Brückenkurs Physik 2006 Probeklausur

Die Aufgaben mit Lösung und einigen Kommentaren
sowie einer Erweiterung einer Aufgabe

☐ 1) Für die Schwingungsdauer T eines Pendels galt (für kleine Ausschläge) die folgende Formel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \begin{array}{l} \text{L Pendellänge} \\ \text{g Erdbeschleunigung} \end{array}$$

Wir betrachten T als Funktion der Pendellänge L. Also T=T(L) bei gegebenem g.

☐a) Wie ändert sich T, wenn man L von L_0 nach $L_0 + \Delta L$ verändert. Geben Sie die zugehörige Formel für ΔT an.

▼ Durch Subtraktion folgt die gesuchte Änderung:

$$\boxed{\Delta T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{L_0+\Delta L} - \sqrt{L_0}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}}\left(\sqrt{1-\frac{\Delta L}{L_0}} - 1\right)}$$

Die zweite Form ist nützlich, wurde aber nicht erwartet.

▲

☐b) Und wie lautet die Formel für die zugehörige mittlere Änderungsrate? Wie groß ist der Zahlwert dieser Änderungsrate für $L_0 = 25cm$, g=981cm/s^2 und $\Delta L = 2cm$?

▼ Die Formel (eifach dur ΔL dividieren):

$$\boxed{\frac{\Delta T}{\Delta L} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{\sqrt{L+\Delta L}-\sqrt{L}}{\Delta L}} \qquad \text{Einheit: } \frac{\sqrt{cm}}{\sqrt{\frac{cm}{s^2}}cm} = \frac{s}{cm}$$

Zahlwerte einsetzen:

$$\frac{\Delta T}{\Delta L} = \frac{2\pi}{\sqrt{981}}\frac{\sqrt{27}-\sqrt{25}}{2}\frac{s}{cm} \approx 2\times 10^{-2}\frac{s}{cm}$$

Die Änderungsrate beträgt daher etwa 2 Sekunden pro cm.

Kommentar: Die in der Aufgabenstellung geforderten Formeln sollten allgemein hingeschrieben werden. Das System **Größe-Änderung-Rate** *sollte so verstanden sein, dass es in so einen Fall korrekt realisiert werden kann.*

☐ 2) Zur Linsenformel $\boxed{\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}}$.

Sie haben eine dünne Linse mit einer Brennweite von f=5cm. Sie möchten ein reelles Bild eines Gegenstandes in 1m Entfernung von der Linse. Wo müssen Sie den Gegenstand auf der optischen Achse aufstellen? (Erst die allgemeine Formel, dann Zahlwerte einsetzen!)

Und jetzt soll ein virtuelles Bild auch in 1m Entfernung von der Linse entstehen. Wo ist der Gegenstand jetzt anzubringen?

▼ Die allgemeine Formel lautet: (b,f gegeben, gesucht. Aufgabenstellung!!)

$$\boxed{g = \frac{bf}{b-f}}$$

In diese Formel einsetzen:

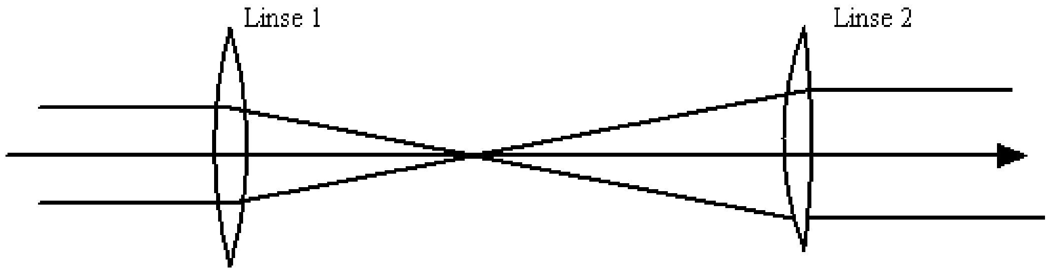
Erster Fall: f=5cm, b=100cm $g_1 = \frac{500}{95}cm = \underline{5.3cm}$

