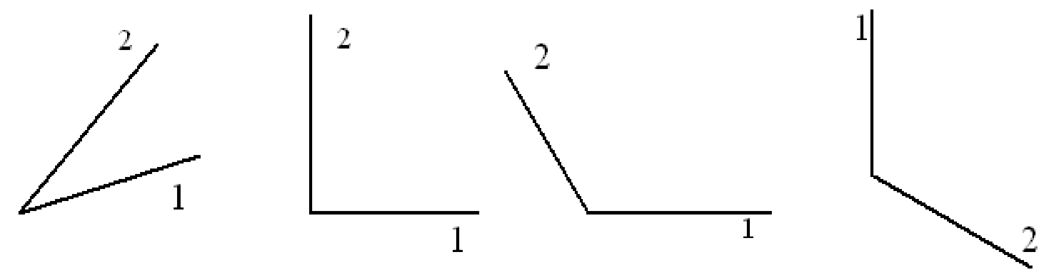
Bogenmaß und trigonometrische Funktionen

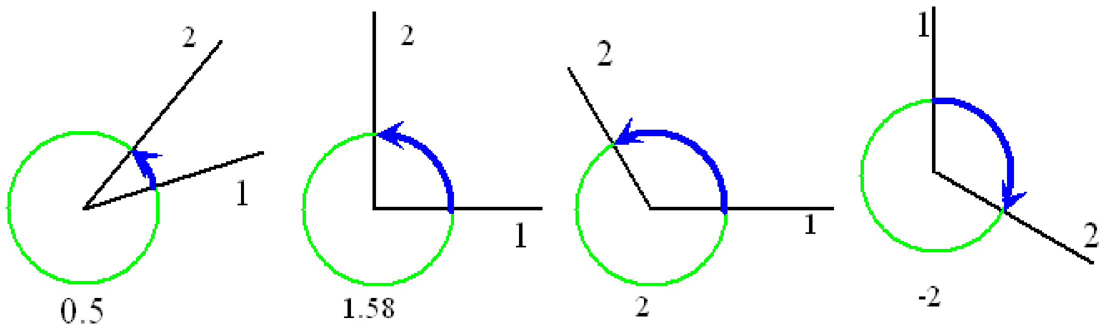
☐ **Was ist ein "Winkel"?** Wir suchen eine tragfähige Definition.

▲ Der "Winkel (zwischen 2 von einem Punkt ausgehenden Halbgeraden)" beschreibt deren relative Lage zueinander einschließlich der Reihenfolge! Einige Beispiele, wobei die Numerierung die Reihenfolge der beiden Halbgeraden angibt.



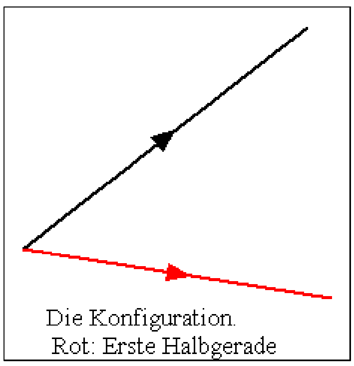
⧫ Zeichne dazu den Einheitskreis (um.den Scheitel) und bestimme die Schnittpunkte mit den Halbgeraden. Gehe auf dem Kreis von der ersten Halbgeraden zur zweiten. (Mehrere Möglichkeiten!)

