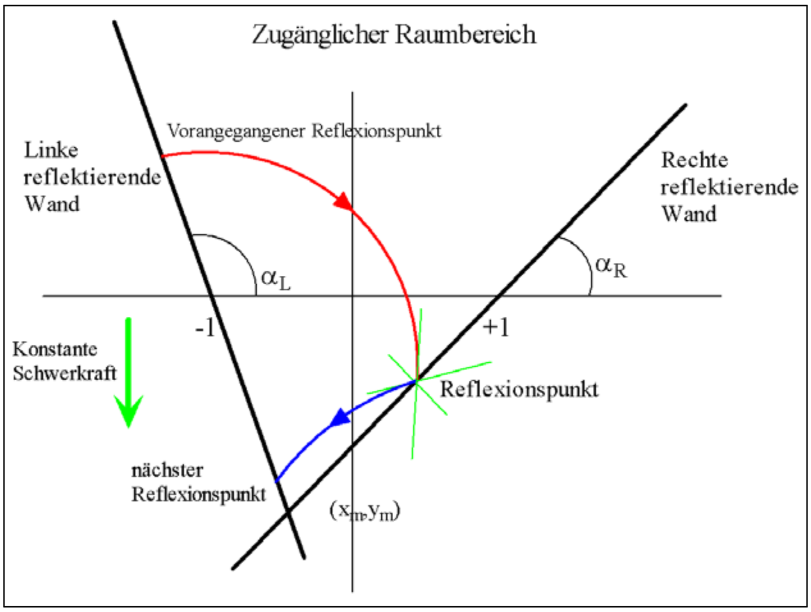
Flugparabelbillard

Ein Beispiel dafür, wie komplexes Verhalten mit Hilfe einfacher Grundregeln erzeugt werden kann! Die Struktur diese Verhaltens wird jedoch erst durch Erweiterung unserer unmittelbaren Wahrnehmung sichtbar.

Was leistet Physik?
Wozu benötigt man dabei Vektoren?
Was bringt uns der Computer?´

Die geometrische Konfiguration:

- Wir betrachten eine ebene Bewegung. D.h. die gesamte Konfiguration ist immer in einer Ebene zeichenbar.
- In die Ebene legen wir ein Koordinatensystem, um die Punkte der Ebene durch zwei Zahlangaben bestimmen zu können.
- In der Ebene befinden sich zwei (undurchdringliche) reflektierende Wände in Form von Geraden. Die linke Gerade gehe durch den Punkt (-1,0) mit einem stumpfen Steigungswinkel α_L und die rechte durch den Punkt (1,0) mit spitzem Steigungswinkel α_R gegen die Horizontale. Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt (x_m, y_m). Zwischen den beiden Geraden befindet sich dann ein für die Bewegung zugänglicher Bereich.
- Zwischen den beiden Wänden bewegt sich ein Massenpunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft. Trifft er auf eine der Wände, dann wird er elastisch reflektiert. Es interessiert das Verhslten des Punktes während vieler Reflexionen.



Die Gesamtinformation ist in der Bahnkurve $t \longmapsto \vec{r}(t)$ enthalten. Diese ist nicht mehr in Form einer einfachen expliziten Formel darstellbar. Nur rekursiv.

Das physikalische System:

Es liegen zwei einfache Grundregeln vor, deren Zusammenwirken studiert werden soll.

1. Auf Massenpunkte im zugänglichen Bereich wirkt eine konstante Kraft, die alle Bewegungen auf parabelförmige Bahnen - "Flugparabeln" - zwingt. (Über die Newtonsche Bewegungsgleichung) Die Schwerkraft ist im Koordinatensystem immer senkrecht nach unten gerichtet. Die zugehörige Bahnkurve ist elementar angebbar (Flugparabel und wird später genauer besprochen).

2. Trifft die Bahn auf eine der beidenWände, so wird der Punkt reflektiert und zwar nach dem Reflexionsgesetz "Einfallswinkel=Ausfallswinkel". (Elastischer Ball gegen eine Wand!)

