Formelverständnis

Es genügt nicht, eine Formel einfach nur in einer Formelsammlung nachschlagen und abschreiben zu können. Hinter dieser leider verbreiteten Meinung steckt wohl die Vorstellung, eine Formel sei letztlich dazu da, dass nach einer eventuellen Umstellung in sie Zahlwerte eingesetzt werden sollen.

In einigen einfachen Fällen und einfachen zugehörigen Situationen ist das korrekt. Bei der Mehrzahl der wichtigen Formeln sind derartige Vorstellungen jedoch falsch und inzwischen eine ausgesprochene Ursache von beobachtbarer und unnötiger Leistungsschwäche.

Zu einer wichtigen Formel gehört ein **Formelverständnis**, das eine ganze Reihe nicht nur allgemeiner, sondern auch fallspezifischer mit der Formel verbundener Leistungen umfasst. Und viele dieser Leistungen müssen verbal, sprachlich dargestellt werden.

- Im Kurs ist das erste Beispiel die Behandlung der Schwingungsdauer des Pendels in Kap 1.3.
- An zentraler Stelle wird dann der Sachverhalt beispielhaft durch die Linsenformel verdeutlicht. Die kurze Formel selbst allein nützt wenig. Vielmehr sollte man **von ihr ausgehend** eine größere Zahl von Fragen beantworten und Leistungen erbringen können. In der Abschlussklausur stand die Formel allen zur Verfügung. Aber der verständige Umgang damit misslang mehrheitlich.
- Was sollte man im Zusammenhang mit dieser Formel können?
  - Erklären, was ein "Brennpunkt" ist und dies mit der Brennweite der Formel in Beziehung setzen
  - Von einem Punkt in der Nähe der Achse geht ein kleines achsennahes Lichtbündel aus. Was geschieht mit den Strahlen beim Durchgang durch die Linse?
  - Den Formelinhalt anhand einer Skizze erläutern (optische Achse, Brennpunkte, Beschreiben eines Lichtweges)
  - Zugehörige **Vorzeichenkonventionen** erklären und begründen. Was bedeutet negatives b? Vergleich mit den Konventionen beim Kugelspiegel
  - Die Formel nach b oder nach g umstellen
  - Mehrere Lichtwege von einem (nicht auf der Achse liegenden) Gegenstandspunkt zum zugehörigen Bildpunkt graphisch konstruieren
  - **Zwei Linsen** auf der optischen Achse hintereinander schalten und die Gesamtkonfiguration berechnen.

Ein besonders wichtiges Element der Formelsprache ist das Auftreten einer **"Von-Klammer"**. Sagen wir f(x), gelesen "f-von-x". Eine Gleichung wie

$$f(x) = x^2 + 3x(2 + \sin(x))$$

sagt Folgendes aus:

> Das links stehende f(x) **bezeichnet** eine Zahl, die von einer anderen mit x bezeichneten Zahl abhängen soll (x ist "unabhängige Variable"). Rechts wird ein Rechenweg beschrieben, der angibt, wie man diese Zahl f(x) erhält, wenn x vorgegeben ist. Dabei ist die äußere Klammer nach 3x eine gewöhnliche Multiplikationsklammer, wogegen die Klammer in sin(x) erneut eine Von-Klammer ist.

Analoge Beispiele aus dem Bereich der Vektorrechnung

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{V}(t - t_0)$$

Hier wird durch $\vec{r}(t)$ (gelesen "r-von-t" oder "r-Vektor-von-t" ein Vektor bezeichnet, der durch die unabhängige Variable t festgelegt ist. Die rechte Seite beschreibt wieder einen Rechenweg, mit dem man von t zu $\vec{r}(t)$ gelangt. Die auf dieser Seite auftretende Klammer isr eine **Multiplikations**klammer. Zur Berechnung benötigt man noch die Zahl t_0 und die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{V}$, die daher situationsspezifisch gegeben sein müssen.

Einsetzen von Zahlen und Rechenausdrücken.

Diese Leistung bereitet trotz ihrer Einfachheit erfahrungsgmäß größte Schwierigkeiten.

In Gleichung der beschriebenen Form "f(x)=Rechenweg" darf man für x (zulässige) Zahlen oder auch andere Rechenausdrücke einsetzen! Formal muss man nur ganz stur jedes x durch diese Zahl oder den Rechenausdruck ersetzen. Den Rechenausdruck mölichst noch mit einer Begrenzungsklammer.

