Von der Systemfestlegung und der allgemeinen Newtonschen Bewegungsgleichung zu den die Bewegung dfestlegenden Differetialgleichungen

Über allem schwebt die allgemeine Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\vec{K}(t) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt}(t)$$

♦ Eine tatsächliche physikalische Bewegung muss diese Gleichung erfüllen - Umgekehrt liefert jede Lösung dieser Gleichung eine mögliche physikalische Bewegung.

In jedem Einzelfall benötigen wir "die zur Zeit t auf den Massenpunkt wirkende Kraft" $\vec{K}(t)$ Es wurde besprochen, wie man typischerweise $\vec{K}(t)$ erhält. (Krafttypisierung: Eigentlich physikalische Kräfte / Zwangskräfte / Scheinkräfte. Wir betrachten hier nur einige Kräfte des ersten Typs)

Für uns besonders wichtig war der Fall, dass $\vec{K}(t)$ sich aus einem **Kraftfeld** herleiten ließ.
Ein solches Feld $\vec{F}(\vec{x}) = \boxed{\ldots\ldots}$ besagt: Wenn sich der Punkt am Orte $\vec{x}$ aufhält, dann verspürt er dort die Kraft $\vec{F}(\vec{x})$. Befindet er sich etwa am Orte $\vec{r}(t)$, dann verspürt er dort die Kraft $\vec{F}(\vec{r}(t))$.
Es gibt je nach Konfiguration **viele** mögliche Kraftfelder. Drei sind besonders wichtig: Vgl. (3.7.7) Beim dort angegebenen Coulombfeld und dem Oszillatorfeld befindet sich die das Feld erzeugende Quelle im Ursprung. : Also Das Feld wird durch eine Masse, eine Ladung oder etwas Ähnliches im Ursprung verursacht.
Translationsregel: Befindet sich die Quelle im Endpunkt des Ortsvektors $\vec{a}$ statt im Ursprung hat man im Berechnungsausdruck $\vec{x}$ durch $\vec{x} - \vec{a}$ zu ersetzen. Das ergibt das neue Feld:

$$\vec{F}_{Qin\vec{0}}(x) = \boxed{\ldots\vec{x}\ldots} \quad \text{wird zu} \quad \vec{F}_{Qin\vec{a}}(\vec{x}) = \boxed{\ldots\vec{x} - \vec{a}\ldots}$$

Superpositionsregel (3.7.11)
Auf diese Weise kann man die jeweilige Newtonsche Bewegungsgleichung für viele Systeme aufstellen. Entsteht die Kraft über ein (durch die Konfiguration festgelegtes) Kraftfeld $\vec{F}$, dann lautet die Bewegungsgleichhung in diesem Fall

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Meist muss man die Bewegungsgleichung in Koordinatenform bringen. D.h. man muss zur Gleichung übergehen

$$m\frac{d^2\vec{r}^K}{dt^2}(t) = \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \quad \text{wobei} \quad \vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

Die Bewegungsgleichung ist dann eine durch x(t),y(t) und z(t) zu erfüllende Bedingung.

Zwei Rechenbeispiele:
1) $\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = C\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}}$ sei das Kraftfeld mit der Quelle im Ursprung. Wie sieht das Feld aus, wenn die Quelle sich in $\vec{x}_0$ mit $\vec{x}_0^K = \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{pmatrix}$ befindet. Wie lautet die Newtonsche Gleichung in diesem Fall in Komponentenform?

▼

$\vec{F}_{Qin\vec{0}}(\vec{x}) = C\frac{\vec{x}}{\lvert\vec{x}\rvert}$	Feldquelle im Ursprung
$\vec{F}(\vec{x}) = C\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{\lvert\vec{x}-\vec{x}_0\rvert} \quad Damit: \quad \vec{K}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$	Für das Problem relevantes Feld. Verschoben
$\vec{F}^K(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+(y-A)^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y-A \\ z \end{pmatrix}$	Das Feld in Komponentenform
$\mathrm{m} \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \frac{C}{\sqrt{x^2(t)+(y(t)-A)^2+z(t)^2}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)-A \\ z(t) \end{pmatrix}$	Die Bewegungsgleichung in Komponentenform.
$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{mx}\ \ddot{x}(t) = \frac{Cx(t)}{\sqrt{x^2(t)+(y(t)-A)^2+z(t)^2}} \\ \mathrm{mx}\ \ddot{y}(t) = \frac{C(y(t)-A)}{\sqrt{x^2(t)+(y(t)-A)^2+z(t)^2}} \\ \mathrm{mx}\ \ddot{z}(t) = \frac{Cz(t)}{\sqrt{x^2(t)+(y(t)-A)^2+z(t)^2}} \end{array}}$	Das Gleichungsystem ausgeschrieben

Diese drei Gleichungen sind ausgesprochen unagenehm. Man versucht daher meist, Fälle zu finden, in denen am Ende besser handhabbare Gleichungen stehen. Dazu wurden zwei Beispiele durchgegangen:

- Eine Bewegung entlang der z-Achse in einem radialen Feld
- Eine Feld vom Oszillatortyp

Nochmals obige Herleitung für den Fall des Oszillatorfeldes:

