Übungen Optik 1

□ (2.1.1) **Welche Eigenschaften sind (im Zusammenhang mit der Beschreibung des Verhaltens von Licht) wesentlich und voneinander weitgehend unabhängig ??? Was sollte man messend erfassen und quantifizieren?**

> **(Versuchen Sie eine Analogie zum Schall herzustellen!!!** Es kann günstig sein, die Antwort in Form von Fragen zu geben! Die Antworten sollten prüfbar sein und Erklärungen und korrekte Vorhersagen sowie technische Hilfsmittel erlauben)

▼
Mögliche Fragen:

a) Wie breitet sich Licht aus? ("Ruhendes" Licht)
b) Wie sind die Farben (des Lichtes) zu verstehen?
c) Was ist die "Stärke" oder "Intensität" des Lichtes
d) Was für **Wechselwirkungen hat das Lichtes mit Materie**?
e) Wie entsteht Licht?

▽ Zu a) **: Die Idealisiserung der Lichtausbreitung (für einen bestimmten Gültigkeitsbereich) erfolgt durch "Lichtstrahlen". Die Gültigkeitsgrenzen sind zunächst vage, aber in vielen (alltäglichen) Fällen unproblematisch. Technisches Hilfsmittel zur Herstellung von Lichtstrahlen sind etwa Blenden. In homogenen Medien, (Licht, Wasser Vakuum) verlaufen die Lichtstrahlen geradlinig. Eine Ausbreitungsgeschwindigkeit ist nicht zu beobachten.**

Wichtig dagegen sind "Lichtbündel", die von einem Punkt ausgehen. Sie werden zum Verständnis des Sehvorganges benötigt.

⇛ Erforderliche **Mathematik:**

Elementare Vektorrechnung zur Beschreibung des Lichtweges von Punkt zu Punkt.

Winkel -Bogenmaß ⊿ Sehwinkel (einer Figur) und Öffnungswinkel des Auges.... .

▽Zu b): Mit einem Prisma (Gitter) läßt sich Licht in solches reiner Farben zerlegen und weiter durch eine Zahlangabe ("Wellenlänge") charakterisieren. Das erweist sich als Spezialfall einer elektromagnetischen Welle. Orientierung: Elektromagnetisches Spektrum Aus dem reinen Licht kann man dann durch Überlagerung beliebiges Licht zurückgewinnen

(Benötigte Mathematik: Vektorrechnung und Integration/Fouriertransformation)

▽ Zu c) Lichtstrahlen enthalten Energie, die man auf unterschiedliche Weise in andere Energieformen umwandeln und in diesen anderen Formen messen kann (Photozelle).

▽ Zu d) Nach viel Erfahrung: Die Wechselwirkung ist nach Idealisierung reduzierbar auf "Reflexion (und Streuung) " / "Brechung" / "Absorbtion"

Wir behandeln im Kurs: Reflexion, Brechung und Absorbtion!

Idealisierung bei Reflexion und Brechung: Lichtstrahl trifft eine ebene Grenze zwischen zwei homogenen Stoffen. (Vektorrechnung)

▽Zu e) Das reicht weit in den Bereich der modernen Physik hinein - Atomphysik, Quantenmechanik.
▲

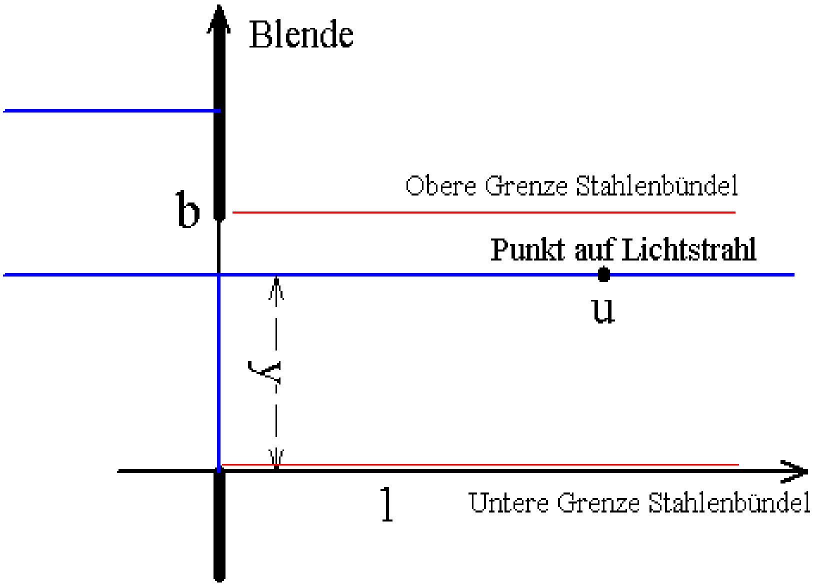
Will man mit dem Lichtstrahlmodell arbeiten, sollte man in der Lage sein, die Stahlenbündel vektoriell zu beschreiben. Das ist einfach, wie die folgenden Aufgaben zeigen.

Zu beachten ist, dass man nicht eine einzelne Gerade oder Strecke angeben muss, sondern jeweils eine ganze Schar. D.h., dass man es mit zwei Arten von Parametern zu tun hat. Einmal denen, die die Punkte auf einer individuellen Geraden perametrisiern und dann denen, die die verschiedenen Geraden, die Geradenschar erfassen.

□ (2.1.3) **Aufgabe zu den Lichtbündeln -** Ebenes Problem (d.h. Koordinatenvektoren mit nur 2 Komponenten):

> Durch einen Spalt (der Breite b und senkrecht zur Lichtrichtung) wird ein Bündel paralleler Lichtstrahlen ausgeblendet. Führen Sie ein günstiges Koordinatensystem ein und geben Sie eine Parametrisierung der ausgeblendeten Lichtstrahlen.

▼ Das Licht verlaufe parallel zu x-Achse. Der Spalt lieg auf der y-Achse mit 0<y<b. Zu jedem dieser y-Werte gehört dann ein (ausgeblendeter) Lichtstrahl.



Der zu y gehörige Lichtstrahl werde mit $\vec{r}_y$ bezeichnet. Mit 0<y<b. Wir benötigen die Koordinatenvektoren aller Punkte auf diesem Strahl. Der zugehörige achsenparallele Weg ergibt sich wie folgt zu

$$\vec{r}_y^K(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{y äußerer Parameter} \\ \text{u freier Parameter.} \end{array}$$

⧫Jede Wahl des äußeren Parameters y liefert einen zulässigen Lichtstrahl, benennt diesen.

⧫ Zu festem y liefert jede Wahl des freien Parameters u einen Punkt auf dem Lichtstrahl. u>0 gibt die Punkte hinter dem Spalt!

Kommentar: Will man das Problem räumlich zu einem Spalt der Höhe H verallgmeinern, muss man die dritte Dimension hunzunehmen. Dann hat man es mit zwei äußeren Parametern zu tun.

$$\vec{r}_{y,h}^K(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ h \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ y \\ h \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{y äußerer Parameter } (0 \leq y \leq b) \\ \text{h äußerer Parameter } (0 \leq h \leq H) \\ \text{u freier Parameter.} \end{array}$$

