Mechanik II: Energiesatz und Arbeit

Vielfach ist es nicht möglich oder schwierig, die Newtonsche Bewegungsgleichung direkt zu lösen. Es gibt aber einige wichtige Methoden, mit denen man sich den Lösungsweg ganz oder teilweise vereinfachen kann. Das geht über die Nutzung der ***Erhaltungssätze****, von denen wir den wichtigsten - den Energiesatz - für die Punktmechanik herleiten wollen. Also:* ***Der Energiesatz ist hier eine Folge der Newtonschen Bewegungsgleichung!***

3.8 **Geführte und physikalische Bewegung - Arbeit**

(3.8.1) ★★ Wir betrachten das ideale System: $\boxed{\text{Massenpunkt im (gegebenen) Kraftfeld } \vec{F}(\vec{x})}$.

Zunächst wollen wir zwischen einer **physikalischen und einer geführten Bewegung** des Massenpunktes unterscheiden. Erstere ist wie beschrieben Lösung der zugehörigen Bewegungsgleichung und Konsequenz der ausschließlichen Einwirkung des Kraftfeldes $\vec{F}$. Wir können aber auch von außen in geeigneter Weise auf den Massenpunkt einwirken und ihn entlang einer Bahn führen, eine andere Bahn erzwingen. Dazu müssen wir die Feldkraft geeignet kompensieren, was im Prinzip auch durch eine Kraft erfolgt, die wir aber nicht genauer festlegen wollen.

(3.8.2) Überlegt man sich einfache Beispiele dieser Art, dann ist eine derartige Bahnführung immer mit etwas verbunden, was man naiv und intuitiv als "Arbeit" interpretiert. Führt man eine Masse im konstanten Kraftfeld auf einer vorgegebenen Bahn, so geht es meist um die dabei geleistete Arbeit. ("Den Sack in den dritten Stock schaffen".) Natürlich muss das noch abstrahiert und idealisiert werden.

Wir wollen damit unser System "Massenpunkt und Kraftfeld" erweitern und gewisse "Eingriffe von außen" zulassen, die geführte Bahnen erzwingen.

(3.8.3) Die Idealisierung im **konstanten** Kraftfeld liefert für die Arbeit (genauer deren jeweiligen Wert) die folgende formale Beschreibung:

$$\boxed{\boxed{\text{Arbeit}=\vec{F}\cdot\Delta\vec{x} = |\vec{F}||\Delta\vec{x}|\cos\theta}}$$

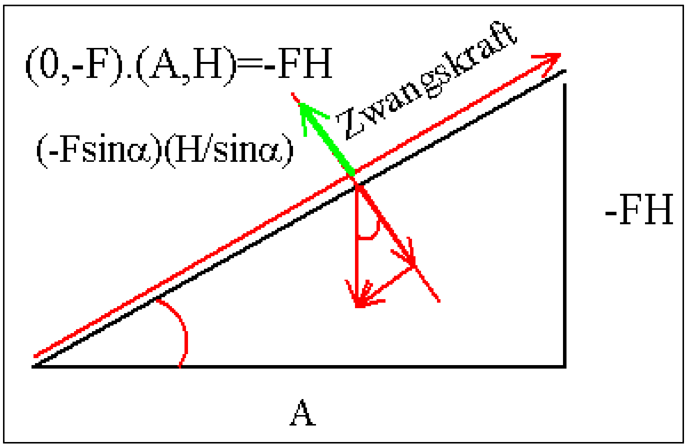
Genauer: Arbeit, die zu leisten ist, wenn man den Punkt unter dem Einfluss der Feldkraft $\vec{F}$ von $\vec{x}$ nach $\vec{x}+\Delta\vec{x}$ führt!

Arbeit ist daher eine der ersten und nützlichsten Anwendungen des vektoriellen Skalarproduktes.

