Übungen 20.2.

Thema:Eine Bahnkurvenformel $\vec{r}(t) = ...$ sei gegeben. Bestimme damit abgeleitete Größen wie Ortsänderung oder Ortsänderungsrate (=vektorielle Geschwindigkeit). Hierzu sind nur die Definitionen korrekt anzuwenden!

Insbesondere ist korrektes Einsetzen gefordert. Dabei zeigt die Bezeichnung auf der linken Seite, was jeweils eizusetzen ist. Etwa:

$$\vec{r}(t^2 + 2\Delta t)$$

Dann ist jedes t schematisch durch $(t^2 + 2\Delta t)$ zu ersetzen.

(3.1.2)Beispiel:

Man wisse: $\boxed{\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{1}{1+t^2} \\ 7+t \end{pmatrix}}$. Dann folgt beispielsweise

$\vec{r}^K(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\vec{r}^K(4) = \begin{pmatrix} 48 \\ \frac{1}{17} \\ ... \end{pmatrix}$	$\vec{r}_K\underbrace{(2+\Delta t)}_{\text{"von"}} = \begin{pmatrix} 3(2+\Delta t)^2 \\ \frac{1}{1+(2+\Delta t)^2} \\ 7+(2+\Delta t) \end{pmatrix}$

Dann wird man noch 7+(2+Δt) $= 9 + \Delta t$ vereinfachen.

Warum ist das so schwer?

□ Sei $\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2}$ die betrachtete Größe, hier die Bahnkurve "Flugparabel". Berechnen Sie die Änderung de Ortsvektors $\Delta\vec{r}$ zwischen t und t+Δt, dann die zugehörige Änderungsrate und schließlich (nach Kürzen von Δt) die momentane Geschwindigkeit.

▼ Wir erhalten zunächst durch Einsetzen

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1(t+\Delta t) + \frac{1}{2}\vec{g}(t+\Delta t)^2$$

Damit (die allgemeine Definition für Änderung):

$$\begin{aligned} \Delta\vec{r} &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \\ &\left(\vec{r}_1 + \vec{v}_1(t+\Delta t) + \frac{1}{2}\vec{g}(t+\Delta t)^2\right) - \left(\vec{r}_1 + \vec{v}_1 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2\right) \end{aligned}$$

Hier sind alle klammern vom "mal!-Typ. Man rechnet die rechte Seite aus und findet, weil sich viele Summanden fortheben:

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{v}_1\Delta \text{t} + \underbrace{\vec{g}t \cdot \Delta t}_{\frac{1}{2}\vec{g}\cdot 2t\Delta t} + \frac{1}{2}\vec{g}\Delta \text{t}^2}$$

für die gesuchte Änderung des Ortsvektors. Skizze z.B. in (3.2.4) mit $\text{t}_2 = t_1 + \Delta t$. Jetzt folgt für die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_1 + \vec{g}t + \frac{1}{2}\vec{g}\Delta t$$

Hieri können wir problemlos $\Delta t = 0$ setezn und erhalten für die momentane Geschwindigkeit (zur Zeit t):

$$\boxed{\vec{v}(\mathrm{t}){=}\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{v}_1{+}\vec{g}\mathrm{t}}$$

Das ist die hier gesuchte Größe. Man sieht: Das hätte auch bekömmen, wenn man die übleichen Ableitungsregeln einfach auf den Rechenausdruck für $\vec{r}(t)$ angewandt hätte.

Typische Folgefrage: Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=2 und wie groß ist dort seine vektorielle Geschwindigkeit?

Antwort

$$\begin{aligned}\vec{r}(2) &= \vec{r}_1 + 2\vec{v}_1 + 2\vec{g}\\ \vec{v}(2) &= \vec{v}_1 + 2\vec{g}\end{aligned}$$

▲

Jetzt ein Beispiel, bei dem man die vektorielle Geschwindigkeit nicht auf die Weise der vorigen Aufgaben bekommt, weil man Δt nicht aus der "von"-Klammer herausbekommt.und man daher nicht kürzen kann.

□ eine gleichförmige Kreisbewegung (in der x-y-Ebene) sei wie folgt (als achsenparalleler Koordinatenweg) gegeben:

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\vec{r}^K(2)$ und die Ortsänderung zwischem t=2 und t=2.5. Weiter die mittlere Geschwindigkeit zwischen diesen beiden Zeiten und die momentane für t=2.