Zweiter Fall: f=5cm $\boxed{b=-100cm}$ $g_2 = \frac{-500}{-105}cm = \underline{4.8cm}$

In beiden Fällen ist der Gegenstand in der Nähe des linken Brennpunktes zu positionieren. Im ersten Fall etwas links davon, im zweiten etwas rechts. ▲

Kommentar: Die im Aufgabentext verlangte Formel hinschreiben und dann erst einsetzen. Nach den Koordinatenvereinbarungen ist die Koordinate eines virtuellen Bildes negativ. Fast immer fehlt die zusammenfassende Endüberlegung! .

☐ 3) Sie haben zwei dünne Linsen mit Brennweiten f_1 und f_2 zur Verfügung und erhalten die folgende Skizze:



Wie sind die beiden Linsen entlang der optischen Achse angeordnet? Beschreiben Sie das (kurz) und ergänzen Sie die Skizze geeignet.

▼ Ein achsenparalleles Bündel fällt ein. Die Linse fokussiert es im Brennpunkt F im Abstand f_1. Das von diesem Punkt ausgehende Bündel verläßt dei zweite Linse parallel, d.h. der Abstand von F zur zweiten Linse ist f_2. Die beiden Linsen haben daher den Abstand $f_1 + f_2$. Man kann noch etwas zum Durmesser der Parallelbündel sagen: Hat das einfallende Bündel den Durchmesser D_1 und das ausfallende den Durchmesser D_2, dann gilt $\frac{D_1}{f_1} = \frac{D_2}{f_2}$ ▲

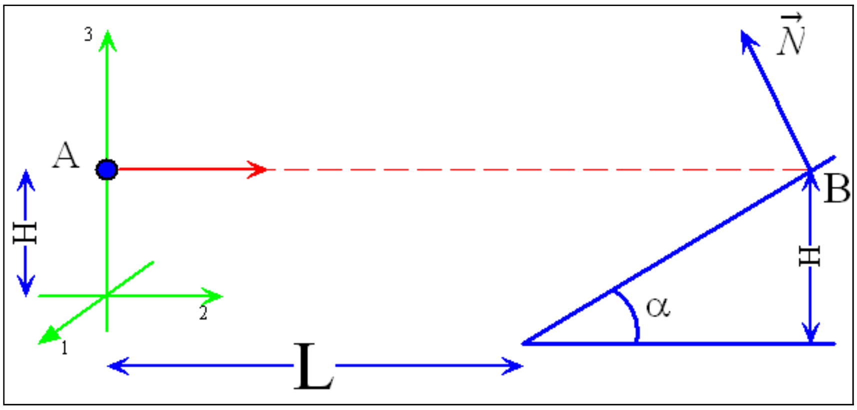
▲ *Zu einer dünnen Linse gehört* ***nur*** *die Brennweite f für die Linsenformel. Einige wollten Weiteres zur Form und Lage der Linse aus der Skizze ablesen. Dann müsste dazu etwas gesondert in der Frage stehen. Die beiden Brennweiten f_1 und f_2 müssen aber in der Antwort angesprochen werden, (was teilweise nicht geschah).*

☐ 4) Ein Massenpunkt startet im Punkte A der Skizze mit der konstanten vektoriellen Geschwindigkeit $\vec{v}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{pmatrix}$. Er trifft ein schräge Rampe im Punkt B, an der er elastisch reflektiert wird (Reflexionsgesetz).
Gegeben sind die Größen H und L und der Winkel α der Figur sowie V.

a) Wie groß ist die Flugzeit von A nach B?

b) Begründen Sie, dass man folgenden Vektor als Normalenvektor in B wählen kann: $\vec{N}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \tan(\alpha) \end{pmatrix}$

c) Wie fliegt der Punkt nach der Reflexion weiter? Bestimmen Sie einen zugehörigen Richtungsvektor. .