Nehmen wir das erste Beispiel:

$$f(x) = x^2 + 3x(2 + \sin(x))$$

Wir ersetzen x hierin nacheinander durch 3, durch a+b und durch $1+x^2$. Das gibt folgende Gleichungen

$$f(3) = 3^2 + 3 \cdot 3(2 + \sin(3)) = 27 + 9\sin(3) = 9(3 + \sin(3)$$

und

$$f(a + b) = (a + b)^2 + 3(a + b)(\sin(a + b))$$

und

$$f(1 + x^2) = (1 + x^2)^2 + 3(1 + x^2)(1 + \sin(1 + x^2))$$

Und mit Vektoren. Sei wie oben:

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{V}(t - t_0)$$

und jetzt zusätzlich?

$t_0 = 2$	$\vec{a}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\vec{V}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Was ist dann $\vec{r}(3)$, Was $\vec{r}(-2)$. Man hat:

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}(t - 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2T \\ -2 - 2T \end{pmatrix} \qquad \text{mit } T = t - 2$$

Also (T=1 bzw. -4)

$$\vec{r}^K(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}^K(-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Und was ist $\vec{r}(s + 2t)$?

$$\vec{r}(s + 2t) = \vec{a} + \vec{V} \cdot (s + 2t + 2)$$

Unabhängige und abhängige Variable (I)

Viele unserer Formeln haben die Form $\boxed{\text{f(x)=....}}$. Sie sind dann wie folgt zu lesen: Die linke Seite f(x) steht für eine *Bezeichung* einer interessierenden Größe y. Diese Größe soll von einer anderen mit x bezeichneten Größe abhängen, durch sie irgendwie bestimmt, festgelegt werden. (x wird auch *unabhängige Variable* genannt. Das Ergebnis y dagegen *abhängige Variable*). Auf der rechten Seite der Formel $\boxed{\text{f(x)=....}}$ - durch die Punkte angedeutet - steht dagegen ein Rechenausdruck, der einen Rechenweg beschreibt, wie man zum Wert der Größe f(x) kommt, wenn man nur x kennt. Die Formel erlaubt daher die Bestimmung des Wertes für jedes zulässige x durch Einsetzen. Der Rechenausdruck der rechten Seite enthält vielfach noch äußere Parameter, die in der Bezeichnung links nicht auftauchen müssen.

Beispiele:

- Die übliche Geradengleichung $\boxed{\text{y=y(x)=mx+b}}$ (m,b äußere Paramter)
- Flugparabel
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 \cdot (t - t_1) + \frac{1}{2}\vec{g} \cdot (t - t_1)^2$$
- Auflösen der Linsengleichung nach b gibt beispielsweise
$$b = b(g) = \frac{gf}{g - f}$$

Unabhängige und abhängige Variable (II)

Bisher haben wir den Fall **einer** unabhängigen Variablen (x, t bzw. g in den Beispielen) betrachtet. Aber es gibt auch Fälle mit **mehreren unabhängigen Variablen**. Etwa, wenn man einen Ort durch einen dahin führenden achsenparallelen Weg beschreibt und man eine von diesem Ort abhängige Feldgröße angeben will.

◊ Sagen wir ein Temperaturfeld. Dann hat man beispielsweise eine Gleichung

$$T(x, y, z) = x(y + (x + z)^2 \sin(yz))$$

Links wieder die Bezeichnung. T(x,y,z) (gelesen "T-von-x-y-z") des Temperaturwertes an diesem Punkt. Rechts ein Rechenweg, wie man bei vorgegebenen Werten für x,y und z diesen Wert erhält. Wieder stehen rechts zwei gewöhnliche und beim Sinus eine von-Klammer.

Die Einsetzung erfolgt völlig analog. Werden dabei nicht alle Variable festgelegt, so bleibt der Rest allgemein. Einige Beispiele:

x=3 und y=a setzen:

$$T(3, a, z) = 3(a + (3 + z)^2 \sin(az))$$

y=x und z=x setzen gibt:

$$\begin{aligned} T(x, x, x) &= x(x + (x + x)^2 \sin(xx)) = (x^2 + 4x^3 \sin(x^2) \\ &= x^2(1 + 4x \sin(x^2)) \end{aligned}$$

Feldänderungen: Wie ändert sich unser Temepraturfeld von x=3 nach x=6? Mit unseren allgemeinen Bezeichnungsregeln haben wir

$$\Delta T = T(6, y, z) - T(3, y, z) = ...$$

Jetzt können wir die Änderung durch Einsetzen berechnen. Die abkürzende Bezeichnung ist hier ΔT.

$$\begin{aligned} \Delta T &= 6(y + (6 + z)^2 \sin(yz)) - 3(y + (3 + z)^2 \sin(yz)) \\ &= 3y + \left(6(6 + z)^2 - 3(3 + z)^2\right) \sin(yz) \\ &= 3y + 3\left(63 + 18z + z^2\right)(\sin yz) \qquad \text{Endform} \end{aligned}$$

◊ Ein anderes Beispiel: Sind $\vec{a}^K$ und $\vec{b}^K$ zwei Koordinatenvektoren, d.h. $\vec{a}^K = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}^K = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\boxed{(\vec{a}^K \cdot \vec{b}^K) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Links steht eine **Bezeichnung** für das Skalarprodukt der beiden Vektoren, rechts eine Beschreibung des Rechenweges von den 6 Komponenten zum Resultat.