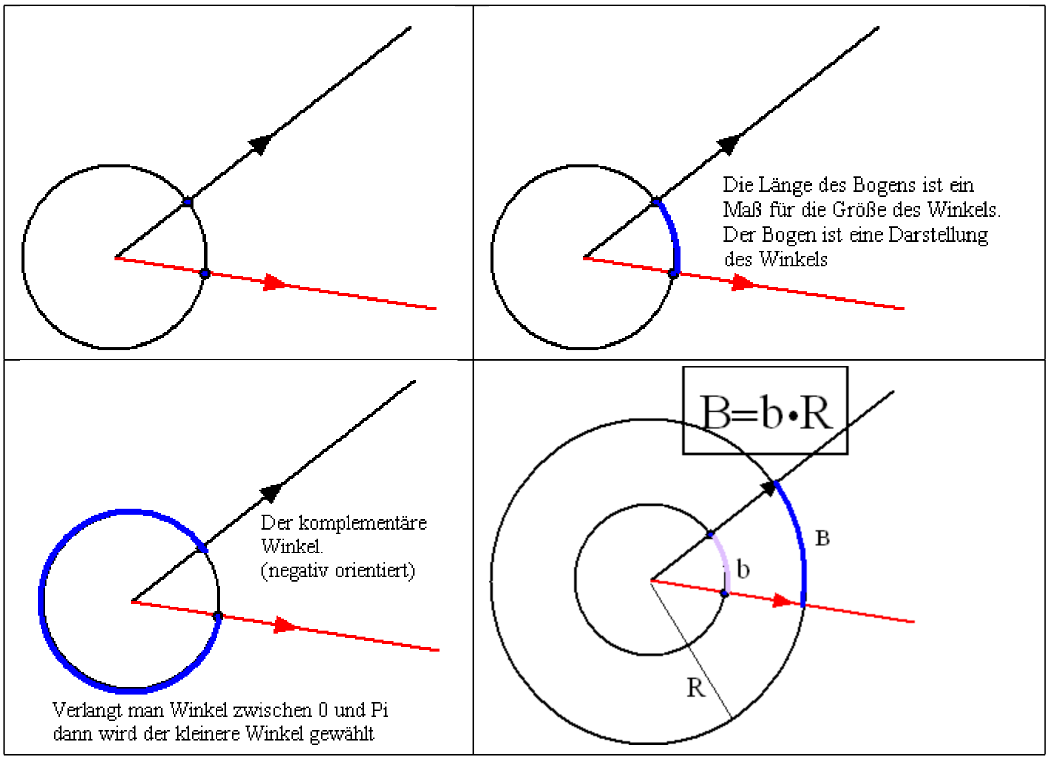
⧫ Bestimme die Länge des so entstandenen Bogens. **Das ist das Bogenmaß des Winkels**



In der Figur ist diese Konstruktion für unsere Beispielkonfigurationen ausgeführt. Die zugehörigen (näherungsweisen) Winkelwerte sind jeweils darunter notiert. Beachten Sie die letzten beiden Fälle: Kongruente Figuren liefern denselben Winkelwert. Und ein im Urzeigersinn durchlaufener Bogen erhält einen negativen Winkelwert.

⧫ Bei Polarkoordinaten wählt man die positive 1- oder x-Richtung als erste Halbgerade!





◊ Wie kann man sich spezielle Werte der Bogenlänge merken? Um welche geht es vornehmlich? .(Notfalls selbst Tabelle anfertigen)

◊ Werte über 2π ERgebnis einer physik. Bewegung

◊ Unterscheiden Sie begrifflich sorgfältig: *Winkel* ist die geometrische Konfiguration der beiden Halbgeraden. *Winkelwert* ist die diese beschreibende Zahl.

◊ Umrechnung in andere Maße durch folgende Formel

$$u = \frac{\varphi_{Bogen}}{2\pi} = \frac{\varphi_{xxx}}{U_{xxx}}$$

u ist *relativer Anteil* des Winkels am Gesamtumfang

U_{xxx} ist der Größenwert des Einheitskreises in der Darstellung xxx. Etwa $U_{Grad} = 360$.

☐ Der Nutzen einer tragfähigen Definitionen erweist sich beim Auftreten ei ner neuartigen Situation: Was ist ein **Raumwinkel ?** Welche **Unterscheidung** aus obiger Differenzierungsliste ist hier wichtig?

☐ Wieso ist der Raumwinkel wichtig im Zusammenhang mit der "Intensität einer Lichtquelle"?