Modulare Beschreibung des Vorgehens

★ Zuerst benötigt man eine genauere vektorielle Formulierung der beiden Regeln. Das sind elemetare Aufgaben, die wir mit den Methoden des Kurses lösen können.

> ⧫1a) Reflexionsort und vektorielle Einfallsgeschwindigkeit seien vorgegeben. Bestimmen dazu die vektorielle Startgeschwindigkeit des reflektierten Punktes (am Reflexionsort)
>
> ⧫ 2a) Reflexionsort und vektorielle Startgeschwindigkeit seien gegeben. Bestimme dazu die Bahn im zugänglichen Bereich und daraus den nächsten **Auftreffpunkt** samt zugehöriger vektorieller Geschwindigkeit auf einer der Wände. (Achtung: Das muss nicht die gegenüberliegende sein!)

★ **Jetzt gibt man einen Startpunkt (auf einer Wand) sowie eine vektorielle Startgeschwindigkeit vor. Damit ist die Bewegung des Punktes im idealen System für alle Zeiten determiniert (über wiederholte Anwendung der beiden Regeln)**

★ Man erstellt ein Computerprogramm für die Anwendung der beiden Regeln, bestimmt die daraus resultierende Bahnkurve und stellt das Ergebnis **geeignet** graphisch dar. Wir werden sehen: Das Problem ist die Ausgestaltung von "geeignet"!

Das Systemverhalten

> **Startet der Punkt jetzt an irgendeiner Stelle mit einer gegebenen (vektoriellen) Geschwindigkeit, dann liegt die weitere Bahn für alle Zeiten fest, ist eindeutig determiniert. (Die Vorgabe der Startwerte ist der einzige Außeneingriff ins System - von außerhalb des Systems. Der weitere Ablauf ist dann autonom oder mechanisch, vom System determiniert.)**

Das Zusammenwirken der beiden einfachen Regeln 1 und 2 liefert ein hochkomplexes Verhalten, das aber unseren Sinneseindrücken und unserer anschaulichen Vorstellung unmittelbar nicht zugänglich ist.

Vieles wird erst sichtbar, wenn man die Daten geschickt verarbeitet - codiert.

□□ **Jetzt überlegen:**

⧫ Wie wird die Bewegung über längere Zeit aussehen? Welche Eigenschaften sind zu erwarten ? Welche Systemgrößen kann man ändern und welche Wirkung wird das haben?.

⧫ Kommt der Punkt (autonom) immer bis zum Schnittpunkt herunter? Kann er beliebig hoch steigen? Gibt es einen Minimalwert der Höhe....Welche geometrischen Punkte werden irgendwann einmal erreicht?

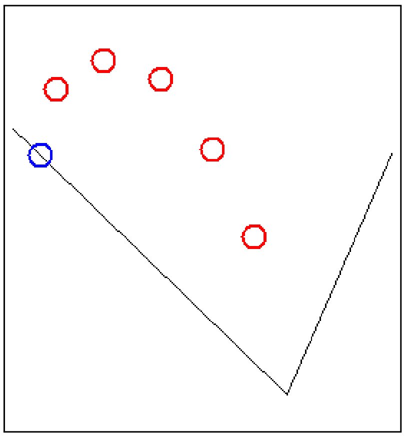
⧫ Einige Verhaltenseigenschaften sind trivial. Welche sind das? Der Energiesatz liefert eine solche. Nämlich?

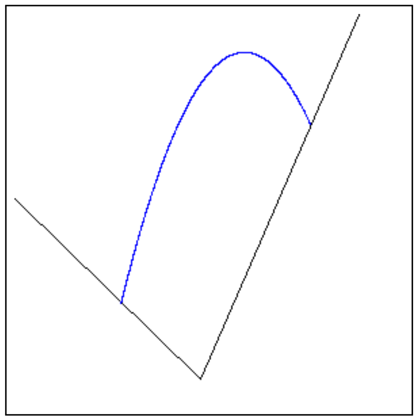
> □ **Konkret:** Können Sie (ohne direkte Berechnung) eine Vorhersage über nicht triviale Eigenschaften der tausendsten Reflexion machen???