▼ a) Der zurückgelegte Weg ist nach der Skizze L+L_1 wobei $\boxed{L_1 = \frac{H}{\tan\alpha}}$ ist. Die skalare Geschwindigkeit in Bewegungsrichtung ist V. Also gilt $\vec{V}$

$$\boxed{T_{Flug} = \frac{L+\frac{H}{\tan\alpha}}{V}} = \frac{L\tan\alpha + H}{V\tan\alpha}$$

Für α nach Null entfernt sich der Auftreffpunkt immer weiter nach rechts und die Flugzeit geht entsprechend nach unendlich.▲

Die Lösung wurde hier unmittelbar aus der Skizze abgelesen. Es war in diesem einfachen Fall unnötig, vektoriell zu rechnen. Unten werden wir nach einem Vorschlag in der Vorlesung die Aufgabe etwas verallgemeinern. Dann allerdings sollte man vektoriell rechnen.

▼b) $\vec{N}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \tan(\alpha) \end{pmatrix}$. Die tangentiale Richtung an die Rampe ist $\vec{T}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix}$.

Also ist die Behauptung **falsch** . Es muss heißen $\boxed{\vec{N}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix}}$!!!!▲

Wenn etwas falsch ist, ist das falsch, auch wenn das Gegenteil behauptet wir. In nur zwei Arbeiten wurde das erkannt. Bei vielen anderen wurde irgendeine unzulängliche Argumentation zusammengewurstelt. Man durfte die Aufgabe auch nicht einfach umiterpretieren als hätte sie gelautet "Für welchen Wert von α ist der gegebene Vektor die Normale?" (Antwort $\alpha = \frac{\pi}{4}$) Die oben angegebene Aussage hätte dastehhen müssen und möglichst auch die Korrektur, da man $\vec{N}$ für den nächsten Aufgabenteil benötigte.

▼ c) Wir rechnen mit dem korrekten Vektor und bestimmen die Reflexionsrichtung nach dem angegebenen Schema: Als Einfallsvektor können wir $\vec{e}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen. Mit $\boxed{\vec{N}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix}}$ folgt dann

$$\vec{p}^K = \frac{(\vec{e}\cdot\vec{N})}{\vec{N}^2}\vec{N}^K = \frac{-V\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ -\tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\vec{r}^K = \vec{e}^K - 2\vec{p}^K$. Also

$$\begin{aligned}
\vec{r}^K &= \underbrace{\frac{1+\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}_{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{-\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ -\tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ 1-\tan^2\alpha \\ 2\tan\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da der Vorfaktor fortgelassen werden kann, ist folgends $\vec{r}_1$ ein möglicher Richtungsvektor des reflektierten Strahles:

$$\boxed{\vec{r}_1^{\,K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\tan^2\alpha \\ 2\tan\alpha \end{pmatrix}}$$

Das ergibt für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$ die geometrisch erwarteten Richtungen. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist die Formel nicht mehr brauchbar! ▲

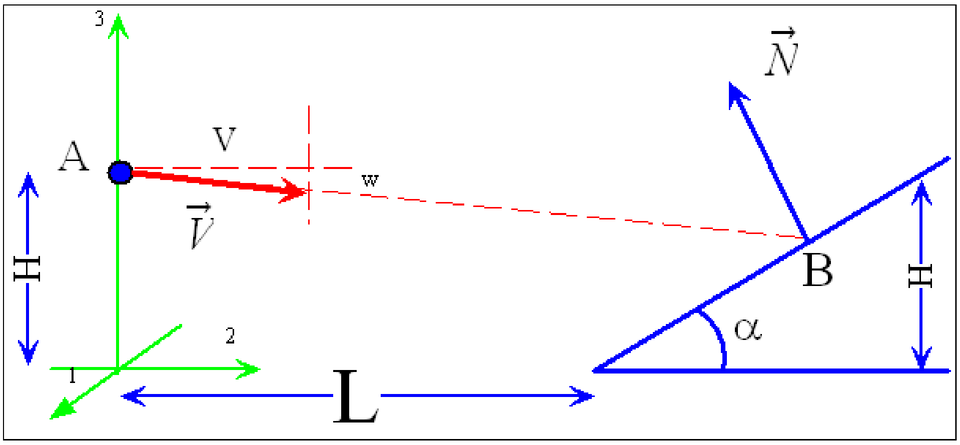
Diese Aufgabe wurde teilweise recht unzulänglich behandelt. Natürlich konnte man über die Skizze auch den Winkel des reflektierten Strahles mit der horizontalen 2-Achse bestimmen. Das ist offenbar $\rho = 2\alpha$. (Inspektion!) *Dann sollte man den zugehörigen Richtungsvektor angeben, was natürlich leicht ist:*

