtbündel (grau) fällt ein und wird an der Parabel (gemäß Brechungsgesetz) reflektiert. Die reflektierten Strahlen sind rot gezeichnet.

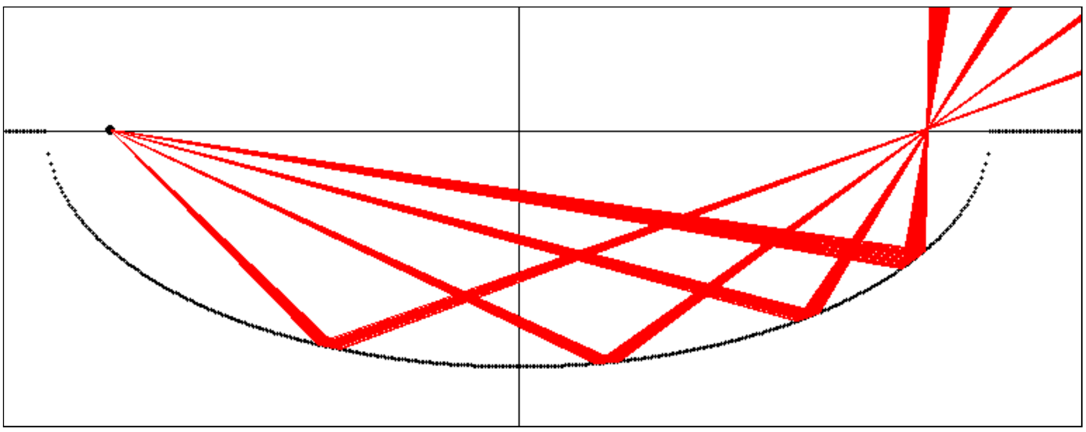


Wir beobachten: Alle reflektierten Strahlen gehen durch einen Punkt, den *Brennpunkt (der Parabel)*

☐ Beweisen Sie die Brennpunkteigenschaft der Parabel mit Hilfe der Vektorrechnung

---

(2.3.2) Jetzt betrachten wir anstelle der Parabel eine Ellipse und betrachten Lichtbündel, die von einem geeigneten Punkt auf der Achse ausgehen. Wir sehen: Alle Punkte des Bündels gehen erneut durch einen Punkt und dieser Punkt ist für alle gezeichneten Bündel derselbe! (Genauer: Gehen durch einen Bereich, den man auf dem Bildschirm zumindest nicht von einem Punkt unterscheiden kan.)



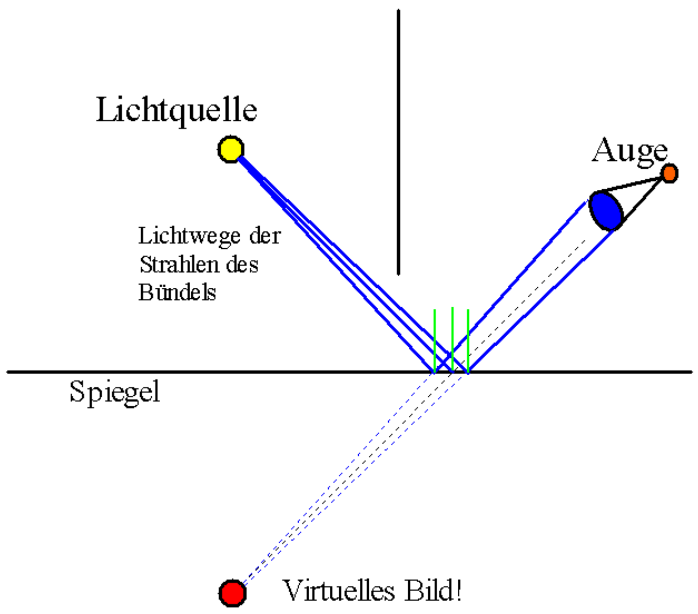
Das sind die beiden Brennpunkte der Ellipse.

☐ (2.3.4) Wie bestimmt man die Brennpunkte einer Ellipse formelmäßig?

(2.3.5) Eine weitere Anwendung:

Was sieht man, wenn man in den Spiegel sieht? Wie entsteht so ein Spiegelbild?

Die von der Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen des Strahlenbündels werden nach dem Brechungsgesetz reflektiert und gelangen zum Auge. Geometrisch ist das ein Bündel, das vom "virtuellen" Spiegelbild der Quelle ausgesandt wird. Die Augenlinse fokussiert diese Bündel in einem Punkt auf der Netzhaut. Und das Auge sieht den virtuellen Spiegelpunkt von dem die Strahlen herzukommen scheinen.