☐ Interpretieren Sie das Additionstheorem

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

im Sinne der vorangegangenen Ausführungen

Unabhängige und abhängige Variable (III)

(Formelumwandlung)

Vielfach hat man eine Beziehungsformel zwischen Größen und eine Rollenzuweisung, die eine bestimmte dieser Größen als abhängige Variable festlegt. Aber die Formel ist noch nicht nach dieser Größe aufgelöst. Dann ist eine Formelumstellung anzustreben:

- Für die drei Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks gilt der Pythagoras $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$. D.h. bedispielsweise, dass c und b die Länge a festlegen. Man hat

$$\boxed{a = a(b,c) = \sqrt{c^2 - b^2}}.$$

- Aus der Linsenformel folgt die Bildkoordinate in Abhängigkeit zu Gegenstandskoordinaten zu

$$b = b(g) = \frac{gf}{g-f} \qquad \text{f äußerer Parameter}$$

☐ Kann man das Additionstheorem sin(x+y)=sin(x)cos(y)+cos(x)sin(y) nach y auflösen? Wieso ist das unsinnig?

☐ Das Brechungsgesetz $\boxed{\sin(\varepsilon) = n\sin(\alpha)}$ läßt sich auf mehrere Weisen umstellen. Vervollständigen Sie die folgenden drei Gleichungen und geben Sie die jeweiligen Rollen der beteiligten Größen an:

$$\alpha = \alpha(\varepsilon, n) = ... \quad \varepsilon = \varepsilon(\alpha) = ... \quad \text{n=n}(\varepsilon, \alpha) = ...$$

Äußere Parameter

Häufig hat man es mit einer Situation der folgenden Art zu tun: Man hat nicht nur ein einziges Problem zu lösen sondern viele Probleme irgendwie gleicher Art. Der Unterschied soll nur im Wert m einer beteiligten Größe bestehen. Dann kann man das Problem vielfach *allgemein* für alle zulässigen a-Werte lösen und muss am Ende im Endergebnis nur den jeweiligen a-Wert einsetzen, um das zur jeweiligen Aufgabe gehörige Resultat zu erhalten.

Wir sagen: "m hat die Rolle eines äußeren Parameters". Zu jedem m-Wert gehört demnach eine zugehörige Aufgabe.

Beispiel: Bestimme für die Gerade y=mx+2 den Schnitt a mit der x-Achse. (Das ist für jedes m eine eigenes Problem!) Es folgt:

$$a = -\frac{2}{m}$$

D.h. beispielsweise y=1x+2 hat den Schnitt a=-2. Und y=-3x+2 den Schnitt a=-$\frac{2}{3}$. Die $\boxed{\text{eine Formel für a}}$ liefert uns so sofort die Lösung von $\boxed{\text{unendlich vielen Aufgaben}}$! Man muss am Ende nur den zugehörigen m-Wert einsetzen!

Wieso interpretiert man a nicht als unabhängige Variable? Das ist möglich, aber nicht nötig. Erst wenn man in ein und derselben Aufgabe mit mehreren m-Werten arbeiten muss, etwa eine zugehörige Änderung zu bestimmen ist, wird man m die Rolle der unabhängigen Variablen geben. Grund: Je mehr unabhängige Variable man hat, desto komplizierter wird meist die zugehörige Argumentation. Sofern die Problemsituation es erlaubt, arbeitet man daher besser mit äußeren Parametern.

In der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für x werden p und q als äußere Parameter interpretiert. Das Ergbnis ist die "p-q-Formel".

Ist eine dünne Linse der Brennweite f vorgegeben, So bestimmt die Gegenstansdsweite die Bildweite über die Formel $\boxed{b=b(g)=\frac{gf}{g-f}}$. Hier ist f äußerer Parameter. Die Formel löst für jede dünne Linse das Problem.

