☐ Raumwinkel und Intensität. Gegeben eine punktförmige Strahlungsquelle der Intensität $I_0$. Um die Strahlungsquelle herum liege eine Kugelfläche mit Radius R. Aus dieser Kugel ist ein Flächenstück F abgegrenzt mit Flächeninhalt $\mu(F)$.

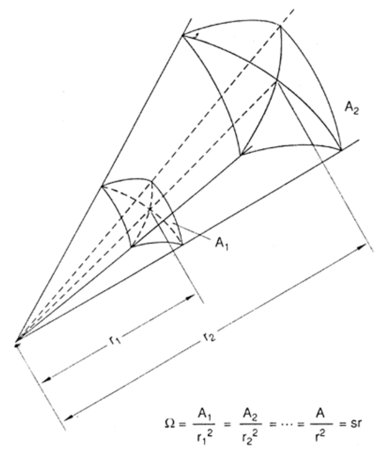
Welcher Anteil der ausgesandten Strahlung trifft F? Formulieren Sie das mit Hilfe des Raumwinkels. Was geschieht mit dem Anteil wenn man R verdoppelt?

▼ Wir betrachten alle Halbgeraden, die den Mittelpunkt mit einem Punkt auf der Fläche F verbinden. Das gibt einen kegelförmigen Körper mit Spitze im Quellpunkt. Dieser Körpre schneidet die Einheitskugelfläche in einem Flächenstück f der Größe (Flächeninhalt) $\omega(f)$. Dann ist f der Raumwinkel, unter dem man vom Ursprung aus F sieht und $\omega(f)$ ist die Größe diese Raumwinkels. Dabei ist $\omega(f)$ der relative Anteil von f an der gesamten Einheitskugeloberfläche. Eine reine Zahl oder mit der künstlichen Einheit "sterad".

Ist I(F) der Anteil an Intensität, den F abbekommt dann gilt

$$I(F) = I_0 \frac{\mu(F)}{4\pi R^2} = I_0 \frac{\text{getroffene Fläche}}{\text{Gesamtfläche}} = I_0 \frac{\omega(f)}{4\pi}$$

D.h der gesuchte Anteil hängt nur von der Raumwinkelgröße $\omega(f)$ ab, unter dem F gesehen wird. Die Beziehung $\omega(f)R^2 = \mu(F)$ folgt beispielsweise aus der Figur, wenn man beachtet, das jeder Länge L auf der großen Kugel eine Länge $\ell$ auf der Einheitskugel entspricht, die nach den Strahlensätzen durch L=R$\ell$ erfüllen. (In der Figur $r_1 = 1$ und $r_2 = R$ wählen)




**Was ist zu merken** (mit inhaltlichem Verständnis)

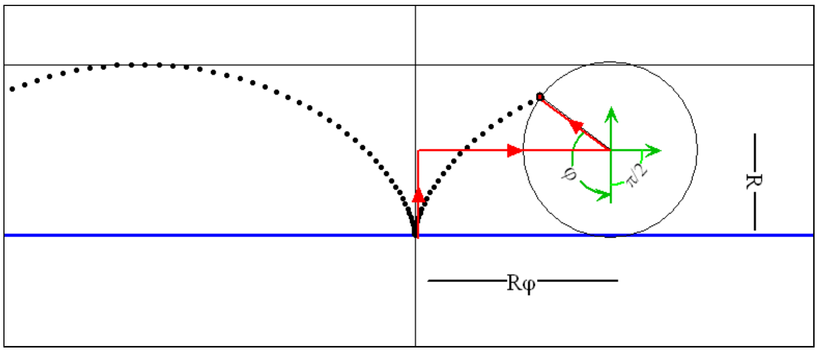
$$\mu(F) = R^2\mu(f) \qquad \mu(f) = \text{Zahlwert des Raumwinkels}$$

▲

☐ Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(\varphi)$ einer Zykloide durch geometrische Konstruktion eines Weges vom Ursprung zum Punkt aus fer Zykloide.

▼

Die folgende Figur zeigt den Weg (in rot). Der Weg des Kreismittelpunktes ist R$\varphi$, denn das ist das abgerollte Bogenstück.