Die Computersimulation

Wir geben Resultate eines Computerprogrammes, das das Systemverhalten simuliert oder produziert. Dabei können unterschiedliche Abstraktions- bzw. Auswertungsstufen realisiert werden

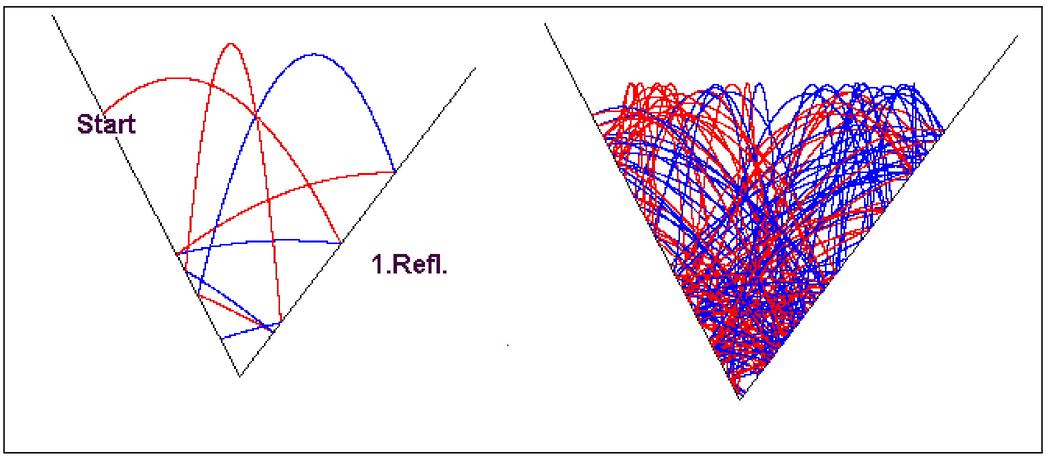
1. Computersimulation: Wir verfolgen die Bewegung so, wie sie in der Natur abläuft, sehen den bewegten Punkt, wie er zwischen den Wänden reflektiert wird. Viele zugehörige Phänomene sind qualitativ unmittelbar einsehbar. Das linke Bild zeigt überlagert Momentaufnahmen des Systems zu 6 verschiedenen Zeiten.



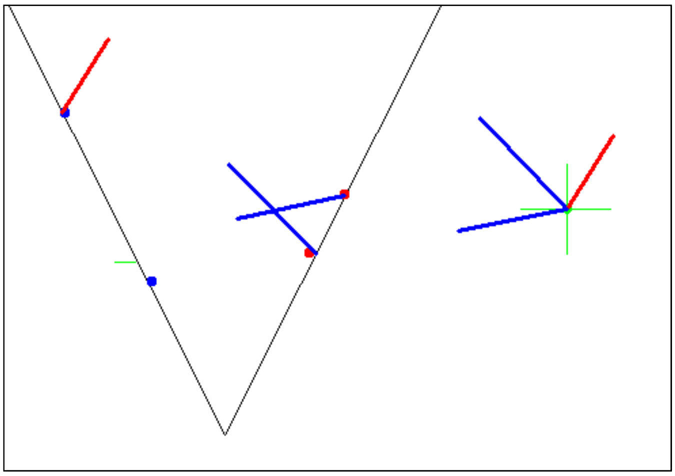


2. Computersimulation: Das rechte Bild zeigt das Stück einer Parabelbahn, das zwischen zwei Reflexionen durchlaufen wird. Also eine Dauerbelichtung zwischen zwei Reflexionen!