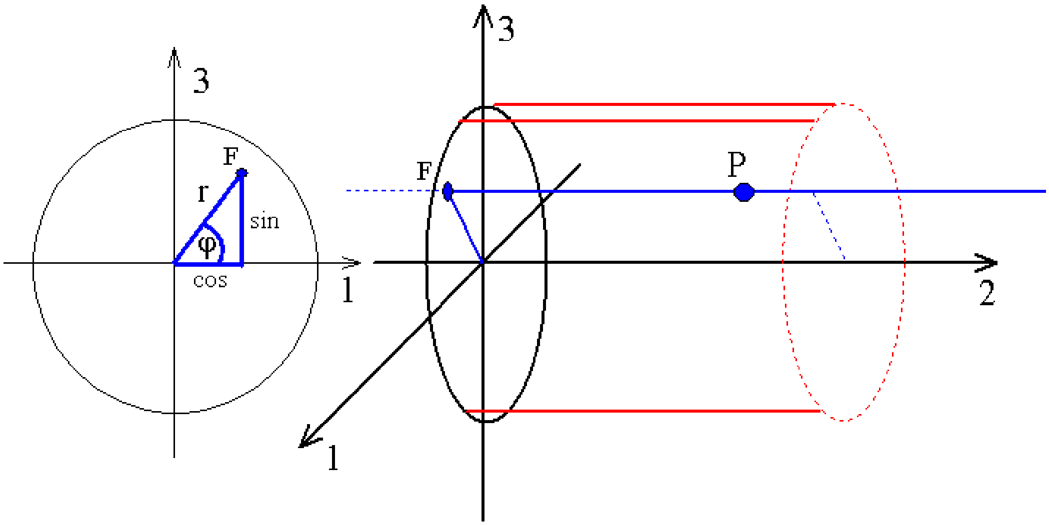
☐ **Lichtbündel -** Jetzt das nicht ebene Problem einer Kreisblende mit Radius R senkrecht zur Lichtrichtung. Erneut zusert ein Koordinatensystem. Dann die Paramwetrisierung.

▼ Das Koordinatensystem K wird. K wird so gelegt, dass die Kreisblende in der 1-2-Ebene liegt mit Mittelpunkt im Ursprung. Die Blendenpunkte selbst werden polar parametrisiert durch die Parameter r und φ mit 0≤ $r < R$ und 0≤ $\varphi < 2\pi$. Dann folgt

$$\vec{r}^{KI}_{r,\varphi}(u) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ 0 \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ u \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

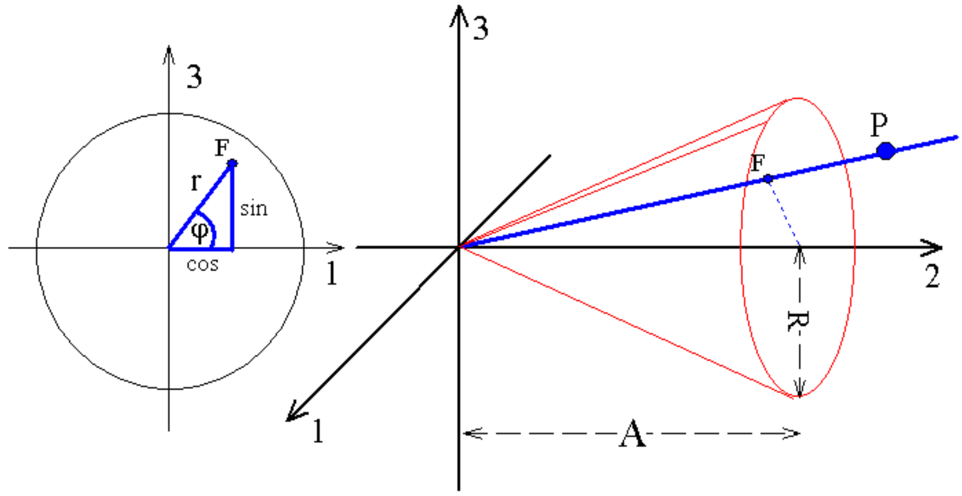
r äußerer Parameter (0≤ $r \leq R$)
φ äußerer Parameter (0≤ $\varphi \leq 2\pi$)
u freier Parameter.

Jede zulässige Wahl von (r,φ) gibt einen ausgeblendeten Strahl, dessen Punkte wieder durch $\vec{r}_{r,\varphi}$ parametrisiert werden. Die Figur zeigt den Sachverhalt mit dem Weg: *Vom Ursprung zum Punkt F und von dort zum Punkt P auf dem zugehörigen Lichtstrahl*



☐ **Lichtbündel - Punktquelle:** Parametrisieren Sie ein Strahlenbündel, das von einem Punkt Q ausgeht und das die Form eines Kreiskegels annimmt. Das Koordinatensystem werde wie folgt gelegt: Ursprung im Quellpunkt Q. Die Kegelachse sei die 2-Achse. In der Ebene y=A liefert das Lichtbündel einen Kreis vom Radius R.

▼



Der Weg auf dem Punkt P auf dem zulässigen Lichtstrahl führt vom Ursprung zum Punkt F. Dieser Vektor wird dann um einen Faktor u (unser freier Parameter) verlängert. Also

$$\vec{y}_{r\varphi}(u) = u \begin{pmatrix} R\cos(\varphi) \\ A \\ R\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uR\cos(\varphi) \\ u\,A \\ uR\sin(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 0\leq r<R \\ 0\leq \varphi < 2\pi \end{array}$$

Das liefert das gesuchte Strahlenbündel!

☐ (2.2.3) Das Teilchenmodell der Lichtstrahlen "erklärt das Gesetz" und erlaubt seine Verfeinerung im Sinne, dass weitere Umfeldphänomene mit einbezogen werden.. Wieso?

▼ Die Teilchen werden elastisch an der ideal glatt gedachten Oberfläche reflektiert. Das liefert sofort *Einfallswinkel=Ausfallswinkel.*

Ist die Oberfläche nicht ideal glatt, kann ein Teil des Teilchenstromes auch in andere Richtungen reflektiert werden. Man kann dann diffuse Reflexion erwarten und muss in geeigneter Weise die Stärke der Streuung in die andern Richtungen beschreiben. ▲

☐ Das einfache Rechenschema, mit dem man aus gegebenem Normalenvektor $\vec{n}$ und gegebenem Einfallsvektor $\vec{r}$ einen Richtungsvektor $\vec{r}$ des reflektierten Strahles bestimmt, soll konsolidiert werden.

Das Schema:

$$\vec{n}, \vec{e} \quad \text{gegeben. Bestimme } \vec{p} \;=\; \vec{p}_{\vec{n}} = \frac{(\vec{e}\cdot\vec{n})}{(\vec{n}\cdot\vec{n})}\vec{n}.$$

$$\text{Dann ist} \quad \boxed{\vec{r}=\vec{e}\text{-}2\vec{p}}$$

Erster Aufgabentyp: $\vec{n}, \vec{e}$ vorgegeben $\vec{r}$ kurz ausrechnen:

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis:

$$\vec{r} = \frac{5}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\cdot\frac{4}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ -15 \end{pmatrix}$$

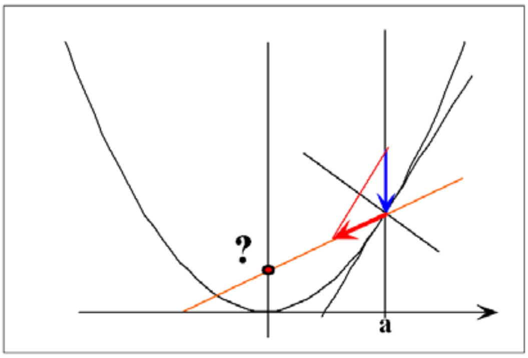
Zweiter Aufgabentyp: Für $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist klar, welche Richtung der reflektierte Strahl hat. Die Rechnung gibt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{wie erwartet!}$$

□ (2.3.1) Beweisen Sie die Brennpunkteigenschaft der Parabel mit Hilfe der Vektorrechnung

Der Nachweis der Brennpunktseigenschaft der Parabel! in Aufgaben

♦ Wir wählen die Parabel mit Gleichung $\boxed{y=\sigma x^2}$. Die Koordinaten y und x mögen dieselbe Einheit haben. Dann ist σx einheitenfrei, eine Zahl. Die Strahlen sollen parallel zur y-Achse verlaufen. Die Skizze fasst die Konfiguration zusammen. (Blau Richtungsvektor des einfallenden Strahles. Rot Richtungsvektor des reflektierten Strahles, gesucht der Schnittpunkt mit der y-Achse)



♢ Die Einfallsgerade hat die Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und geht durch den Punkt $\begin{pmatrix} a \\ \sigma a^2 \end{pmatrix}$ auf der Parabel. Dabei ist a äußerer Parameter. Jede Wahl von a ergibt einen Lichtweg, dessen Schnitt mit der y-Achse zu bestimmen ist!