▼ Zunächst ist erneut nur einzusetzen:

$$\vec{r}^K(2){=}\begin{pmatrix} 3\cos 2 \\ 3\sin 2 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.2 \\ 2.7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}^K(2.5){=}\begin{pmatrix} 3\cos(2.5) \\ 3\sin(2.5) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.4 \\ 1.8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also

$$\Delta\vec{r}^K = \vec{r}^K(2.5) - \vec{r}^K(2) = \begin{pmatrix} -2.4 \\ 1.8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.2 \\ 2.7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2 \\ -0.9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und daraus folgt die mittelre Geschwindigkeit In diesem Zeitraum $(\Delta t = 2.5 - 2 = 0.5)$:

$$\boxed{\vec{v}^K_{Mittel}{=}\begin{pmatrix} -2.4 \\ -1.8 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Um die momentane Geschwindikeit zu erhalten, muss man komponentenqweise anleiten. Zuerst für allgemeines t, dann erst t=2 setzen!

$$\vec{v}^K(t) = \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also

$$\vec{v}^K(2) = \begin{pmatrix} -3\sin(2) \\ 3\cos(2) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.7 \\ -1.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Unterschied zwischen mittlerer und momentaner Geschwindigkeit ist hier schon beträchtlich:

$$v^K_{Mittel} - \vec{v}^K(2) = \begin{pmatrix} -2.4 \\ -1.8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2.7 \\ -1.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzübung:

□ Eine (nicht gleichförmige) Kreisbewegung erfolge mit der Winkelfunktion $\alpha = \alpha(t) = 2t^2 + 1$. Wir haben im Zusammenhang mit der Pendelbewegung gesehen, dass man dann den zugehörigen Ortsvektor über $\vec{r}(t) = R \cdot \vec{e}_r(\alpha(t))$ erhält, wobei $\vec{e}_r(\varphi) = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi$ war, wenn der Kreis in der 1-2-Ebene liegt.

Wie lautet die zugehörige Bahnkurve? (Und wenn man will, der ganze übliche Rest von Änderung bis momentane Geschwindigkeit)

▼ Hier ist nur sorgfältig einzusetzen:

$\vec{r}$(t)=R$\vec{e}_r(\alpha$(t))	Ort zum Winkel,$\alpha(t)$ der zur Zeit t angenommen ist.
=R$\vec{e}_r(2t^2+1)$	Die angegebene Winkelfunktion wird für φ eingesetzt
=......	Jetzt 2t$^2+1$ für φ in $\vec{e}_r$ einsetzen! Das gibt:

$$\boxed{\vec{r}(t) = R\ \boxed{\vec{e}_1 \cos(2t^2+1) + \vec{e}_2 \sin(2t^2+1)}}$$

Das ist die gesuchte Formel! Links die Bezeichnung für den Ortsvektor zur Zeit t. Rechts dagegen ein Rechenausdruck, den man (mit Hilfe der vorgegebenen Daten, hier R) auswerten kann. Etwa: Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=2? Antwort:

$$\vec{r}(3) = R \cdot (\vec{e}_1 \cos 19 + \vec{e}_2 \sin 19) = R(\vec{e}_1 \cdot 0.99 + \vec{e}_2 \cdot 0.15$$

□ (3.3.4a) Bestimmen Sie t_1 so, dass $\boxed{\omega t + \varphi = \omega(t - t_1)}$ gilt. Was für eine Interpretation hat t_1?

▼ In der ersten Form sind ω und φ gegeben und man hat:

$$\vec{e}_r(\alpha(t)) = \vec{e}_1 \cos(\omega t + \varphi) + \vec{e}_2 \sin(\omega t + \varphi).$$

Hier sieht man sofort, wo sich der Punkt zur Zeit t=0 befindet: Der zugehörige Polarwinkel ist gerade φ. Aber man kann nicht sehen, wann der Punkt sich auf der 1-Achse befindet.

Sind dagegen ω und t_1 bekannt, dann hat man

$$\vec{e}_r(\alpha(t)) = \vec{e}_1 \cos(\omega(t - t_1)) + \vec{e}_2 \sin(\omega(t - t_1)$$

In dieser form sieht man: Zur Zeit t=t_1 ist $\vec{e}_r(\alpha(t_1)) = \vec{e}_1 \cos 0 + \vec{e}_2 \sin 0 = \vec{e}_1$. D.h. zu diesem Zeitpunkt befindet sich der Punkt auf der 1-Achse!!