3. Computersimulation: Zeigt die Parabelbahn, die Bahnspur, ab einem Startpunkt, wie sie sich über mehrere Reflexionen hinaus entwickelt. Jetzt nimmt man zahlreiche neue Phänomene wahr, sieht insbesondere eine ausgeprägte Abhängigkeit von den *Anfangswertdaten.* Viele Fragen ergeben sich. Das linke Bild zeigt 6 Reflexionen. Die Bewegung von links nach rechts ist rot, die von rechts nach links blau gezeichnet. Das rechte Bild zeigt viele Reflexionen. Was sieht man?. Aber es gibt auch Bilder, die ganz anders aussehen.



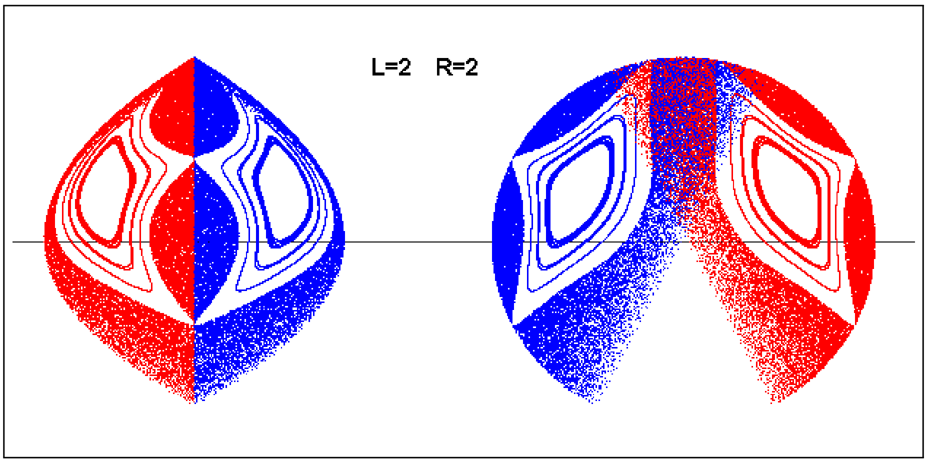
Wie kann man das Resultat vieler Reflektionen besser darstellen? Die Erläuterung des nächsten Bildes zeigt das.



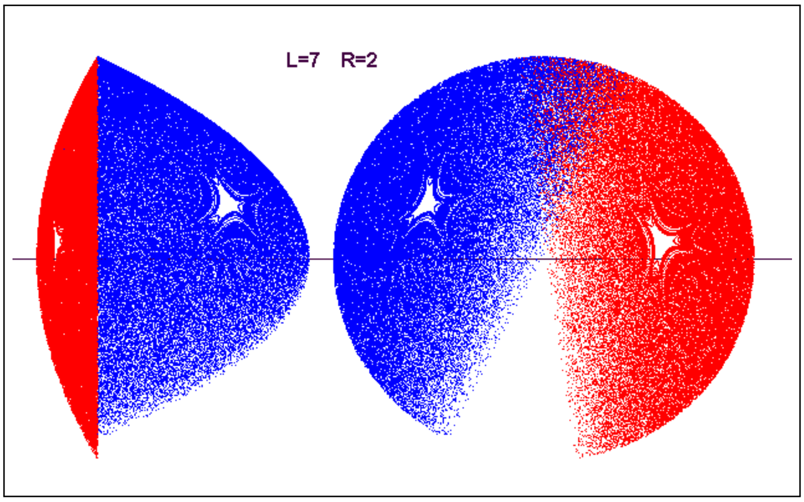
Links die beiden reflektierenden Wände mit 4 Aufschlagpunkten. An dreien dieser Punkte ist die **reflektierte vektorielle Geschwindigkeit**, also die Startgeschwindigkeit für das nächste Bahnstück aufgetragen. Jeder derartige **Vektorpfeil** ist dann in das links stehende grüne Koordinatensystem parallel verschoben. Da wir viele derartige Geschwindigkeiten in ein und demselben Bild zeichnen wollen, wird allgemein nicht der gesamte Pfeil, sondern nur der jeweilige Endpunkt gezeichnet. Das gibt die unten gezeichneten Bilder.