Damit lesen wir folgende Formel unmittelbar ab:

$$\boxed{\vec{r}(\varphi)=\vec{e}_2\mathrm{R}+\vec{e}_1\mathrm{R}\varphi+\vec{e}_r(-\varphi-\tfrac{\pi}{2})}$$

Das gibt in kartesischen Koordinaten (cos ist gerade, sin ungerade):

$$\vec{r}^K(\varphi)=\begin{pmatrix} R\varphi+\cos(\varphi+\frac{\pi}{2}) \\ R-\sin(\varphi+\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

---

Übungen 14.2.

Aufgaben zum Pendel:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Zwei einfache Umstellungen:

$$\mathrm{L}=\frac{gT^2}{(2\pi)^2} \qquad \mathrm{g}=(2\pi)^2\frac{L}{T^2}$$

☐ Hierzu haben wir betrachtet: 1) Länge des Sekundenpendels 2) T=5s gegeben. Wie groß ist L?

☐ T sei mit einer Ungenauigkeit T$\pm\Delta T$ gegeben. g sei gegeben. Wie groß ist näherungsweise L$\pm\Delta L$, also die Unsicherheit in L?

▼

$$\begin{aligned} L &= \frac{g}{4\pi^2}T^2 \qquad \text{gibt L}=\frac{9.81}{(2\pi)^2}25m\approx 6.21m \\ 2\Delta L &= L_+-L_- = \frac{g}{4\pi^2}((T+\Delta T)^2-(T-\Delta T)^2 \\ &= \frac{g}{4\pi^2}(4T\Delta T)=\frac{gT}{\pi^2}\Delta T \end{aligned}$$

: $6.212\,3m$

$\Delta T=0.1s$ bei T=5s gibt

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{9.81\frac{m}{s^2}\cdot 5s\cdot 0.1s}{2\pi^2}\approx 0.25m \\ L\pm\Delta L &= (6.21\pm 0.25)m \end{aligned}$$

D.h. eine solche Längenmessung mit Hilfe der Schwingungsdauer ist **ausgesprochen ungenau**!

---

■ Wie ändert sich g, wenn T um 0.1% abnimmt ( Historischer Bezug)

▼ $\frac{T_2-T_1}{T_1} = -0.001$ ist die angegebene Größe. Negatives Zeichen wegen Abnahme. L fest, T variabel. g muss sich vergrößern!

Es wird eine Formel der folgenden Form angestrebt:

$$\Delta g = ...(\frac{\Delta T}{T_1})....$$

Zunächst folgt:

$$g = (2\pi)^2 \frac{L}{T^2} \qquad \Delta g = g_2 - g_1.$$

Also (erläuterte Rechnung)

| | |
|---|---|
| $\Delta g = (2\pi)^2 L \left(\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2}\right)$ | Definition |
| $= (2\pi)^2 L \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 T_2^2}$ | Hauptnennerbildung |
| $= (2\pi)^2 L \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 T_2^2}(T_1 - T_2)$ | Binomische Formel |
| $\Delta g = -(2\pi)^2 L \frac{T_1+T_2}{T_1^2 T_2^2} \Delta T$ | Jetzt nähern. $T_1 \approx T_2$ |
| $\Delta g \approx 2(2\pi)^2 \frac{L}{T_1^2}\left(-\frac{\Delta T}{T_1}\right)$ | Beachte $g_1 = (2\pi)^2 \frac{L}{T_1^2}$ |
| $\frac{\Delta g}{(2\pi)^2 \frac{L}{T_1^2}} \approx 2\left(-\frac{\Delta T}{T_1}\right)$ | Division |
| $\boxed{\frac{\Delta g}{g_1} \approx 2\left(-\frac{\Delta T}{T_1}\right)}$ | Gesuchte Endform |

Jetzt erst Zahlen einsetzen:

Für 0.1% ist $\boxed{\left(-\frac{\Delta T}{T_1}\right) = +0.001}$ Sei $g_1 = 9.810 ms^{-2}$. Dann:

$$\begin{aligned}\Delta g &\approx 0.002 \cdot 9.810 ms^{-2} = 0.019\,6 ms^{-2} \\ g_2 &\approx g_1 + \Delta g = 9.829 ms^{-2}\end{aligned}$$