(3.8.4) ★ Eine wichtige Eigenschaft der so definierten Arbeit wird als "Wegunabhängigkeit (des Arbeitswertes)" bezeichnet. Das folgende Gedankenexperiment mit der schiefen Ebene zeigt, was damit gemeint ist, und wie dieser Sachverhalt zustande kommt.

★ (3.8.5) Eine wichtige Eigenschaft in der Mechanik:

Wegunabhängigkeit : Beispiel *Schiefe Ebene*



Über die Weiterentwicklung des mathematischen Apperates (Integration) zeigt man, dass diese Eigenschaft der Wegunabhängigkeit (in der Regel) auch für **nicht konstante** Felder gilt.

(3.8.6) **★Die bei einer geführten Bewegung gegen das Kraftfeld $\vec{F}$ zu leistende Arbeit hängt nur vom Anfangspunkt und Endpunkt des Weges ab, auf dem man führt. Überdies sollte der Punkt an diesen beiden Punkten ruhen.**

3.9 **Der Energiesatz für einen Massenpunkt im konservativen Kraftfeld**

★ (3.9.1) Nach diesen Vorbemerkungen, insbesondere der Einführung der Arbeitsgröße $(\vec{F}\cdot\Delta\vec{x})$ kehren wir zu unserem Problem zurück, der Frage nach der Herleitung des Energieerhaltungssatzes aus der Newtonschen Bewegungsgleichung. Das ist eine Aussage über eine **physikalische Bewegung**. D.h. das zugehörige $\vec{r}(t)$ erfüllt die Newtonsche Bewegungsgleichung. Mit dieser dann gültigen Gleichung führen wir folgende rechnerische Manipulationen aus:

$\boxed{\mathrm{m}\frac{d\vec{v}}{dt}(t)=\vec{F}(\vec{r}(t))}$ Ist erfüllt.	Skalar mit $\vec{v}(t)$ multiplizieren!
$\mathrm{m}\vec{v}(t)\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = (\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))$	Nur noch skalare Gleichung!
$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)) = (\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))....$	Produktregel
$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^2(t)\right] \overset{??}{=} \frac{d}{dt}\left[.xxxx(t)...\right]$	
$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^2(t) - ....xxxx(t)...\right] = 0$	Angestrebtes Ziel

Falls es uns gelingt, das rechts stehende Skalarprodukt $\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))$ als zeitlich Ableitung einer anderen - hier mit xxxx(t) bezeichneten Größe zu schreiben, sind wir fertig. Denn die dann in der eckigen Klammer stehende Zeitfunktion (entlang der physikalischen Bewegung) hat die Ableitung Null und ist daher selbst zeitlich konstant. Ihr Wert bleibt für alle Zeiten erhalten, ändert sich nicht.

(3.9.2)

Was sollte man sich bis hierher **merken**?
★ Physik. u.geführte Bewegung
★ Arbeitsformel $\Delta A = (\vec{F}\cdot\Delta\vec{r})$
★ Kin. Energie $\mathrm{E}_{kin} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$

(3.9.3) Beachten Sie übrigens schon jetzt, dass die rechts stehende Größe mit der oben eingeführten Arbeit in Verbindung steht:

$$(\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))\Delta t = (\underbrace{\vec{F}(\vec{r}(t))}_{\text{Kraft (t)}}\cdot\ \underbrace{\vec{v}(t)\Delta t}_{\text{Änderung }\Delta\vec{r}}\ ) = (\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\Delta\vec{r})$$

D.h.: $(\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))$ ist die zeitliche Arbeistsrate, die Leistung.

Nur dass $\Delta\vec{r}$ hier die Ortsänderung entlang einer *physikalischen* Bahn sein muss nicht beliebig sein darf..

(3.9.4) Um die gesuchte noch hypothetische Größe xxxx(t) zu finden, müssen wir etwas ausholen:

★★ 3.10 Zwischenüberlegung: **Was ist ein Skalarfeld**?

□ $\boxed{\mathrm{s}(\vec{x}) = ..}$ Jedem Ort, beschrieben durch seinen Ortsvektor $\vec{x}$, wird eine Zahl zugeordnet, die mit $\mathrm{s}(\vec{x})$ bezeichnet wird.