♢ Die Richtung der Tangente an $\begin{pmatrix} a \\ \sigma a^2 \end{pmatrix}$ ist durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\sigma a \end{pmatrix}$ gegeben. (y=σx^2, dann gilt für die Ableitung y$' = 2\sigma x$!)

♢ Die dazu senkrechte Richtung ist durch $\boxed{\vec{n} = \begin{pmatrix} -2\sigma a \\ 1 \end{pmatrix}}$ gegeben. (Der Pfeil zeigt ins Innere der Parabel, da 1>0. Nachweis, dass $\vec{n}$ senkrecht auf der Tangente mit Hilfe des Skalarproduktes!)

♦ Jetzt kann die zu $\vec{n}$ parallele Komponente $\vec{p}$ von $\vec{e}$ bestimmt werden. Vgl das allg. Schema. Es ist

$$\vec{p} = \frac{-1}{1+4\sigma^2 a^2} \begin{pmatrix} -2\sigma a \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+4\sigma^2 a^2} \begin{pmatrix} +2\sigma a \\ -1 \end{pmatrix}$$

♦ Das gibt für den reflektierten Strahl folgenden Richtungsvektor:

$$\vec{e} - 2\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{1+4\sigma^2 a^2} \begin{pmatrix} +2\sigma a \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+4a^2\sigma^2} \begin{pmatrix} -4a\sigma \\ 1-4a^2\sigma^2 \end{pmatrix}$$

Da es nur auf die Richtung, nicht aber die Länge ankommt, können wir den Nennerfaktor $\frac{1}{1+4a^2\sigma^2}$ fortlassen und wählen als Richtungsvektor des reflektierten Strahles:

$$\vec{r} = \vec{r}(a) = \begin{pmatrix} -4a\sigma \\ 1-4a^2\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

♦ Das gibt als Parametrisierung der reflektierten (zum Parameter a gehörigen) Geraden:

$$\vec{x}_{r,a}(\alpha) = \begin{pmatrix} a \\ \sigma a^2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4a\sigma \\ 1-4a^2\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{a-}4\alpha\sigma\text{a}} \\ \sigma a^2 + \alpha\left(1-4a^2\sigma^2\right) \end{pmatrix}$$

♦ **Wo trifft der reflektierte Strahl die y-Achse?** Dazu muss der eingrahmte x-Weg den Wert Null haben (Merkmal der Punkte der y-Achse). Das bestimmt den $\alpha - Wert$ des Schnittpunktes zu

$$\alpha_S = \frac{1}{4\sigma} \qquad \text{Unabhängig von a! Gilt für alle Lichtwege}$$

Einsetzen dieses Wertes in die zweite Koordinate gibt die gesuchte y-Koordinate, aus der erneut die a-Abhängigkeit herausfällt:

$$\boxed{\text{y}_S = \sigma\text{a}^2 + \tfrac{1}{4\sigma}\left(1-4a^2\sigma^2\right) = \tfrac{1}{4\sigma}}$$

♦ Also: Alle (an der Parabel y=σx^2) reflektierten achsenparallelen Geraden schneiden sich in einem Brennpunkt mit Ortsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4\sigma} \end{pmatrix}$.

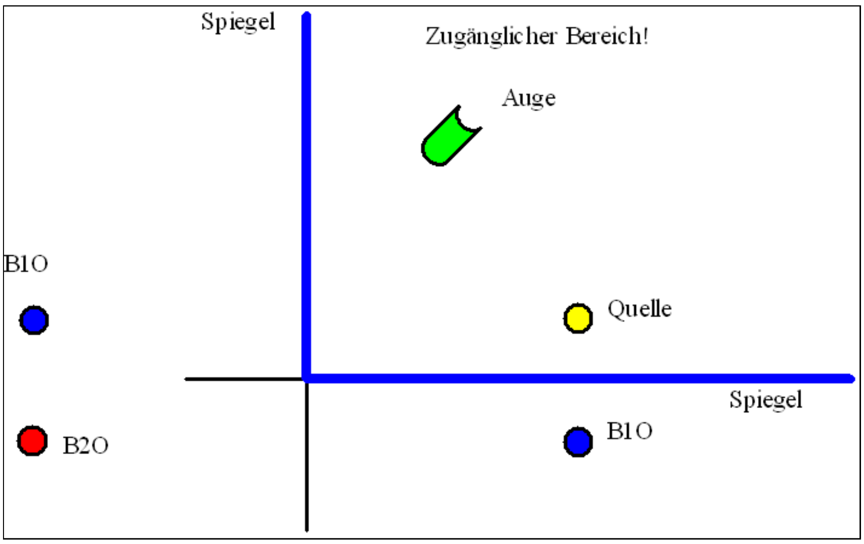
In diesem Beispiel **kommt der Fokuspunkt direkt heraus. Man benötigt keine spezielle Methoden mit Infinitesimalrechnung zu seiner Bestimmung. Das ist also untypisch einfach!**

♦ Ein Test zur Gültigkeit des Resultates: Zu y=$\frac{1}{4\sigma}$ gehört x=$\frac{1}{2\sigma}$ auf der Parabel. Für dieses x ist die Steigung 1. Und das heißt, der reflektierte Strahl verläuft horizontal durch den Brennpunkt mit der berechneten Höhe!

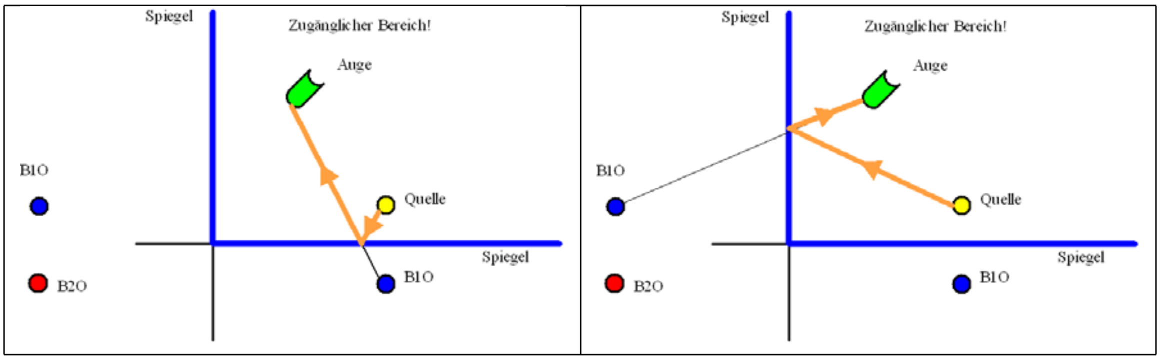
□ Änderung der Rechnung, wenn der einfallende Strahl eine andere Richtung hat.

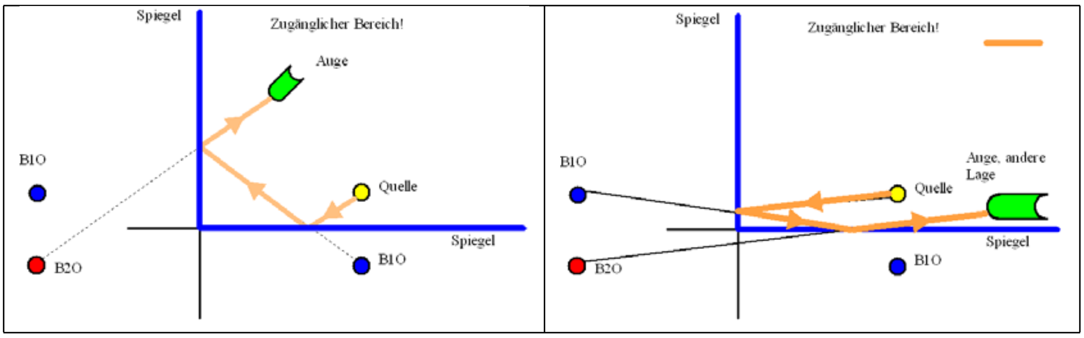
□ Gegeben zwei Spiegel, die einen rechten Winkel miteinander bilden. Dazwischen eine Lichtquelle, eine "Kerze". Sie, als Beobachter befinden sich auch in diesem Bereich. Wieviel Spiegelbilder der Kerze sehen Sie? Skizzieren Sie die zugehörigen tatsächlichen Lichtwege sowie deren virtuelle Verländerungen von der Quelle zum Auge

▼ Bei dieser Lage der beiden Spiegel gibt es 3 Spiegelbilder, wie die erste Figur zeigt. Zwei davon entstehen durch Spiegelung der Kerze an nur einem Spiegel.