(2.3.6) **Fokuspunkte**

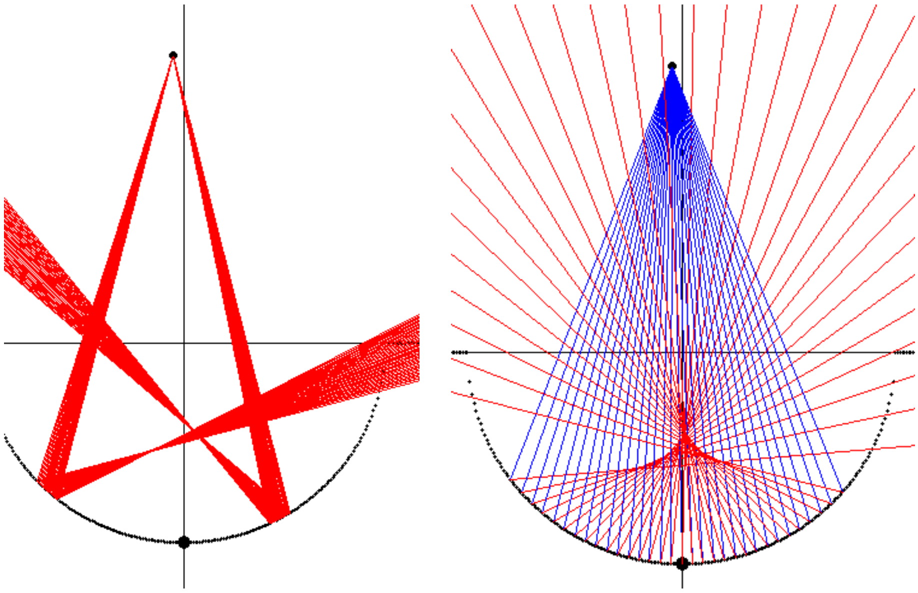
Das in unseren Beispielen gedundene Verhalten der Lichtbündel tritt im Bereich der geometrischen Optik sehr häufig auf und erweist sich als ausgesprochen wichtig. Wir abstrahieren daraus das folgende Konzept:

Von einem Punkt G gehe ein (schmales) Lichtbündel aus. Dieses Bündel "erlebt einiges", wird reflektiert, gebrochen usw. Und wird am Ende wieder in einem Punkt B konzentriert ("fokussiert"). Einen solchen Punkt nennen wir *Fokuspunkt*.

Ein Fokuspunkt kann virtuell sein, d.h. zur geometrischen Verlängerung eines Lichtstreckenbündels gehören wie oben im Beispiel des Spiegelbildes.

Und vielfach ist es auch so, dass die Strahlen nur näherungsweise durch ein und denselben Punkt gehen. Für ausreichend schmale Bündel gehen sie dann auf dem Bildschirm scheinbar alle durch einen Punkt. Nimmt man breitere Bündel, dann tun sie das nicht mehr.

Das folgende linke Bild einer Reflexion an einem Kreis zeigt dies: Von ein und demselben Punkt gehen zwei schmale Bündel aus. Beide haben einen (näherungsweisen) Fokuspunkt. Aber die Fokuspunkte der beiden Bündel sind verschieden!



Im rechten Bild geht von dem Punkt ein breites (blaues) Bündel aus. Die reflektierten Strahlen sind rot gezeichnet. Wir sehen, dass sie nicht mehr durch einen Punkt gehen, aber so etwas wie eine Figur hoher Dichte erzeugen. Das ist in gewissem Sinne die Figur - der geometrische Ort - aller Fokuspunkte schmaler Bündel.

In der Computersimulation wird jeweils nur die erste Reflexion berücksichtigt. Eine Reihe der reflekrierten Stahlen trifft noch ein zweites Mal auf den reflektierenden Kreis, der für diesen Strahl dann aber einfach durchlässig ist.