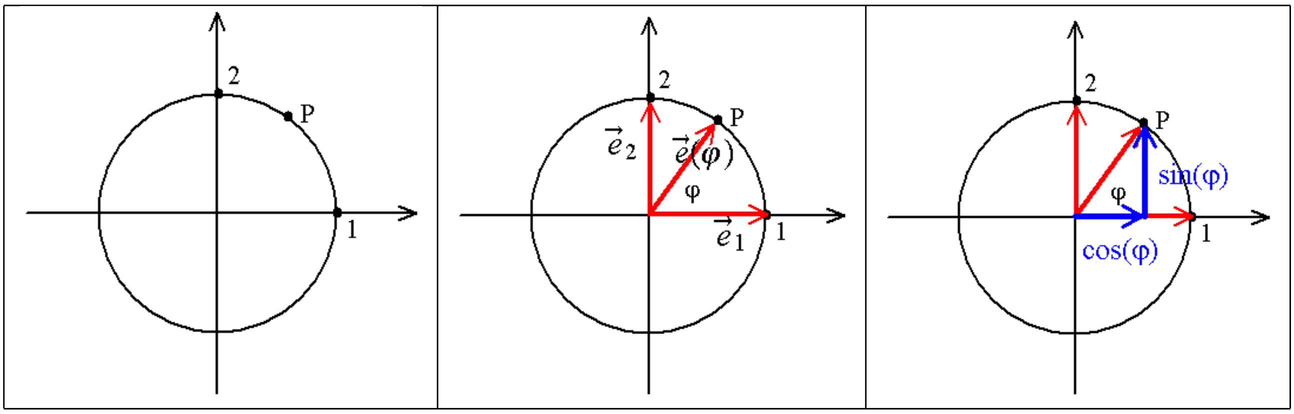
Trigonometrische Funktionen

Betrachte den Ursprungseinheitskreis in der Ebene mit eingezeichnetem Koordinatensystem und auf dem Kreis einen Punkt P.

In diesem Teil steht "Winkel" immer für "Größe des Winkels" gemessen in der Bogenlänge! (Erhält die Rolle .....)

1. Der geometrische Pfeil, der vom Ursprung nach P führt, werde mit $\vec{e}(\varphi)$ bezeichnet. Dabei sei φ der Winkel zwischen positiver x-Achse und dem Pfeil. Dieser Winkel legt P fest.
2. Der Winkel wird durch seine Bogenlänge quantifiziert. Oder: Der Winkelwert im Bogenmaß ist gleich der Länge des Kreisbogen zwichen 1 und P.
3. Er - der Winkel - darf negativ werden.
4. Unterschiedliche Winkel können zu demselben Punkt P führen!
5. Zu jedem Winkel φ gehört ein achsenparaller Weg vom Ursprung zum Endpunkt von $\vec{e}(\varphi)$. Dessen beide Koordinaten werden in dieser Reihenfolge mit $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ bezeichnet.

Das ist die geometrische Definition dieser beiden trigonometrischen Grundfunktionen, auf die man bei Bedarf immer zurückkommen sollte.



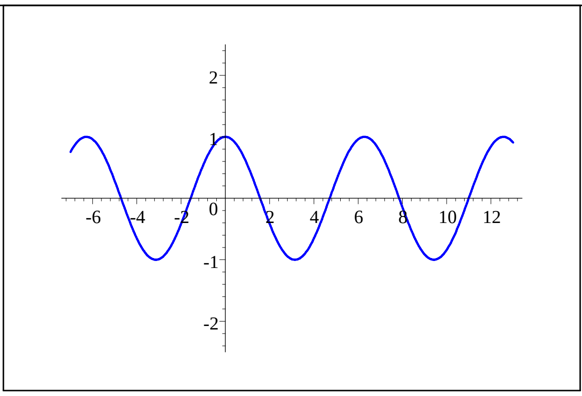
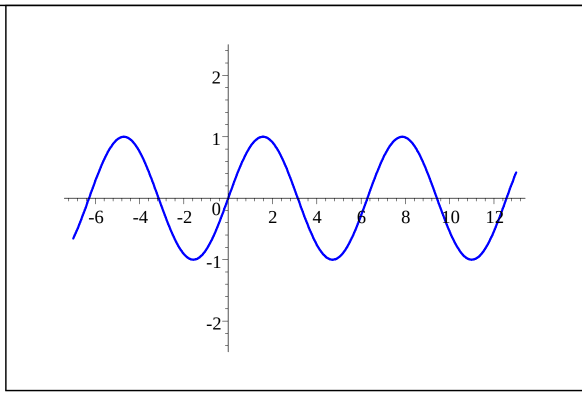
Die Werte dieser beiden Größen (cos und sin) liegen zwischen -1 und +1. Insbesondere ergibt sich so die folgende enorm wichtige Formel.