Jetzt zeichnen wir einen Lichtweg von der Qelle zum Auge ein, derart dass die Verlängerung des aufs Auge treffenden Bündels sich im virtuellen Spiegelpunkt trifft. Im Fall des vierten Punktes, der zwei Spiegelungen erfordert, sind noch zwei unterschiedliche Augenpositionen eingezeichnet.





☐ (2.3.11) Konzipieren Sie einen Computerbefehl, der (in der Ebene) das Problem der Strahlreflexion löst. Was muss man eingeben? Was soll herauskommen? Welche Formel benötigt man?

▼ Was benötigt der Computer (typischerweise) an Eingabegrößen, um den reflektierten Lichtstrahl zu bestimmen? Wir nehmen an, dass ihm ein physikalisches Koordinatensystem für den Bildschirmbereich zur Verfügung steht. Was benötigt er dann? Zunächst den Reflexionsort, den wir für die Richtungsbestimmung nicht benötigen. Dann die Richtung des einfallendens Strahles und die Richtung der reflektierenden Geraden. Beide geben wir in Form von Koordinatenvektoren (achsenparallelen Wegen) an. Wir suche den Koordinatenvektor des reflektierten Strahles

Seien $\vec{e} = \begin{pmatrix} c_e \\ s_e \end{pmatrix}$ und $\vec{t} = \begin{pmatrix} c_t \\ s_t \end{pmatrix}$ Richtungsvektoren des einfallenden Strahles bzw. der reflektierenden Geraden. Dann ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} -s_t \\ c_t \end{pmatrix}$Normalenrichtung. (Günstiger als das andere Vorzeichen! Die Formel $\vec{r} = \vec{e} - 2\vec{p}$ gibt hier

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \begin{pmatrix} c_r \\ s_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_e \\ s_e \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -s_t \\ c_t \end{pmatrix} \frac{-c_e s_t + s_e c_t}{s_t^2 + c_t^2} \\
&= \frac{1}{c_t^2 + s_t^2} \begin{pmatrix} c_e(c_t^2 + s_t^2) + 2s_t(-c_e s_t + s_e c_t) \\ s_e((c_t^2 + s_t^2) - 2c_t(-c_e s_t + s_e c_t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{c_t^2 + s_t^2} \begin{pmatrix} c_e(c_t^2 - s_t^2) + 2s_e s_t c_t \\ s_e(-c_t^2 + s_t^2) + 2c_e c_t s_t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Den Vorfaktor darf man noch fortlassen. Das gibt folgendes einfaches Programm:

```
PROCEDURE refp(ce,se,ct,st)
  // e einfallener Strahl, t Reflektorrichtung
  sr = se * (-ct ^ 2 + st ^ 2) + 2 * ce * ct * st
  cr = ce * (ct ^ 2 - st ^ 2) + 2 * se * ct * st
RETURN
```

▲

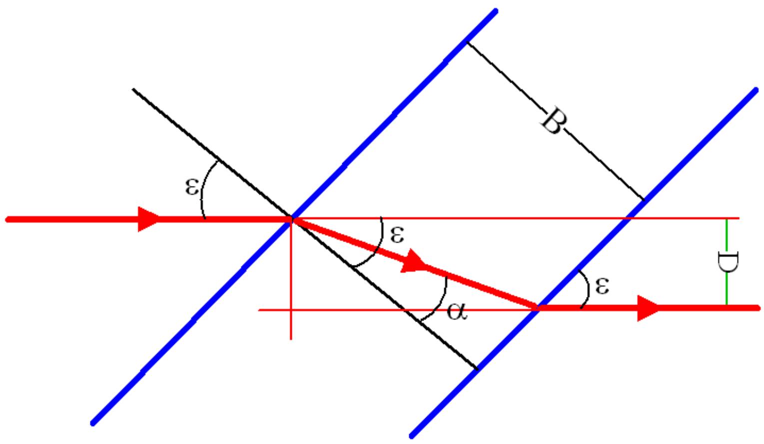
Donnerstag16.2.

Einfache Numeriktests zum Brechungsgesetz:
a) n=1.5 und $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$. Wie groß ist α?
b) $\varepsilon = 0.5$ und $\alpha = 0.3$ Wie groß ist n?
c)$\varepsilon = 0.5$ und $\alpha = 0.7$ Wie groß ist n?

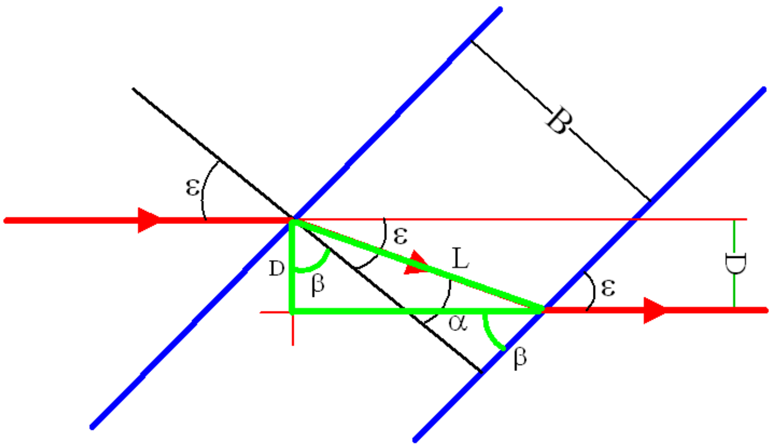
□ Ein Bündel paralleler Lichtstrahlen geht schräg durch eine durchsichtige Platte der Dicke B. Der Brechungsindex sei n. Infolge des Durchganges wird das Bündel um D parallel verschoben. Bestimmen Sie D.

▼ B und n sind feste Konfigurationsgrößen. Weiter ist der Einfallswinkel ε des Lichtstrahles gegen die Normale als vorgegeben anzusehen. Gesucht ist eine Formel D=D(ε) mit D(0)=0. Wie üblich zuerst die Skizze der Konfiguration. Da Brechunfg vorliegt, ist der Ausfallwinkel α mit eingezeichnet.

α



α liegt fest über $\boxed{\sin\alpha = \frac{1}{n}\sin\varepsilon.}$. Weiter Sei L die Länge des Lichtweges in der Platte. Offensichtlich ist $\cos\alpha = \frac{B}{L}$ oder $\boxed{L=\frac{B}{\cos\alpha}}$. Jetzt liegt es nahe, D über das rechtwinklige Dreieck der nächsten Skizze zu bestimmen. Für diese Dreieck bnötigen wir boch den grün eingezeichneten Winkel β.



Sobald β bekannt ist, haben wir $\frac{D}{L} = \cos(\alpha+\beta)$ und sind fertig. Aber offensichlich ist $\varepsilon + \beta = \frac{\pi}{2}$. oder $\boxed{\beta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon}$. Es folgt $\boxed{\mathrm{D{=}L}\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha\text{-}\varepsilon)}$ oder

$$\boxed{\mathrm{D}(\varepsilon)\mathrm{=B}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha-\varepsilon)}{\cos\alpha} \quad \text{mit } \ \sin\alpha = \frac{1}{n}\sin\varepsilon}$$

Damit wäre das Problem gelöst. (Eisetzen con α ist nicht nötig)

Tests : a) Einheitskontrolle stimmt. b) Was ist mit $\varepsilon = 0$? Dann ist $\alpha = 0$ und $\mathrm{D}(0)\mathrm{=}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$ wie erwartet.