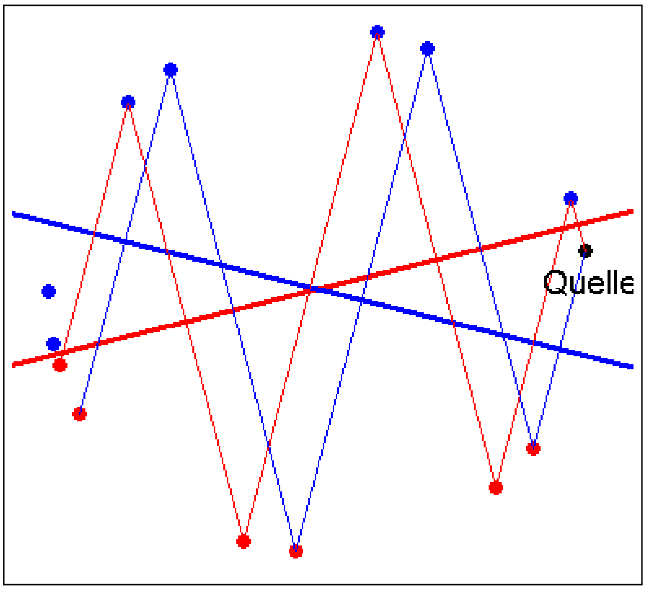
(2.3.7) **Unser Hauptproblem: Bestimme zu einem gegebenen optischen Lichtweg eventuelle Fokuspunkte, auch die näherungsweisen, für schmale Bündel.**

(2.3.8) Im Falle der Reflexion am Spiegel ist diese (vielfach komplizierte) Bestimmung nicht nötig. Wir können den fokussierenden Spiegelpunkt mit Hilfe eines einzigen Strahles rechnerisch oder geometrisch bestimmen, wie wir oben gesehen haben. Hier benötigt man zur Bestimmung nicht das gesamte Bündel!

Zwischengeschaltet eine Anwendung bzw. ein neues Übungsbeispiel:

□ (2.3.9) Zwei gegeneinander geneigte Spiegel, die einen Winkel α miteinander bilden. Dazwischen eine Lichtpunktquelle Wieviele Spiegelbilder gibt es? Wo liegen sie? (Skizze für einige nahleigende Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$.) Punkt und erste Speigelbilder einzeichnen. Allgemein vermutlich nicht machbar. Nur Einstieg)

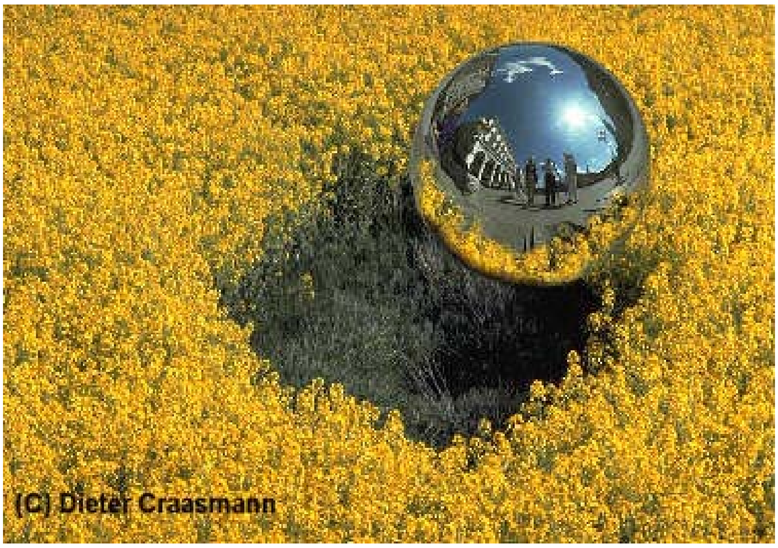
Die Figur zeigt ein Beispiel sich so ergebender Spiegelbilder. Wie verläuft die geometrische Konstruktion? Kann man die Spiegelteile links vom Schnittpunkt fortlassen?



☐ (2.3.10) Wie rechnet man derartige Spiegelungsprobleme vektoriell? Beschreiben Sie die **Strategie**. Was für Leistungen muss die Vektorrechnung erbringen?

☐ (2.3.11) Konzipieren Sie einen Computerbefehl, der (in der Ebene) das Problem der Strahlreflexion löst. Was muss man eingeben? Was soll herauskommen? Welche Formel benötigt man?

☐ ■ (2.3.12) Das allgemeine Problem: Gegeben eine u.U. gekrümmte reflektierende Fläche und eine punktförmige Lichtquelle mit davon ausgehendem schmalen Strahlenbündel. Bestimme das Bündel der reflektierten Strahlen! Wo liegen - sofern vorhanden - die Fokuspunkte der reflektierten Strahlenbündel? (Lösung wird hier nicht besprochen)



(2.3.13) Zusammenfassender Einschub: Wie sieht hier beim Reflexionsgrstz **der Weg zu den relevanten Ergebnissen in modularer Formulierung aus??**

⧫ Das Reflexionsgesetz. (**Erfahrung**, Gültigkeit - Mathematisch vektorielle Formulierung)

⧫ Das Fokussierungsphänomen (dazu: Computerexperimente!)

