Übungstag: Mittwoch 1.3.

Nr.1 **Hebelaufgabe zur Gravitationskraft**

$\vec{F}$ sei die Kraft, die zwei je 1kg schwere Massenpunkte infolge ihrer Gravitation aufeinander ausüben, wenn sie einen Abstand von $\boxed{\text{1cm}}$ von einander haben. Jetzt betrachten wir eine Balkenwaage (im Erdschwerefeld). Der erste Arm der Waage habe die Länge $L_1 = 1m$. Der zweite eine zu bestimmende Länge L_2. An den ersten Arm hängen wir eine (Vogel)Feder vom Gewicht 1g. Auf den zweite wirke die eingeführte Kraft $\vec{F}.Wie$ groß muss L_2 sein, damit Gleichgewicht herrscht?

Lösungskizze

Wissen: Gleichgewicht bei $\boxed{\text{"Kraft·Kraftarm=Last·Lastarm"}}$
Wert der Gravitationskonstante $G=6.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$
Gravitationsgesetz $\quad \vec{F}_{Grav} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{x}}{r}$ r=... $|\vec{F}_{Grav}| = ...$
und: G ist nicht g!!

Jetzt die Lösung mit eingefügtem Text:
▼ Die Kraft (Betrag) ergibt sich über das.Gravitationsgesetz zu :

$$F = \left(6.7 \cdot 10^{-11} N m^2 kg^{-2}\right) \cdot \frac{1 \cdot 1kg^2}{10^{-4} m^2} = 6.7 \cdot 10^{-7} N.$$

Einsetzen der Werte (in die Gleichgewichtsgleichung) gibt folgende Bedingung für L_2 :

$$7 \cdot 10^{-7} N \cdot L_2 = 10^{-3} \cdot 10N \cdot 1m.$$

Also

$$L_2 = \frac{1}{7} \cdot 10^{-2} \cdot 10^7 m = 1.4 \cdot 10^4 m = 14km$$

Die gesuchte Armlänge ist etwa 14km.▲
Ergänzung: Was ist, wenn man **10 cm Abstand statt 1cm** nimmt**?** Dann wird die Kraft um einen Faktor $\boxed{\cdot\frac{1}{10^2}\cdot}$ kleiner und damit L_2 um diesen Faktor größer: $\boxed{.L_2 = 1400km}$. Das recht groß.
Eine naheliegende Erweiterung der Frage wäre die Kraft zwischen zwei Elektronen analog zu behandeln. Denn die elktrischen Kräfte4 genügen demselben Gesetz.

Nr.2: Eine Ergänzungsfrage zum Potentialfeld.

Bei der Konstruktion der Kraftfelder einer gegebenen Konfiguration waren zwei Stichworte wichtig: *Translation* und *Superposition.* Jetzt haben wir konservative Kraftfelder mit Hilfe skalarer Potentialfelder konstruiert. Welche Frage entsteht? Was ist als Antwort zu vermuten? (Die einfache naive Vermutung ist richtig und von großer praktischer Bedeutung.

Also: Die üblichen Formeln für Kraftfelder haben die Form: Eine felderzeugende Quelle im Ursprung. Die Feldformel bestimmt dann die erzeugt Kraft am Orte $\vec{x}$.

Wie sieht das Feld aus, wenn die Quelle im Punkte $\vec{a}$ sitzt? Wie sieht das Feld aus, wenn zwei felderzeugende Quellen vorhanden sind. Die Regeln *Translation* und *Superposition* beantworten diese Fragen zunächst für Kraftfelder. Aber gelten sie auch für Potentialfelder???

Antwort: Ja! Die Regeln sind auf Potentialfelder ausdehnbar. (Nachweis über Gradientenbildung)

Eine Konsolidierungs- und Testfrage: In $\vec{a}$ befindet sich eine Masse m und in $\vec{b}$ eine Masse m. Was für ein Potential erzeugt diese Konfiguration. Für "Masse im Ursprung" soll folgendes Potential gegeben sein:

$$\boxed{\mathrm{U}(\vec{x}) = \tfrac{1}{|\vec{x}|}} \quad \text{Potentialfeld für Quelle im Ursprung}$$

Was für ein Potential wird allgemein erzeugt?
Und wie groß ist der Potentialwert $\mathrm{U}(\vec{x}_0)$ für

$$\vec{a}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ o \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_0^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}?$$

▼ Translation und Superposition ergeben folgende Potentialformel:

$$\boxed{\mathrm{U}_{gesamt}(\vec{x}) = \tfrac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|} + \tfrac{1}{|\vec{x}-\vec{b}|}}$$