$\vec{F}_{Oszin\vec{0}}(\vec{x}) = -k\vec{x}$	Feldquelle im Ursprung
$\vec{F}(\vec{x}) = -k(\vec{x}-\vec{x}_0) \quad Damit: \quad \vec{K}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$	Für das Problem relevantes Feld. Verschoben
$\vec{F}^K(x,y,z) = -k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-H \end{pmatrix}$ wobei $\vec{x}_0^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix}$	Das Feld in Komponentenform
$\mathrm{m} \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t)-H \end{pmatrix}$	Die Bewegungsgleichung in Komponentenform.
$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{mx}\ \ddot{x}(t) = -kx(t) \\ \mathrm{mx}\ \ddot{y}(t) = -ky(t) \\ \mathrm{mx}\ \ddot{z}(t) = -k(z(t)-H) \end{array}}$	Das Gleichungsystem ausgeschrieben

Das sind drei Bedingungen für jeweils nur eine Komponente. Diese Gleichungen sind viel besser zu handhaben, ja sogar ganz einfach zu lösen.

Denken Sie daran: (x(t),y(t),z(t)) sind id drei gesuchten Funktionen, mit deren Hilfe man den physikalisch realisierten Ort des Punktes bestimmt. **Hier geht es jetzt weiter mit** *Numerische Lösung*

Hat man ein Feld über eine Gleichung der Art $\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = ...}$ festgelegt, dann kann man bei Bedarf **benötigte Feldwerte oder Änderungen von Feldwerten** ausrechnen.

> Nochmals: Wenn es heißt: Man kann es für **jedes** $\vec{x}$ ausrechnen, gibt dann ein spezielles $\vec{x}_0$-vor und sagt: "Rechne den Wert $\vec{F}(\vec{x}_0)$ aus", dann leistet obige Beziehung das. Es ist unklar wieso dann immer gefragt wird: "Was soll ich tun?" Oder "Wie soll ich das machen?": Denn oben steht drin, wie man es für **alle** $\vec{x}$ macht!

Unser Beispiel:

Beispiel: Sei $\vec{F}_{Qin\vec{0}}(\vec{x}) = C\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$. Verlege die Quelle nach $\vec{a}$ mit $\vec{a}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. und bestimme das zugehörige Feld $\vec{F}(\vec{x})$. Stelle es in der Komponentenform $\vec{F}^K(x,y,z)$ dar und berechne $\vec{F}^K(1,1,1)$ und $\vec{F}^K(1,1+\Delta y,1)$ sowie die Änderung des Feldwertes zwischen diesen beiden Punkten.

▼ Wir können wieder mit dem (leicht abgewandelten) alten Schema beginnen:

$\vec{F}_{Qin\vec{0}}(\vec{x}) = C\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$	Feldquelle im Ursprung
$\vec{F}(\vec{x}) = C\frac{\vec{x}-\vec{a}}{\|\vec{x}-\vec{a}\|}$	Für das Problem relevantes Feld. Verschoben
$\vec{F}^K(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$	Das Feld in Komponentenform War gefragt!
$\vec{F}^K(1,1,1) = \frac{C}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Nur einsetzen!
$\vec{F}^K(1,1+\Delta y,1) = \frac{C}{\sqrt{2+(-1+\Delta y)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\Delta y \\ 1 \end{pmatrix}$	Ebenso

Jetzt entsprechend die weiteren Größen. Und da ist erstmalig etwas zu rechnen

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{F}^K &= \frac{C}{\sqrt{2+(-1+\Delta y)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\Delta y \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{C}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{C}{\sqrt{3\,(2+(-1+\Delta y)^2)}} \left(\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\Delta y \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{2+(-1+\Delta y)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{C}{\sqrt{3\,(2+(-1+\Delta y)^2)}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \sqrt{3-2\Delta y+\Delta^2 y^2} \\ -\sqrt{3} + \sqrt{3}\Delta y + \sqrt{3-2\Delta y+\Delta^2 y^2} \\ \sqrt{3} - \sqrt{3-2\Delta y+\Delta^2 y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Diesen so recht unschönen Ausdruck wollen wir nicht weiterverarbeiten. Es soll nur gezeigt werden: **Kennt man das Feldgesetz, dann kann man derartiges ausrechnen, höchstens der Rechenaufwand macht Ärger!**

Ein weiterer Typ von Aufgaben der heute besprochen wurde:

Beschreibung des Feldverhaltens, sei es dass die zugehörige Formel $\boxed{\vec{F}(x) = ...}$ gegeben ist, sei es dass eine graphische Darstellung des Bildes vorliegt.

Eine Frage der ersten Art:

□ Sei $\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = C\frac{\vec{x}}{1+\vec{x}^2} = C\frac{|\vec{x}|}{1+|\vec{x}|^2}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}}$. Beschreiben Sie das Verhalten dieses Feldes.

▼ Der zweite angegeben Rechenausdruck zeigt, dass die Feldvektoren immer radial gerichtet sind. Ist C>0 dann radial nach außen, weg vom Ursprung. Geht man auf einer Halbgeraden radial vom Ursprung weg, so ändert sich der Betrag des Feldvektors mit der Funktion f(r)=$\frac{r}{1+r^2}$, die den folgenden GRaphen hat: $\frac{r}{1+r^2}$