Ergänzung: Kann man doch noch weiterrechnen? Ja zunächst ist

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon}.$$

Weiter folgt über die Additionstheoreme $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x$. Also

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\varepsilon\right) = -\sin(\alpha-\varepsilon) = \sin(\varepsilon-\alpha) = \sin\varepsilon\cos\alpha - \cos\varepsilon\sin\alpha$$

Alles eingestzt:

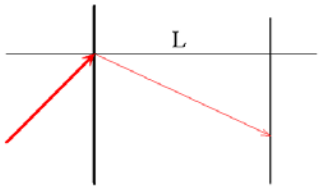
$$\begin{aligned} D(\varepsilon) &= B\frac{\sin\varepsilon\cos\alpha - \cos\varepsilon\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ &= B\frac{\sin\varepsilon\cdot\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon} - \cos\varepsilon\cdot\frac{1}{n}\sin\varepsilon}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon}} \\ &= B\frac{\sin\varepsilon\cdot\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon} - \cos\varepsilon\cdot\sin\varepsilon}{\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon}} \end{aligned}$$

Spätestens jetzt sieht man einen weiteren Testfall. Was ist mit n=1? Dann darf es keine Ablenkung geben und man sieht auch tatsächlich $\mathrm{D}_{n=0}(\varepsilon) = 0$.

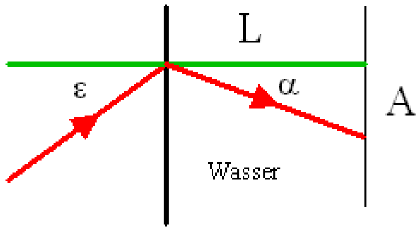
Interessant ist noch der Fall "streifenden Einfalles" also $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$. Dann muss $\mathrm{D}(\frac{\pi}{2})\mathrm{=B}$ gelten wie die erste Form sofort zeigt.

(2.5.20) Der Brechungsindex von rotem und blauen Licht unterscheidet sich etwas. Für Wasser gilt $\mathrm{n}_{blau} = 1.34$ und $\mathrm{n}_{rot} = 1.33$. Der für beide Farben gleiche Einfallswinkel sei $\frac{\pi}{4}$. Wie weit muss der Strahl im Waser laufen, damit sich roter und blauer Strahl etwa 1cm voneinander entfernen? (Auf einer zur Grenzfläche parallelen Ebene im Abstand L)

Wo liegen in der nachfolgenden Skizze α, ε und d ?
Was vermuten Sie? Wie groß wird etwa L sein?



▼ in der Skizze ist der gebrochene Strahl offensichtlich noch einmal an der Normalen gespiegelt. Man muss die Skizze zunächst noch etwas ergänzen:



A steht für Ablenkung (von der Normalen). Es gilt A=A(n). D.h die Ablenkung hägt vom Btrechungsindex ab. Aus der figur folgt $A = L\tan\alpha$. Und als Folge des Brechungsgesetzes $\sin\alpha = \frac{1}{n}\sin\varepsilon$. Zusammen:

$$A = L\tan\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{1}{n}\sin\varepsilon.$$

Der Unterschied $\Delta A = A_{rot} - A_{blau}$ sollte jetzt bekannt sein und L war zu bestimmen. ´Das gibt:

$$\Delta A = A_{rot} - A_{blau} = L(\tan\alpha_{rot} - \tan\alpha_{blau}) \text{ mit } \alpha = \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n}$$

oder

$$\boxed{\text{L}=\frac{\Delta A}{\tan\alpha_{rot}-\tan\alpha_{blau}} \qquad \alpha_{rot} = \arcsin\frac{\varepsilon}{n_{rot}} \qquad \alpha_{blau} = \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{nblau}}$$

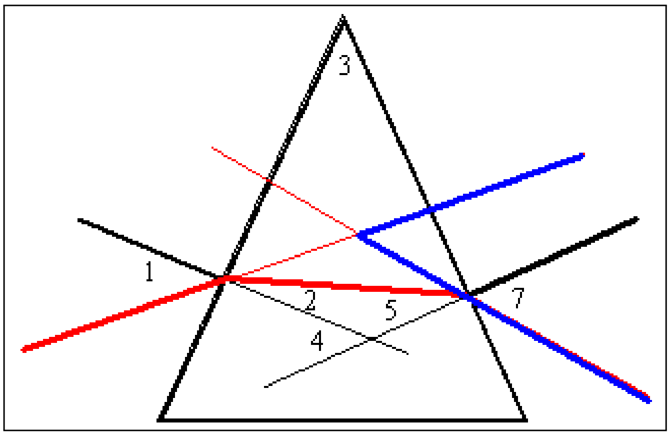
Das erlaubt offensichtlich die numerische Auswertung. Wider sollte man nicht weiter einsetzen.
Numerik mit $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$ und $\Delta A = 1cm$

$$\begin{aligned}
\alpha_{rot} &= \arcsin\frac{1}{\sqrt{21.33}} = 0.560\,56 \\
\alpha_{blau} &= \arcsin\frac{1}{\sqrt{21.34}} = 0.555\,88 \\
L &= \frac{\Delta A}{\tan\alpha_{rot} - \tan\alpha_{blau}} = 153.\,73
\end{aligned}$$

Die letzten Stellen sind nicht sinnvoll Als Ergebnis kann man L=154cm nehmen.

☐ (2.19) Eine weitere Konsequenz des Brechungsgesetzes ist das Verständnis des Lichtverlaufes in einem Prisma.

Zunächst eine Skizze mit ersten Bezeichnungen in Form einer Durchnumerierung beteiligter Winkel .



Welche Bedeutung hat der blau markierte Winkel? **Wie sollte eine Formel aussehen, die die Lichtablenkung in einem Prisma beschreibt?** Was sollte sie leisten?

> Genauer: Welche (abhängige) Größe sollten durch die Formel durch welche unabhängige ausgedrückt werden, was wird dabei als äußere Parameter eingehen?

▼

Blau eingezeichnet ist der "**Ablenkwinkel**", den wir mit δ bezeichnen wollen. Das Prisma verursacht insgesamt eine Winkelablenkung des Strahles, so dass wir δ als abhängige Variable ansehen wollen. Eingehen wird dann der (unabhängige) Einfallswinkel des Strahles α_1, nicht aber der Eintrittspunkt auf dem Prisma. (Sonst würde das Prisma nicht funktionieren! Ein eintretendes paralleles Bündel muss erneut parallel austreten.) Äußere Parameter sind weiter der (relative) Brechungsindex$\boxed{\;}$ sowie der Öffnungswinkel $\boxed{\varepsilon = \alpha_3}$ des Prismas! Wir erwarten eine Formel der Form

$$\delta = \delta(\alpha_1; n, \varepsilon).$$

(In der Vorlesung haben wir alternativ nach einer Formel für α_7 gefragt!)
Tatsächlich sieht die resultierende Formel wie folgt aus:

$$\boxed{\boxed{\delta = \delta(\alpha_1; n, \varepsilon) = \alpha_1 + \arcsin\left[\sin\varepsilon \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1} - \cos\varepsilon \cdot \sin\alpha_1\right] - \varepsilon}}$$

Die einfache Herleitung verlangt an einer Stelle die Anwendung eines Additionstherorms.
Test der Formel: Was ist mit n=1?