⧫M Vektorielle Beschreibung (schmaler) Strahlenbündel

⧫M Behandlung des mathematischen Problems der Bestimmung von Fokuspunkten:

◊M Einfallsbündel vorgeben

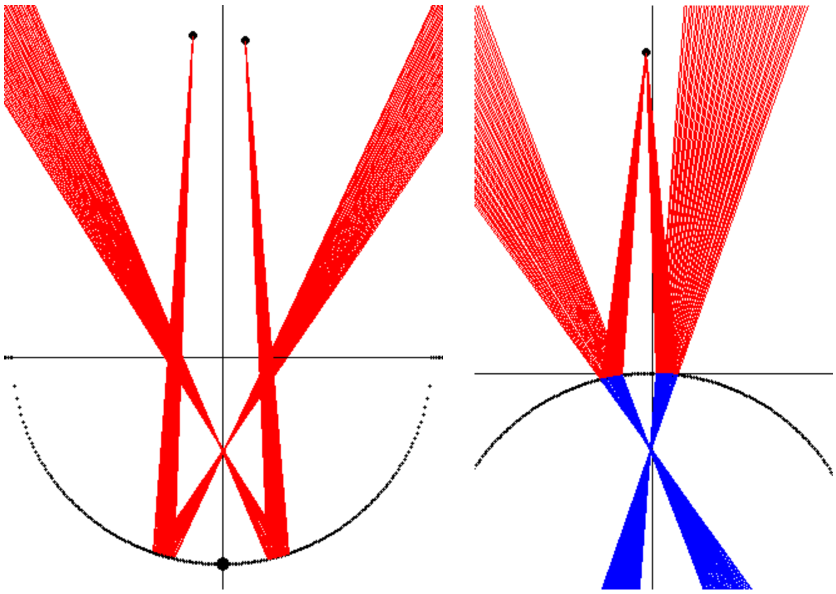
$\Diamond M$ Reflektiertes Bündel berechnen
$\Diamond M$ Mathematisch nach Fokussierungspunkten suchen $\Leftarrow$ $\boxed{\text{Grenzwertproblematik!!!}}$
Das ergibt ist in der Regel ein nicht gut handhabbares Resultat! Stattdessen: **Computersimulation** oder
$\Diamond M$ Ergebnis bzw. Problem geeignet nähern, so dass ein handhabares / nützliches Resultat entsteht.
Optimal ist: Eine Formel, die global die geometrische Lage von Gegenstand und Bild in Beziehung setzt! Klappt im Fall des Kugelspiegels.
$\Diamond$ Anwenden / Konsequenzen...

Einfache lösbare Fälle des Fokussierungsproblems:
$\Diamond$ Brennpunkt Parabel (rechenbar)
$\Diamond$ Brennpunkt Ellipse
$\Diamond$ **Kugelspiegel: Achsennahe Strahlen - näherungsweise rechenbar!**

(2.3.14) Typischerweise lassen sich die Lage eventueller beliebiger Fokuspunkte **nicht** mit Hilfe einfacher Formeln bestimmen. Aber es gibt einige wichtige und nützliche Ausnahmen.

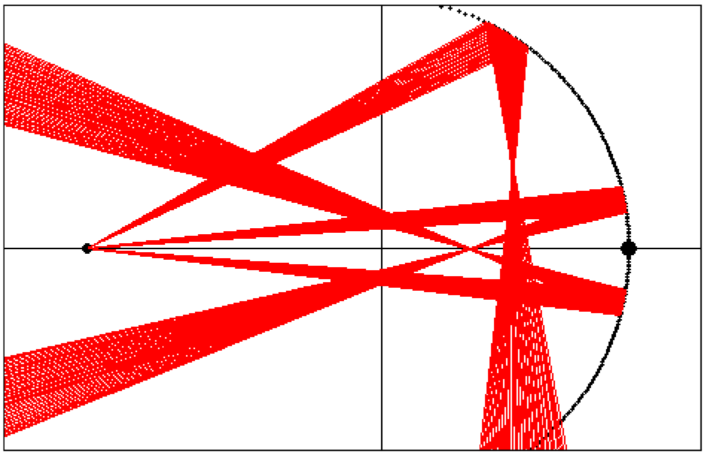
(2.3.15) Das allgemeine Resultat der Suche nach Fokuspunkten kann auf den Fall eines **Kugelspiegels** angewandt werden. Es zeigt sich, dass das Verhalten **achsennaher** Strahlen durch eine einfache Formel zusammengefasst wird:

Zunächst einmal zwei Bilder für achsennahe Bündel. (Solche für achsenferne haben wir oben bereits gezeigt.)