$$\boxed{\vec{x}_P^K = \vec{e}^K(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}}$$

Nochmals: Die inhaltliche Interpretation von $\vec{e}^K(\varphi)$, eigentlich $(\vec{e}(\varphi))^K$ ist: Bilde den Einheitsvektor zum Winkel φ. Bezeichnung $\vec{e}(\varphi)$. Stelle ihn als achsenparallelen Weg im Koordinatensystem K dar. Die zugehörige Bezeichnung ist $(\vec{e}(\varphi))^K = \vec{e}^K$

(φ). Die Formel gibt dann die beiden Komponenten, zumindest Bezeichnungen dafür.

Als Funktionen erhält man folgendes Bild, das man sich gut einprägen sollte.
$\sin\varphi$

	
$\cos(\varphi)$. Erstes Maximum rechts von Null bei $2\pi \approx 6.28$ (Periode)	$\sin\varphi$. Zweite Nulstelle rechts von Null bei $2\pi \approx 6.28$ (Periode)

☐ Wie/was zum Merken machen? Vergrößern des Winkels, Vorzeichen, Periodizität

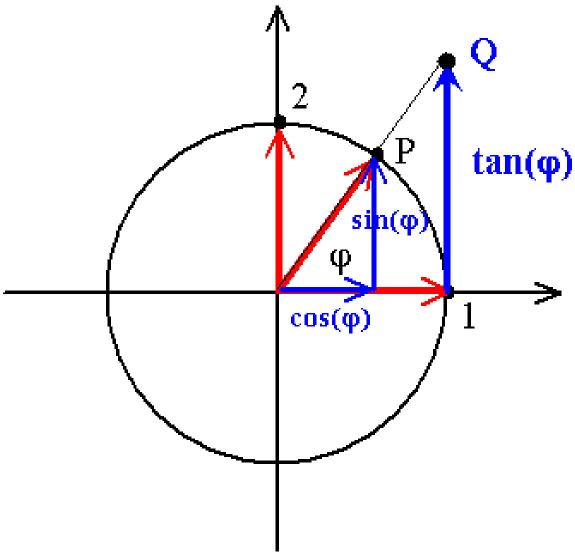
☐ Spezielle Werte

☐ Was besagt die Gleichung $\vec{e}(0) = \vec{e}(2\pi) = \vec{e}(-2\pi) = \vec{e}(4\pi)$? Was $\vec{e}(\alpha + \pi) = \vec{e}(\alpha - \pi)$?

☐ Nutzen für Dreiecke. / Ähnlichkeitsbetrachtungen von Dreiecken

☐ Sinussatz und Cosinussatz im Dreieck – Vertrauensbildende Maßnahmen für die beiden Formeln!

☐ Tangens im Dreiecksbild! (Steigung)