Kann man t_1 berechnen, wenn ω und φ bekannt sind? Ja, es muss gelten

$$\begin{aligned} \boxed{\omega t} + \varphi &= \boxed{\omega t} - \omega \cdot t_1 \\ +\varphi &= -\omega \cdot t_1 \\ & \boxed{t_1 = -\tfrac{\varphi}{\omega}} \end{aligned}$$

☐ (3.3.4e) Wie erhält man die momentane Geschwindigkeit, wenn wie hier die Bahn in Koordinaten gegeben ist? formulieren sie das selbst als allgemeines Rezept und wenden Sie es auf die Kreisbewegung an.

▼ Wenn man in t um T weitergeht, muss sich das Argument von sin und cos um 2π ändern, damit man auf dem Kreis zu demselben Punkt zurückkommt

$$\text{Es muss gelten:} \quad \omega T = 2\pi$$

Da sich der Punkt in der Sekunde 25 man dreht, ist T=$\frac{1}{25}s$. Das gibt für die Winkelgeschwindigkeit bzw "Kreisfrequenz"

$$\boxed{\omega{=}2\pi \frac{1}{\left(\frac{1}{25}\right)s} = 50\pi s^{-1}}$$

☐ Übung zum **Behalten wichtiger Formeln**: Inpizieren Sie wichtige Formeln wie die folgenden, überlegen Sie sich kurz die Bedeutung der einzelnen Symbole, decken Sie dann die Formeln jeweils ab und versuchen Sie sie auswendig zu rekonstruieren unter gleichzeitiger verbaler Erläuterung der Bedeutung. Dann vergleichen und Unterschieden erkennen und durchdenken. : überlegen,

Wir brauchen heute folgende Formeln imer als Grundlage:

- Flugparabel (Bahnkurve der...)

$$\vec{r}_{FP}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1(t - t_1) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_1)^2$$

- Kreisbewegung (in der x-y-Ebene um Ursprung, Bahnkurve in Koordinatenform)

$$\boxed{\vec{r}^{K}_{Kreis}(\text{t}) = \begin{pmatrix} R\cos(\alpha(t) \\ R\sin(\alpha(t)) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Die Bewegung ist *gleichförmig* für $\boxed{\alpha(t) = \omega \cdot t + \varphi}$

- Die zugehörigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

$$\vec{v}_{FP}(t) = \frac{d\vec{r}_{FP}}{dt}(t) = \vec{v}_1 + \vec{g}(t - t_1) \qquad \vec{a}_{FP}(t) = \vec{g}$$

$$\vec{v}^{K}_{Kreis}(t) = \frac{d\vec{r}^{K}_{Kreis}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega \cdot t + \varphi) \\ R\omega\cos(\omega \cdot t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}^{K}_{Kreis}(t) = -\omega^2\vec{r}^{K}_{Kreis}(t)$$

Im zweiten Fall ist nur die gleichförmige Kreisbewegung erfasst.

(3.2.8) ☐ $\vec{r}(t)$ beschreibe eine gleichförmige Kreisbewegung. Wähle $t_2 = t_1 + T$, wobei T eine Umlaufsperiode ist. Was für eine mittlere vektorielle Geschwindigkeit ergibt sich? Welcher Unterschied besteht dann zwischen der *Ortsveränderung* $\Delta\vec{r}$ und dem *zurückgelegten Weg?* .

⧫ Der **Betrag** einer vektoriellen Geschwindigkeit wird üblicherweise **skalare Geschwindigkeit** genannt. Für unser Ersatzmodell ergibt das die erwarteten Resultate. Aber manchmal ist Vorsicht angebracht, wie das nachfolgende Beispiel zeigt:

(3.2.9) ☐ Erläutern Sie am Beispiel der letzten Aufgabe den Unterschied zwischen "Mittelwert der skalaren Geschwindigkeit" und "Betrag der mittleren (vektoriellen) Geschwindigkeit". Genauer: **Die mittlere skalare Geschwindigkeit ist nicht immer gleich gleich dem Betrag der entsprechenden mittleren vektoriellen Geschwindigkeit**. Das Problem ist die mittlere skalare Geschwindigkeit, die nicht durch Betragsbildung zu bestimmen ist! Für die momentane Geschwindigkeit gilt das nicht!