Berechnug der Differenzvektoren un deren Beträge:

$$\vec{x}^K - \vec{a}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{x} - \vec{a}| = \sqrt{5}$$

$$\vec{x}^K - \vec{b}^K = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad |\vec{x}^K - \vec{b}^K| = \sqrt{11}$$

Jetzt sin alle benötigten Größen verfügbar. Einsetzen gibt folgenden Potentialwert:

$$\boxed{\mathrm{U}_{gesamt}(\vec{x}_0) = \tfrac{1}{\sqrt{5}} + \tfrac{1}{\sqrt{11}}}$$

▲

☐ Eine Ergänzungsfrage: Wie groß ist die resultierende Kraft (die Feldstärke) am Orte $\vec{x}_0$?

▼ Das Kraftfeld erhält man entweder durch Gradientebildung oder durch entsprechende Anwendung von Translation und Superposition auf das Feld aus derListe zu

$$\vec{F}_{gesamt}(\vec{x}) = \frac{\vec{x} - \vec{a}}{|\vec{x} - \vec{a}|^3} + \frac{\vec{x} - \vec{b}}{|\vec{x} - \vec{b}|^3}$$

Jetzt kann man die oben bereits berechneten Werte einsetzen:
..................▲

Nr.3: Gradientenbildung in Koordinaten:

Wie erhält man den Gradienten in kartesischen Koordinaten? Man benötigt seine drei Komponenten

$$grads^K(x, y, z) = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente beschreibt den Weg parallel zu x-Achse. Wie ändert sich der Feldwert in diese Richtung? Offenbar ist die **Änderungsrate in x-Richtung** die relevante Größe und das stimmt tatsächlich. Also

$$grads^K(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial s^K}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial s^K}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial s^K}{\partial x}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{s}^K(x, y, z)$

$\Delta s^k = s^k(x + \Delta x, y, z) - s^K(x, y, z)$

$$\frac{\Delta s^k}{\Delta x} = \frac{s^k(x + \Delta x, y, z) - s^K(x, y, z)}{\Delta x}$$

Grenzwert $\dfrac{\partial s^K}{\partial x}(x, y, z)$

Rechenbeipiele: $\boxed{\mathrm{U}^K(x,y,z) = \frac{1}{x} + y - z^2}$ und $\boxed{\mathrm{V}^K(x,y,z) = \frac{yz^2}{x}}$:

$\mathrm{grad}U^K(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x^{-2} \\ 1 \\ -2z \end{pmatrix}$	$\mathrm{gradV}^K(x,y,z) = \frac{z}{x} \begin{pmatrix} -\frac{yz}{x} \\ z \\ 2y \end{pmatrix}$

Und ein spezieller Wert:

$$grad U^K(1,2,3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

☐ Zwei zu erinnernde Formeln (zum Massenpunkt) mit dazu erforderlicher verständiger Interpretation

a) "Newton" $\boxed{.\mathrm{m}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{K}(t)..\text{meist über.Feld } \boxed{.\mathrm{m}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t),t)} \;?}$

b) "Energiesatz" $\boxed{..\frac{M}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right)^2 + U(\vec{r}(t)) = E?}$

Vertändnis verlangt, dass Sie z.B. die folgenden zugehörigen FRagen beantworten können sollten:

a) Bedeutung von $\boxed{\vec{r}(t) = ...}$ (Antwort: Eine zum System gehörige physikalische Bahnkurve, Lösung der zugehörigen Bewegungsgleichung)

b) Unterschied zwischen $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right)^2$ und $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$?

c) Unterschied zwischen $\frac{d\vec{r}}{dt}(t)$ und $\frac{d\vec{r}}{dt}(3)$ und $\frac{d\vec{r}}{dt}(u)$?

c) Was bedeutet eine "Feldvorgabe der wirkenden Kraft": $\vec{K}(t) = ...?....$

d) ...

$$\vec{N}^K \text{ der Ebene } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{g}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \vec{g}_{eff} = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$$

$$\vec{g} = \vec{p} + \vec{g}_{eff} \qquad \vec{p} = \frac{(\vec{N}\cdot\vec{g})}{\vec{N}^2}\vec{N} = \frac{-3g}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}_{eff} = \frac{11}{11}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \frac{3g}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3g \\ 3g \\ -2g \end{pmatrix} = \frac{g}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Anwenden auf "**Reibungsfreie Bewegung auf der schiefen Ebene unter Schwerkraft**"

a) Allgemein mit Newton lösen ("schiefe, nicht notwendig geradlinige Bewegung)

b) Geradlinig mit Energiesatz lösen

c) Unterschied der Wege kommentieren

Man denkt sich zunächst in die Systemsituation ein und überlegt insbesondere, wie man den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ darstellen will. Dann geht man die folgenden Punkte durch:

$\vec{r}(t) = ...$
$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = ..$
$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = ...$
Alle Kräfte suchen
$\vec{F} = ...$
m$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{K}(t)$ auswerten!