Im linken Bild haben wir Reflexion an einer Hohlkugel. Wir sehen einen reellen Fokuspunkt etwa im Abstand des halben Kugelradius auf der Achse. Das zweite Bild zeigt die Reflexion an einer Vollkugel. Rot die tatsächlichen Lichtwege und blau die Verlängerung der reflektierten Strahlen. Wir sehen einen virtuellen Fokuspunkt erneut mit einem Abstand des halben Kugelradius vom Mittelpunkt.

☐ (2.3.16) Welcher Unterschied besteht zwischen *achsennahen* und *achsenparallelen* Bündeln? Was zeigt das nachfolgende Bild für die Reflexion an einer Hohlkugel?



(2.3.17) Die allgemeine Rechnung bestätigt diese (durch Computersimulation gewonnenen) Beobachtungen. Das Ergebnis kann dann wie folgt in einer **Formel** zusammengefasst werden. Die Form der hier auftretende Formel taucht immer wieder auf, so dass man sie sich gut erarbeiten sollte.

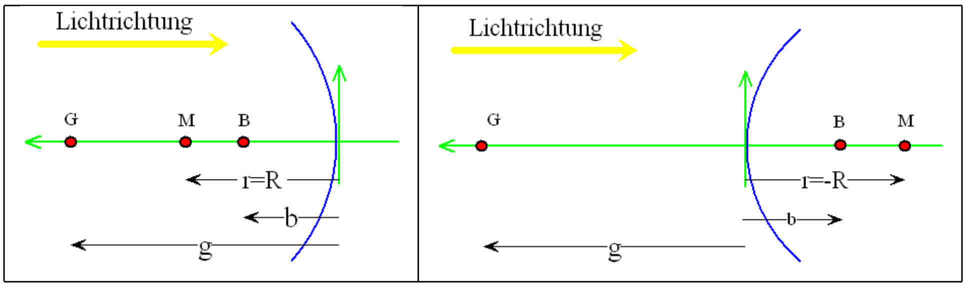
(2.3.18) Hier und in vielen ähnlichen Fällen ist es wichtig, sich über eine Skizze die zugehörigen **Koordinatenvereinbarungen** einzuprägen. (Vektorrechnung in einer Dimension).

◊ Der Lichtweg geht von von links nach rechts

◊ Der Koordinatenursprung liegt im Scheitel der Kugel

◊ Die Koordinaten der Achsenpunkte werden nach links positiv gerechnet (=Abstand vom Scheitel), nach rechts negativ.

◊ Der Startpunkt G ("Gegenstand") des achsennahen Bündels erhält die Koordinatenbezeichnung g und der zugehörige Fokuspunkt B ("Bildpunkt") die Koordinatenbezeichnung b. Ist R der Kugelradius, dann liegt der Kugelmittelpunkt M bei r=+R im Fall der Hohlkugel und bei r=-R im Fall der Vollkugel!



(2.3.19) Die Figur fasst die Bezeichnungen zusammen. Dann gilt:

◊ **Zwischen den drei Größen g, b und r=(Koordinate des Kugelmittelpunktes, nicht Kugelradius!) besteht eine deterministische Beziehung in Form der folgenden Formel**

$$\boxed{\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}}$$

⧫Gehalt dieser Gleichung: $\boxed{??}$ (ganz unten)

(2.3.20) In den folgenden Aufgaben sei R>0 ein fester äußerer Parameter. Die typische zugehörige Rollenverteilung ist dann: Unabhängig gegebenes g. Über die Formel wird b festgelegt.

☐ Lösen Sie die Formel nach b auf. (für die nachfolgenden Beispiele ist es vielfach nützlich , jeweils die ursprüngliche, nicht aufgelöste Formel zu verwenden, um sich mit deren Struktur vertraut zu machen.)

☐ Was liefert die Formel dann für g=R, g=$\frac{1}{2}R$?
☐ Was für 0<g<$\frac{1}{2}R$
☐ Wann liegt B im Brennpunkt (b=$\frac{1}{2}R$) ?
Jetzt sei r=-R (Vollkugel)
☐ Kann es einen reellen Fokuspunkt geben? Wo liegt die Lichtquelle im Fall $b = -\frac{1}{3}R$?
☐ Wo muss G liegen (Wert für g), damit das ausfallende Bündel achsenparallel ist?

☐ (2.3.21) Die Erde habe eine reflektierende Oberfläche. Wo spiegelt sich der Mond? (Welche Zahlwerte werden benötigt? Verallgemeinerungsfähige Präsentation der Antwort!)