

Harmonische Reihe

Wie stellt sich **Determinismus in der Mathematik** dar?

Datendarstellung

Wie findet man das Resultat von **unendlich vielen Schritten**?

Übungsbeispiel zum Formelzugang und zum Einstieg in ein Problem

Deterministisches Verhalten findet sich modellhaft in Mathematik und Physik. Dabei kann der Entwicklungsparameter kontinuierlich (Zeit) oder diskret (Generation) sein. Der schwierigste Fall ist die mehrdimensionale Raum-Zeit.

Hier betrachten wir den einfachen Fall einer Generationsentwicklung.

Die mathematisch modellmäßige Beschreibung kann über eine **explizite Formel** oder über eine **Rekursionsformel** erfolgen. Wie im Billardbeispiel bereitet die explizite "Endformel" große Probleme.

In mathematischen Systemen ist das Verhalten vielfach vollständig bestimmt/determiniert, uns aber nur schwer zugänglich. Das liegt einerseits an der Unzulänglichkeit unserer Sinnesorgane und der zugehörigen Verarbeitungskapazität des Gehirns, andererseits an der Komplexität dieser Probleme.

Insbesondere ist nicht nur das Resultat von endlich vielen Operationen, einem Bereich, mit dem wir Erfahrung haben, sondern in vielen Fällen auch das Resultat von unendlich vielen Operationen, wo wir zunächst keinerlei Erfahrung haben festgelegt und mit mathematischen Methoden zugänglich!

Als Beispiel betrachten wir die sog. harmonische Reihe, also ein Problem, indem wir unendlich oft einen immer kleiner werdenden Summanden hinzufügen. .

Verbale Problembeschreibung:

◆ Wir starten mit 1, zählen $\frac{1}{2}$ hinzu, dann zum Ergebnis $\frac{1}{3}$ usw.

◆ Und fragen, was am (nicht vorhandenen) Ende geschieht bzw. herauskommt!

Ergibt diese Folge von Zahlen ein eindeutig vorhersagbares Ergebnis, besser **Endverhalten**?

Auch wenn man immer nur endlich viele Beiträge berechnen kann?

Umsetzen in **Formalismus**: Als Einstieg beginnen wir mit den ersten Schritten und führen verallgemeinerungsfähige Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ s_3 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = s_2 + \frac{1}{3} \\ s_4 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} = s_3 + \frac{1}{4} \\ &\dots \end{aligned}$$

In Formeln allgemein:

$$\underbrace{s_n}_{\text{Bezeichnung}} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{n}}_{\text{Bezeichnung mit Rechenweg}} = \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}_{\text{Andere Schreibweise}}$$

Rekursive Formel $s_{n+1} = s_n + \Delta s_n = s_n + \frac{1}{n+1} \quad n \geq 1 \quad \text{und } s_1 = 1.$

Explizite Formel	Rekursive F. für Änderung			
$n \rightarrow s_n$ $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	$\Delta s_n = s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1}$ $s_1 = 1$	Änderung = Änderungsrate!	Rel.Änderung $\frac{\Delta s_n}{s_n}$?Grenzwertverh.

Hier finden wir kein einfaches Verhalten der Änderungsrate. Nur: Sie geht nach Null. Großes Problem: Bleibt die Folge $n \rightarrow s_n$ beschränkt??? Die Folge ist sicher monoton wachsend.

Definiere "beschränkt" und "monoton wachsend" für eine Zahlfolge.

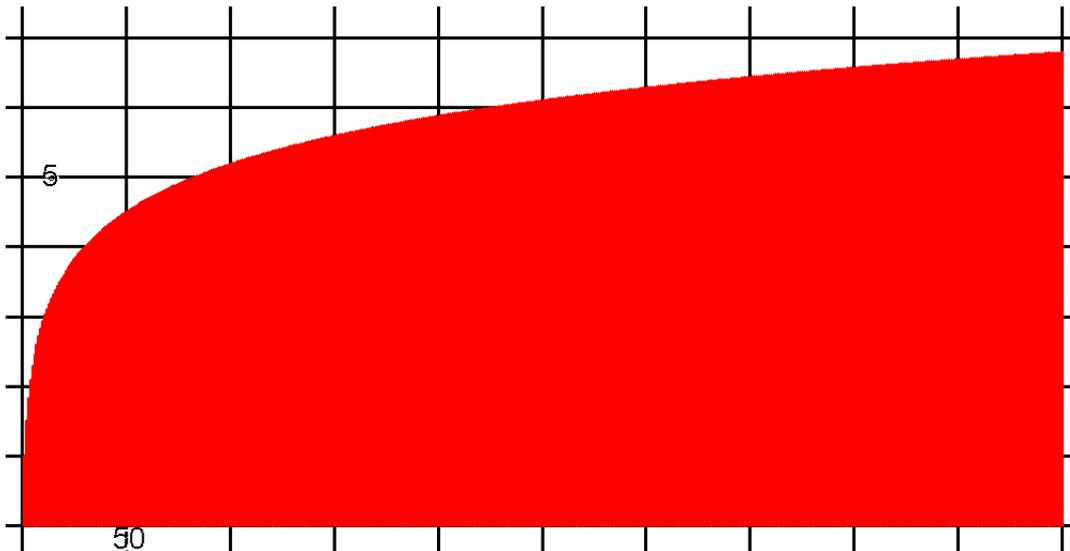
◆ Jetzt wollen wir uns erste **Erfahrung zum Verhalten** verschaffen:

