Absorbtionsprozesse

Eine Formel für die Größenänderung
Modellbetrachtung

Begriffssystem *Größe* : Änderung, Änderungsrate, relative Änderungsrate

---

Wir betrachten ein Beispiel eines Phänomens, das zum Stichwort "Wechselwirkung von Licht mit Materie" gehört, die **Absorbtion (von Licht)".**

Geht Licht durch homogene Materie hindurch, dann wird es abgeschwächt, verliert beim Durchgang an Stärke.

Was benötigt man zur Beschreibung dieses Phänomens? Zunächst einmal eine Größe, die die Stärke, die **Intensität** des jeweiligen Lichts angibt. Nehmen wir an, wir hätten etwas derartiges etwa in Form einer Energiedichte.

Wie üblich legen wir ein geeignetes Koordinatensystem, hier mit einer x-Achse in Richtung der betrachteten Lichtstrahlen. Dann interessiert uns I(x), die Abhängigkeit der Intensität in x-Richtung, sagen wir vom Koordinatenort $x_0 = 0$ an. Dort herrsche die Lichtintensität I_0. Wie sieht dann I(x) aus, für x>0. Oder auch: **Es ist eine Beziehung gesucht zwischen den beiden Größen I und x.**

Im Teilchenmodell des Lichtes können wir die Absorbtion erklären: Dann sollte die Lichtintensität der Teilchenzahl proportional sein.

Wir werden sehen: Die einfache, grundlegende Gesetzmäßigkeit ist hier keine zwischen den Größen selbst, sondern eine für deren Änderung. Oder auch: eine Gesetzmäßigkeit für die Äderungsrate.

Ein **Modell für den Absorbtionsprozess:**

♦ Wir haben für unsere Lichtstrahlen N Bahnen der (sehr großen) Länge L.

♦ Die Koordinate der Lichtrichtung werde mit t bezeichnet wobei 0<t<L.

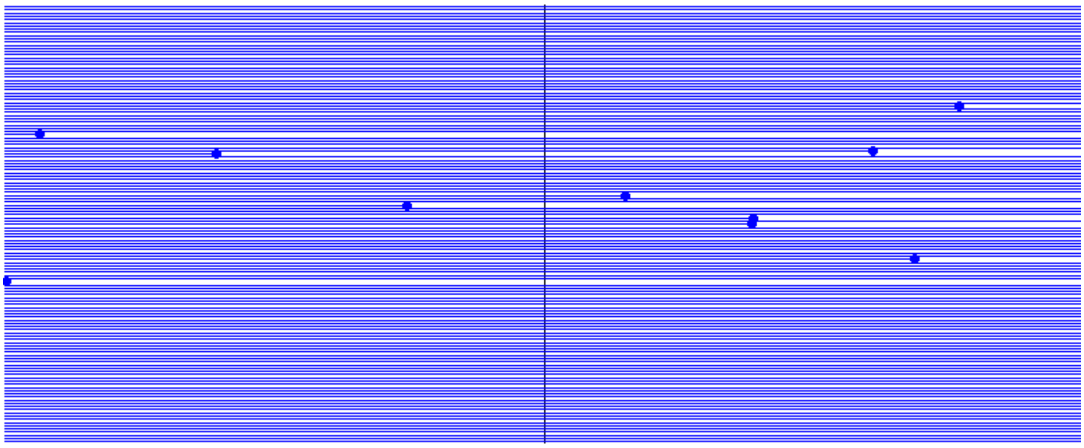
♦ Auf diesen Bahnen sind zufällig Absorbtionszentren ("Fänger") verteilt. (Genauer mit einer Wahrscheinlichkeit "p Zentren pro Längeneinheit". Oder: Auf die N Bahnen sind im Mittel N·p Zentren pro Meter zufällig verteilt. Auf 2 Meter wird man durchschnittlich 2NP Zentren finden. Usw.)

Wir gehen jetzt bis zur Koordinate $t=t_0$. Dort seien noch $\boxed{n(t_0)}$ Lichtstrahlen vorhanden. (Bezeichnung). Der Rest ist bereitts weggefangen, "absorbiert". Etwas weiter bei $t_0+\Delta t$ sind es noch $n(t_0 + \Delta t)$. Die exakte Änderung ist $\Delta n = n(t_0 + \Delta t) - n(t_0)$. Nur: Wir kennen die Funktion / den Rechenausdruck zu n(t) leider nicht. Aber wir können inhaltlich wie folgt argumentieren:

Wir wählen die Koordinatenänderung Δt, so klein, dass $p\cdot\Delta t$ eine Zahl sehr viel kleiner als 1. ist. Dann ist es ausgesprochen (vernachlässigbar!) selten, dass man innerhalb von Δt zufällig auf ein und derselben Bahn 2 oder mehr Absorbtionszentren vorfindet. (In so einem Fall ist der zweite Fänger unwirksam!) Ist $p\Delta t = \frac{1}{100}$, so ist die Wahrscheinlichkeit auf derselben Bahn 2 Zentren zu finden $(p\Delta t)^2 = \frac{1}{10000}$.

Und das bedeutet, dass die **Änderung** $\Delta n = n(t + \Delta t) - n(t)$ von n, also die Zahl im betrachteten Bereich absorbierten Lichtstrahlen, gleich $\boxed{p\Delta t \cdot n(t)}$ ist. Denn jeder Fänger wird den Lichtstrahl seiner Bahn beseitigen, sofern der Strahl zu Beginn der Teststrecke noch vorhanden ist. $p\Delta t \cdot n(t)$ ist die Zahl der Fänger auf bei t noch mit einem Lichtstrahl bestzten Bahnen. Vor ihm steht im Bereich zwischen $t_0+\Delta t$ und t kein anderer Fänger.

Die Figur zeigt für etwa $n(t_0)$ =100 Bahnen ein Teilstück und einige zufällig darauf verteilte Absorbtionszentren. Überdies sind die Bahnen in der Mitte unterteilt. Im Mittel und bei sehr vielen Bahnen wird es auf beiden Teilstücken gleichviel noch wirksame Absorbtionzentren geben.In dem Bild sind links 4 und rechts 6 Absorber zu sehen. Bei - sagen wir 1 Million Bahnen - würden wir ein Verhältnis finden, das viel näher bei 1 liegt.



Damit haben wir **inhaltlich** begründet dass in diesem Modell die Abnahme der Teilchenzahl wie folgt aussieht:

$$\boxed{\Delta n = -p \cdot n(t)\Delta t} \quad \text{Oder} \quad \boxed{\frac{\Delta n}{\Delta t} = -pn(t)}.$$

Im Grenzwert führt das zu der Differentialgleichung

$$\boxed{\dot{n}(t) = -pn(t)} \quad \text{Andere Schreibweise} \quad \boxed{\frac{dn}{dt}(t) = -pn(t)}$$

Oder

$$\boxed{\frac{\dot{n}(t)}{n(t)} = -p}$$

Die relative Änderungsrate ist konstant gleich -p. Das negative Zeichen zeigt eine Abnahme an.

Die Modellüberlegung liefert hier eine Beziehung für die **Änderungsrate**, nicht die gesuchte Größe n(t) selbst. Diese Beziehung kann auf mehrere Weisen dargestellt werden.

> Nun kann man diese Differentialgleichung mit mathematischen Methoden lösen und es zeigt sich, dass die erhaltenen Funktionen die Verhältnisse korrekt wiedergeben. In unserem Beispiel ist dabei natürlich notwendig, dass die beteiligten Zahlen - hier n(t) - ausreichend groß sind.

Wir werden auf die Lösung dieser Differentialgleichung später genauer behandeln

---