▼ Nach einem Umlauf einer periodischen Bewegung hat man $\vec{r}(t + T) = \vec{r}(t)$. D.h. dass die Ortsänderung zwischen den beiden Zeiten den Wert Null hat: $\Delta\vec{r} = \vec{0}$. Damit ist auch die mittlere Änderungsrate, also die mittlere Geschwindigkeit Null. Und ebenso deren Betrag. Im Ersatzbild bleibt der Massenpunkt im gesamten Zeitintervall an derselben Stelle. Bei der tatsächlichen Bewegung hat er jedoch eine von Null verschiedene Vektorgeschwindigkeit und damit einen ebensolchen Betrag (=skalare Geschwindigkeit, "Tachowert" während der Autofahrt). Das gibt einen positiven Mittelwert. D.h. Die mittlere skalare Geschwindigkeit ist i.a. nicht gleich dem Betrag der mittleren vektoriellen Geschwindigkeit! ▲

☐ (3.3.4b) Wie sieht die Bahnkurve (einer gleichförmigem Kreisbewegung) aus, wenn die Bewegung in einer Ebene parallel zur x-y-Ebene erfolgt (Mittelpunkt auf z-Achse)? Wie, wenn Sie in der x-z-Ebene liegt (Mittelpunkt im Ursprung) ? Was bedeutet negatives ω? (Dies sollte man nach der Einstiegsübung für den heutigen Tag ohne Nachschlagen können! - Auswendig!)

▼

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t + \varphi) \\ R\sin(\omega t + \varphi) \\ H \end{pmatrix} \qquad \vec{r}^K_{xz}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t + \varphi) \\ 0 \\ R\sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

Negatives ω bedeutet Umlauf im Uhrzeigersinn.

☐ Die Flugparabelaufgabe aus (3.3.6)

☐ Noch eine ad-hoc-Flugparabelaufgabe: Eine Kanone schießt eine Kugel unter einem Winkel von $\frac{\pi}{4}$ ab mit der skalaren Geschwindigkeit V. Die Kugel schlägt in einer Entfernung A vom Startpunkt auf der Horizontalebene ein. Wie groß ist die Fallbeschleunigung g?

▼ Das Wichtige an dieser Aufgabe ist, dass man hier ein besonders günstiges Koordinatensystem wählen kann (und sollte), für welches die Rechnungen besonders leicht werden. Die Aufgabe legt das Koordinatensystem nicht fest und man sollte keinesfalls ein "möglichst allgemeines" nehmen.

Zunächst wählen wir als Startzeit $t_1 = 0$, Und als Startort den Ursprung, also $\vec{r}_1 = \vec{0}$. Die Achsen legen wir so, dass die Startgeschwindigkeit in der y-z-Ebene liegt. Die Angaben legen eine polare Darstellung des Pfeiles nahe (vgl. Anhang) und das $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist, folgt

Und $\vec{g}$ soll wie üblich in negative 3-Richtung zeigen!

$$\vec{v}^K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{V}{2}\sqrt{2} \\ \frac{V}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Entfernung

Mit diesen Vorüberlegungen können wir dei zugehörige Flugparabel sofort hinschreiben (V gegeben und g äußerer Parameter):

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{V}{2}\sqrt{2} \\ \frac{V}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{V}{2}\sqrt{2}t \\ \boxed{\frac{V}{2}\sqrt{2}\mathrm{t}-\frac{1}{2}\mathrm{gt}^2} \end{pmatrix}$$

Wann trifft der Punkt die Horizontalebene? Dann muss die eingerahmte z-Komponente den Wert Null haben. Das ist nur für ganz spezielle t-Werte der Fall, die wir jetzt suchen (Rollen wechsel von t)

$$\begin{array}{ll} \frac{V}{2}\sqrt{2}\mathrm{t}_S-\frac{1}{2}\mathrm{gt}_S^2 = 0 & \text{t gesucht} \\ \frac{t_S}{2}(V\sqrt{2} - gt_S)0 & \text{Ausklammern} \\ \mathrm{t}_{S1} = 0 \text{ und } \mathrm{t}_{S2} = \frac{V\sqrt{2}}{g} & \text{Die beiden Zeiten} \end{array}$$

Wir setzen in die Bahnkurve ein und finden

$$\vec{r}^K(t_{S1}) = \vec{0} \text{ und } \vec{r}^K(t_{S2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{V}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{V\sqrt{2}}{g} \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta\vec{r}^K$$

Die Entfernung zwischen den beiden Aufschlägen ist einfach gleich der y-Koordinate des letzten Vektors. Also muss gelten

$$\frac{V}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{V\sqrt{2}}{g} = A \qquad \text{A und V bekannt und g gesucht.}$$

Das gibt die gesuchte Lösung zu

$$\boxed{\mathrm{g}=\frac{V^2}{a}}$$