Anwenden auf das Problem "**Reibungsfreie Bewegung auf der schiefen Ebene unter dem Einfluss der Schwerkraft**"

▼ Hier liefert uns die Bestimmung der resultierenden Kraft im zweiten Teil des Schemas bereit die Antwort. D.h. es ist nicht nötig, sich über die Darstellung von $\vec{r}(t)$ Gedanken zu machen.

Sei $\vec{N}$ ein Vektor in Richtung der Normalen der schiefen Ebene. nun zerlegen wir $\vec{g}$ in eine zu $\vec{N}$ parallele und senkrecht Komponente: $\vec{g} = \vec{g}_p + \vec{g}_{eff}$. Der Beitrag m$\vec{g}_p$ der Schwerkraft in Normalenrichtung wird aber durch eine Zwangskraft kompensiert. Als Kraft bleib nur m$\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{g}_p$. Die parallele Komponente berechnen wir wie im Fall desReflexion am Spiegel über $\boxed{\vec{p} = \frac{(\vec{g}\cdot\vec{N})}{\vec{N}^2}\vec{N}}$. Damit haben wir eine Bewegung in einem konstanten Kraftfeld vorliegen. Die zugehörigen physikalischen Bahnen werden durch die entsprechende Flugparabelformel gegeben (Mit $\vec{g}_{eff}$ statt $\vec{g}$!). Die Anfangswerte $\vec{r}_1$ und $\vec{v}_1$ sind wie folgt zu wählen: $\vec{r}_1$ ist ein Punkt auf der schiefen Ebene und $\vec{v}_1$ muss in der Ebene liegen. Dann liegt $\vec{r}(t)$ für alle Zeiten in der Ebene und liefert eine mögliche Bewegung auf der schiefen Ebene.

Zahlbeispiel:

$\vec{N}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\vec{g}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$	$\vec{r}_1^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{v}_1^K = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_1$ ist senkrecht zu $\vec{N}$, also tangential an die Ebene! Die Ebene geht durch den Ursprung, da $\vec{r}_1 = \vec{0}$ ist. Wir berechnen $\vec{p}$ und damit $\vec{g}_{eff}$ zu

$$\vec{p} = \frac{(\vec{N}\cdot\vec{g})}{\vec{N}^2}\vec{N} = \frac{-3g}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{p} = \frac{11}{11}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \frac{-3g}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{g}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Test: $\vec{g}_{eff}$ **muss** senkrecht auf $\vec{N}$ stehen. Das ist der Fall.

Jetzt können wir die Bahnkurve der Bewegung angeben. Dabei wählen wir für den Informationszeitpunkt einfach $t_1 = 0$, da dazu nichts verlangt wird:

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{g}{22}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}t^2 = \begin{pmatrix} 3t + \frac{3g}{22}t^2 \\ \frac{3g}{22}t^2 \\ -t - \frac{g}{11}t^2 \end{pmatrix}$$

Strategieschema "Energiesatz"

$\vec{r}(t) = ...$	Den Ortsvektor fallspezifisch geeignet darstellen
$\frac{d\vec{r}}{dt} = ...$	Berechnen
$\frac{m}{2}\vec{v}^2 = ...$	Berechnen
U($\vec{x}$)	Konstruieren (Liste, Translation, Superposition oder snders
U($\vec{r}(t)$) = ...	Einsetzen
Konfiguration $t_1, \vec{r}_1, \vec{v}_1$	Fallspezisch bestimmen
Konfiguration t_2 oder t	Ebenso, entscheiden ob spezieller Wert t_2 oder allgemeines t.
Energiesatz formulieren	Aus den jetzt vorhsndenen Daten!!
Endform	Je nach FRagestellung!
.....	

Nach diesem Schema soll jetzt das ebene mathematisch Pendel behandelt werden. Denken Sie daran: Das ist bereits einmal ausführlich im zugehörigen Anhang besprochen!!