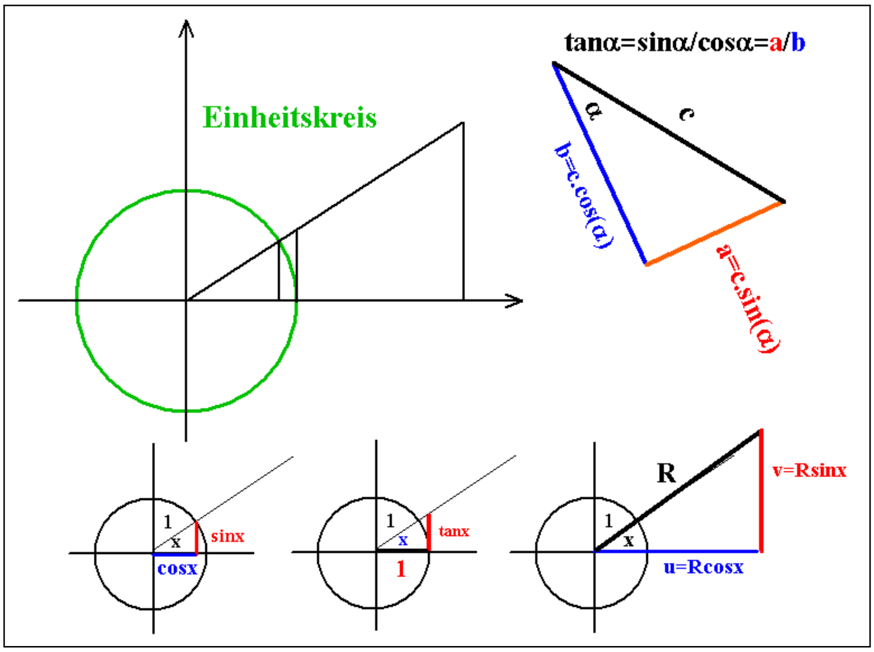


Der Punkt Q liegt auf der Verlängerung von $\vec{e}(\varphi)$. Man gelangt zu ihm auf dem folgenden achsenparallelen Weg: Gehe 1 in 1-Richtung und dann $\tan(\varphi)$ in 2-Richtung. Also $\vec{x}_Q^K = (1, \tan(\varphi))$. Dreiecksähnlichkeit gibt die übliche Definition $\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$.

☐ Wie lang ist die Strecke $\overline{0Q}$?

★★Trigonometrische Funktionen und rechtwinklige Dreiecke ★★

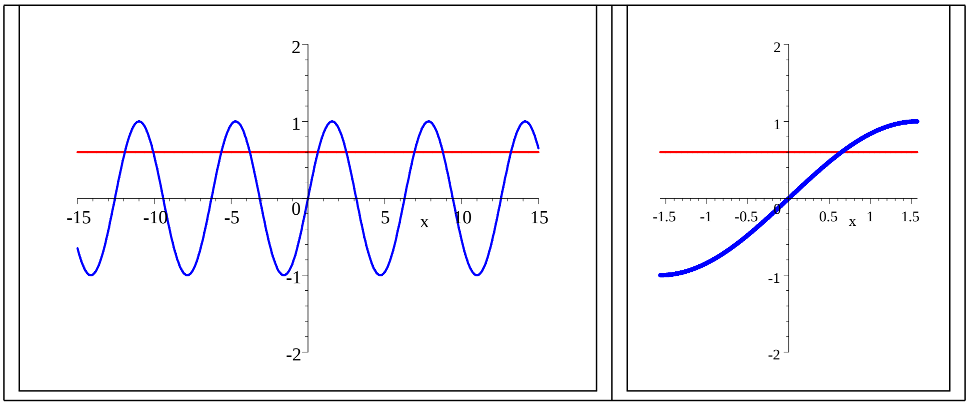
Die wichtigsten Information waren in dem folgenden Bild zusammengefasst.



Die inversen Funktionen

Problem: Sei a vorgegeben. Suche x, so dass a=sin(x).

Dies geht man zunächst am besten graphisch an, als Schnitt des Graphen von y=sin(x) mit y=a. Für a=0.6 etwa gibt das folgendes Bild:



Wir sehen, dass es unendlich viele Schnittpunkte gibt. Im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ gibt es allerdings höchstens einen. Vgl. das rechte Bild. In diesem Bereich ist der Sinus mnoton wachsend und nimmt alle Werte genau einmal an.

Für -1$\leq a \leq 1$ gibt es immer genau ein x mit sinx=a. Dieses x bezeichnet man mit arcsin(a).

Für$-1 \leq a \leq 1$ **bezeichnet arcsin(a) die Lösung der Gleichung** $sin(x) = a$,**die im Intervall** $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ **liegt!**

Wir haben daher für $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ die Gleichung arc(sin(x))=x und für -1$\leq a \leq 1$ die Gleichung sin(arcsin(a))=a.

Der Taschenrechner liefert unter $\sin^{-1}$ diese Zahl.
Die übrigen Lösungen der Gleichung erhält mit Hilfe der Symmetrieeigenschaften der Figur.
Sei $x_0 = \arcsin(a)$. Dann sind die weiteren Lösungen gegeben durch

$$\begin{aligned} x_{1n} &= x_0 + 2\pi n \text{ mit n=0}, \pm 1, \pm 2, ... \\ x_{2n} &= (\pi - x_0) + 2\pi n \text{ mit n=0}, \pm 1, \pm 2, ... \end{aligned}$$

Analog für Tangens und cosinus.