Das Ergebnis (der Berechnung der ersten Glieder) sollte möglichst so dargestellt werden, dass das Verhalten (der ersten Terme) prägnant wiedergegeben wird. "Erste" meint entweder für "per Hand rechenbar" oder "per Computer zugänglich"

◇ Die Tabelle zeigt einige naheliegende Möglichkeiten der Darstellung:

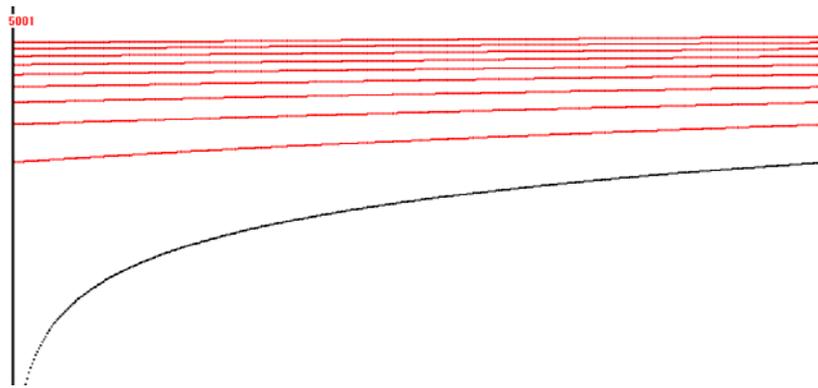
$s_1 = 1$	1	1.0
$s_2 = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1.5
$s_3 = \frac{11}{6}$	$\frac{11}{6}$	1.833 3
$s_3 + \frac{1}{4}$	$\frac{25}{12}$	2.083 3
$s_4 + \frac{1}{5}$	$\frac{137}{60}$	2.283 3
$s_5 + \frac{1}{6}$	$\frac{20}{9}$	2.45
$s_6 + \frac{1}{7}$	$\frac{363}{140}$	2.592 9
$s_8 + \frac{1}{9}$	$\frac{140}{63}$	2.717 9
$s_{10} + \frac{1}{10}$	$\frac{7129}{2520}$	2.829 0
$s_{11} + \frac{1}{12}$	$\frac{7381}{2520}$	2.929 0

◇ Der Computer liefert folgende Darstellung der Resultate bis $n=500$ (horizontal, vertikal ist jeweils s_n aufgetragen) :

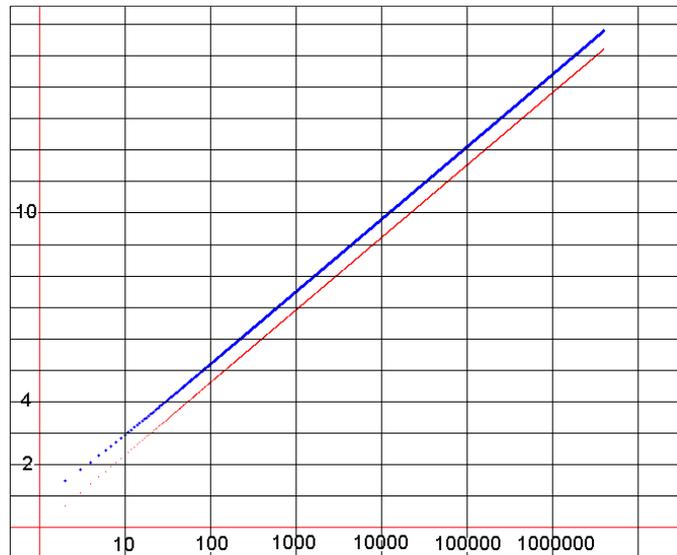


Wie kommt man zum Verhalten noch größerer n ? Eine Möglichkeit ist eine **zyklische Darstellung**: D.h. sobald der rechte Bildschirmrand erreicht wird, wird auf linken Seite weitergezeichnet. Die zweite Linie beginnt also bei $n=500$, die dritte bei $n=1000$ usw.

Wir beobachten bei $n=5000$ einerseits immer noch Wachstum, aber es wird mit jedem Durchlauf geringer.



◇ Noch weiter kommt man mit **logarithmischer Auftragung** (hier nur der n -Achse). D.h. grob, dass man die Abstände verkürzt, je weiter man kommt. Das Bild zeigt jetzt ein sehr deutliches, eine Extrapolation nahelegendes Verhalten:



Blau ist s_n über $\log(n)$ aufgetragen. Und rot ist darunter $\ln(n)$ gegen $\log(n)$ aufgetragen. Für die ersten n sieht man noch diskrete Punkte. s_{10} liegt etwa bei 3. Die Werte gehen bis etwa $n=4.000.000$ mit einem s_n von etwas unter 16.