▲

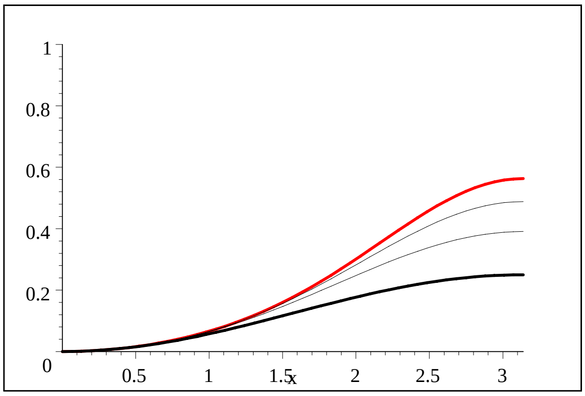
---

□ Graphische Darstellung der Abweichung der Schwingungsdauer für große Ausschläge mit k=sin $\frac{\varphi_0}{2}$:

$$T = T_0 \left(1 + k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + k^4 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 + k^6 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + .....\right)$$

Dazu tragen wir $\frac{T_i}{T_0}$ gegen $\varphi_0$ auf oder $\frac{T_i}{T_0} - 1 = \frac{T_i - T_0}{T_0}$ gegen $\varphi_0$ auf für i=1,2,3. Interpretation? Aufgetragen der relative Beitrag von $T_i$ zur Schwingungsdauer: $\frac{T_i - T_0}{T_0}$

$T_1 = \frac{1}{4}\sin^2\frac{x}{2}$



$T_2 = \frac{1}{4}\sin^2\frac{x}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{x}{2}$
$T_3 = \frac{1}{4}\sin^2\frac{x}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{x}{2} + \left(\frac{15}{48}\right)^2\sin^6\frac{x}{2}$
$\frac{1}{4}\sin^2\frac{x}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{x}{2} + \left(\frac{15}{48}\right)^2\sin^6\frac{x}{2} + \left(\frac{15\cdot 7}{48\cdot 8}\right)^2\sin^8\frac{x}{2}$

---

Zum Absorptionsmodell:

Sei p=0.02 die Wahrscheinlichkeit/Längeneinheit, auf einer Lichtbahn ein Absorbtionszentrum zu finden. Wieviel Absorbtionszentren erwarten Sie auf 5000 (noch aktiven) Bahnen der Länge 2? Wieviele sind es bei der Länge 5? Wieviel aktive Bahnen sind 2 Längeneinheiten später noch etwa vorhanden?

▼ Die Formel von der auszugehen ist, ist

$$n_{Zentren} = p \cdot n(x) \cdot \Delta x$$

p Wahrsch./Länge
$p\Delta x$ Wahrsch pro Bahn
n(x) Zahl der vorhandenen Bahnen

Verbleibende aktive Bahnen

$$n(x+2) \approx n(x) - p \cdot n(x) \cdot 2$$

Zahlwerte? ▲

---

**Umgang mit dem Begriffssystem quantifizierter Größen:**

---

☐ Teils liest man *Arbeitslosenquote* und teils *Arbeitslosenrate.* Eine dieser Formulierungen ist falsch, sollte als mißverständlich gemieden werden.. Welche? Wieso?

---

☐ Testaufgabe: Ein geschriebener Text enthält N=50000 Buchstaben. Darunter sind s=705 Schreibfehler. Wie wird man die Größe $\frac{s}{N}$ nennen?

---

☐ **Testaufgabe**: Es bezeichne T(t,x) die Temperatur zu Zeit t entlang einer Koordinate an der Koordinatenstelle x. Man wisse T(t,x)=$t^3x + 2x^2$. Jetzt sollen einige zugehörige Raten berechznet werden:

a) Die mittlere zeitliche Änderungsrate zwischen t=2 und t=2.1 an der Stelle x=2. Und die (fast gleiche) momentane zeitliche Änderungsrate für t=2 bei x=2.

b) Die mittlere örtliche Änderungsrate zwischen x=1 und x=1.2 zur Zeit t=2. Und die momentane örtliche Änderungsrate bei x=1 zur Zeit t=2.

---

☐ **Testaufgabe:** Ein Punkt auf einem Kreis (mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung) werde durch die folgende Winkelfunktion festgelgrbeschrieben: $\varphi(t) = 3t^2 - t$. Wie lautet seine Bahnkurve (Ortsvektor zur Zeit t, also $\vec{r}(t) = .....$) Die *Winkelgeschwindigkeit* ist die momentane Änderungsrate des Winkels. Also: Welche Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ hat dieser Punkt?

---