4. Computersimulation: Wir wählen aus der Datenflut der Computerrechnung einige besonders wichtig erscheinende Daten aus. Im linken Bild ist horizontal die x-Komponente des Ortes aufgetragen und vertikal die y-Komponente der Geschwindigkeit beides im Augenblick der Reflexion. Jede Reflexion liefert dann einen Farbpunkt. Man sieht das Ergebnis von vielen Tausend Reflexionen! Auch die Startwerte sind mehrfach neu gewählt. Im rechten Bild dasselbe für die beiden Komponenten der Geschwindigkeit nach der Reflexion. (Siehe obige Erläuterung).

Was bedeuten die in den Bildern erkennbaren Strukturen? Wie entstehen sie?

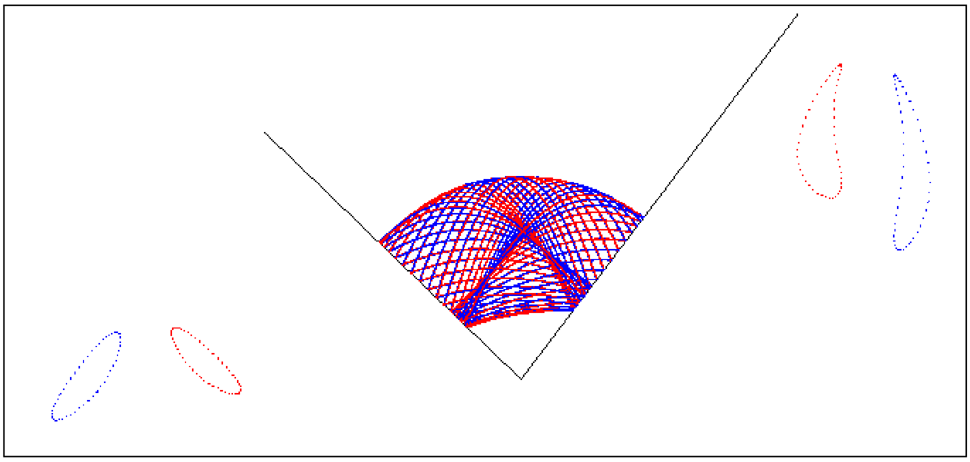


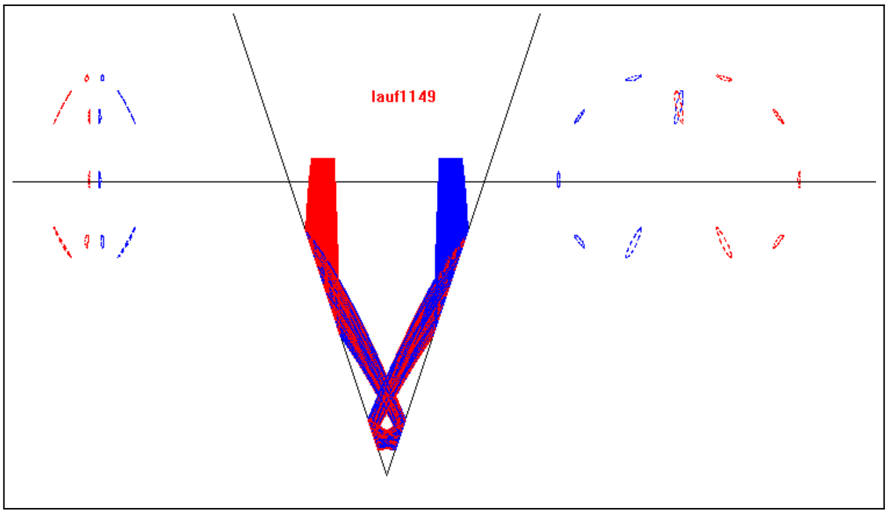
Dasselbe Computerexperiment, aber mit einer anderen Steigung der linken Reflexionsgeraden! Das gibt ein ganz anderes Bild.