Daher liegt die Vermutung nahe, dass unser s_n sich grob wie $\ln(n)$ verhält und damit auch nach unendlich geht.

Die mathematische Analyse bestätigt das.

Die Details der beiden Beweise müssen Sie nicht unbedingt verstehen. Aber Sie sollten verstehen, was bewiesen wird und was das Ergebnis am Ende besagt. Dazu die abschließende Graphik!

■ Erster Beweis der Vermutung:

a) Für $n > m$ gilt $s_n > s_m$ (Folge ist streng monoton wachsend)

b) Wir behaupten $s_{2^n} > \frac{1}{2}(n+2)$. $N=2^n$ gibt $n = \frac{\ln N}{\ln 2}$ und die rechte Seite geht mit n nach Unendlich!

Numerisch z.B. $s_{2^5} = \sum_{k=1}^{2^5} \frac{1}{k} : 4.06 > \frac{7}{2}$ und $s_{2^{10}} = \sum_{k=1}^{2^{10}} \frac{1}{k} : 7.5 > 6$

Der Beweis ist in der folgenden Tabelle enthalten:

Für $n=1$ gilt $1=s_1 = s_{2^0}$. Weiter ist beispielsweise $s_4 - s_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ und $s_8 - s_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ usw.

Die erste Zeile gibt solche Differenzen, in der zweiten sind sie einfach ausgeschrieben und beim Übergang zur dritten Zeile werden die Summanden höchstens verkleinert. Und in der untersten Zeile wird die Summe aller bis zu dieser Stelle verkleinerten Summanden gebildet.

$s_1 = s_{2^0}$	$s_{2^1} - s_{2^0}$	$s_{2^2} - s_{2^1}$	$s_{2^3} - s_{2^2}$	$s_{2^4} - s_{2^3}$	$s_{2^5} - s_{2^4}$...	$s_{2^{n+1}} - s_{2^n}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}$	$\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}$...	$\frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}$	$\frac{1}{32} + \dots$...	
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2} = \frac{1}{2}(2+2)$	$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}(3+2)$	$\frac{6}{2} = \frac{1}{2}(4+2)$	$\frac{7}{2} = \frac{1}{2}(5+2)$...	$\frac{1}{2}((n+1)+2)$

Da diese Abschätzung für jedes n möglich ist, haben wir die Behauptung bewiesen.

Ein zweiter Beweis, der etwas mehr liefert, geht wie folgt:

◆ Für $x \geq 1$ setzen wir $h(x) = \frac{1}{n}$ für $n \leq x < n+1$. Dann folgt für ganzes $N > 1$:

$$\int_1^{N+1} dx h(x) = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} dx h(x) = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} dx \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = s_N$$

Andererseits ist $\frac{1}{x} \leq h(x) \leq \frac{1}{x-1}$. Über die Monotonie der Integration folgt dann

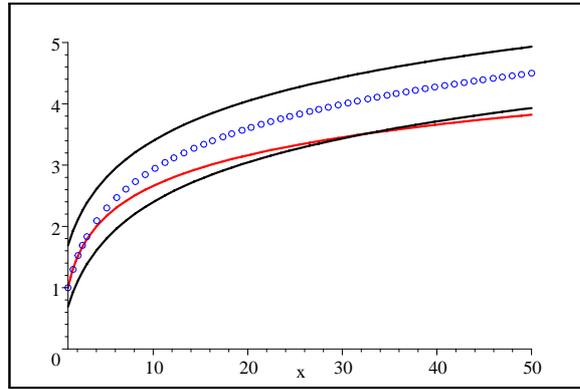
$$\int_1^{N+1} \frac{dx}{x} \leq \int_1^{N+1} dx h(x) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = s_N \leq 1 + \int_2^{N+1} \frac{dx}{x-1}$$

$$\ln(N+1) \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = s_N \leq 1 + \ln(N+1)$$

$$\ln N + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(N) + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

1	$\ln(2)$	$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k}$	$1 + \ln(2)$	1.0	0.693 15	1.0	1.693 1
10	$\ln(11)$	$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$	$1 + \ln(11)$	=	10.0	2.397 9	2.929 0
100	$\ln(101)$	$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$	$1 + \ln(101)$		100.0	4.615 1	5.187 4
						5.187 4	5.615 1

Graphisch Darstellung des Resultates: Blau die Summenwerte, rot die interpolierte Abschätzung des ersten Beweises und schwarz die im zweiten Beweis gefundenen Grenzen, die ja für beliebig große x bewiesen sind. Das Verhalten dieser Funktionen ist für $x \rightarrow \infty$ bekannt. und darauf folgt dann auch das uns interessierende Verhalten der Reihe. .



Das Verhalten in einem solchen System liegt vollständig fest und ist uns über mathematische Beschreibung
- Beobachtungsdatennahme und analytisches Denken zugänglich!