$$\vec{r}_2^{\,K} = \vec{e}_r^{\,K}(2\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{Fertig.}$$

Gibt das dieselbe Richtung'? Ja, wie folgende Umformungen zeigen:

$$\vec{r}_2^{\,K} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \\ 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \cos^2\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\tan^2\alpha \\ 2\tan\alpha \end{pmatrix} = \vec{r}_1^{\,K}\cdot\cos^2(\alpha)$$

Die Aufgabe wird deutlich schwerer, wenn der Körper nicht horizontal fliegt, die Geschwindigkeit eine zusätzlich Vertikalkomonente hat, wie in der nachfolgenden Skizze:



Der Grund ist, dass die Lage des Punktes B nicht mehr unmittelbar angegeben werden kann. Das w der Skizze ist eine Koordinate, also negativ.

▼ Jetzt muss man vektoriell rechnen. Also:

♦ Die Flugbahn parametriseren (Geradlinig gleichförmig)

♦ Die Rampengerade mit B darauf parametrisieren

♦ Den zugehörigen Schnitt bestimmen

Das sind drei leichte mathematische Routineaufgaben. (Allgemeines Schema bekannt, dann sollte man das einfache Beispiel rechnen können! Ausführung:

$$\vec{r}(\text{t}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix} + \text{t}\begin{pmatrix} 0 \\ V \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Vt \\ H+wt \end{pmatrix} \quad \text{Die Flugbahn}$$

$$\vec{s}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L+u \\ u\tan\alpha \end{pmatrix} \quad \text{Die Rampengerade}$$

DEn Schnittpunkt B erhält man durch Gleichsetzen der beiden Parametrisierungen. Das gibt eine Treffzeit t_B und eine Parameter wert u_B. Uns genügt t_B, da $t_B \cdot |\vec{V}|$ gleich dem im ersten Teil gesuchten Abstand ist! Gleichsetzen gibt folgendes Gleichungssystem (mit gerahmeten Unbestimmten)

$$
\begin{aligned}
V\boxed{t_B} &= \boxed{u_B} + L \\
H + w\boxed{t_B} &= \boxed{u_B} \tan\alpha
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der ersten Gleichung werfen wir u_B aus der zweiten heraus

$$H + wt_B = (Vt_B - L)\tan\alpha$$

Jetzt können wir die gesuchte Größe t_B (= Eintreffzeit des Punkte in B) bestimmen:

$$t_B(w - V\tan\alpha) = -H - L\tan\alpha$$

$$\boxed{t_B = \frac{H + L\tan\alpha}{-w + V\tan\alpha}}$$

Das ist die gesuchte Flugzeit. **Test: Für w=0 muss das alte Ergebnis herauskommen.** Das ist tatsächlich der Fall, wie man sofort prüft. Die Normale bleibt dieselbe. Den reflektierten Strahl berechnet man analog. .

Für welche allgemeinen "Sprüche" ist diese Aufgabenerweiterung ein gutes illustrierendes . Beispiel?

◆ Das Beispiel zeigt den Nutzen.der vektoriellen Rechnung.

Nur: Man muss so einfache Regeln wie : *Bestimme eine Parametrisierung einer Geraden* allgemein verstanden haben und auf so einen Fall anwenden können,

◆ Das Beispiel zeigt den Nutzen eines strategischen Überblicks über den Ablauf einer Lösung. (Auflösung des Gesamtproblemes in eine Reihe einfacherer Routineprobleme

◆ Nutzen eines Spezialfalltestes.

Das wars....