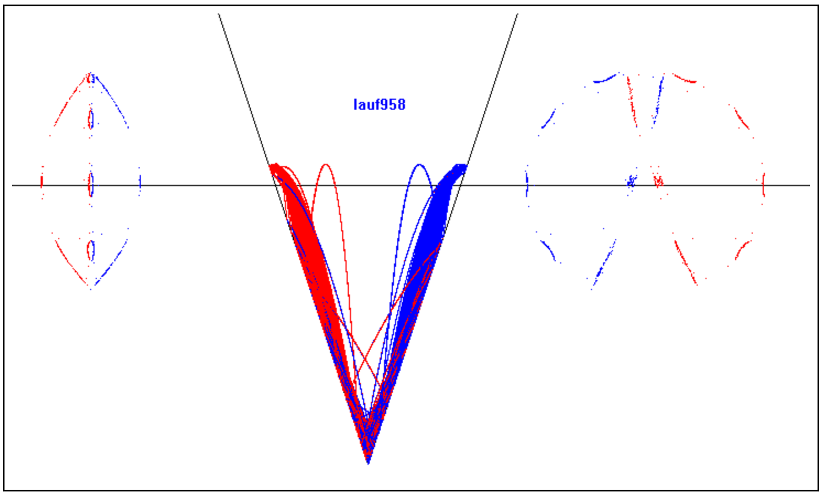


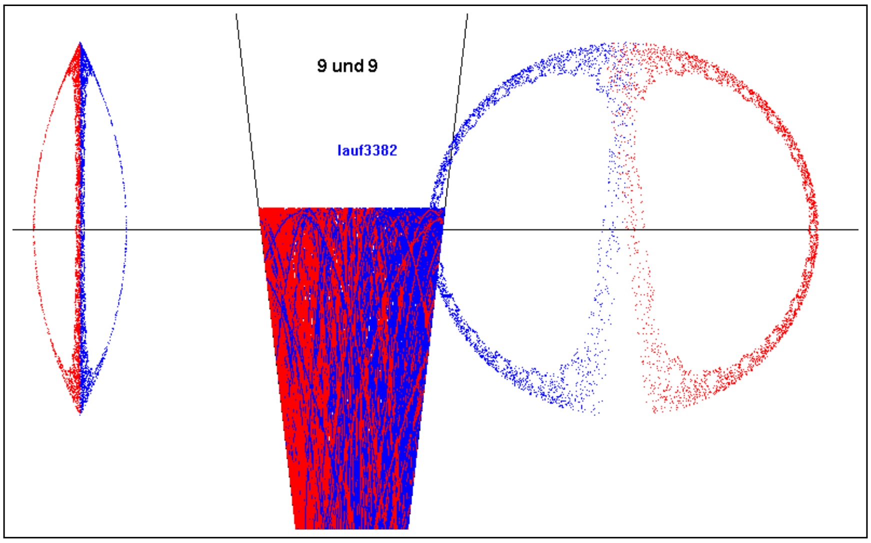
(1)

5. Computersimulation: Jetzt verbinden wir die 3. und die 4. Simulation, zeigen welche Punktschwarmstruktur zu welcher Bahnform gehört!









Viele Fragen schließen sich an, auf die man zu Beginn - vor den numereischen Experimenten - kaum gekommen wäre!!!

□ Und abschließend noch eine ohne das Computerprogramm beantwortbare harte Frage mit bemerkenswerter Antwort: Was passiert, wenn die linke Gerade die Steigung -1 und die rechte die Steigung +1 hat?

□ Was kann man vorab über die Formeln sagen, die man mathematisch zur Behandlung von 1a) und 1b) benötigt?

♦ 1a) folgt über die allgemeine Regel zur Zerlegung in parallele und senkrechte Komponente

♦ 1b) folgt als Lösung einer elementaren Schnittaufgabe der Vektorrechnung. Dabei sind einige Fallunterscheidungen zu beachten. Nämlich?