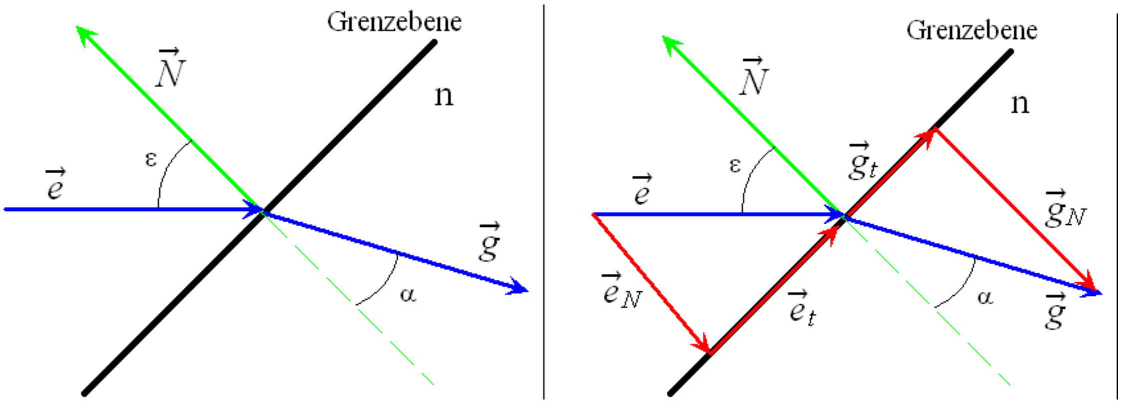
Beweis der Formel
Zunächst ist $\boxed{\alpha_4 = \alpha_3 = \varepsilon}$ (Etwa paarweise senkrechte Schenkel). über die Winkelsumme im Dreieck folgt dann $\pi = \alpha_2 + \alpha_5 + (\pi - \varepsilon)$. also $\boxed{\alpha_2 + \alpha_5 = \varepsilon}$.. Erneutes Anwenden der Winkelsumme gibt $\pi = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_7 - \alpha_5) + (\pi - \delta)$ oder $\boxed{\delta = a_1 + \alpha_7 - \varepsilon}$.
Nach der Rollenverteilung stört α_7. Auch haben wir bisher das Brechungsgesetz nicht benutzt! Man sieht:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha_7 &= n\sin\alpha_5 = n\sin(\varepsilon - \alpha_2) = n\sin\varepsilon\cos\alpha_2 - n\cos\varepsilon\sin\alpha_2 \\
&= \sin\varepsilon \cdot n\sqrt{1 - \sin^2\alpha_2} - \cos\varepsilon \cdot n\sin\alpha_2 \\
&= \sin\varepsilon \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1} - \cos\varepsilon \cdot \sin\alpha_1
\end{aligned}$$

Die angegebene Formel folgt sofort!

□■ Gegeben ein Richtungsvektor $\vec{e}$ des einfallenden Strahlen und ein Normalenrichtungsvektor $\vec{N}$. zu bestimmen: Ein Richtungsvektor des nach dem Brchungsgesetz gebrochenen Strahles.

Skizze (mit $\vec{n}$ statt $\vec{N}$)



Koordinatenfreie Rechnung (nur wen es sehr interessiert!)

Wir zerlegen die beiden Richtungsvektoren $\vec{e}$ und $\vec{g}$ in tangentialen und normalen Teil (bezüglich der brechenden Ebene, im Bild $\vec{e}_t$ statt $\vec{e}_T$ und $\vec{g}_t$ statt $\vec{g}_T$):

$$\vec{e} = \vec{e}_N + \vec{e}_T \qquad \text{und} \quad \vec{g} = \vec{g}_N + \vec{g}_T.$$

Bei Bedarf kann diese Zerlegung wir üblich bestimmt werden.

Damit drückt sich das Brechungsgesetz wegen

$$\boxed{\sin\varepsilon{=}\frac{|\vec{e}_T|}{|\vec{e}|} \qquad \text{und} \qquad \sin\alpha{=}\frac{|\vec{g}_T|}{|\vec{g}|}}$$

wie folgt aus:

$$\boxed{\frac{|\vec{e}_T|}{|\vec{e}|}{=}\text{n}\frac{|\vec{g}_T|}{|\vec{g}|}}$$

Da die Längen der beiden Richtungsvektoren nicht festgelegt sind, können wie für sie zusätzliche Bedingungen stellen. Z.B. können wir verlangen

$$|\vec{e}| = |\vec{g}| = V$$

, wo V noch frei wählbar ist. Insbesondere gibt V=1 Einheitsvektoren.

(Dann ist $|\vec{e}_T| = V\sin\varepsilon$ und $|\vec{e}_N| = V\cos\varepsilon = \sqrt{V^2 - \vec{e}_T^2}$. Ebenso ist sin$\alpha = \frac{1}{n}\sin\varepsilon = \frac{1}{nV}|\vec{e}_T|$ und cos$\alpha = \frac{1}{nV}\sqrt{n^2V^2 - \vec{e}_T^2}$)

Denken Sie daran: $\vec{e}_T$ und $\vec{e}_N$ sind als vorgegeben anzusehen. Weiter wegen orthogonal

$$V^2 = \vec{e}_N^2 + \vec{e}_T^2$$

Dann folgt aus dem Brechungsgesetz $|\vec{g}_T| = \frac{1}{n}|\vec{e}_T|$, also $\boxed{\vec{g}_T = \frac{1}{n}\vec{e}_T}$. Jetzt ist noch $\vec{g}_N$ zu bestimmen. Wegen $\vec{g}_N^2 = V^2 - \vec{g}_T^2 = V^2 - \frac{1}{n^2}\vec{e}_T^2$ folgt

$$\vec{g}_N = \pm\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}\sqrt{V^2 - \frac{1}{n^2}\vec{e}_T^2} = \pm\frac{\vec{N}}{n|\vec{N}|}\sqrt{n^2V^2 - \vec{e}_T^2} = \vec{e}_N\frac{\sqrt{n^2V^2 - \vec{e}_T^2}}{n\sqrt{V^2 - \vec{e}_T^2}} = \frac{\vec{e}_N}{n|\vec{e}_N|}\sqrt{n^2V^2 - \vec{e}_T^2}$$

Oder auch

$$\vec{g} = \frac{1}{n}\left(\vec{e}_T + \vec{e}_N \frac{\sqrt{n^2V^2 - \vec{e}_T^2}}{\sqrt{V^2 - \vec{e}_T^2}}\right) = \frac{1}{n\sqrt{V^2 - \vec{e}_T^2}}\left(\vec{e}_T\sqrt{V^2 - \vec{e}_T^2} + \vec{e}_N\sqrt{n^2V^2 - \vec{e}_T^2}\right)$$

Da es nur auf die Richtung, nicht den Betrag ankommt, ist auch folgender Richtungsvektor zulässig (mit anderer Länge):

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= \vec{e}_T\sqrt{V^2 - \vec{e}_T^2} + \vec{e}_N\sqrt{n^2V^2 - \vec{e}_T^2} = \vec{e}_T|\vec{e}_N| + \vec{e}_N\sqrt{n^2\vec{e}^2 - \vec{e}_T^2} \\ &\boxed{\vec{g}_1 = \vec{e}_T|\vec{e}_N| + \vec{e}_N\sqrt{n^2\vec{e}^2 - \vec{e}_T^2} = \vec{e}_T|\vec{e}_N| + \vec{e}_N\sqrt{n^2\vec{e}_N^2 - (n^2-1)\vec{e}_T^2}}\end{aligned}$$

Wählt man speziell noch $\mathrm{V}^2 = 1$ und damit $|\vec{e}_T| = \sin\varepsilon$, so folgt wegen

$$\boxed{\vec{g}_1 = \frac{\vec{e}_T}{|\vec{e}_T|}\sin\varepsilon\cos\varepsilon + \frac{\vec{e}_N}{|\vec{e}_N|}\cos\varepsilon\cdot\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon}}$$

alternativ ein weiterer Richtungsvektor

$$\boxed{\vec{g}_2 = \frac{\vec{e}_T}{|\vec{e}_T|}\sin\varepsilon + \frac{\vec{e}_N}{|\vec{e}_N|}\cdot\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon}.}$$

Bezeichnet L das zugehörige kartesische Koordinatensystem (für die normale und tangentiale Richtung), hat man

$$\boxed{\vec{g}_2^L = \begin{pmatrix}\sin\varepsilon \\ \sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon}\end{pmatrix}}$$

Ist $\vec{N}$ gegeben, dann ist $\frac{\vec{e}_N}{|\vec{e}_N|} = \pm\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ und nach der Skizze sollte $\vec{e}_T$ dazu senkrecht stehen derart dass $\vec{e}_T$ in positive Richtung zeigt ($\sin\alpha > 0$).