Erst die Aufgabenformulierung:

□□ Formulieren Sie den Energiesatz für das ebene mathematische Pendel. Arbeiten Sie damit (der erhaltenen Gleichung) auf zwei Weisen weiter:

a) Lösen sie nach *der* Winkelgeschwindigkeit auf; leiten Sie so eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die Winkelfunktion her.

b) Differenzieren Sie den Energiesatz nach der Zeit und bestimmen Sie damit die Bewegungsgleichung für die Winkelfunktion (2. Ordnung)

▼ Wir gehen jetzt das Schema für diesen Fall durch:

$\vec{r}(t) = L\vec{e}_r(\varphi(t))$ $\boxed{\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ L\cos\varphi(t) \\ L\sin\varphi(t) \end{pmatrix}}$	Polardarstellung, da Kreisbewegung. Vgl. Anhang
$\frac{d\vec{r}}{dt} = L\dot{\varphi}(t)\vec{e}_t(\varphi(t))..\vec{v}^K(t) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix}$	Ableiten
$\boxed{\frac{m}{2}\vec{v}^2 = \frac{m}{2}L^2\dot{\varphi}^2(t)}.$	Kin. Energie
U($\vec{x}$) $=-m(\vec{g}\cdot\vec{x})$ und $\vec{g}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$	Nach Liste
U($\vec{r}(t)$) $= +Lg\sin\varphi(t)$	Einsetzen!
Konfiguration für t_1 : $\varphi(t_1) = -\frac{\pi}{2}$ $\dot{\varphi}(t_1) = \dot{\Phi}_1$	Wir starten am tiefsten Punkt $\dot{\Phi}_1$ ist äußerer Parameter!
t_2 oder t Konfiguration: (t,$\varphi(t), \dot{\varphi}(t)$)	Wir wählen t allgemein
$\boxed{E=\frac{m}{2}L^2\dot{\Phi}^2 + 0 = \frac{m}{2}L^2\dot{\varphi}^2(t) + Lg\sin\varphi(t)}$	Ziel! Beachte sin($-\frac{\pi}{2}$) = 0
.......nach $\dot{\varphi}$ auflösen oder nach t ableiten!!	Jetzt in a) und b) unterschiedlich weiter

Zu Teil a):

$$\begin{aligned}\frac{M}{2}L^2\dot{\varphi}^2(t)+MgL\sin(\varphi(t)) &= E \quad \text{(E konst. Gesamtenerghie)}\\ \frac{1}{2}L^2\dot{\varphi}^2(t)+gL\sin(\varphi(t)) &= \frac{E}{M}=e\\ &\boxed{\dot{\varphi}(\mathrm{t})=\pm\tfrac{1}{L}\sqrt{2\,(e-gL\sin(\varphi(t))}}\end{aligned}$$

Das ist die gesuchte Differentialgleichung für die (gesuchte!)Winkelfunktion $\varphi(t)$. Es zeigt sich, dass diese Gleichung für manche Zwecke nützlich ist. Für die numerische Lösung ist sie unschön, die in der Vorlesung gezeigten Lösungen wurden über die Bewegungsgleichung gewonnen.

Zu Teil b): Die Aufgabe verlangt, den Energiesatz nach t anzuleiten. Das ist die Umkehrung des Weges, auf dem er allgemein gewonnen wurde. Ausführung:

$\frac{1}{2}L^2\dot{\varphi}^2(t)+gL\sin(\varphi(t))=e$	Der Satz, ableiten
$\mathrm{L}^2\dot{\varphi}(t)\ \ddot{\varphi}(t)+gL\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t)=0$	Faktor L$\dot{\varphi}$ kürzen Problematisch für $\dot{\varphi}(t)=0$
$\ddot{\varphi}(t)+\frac{g}{L}\cos\varphi(t)=0$	Die gesuchte Formel
$\cos\varphi=\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})=\sin\alpha$	Anderer Winkel $\alpha=\frac{\pi}{2}+\varphi$
$\boxed{\ddot{\varphi}(t)+\frac{g}{L}\sin\alpha(t)=0}$	Die gesuchte Bewegungsgleichung für den Auslenkwinkel (Skizze s. Anh.)

Für kleine Auslenkungen ist sin$\alpha(t)\approx\alpha(t)$ und damit haben wir die übliche Oszillatorgleichung

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t)+\tfrac{g}{L}\sin\alpha(t)=0}\ \text{mit}\ \omega_0^2=\frac{g}{L}\ \ \text{und}\ \boxed{\mathrm{T}=\tfrac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\tfrac{L}{g}}}$$

Damit haben wir für das Pendelsystem Energiegleichung und Bewegungsgleichung hergelitet. Nochmals zur Erinnerung: Kennt man $\varphi(t)$ oder gleichwertig $\alpha(t)$ dann folgt das gesuchte $\vec{r}(t)$ rein rechnerisch!