Formeln und Rollenkonzept

Das Konzept selbst wird etwas allgemeiner im ersten Kapitel des Mathematikvorkurses vorgestellt. Wir wollen es hier am Beispiel der Formel für die Schwingungsdauer des Pendels verdeutlichen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Je nach Problemsituation erhalten die einzelnen Buchstaben dieser Formel eine gewisse Rolle, die zumindest teilweise das weitere Vorgehen bei der Problembehandlung bestimmt! Zur Verdeutlichung geben wir eine Reihe zugehöriger Beispielaufgaben:

(1) Baue (etwa mit einem Faden und einem Schlüssel) ein einfaches (näherungsweise mathematisches) Pendel und betimme die Schwingungsdauer für mehrere Fadenlängen. Vergleiche das Resultat mit dem durch die Formel vorhergesagten Resultat.

(2) Bestimme mit Hilfe eines einfachen Pendels näherungsweise den Wert der Schwerebeschleunigung g.

(3) Angenommen g ändert sich um $\Delta g = g_2 - g_1$. Wie ändert sich T?

(4) Angenommen T ändert sich um $\Delta T = T_2 - T_1$. Dabei sei die Pendellänge L fest. Wie hat sich g verändert, so dass die angegebene Änderung der Schwingungsdauer erntsteht?

(5) Wie ist die Pendellänge (an einem festen Ort) zu wählen, damit man eine Schwingunsdauer von 5 Sekunden erhält?

	T	L	g	Formelschreibweise Ergebnis
(1)	Abh.Var.	Unabh.Var.	Ä.P	T=T$_g(L)$
(2)	Unabh.Var	Unabh.Var.	Abh.Var.	g=g(L.T)=$\frac{(2\pi)^2 L}{T^2}$
(3)	Abh.Var	Ä.P.	Unabh.Var	$\Delta T = T_L(g_2) - T_L(g_1) = ..$
(4)	Unabh.Var.	Ä.P.	Abh.Var.	$\Delta g = g(T_2) - g(T_1) = ...$
(5a)	Konst.	Unbest.	Ä.P	T=T(L,g) Lösung über:
(5b)	Unabh.Var.	Abh.Var.	Ä.P.	L=L$_g$(T)=$\frac{T^2}{(2\pi)^2 g}$ (Endformel)

Die Lösung erfolgt hier jeweils zunächst durch eine von der Rollenzuweisung bestimmte Formelumstellung, die dann u.U. durch Änderungsbildung weiterverarbeitet wird.

Leiten Sie die folgende Formel für die mittlere Änderungsrate der Schwingungsdauer mit der Pendellänge her:

$$\boxed{\tfrac{\Delta T}{\Delta L}=2\pi\sqrt{\tfrac{L_0}{g}}\left(\sqrt{1-\tfrac{\Delta L}{L_0}}-1\right)=\mathrm{T}_g(\mathrm{L}_0)\left(\sqrt{1+\tfrac{\Delta L}{L_0}}-1\right)}$$

Komentieren sie diese Formel und bestimmen Sie die zugehörige momentane Änderungsrate. Wie groß ist der Unterschied zwischen momentaner unf mittlerrer Änderungsrate?

▼ Die Formel zeigt, dass folgende Bezeichnungen benutzt werden:

$$\frac{\Delta T}{\Delta L}=\frac{T_g(L_0+\Delta L)-T_g(L_0)}{\Delta L}$$

Einsetzen der Ausgangsformel gibt über einige Zwischenrechnungen:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{\Delta L} &= (2\pi)\frac{\sqrt{\frac{L_0+\Delta L}{g}}-\sqrt{\frac{L_0}{g}}}{\Delta L}=\frac{2\pi}{\Delta L\sqrt{g}}\left(\sqrt{L_0+\Delta L}-\sqrt{L_0}\right)\\ &= \frac{(2\pi)}{\Delta L}\sqrt{\frac{L_0}{g}}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta L}{L_0}}-1\right)=\frac{T_g(L_0)}{\Delta L}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta L}{L_0}}-1\right)\end{aligned}$$

Die zugehörige momentane Änderungsrate ist wegen $\sqrt{L}=L^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial T}{\partial L}(L_0,g)=\frac{dT_g}{dL}(L_0)=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{2}L_0^{-\frac{1}{2}}=\frac{2\pi\sqrt{L_0}}{\sqrt{g}}\frac{1}{2L_0}=T_g(L_0)\cdot\frac{1}{2L_0}$$

Beachten Sie, dass die Tangentenzerlegung von y=$\sqrt{1+x}$ Folgendes ergibt:

$$\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{1}{2\Delta x}\Delta x+R(0,\Delta x).$$

Mit $\Delta x=\frac{\Delta L}{L_0}$ folgt obiger Unterschied zwischen mittlerer und momentaner Rate.