Freitag d. 17.2.

Von der sprachlichen Formulierung zum Situationsverständnis mit Hilfe einer Skizze!

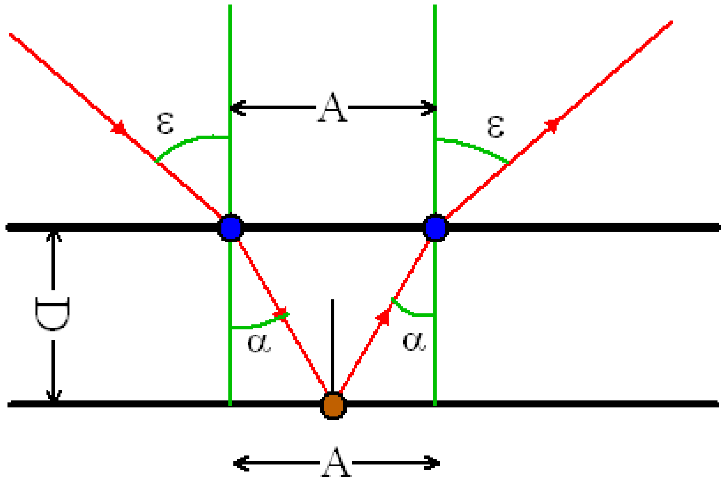
☐Gegeben eine planparallele Platte der Dicke D aus einem durchsichtigen Material mit Brechungsindex n. Ein Lichtstrahl falle schräg auf diese Platte ein, werde hineingebrochen und am Plattenboden reflektiert. Dieser Strahl tritt unter erneuter Brechung wieder aus der Platte aus. Wie weit ist der Lichtstrahl verschoben, d.h. welchen Abstand haben Eintrittsort und Austrittsort des Strahles?

Zunächst eine Skizze erstellen, fehlende Bezeichnungen wählen und in der Skizze ergänzen, Dann: Welche Form sollte das Ergebnis haben?(Struktur der Endformel) Dann erst ganz zum Ende die eigentliche Rechnung.

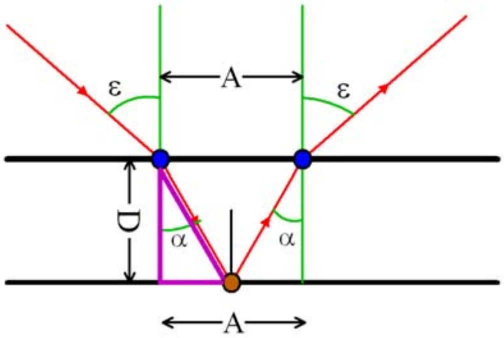
▼ Zunächst die Skizze. In den beiden blauen Punkten haben wir Brechung, daher sind (unbenannt) die dortigen Normalen eingetragen und Bezeichnung der Winkel. Im braunen Punkt haben wie Spiegelung, Die Figur ist symmetrisch zu diesem Punkt.

Laut Aufgabe ist die Länge A gesucht. Sie ist abhängig vom Einfallswinkel ε.D.h. wir suchen A=A(ε).

Beis senkrechtem Einfall ($\varepsilon = 0$) gilt A(0)=0. Für n=1 ist $\alpha = \varepsilon$.



Jetzt sehen wir: α folgt mit dem Brechungsgesetz. Dann findet man A über ein rechtwinkliges Dreieck:



$\alpha = \sin^{-1}(\frac{1}{n}\sin(\varepsilon))$
$\tan\alpha = \frac{A/2}{D} = \frac{A}{2D}$
Also $\quad A = 2D{\cdot}\tan(\alpha)$

Danmit ist die Aufgabe gelöst. Über $\boxed{\alpha = \alpha(\varepsilon) = \sin^{-1}(\frac{1}{n}\sin(\varepsilon))}$ bestimmt man zunächst den Winkel α. Dann folgt über $\boxed{A(\varepsilon) = 2D{\cdot}\tan(\alpha(\varepsilon))}$ der gesuchte Abstand.

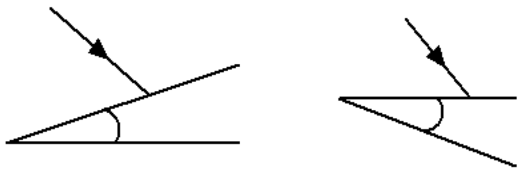
Für $\varepsilon = 0$ folgt A=0 wie erwartet. Und für n=1 ist A$(\varepsilon) = 2D\tan\varepsilon$. ▲

Eine Modifikation der Aufgabe. Jetzt sollen sie beiden Oberflächen der Platte nicht mehr parallel sein, sondern nach Art eines Keiles einen Winkel ω bilden. Und die Projektion des Lichtstrahles auf die Platte soll senkrecht zur Kantenrichtung des Keiles verlaufen. Am Auftraffpunkt des einfallenden Lichtstrahles haben die beiden Oberflächen der Platte den Abstand D.

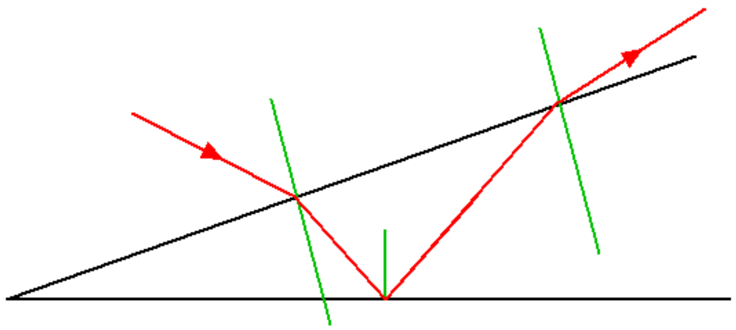
Fertigen Sie eine zugehörige Skizze an.

Dies - gerade auch die folgende Lösung - ist eine Konzentrationsübung für Sie, die Ihnen helfen soll, viel einfacher analoge Probleme selbst zu behandeln. . Das gilt auch für die weitere Lösung.

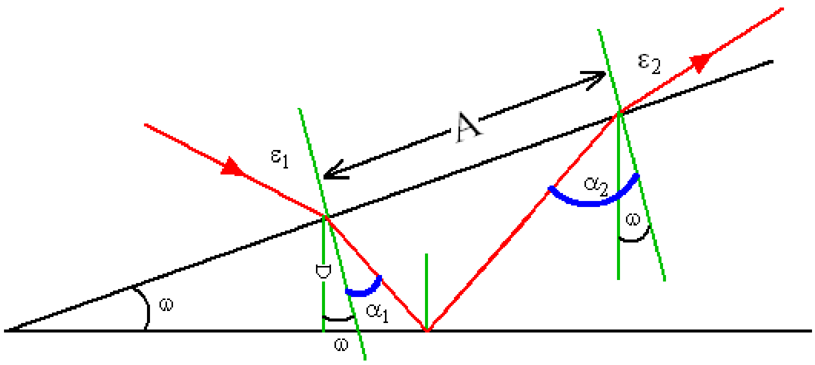
▼ Man kann die Skizze auf mehrere Weisen beginnen. Etwa:



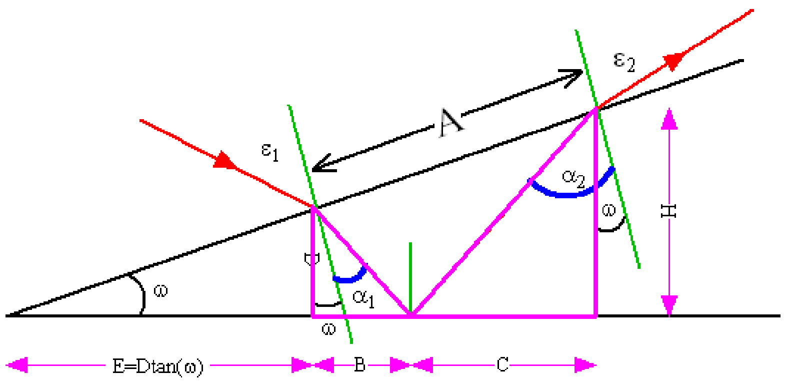
Wir wählen die erste Lage. Nun zeichen wir den Strahlengang mit der jeweiligen Normalen! wir nehmen n>1, so dass im Körper in Richtung auf die Normale gebrochen wird.



Jetzt zeichnen wir in den oberen Auftreffpunkten noch die andere Normale ein, die den kürzesten Abstand zur Bodenfläche gibt. Weiter Bezeichnungen der Winkel. Achten Sie auf die korrekte Definition von α_1 und α_2. Immer der Winkel zwischen Strahl und zugehöriger Normale. Schließlich tritt der Keilwinkel ω mehrfach auf. Das erweist sich als wichtig .Die in Analogie zur ersten Aufgabe letztlich gesuchte Größe A ist auch noch eingezeichnet.



Mit dieser Skizze haben wir das System weitgehend im Griff. Mit ε_1 folgt zunächst α_1. Damit kann man den REflexionspunkt unten bestimmen. Ist der folgt über das Reflexionsgesetz der zweite Brechungspunkt. Wir zeichnen erneut geeignete Dreiecke ein:



Und finden:

$$
\begin{aligned}
B &= D\tan(\alpha_1 + \omega) \\
C &= H\tan(\alpha_2 - \omega) \qquad (*) \\
\alpha_1 + \omega &= \alpha_2 - \omega \quad \text{D.h.} \quad \boxed{\alpha_2 = \alpha_1 + 2\omega}
\end{aligned}
$$

Mit der letzten Gleichung haben wir alle Winkel, insbesondere ε_2. So weit haben wir uns in der Übung vorgearbeitet.

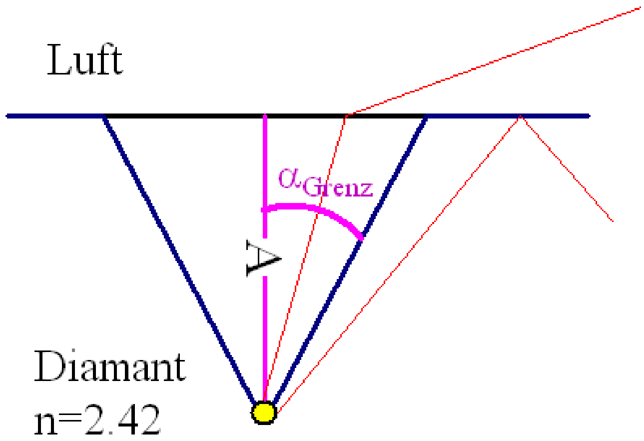
Wie groß ist H? das kennen wir bisher nicht über den Strahlensatz folgt:

$$\frac{D}{A} = \frac{H}{E+B+C} \quad \text{also} \quad \boxed{\text{H}=\frac{D}{A}(\text{E+B+C})} \quad \text{mit E=Dtan}\omega$$

Mit (*) zusammen kann man jetzt H und C bestimmen (2 Gleichungen für zwei Unbekannte). Dann sind B und C bekannt. Und jetzt folgt das gesuchte A aus $\boxed{\cos\omega = \frac{B+C}{A}.}$

☐ Eine Grenzebene G trenne Luft und Diamant. Im Diamant befindet sich im Abstand A (von G) eine isotrope punktförmige Lichtqelle. Wie groß (Flächeninhalt?) ist die Fläche Grenzebene, durch die Licht in die Luft gelangt? Der Rest verbleibt über Totalreflexion im Diamanten. Das ist der leichte Teil. Zusätzlich wird gefragt, welcher Anteil des von der Quelle ausgestrahlten Lichtes nach draußen gelangt. (Das ist eine Quote). Hierzu benötigt man eine Formel. Was muss diese Formel leisten?

▼ Ein Schnitt durch die Konfiguration gibt folgende Skizze



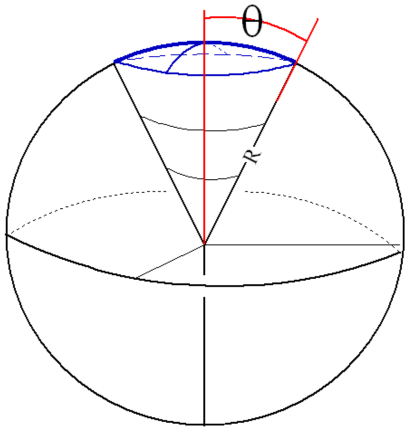
Alle Lichtstrahlen, die mit der zu A gehörigen Achse (Normale der Grenzebene) einen kleineren winkel als α_{Grenz} bilden, gelangen nach Brechung in den Luftraum. Die ganze Figur ist drehsymmetrisch bezüglich der A-Achse. Es entsteht ein Kegel mit Öffnungswinkel α_{Grenz}. Stahlen mit einem größeren Winkel werden an der Grenze total reflektiert! Je ein Beispiel der beiden Strahltypen ist eingezeichnet

Der Kegel schneidet aus der Grenzebene eine Kreisfläche (mit Radius r) heraus. Das übliche rechtwinklige Dreieck liefert $\tan\alpha_{Grenz} = \frac{r}{A}$. Also $r = A\tan\alpha_{Grenz}$. Mit n=2.42 folgt

$$\alpha_{Grenz} = \arctan\frac{1}{2.42} \approx 0.4 \qquad \boxed{\text{F}\approx 0.16\pi \text{A}^2}$$

Das ist der gesuchte sehr kleine Flächeninhalt.

Um den Anteil des herauskommenden Lichtes zu finden, benötigen wir jedoch den den zum Kegel gehörigen Raumwinkel, also den Flächeninhalt den der Kegel auf der Einheitskugel herausschneidet. So eine von einem Kegel auf einer Kugel herausgeschnitten Figur ist eine *Kugelkappe* oder *Kugelkalotte.* Ihr Flächeninhalt wird vollständig durch den Kugelradius R und den Öffnungswinkel θ des Kegels bestimmt



Gesucht ist daher eine Formel F=F(R,θ). Einige Eigenschaften dieser Formel kann man sofort vorhersagen: Es liegt ein Flächeninhalt vor, Einheit m^2. Da R die einzige auftrtende Größe mit einheit ist, erwarten wir einen Faktor R^2. Weiter mus gelten F(R,0)=0 und F(R,$\frac{\pi}{2}$) $= 2\pi R^2$ und F(R,π) $= 4\pi R^2$.(gesamte Kugelfläche). Die korrekte Formel hat tatsächlich diese Eigenschaften:

$$\boxed{\mathrm{F}_{Kappe}(\mathrm{R},\theta)=2\pi\mathrm{R}^2(1\text{-}\cos\theta)}$$

Um den Anteil λ des in die Luft ausströmenden Lichtes zu bestimmen, müssen wir folgendes Verhältnis bilden:

$$\lambda = \frac{Kappenfläche}{Kugelfläche} = \frac{F_{Kappe}(R,\theta_{Grenz})}{4\pi R^2} = \frac{(1-\cos\theta_{Grenz})}{2}$$

Das gibt in Zahlen:

$$\lambda \approx \frac{1}{2}(1-\cos 0.4) \approx 4 \times 10^{-2} = 0.04$$

Oder 1%. Das ist natürlich winzig!