Beispiele aus der Physik: Temperatur, Dichte, Druck, Konzentration,.... Das sind unter bestimmten Bedingungen alles ortsabhängige Größen also Skalarfelder

☐ Beispiele für möglich Rechenausdrücke:
$\mathrm{s}(\vec{x}) = \vec{x}^2$ oder $\mathrm{s}(\vec{x}) = (\vec{a}\cdot\vec{x})$ oder $\mathrm{s}(\vec{x}) = 2\vec{x}^2 + 3(\vec{a}\cdot\vec{x})$

Korrdinatendarstellung: $\mathrm{s}(\vec{x}) = s^K(x,y,z)$ wenn $\vec{x}^K = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Etwa $\vec{a}^K = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{s}(\vec{x}) = (\vec{a}\cdot\vec{x})$

$\mathrm{s}^K(x,y,z) = -x + y + 3z$

$$\mathrm{s}^K(2,u,-3) = -2 + u - 9 = u - 11$$

☐ Die Veranschaulichung von Skalarfeldern erfolgt durch *Niveaumengen*, also durch alle Punkte die zu einem bestimmten Fedwert ("Temperatur") gehören. In der Ebene sind das Kurven, im Raum Flächen.

★ **Das physikalische mit einem Skalarfeld verbundene Hauptproblem ist: Bestimme die Feldänderung Δs, wenn man den Ort von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}$ verändert. Diese Änderung ist offensichtlich richtungsabhängig.**

★ **Einführung des Vektorfeldes Gradient(s($\vec{x}$)) , das diese Frage beantwortet.**

Und zwar mit Hilfe der folgenden zentralen Formel;:

$$\boxed{\Delta s = \left(grad\,\boxed{\mathrm{s}(\vec{x})}\cdot\Delta\vec{x}\right) = \underbrace{|grads(\vec{x}_0)|}_{\text{Betrag d. Grad}}\,|\Delta\vec{x}|\,\underbrace{\cos\theta}_{Winkel..}}$$

★ Geometrische Interpretation des Gradienten:

⧫ Der Gradient hat die **Richtung der stärksten Feldänderung** (genauer Liegt stets tangential zu dieser Richtung),

⧫ Der Betrag $|grads(\vec{x}_0)|$ (also die Länge des Vektors) ist gleich der **Änderungsrate von s in Richtung der stärksten Änderung.**

⧫ Stellt man $\vec{x}$ als achsenparallelen Weg $\vec{x}^K = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dann ergib sich die Koordinatendarstellung von grads($\vec{x}$) wie folgt

$$\boxed{\mathrm{grads}^K(\mathrm{x,y,z}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial s}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}}$$

☐ Was braucht man alles, um den Gradienten zu beherrschen? Rechenbeispiele.

★ Ende der Zwischenüberlegung★

Fortsetzung Energiesatz!

★★ (3.9.5) Jetzt führen wir die Rechnung zur Herleitung des Energiesatzes fort. Und zwar nehmen wir an, dass unser Kraftfeld $\vec{F}$ sich als Gradient eines Skalarfeldes darstellen läßt. Genauer nehmen wir an, dass es ein Skalarfeld U gibt, für das gilt:

$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = -gradU(\vec{x})}$ Das negative Vorzeichen beachten!

Kraftfelder, für die man ein solches U findet, heißen $\boxed{\textit{konservativ}}$. Beachten Sie: Es gibt durchaus nicht konservative Kraftfelder. Die für uns wichtigen Felder sind konservativ und wir geben für jedes ein zugehöriges Skalarfeld (auch Potentialfeld genannt) an.

Bemerkung: U ist so etwas wie eine Stammfunktion zu $\vec{F}$ und $\vec{F}$ so etwas wie die Ableitung von U. Entsprechend gilt: Mit U($\vec{x}$) ist auch $\mathrm{U}_c(\vec{x}) = U(\vec{x}) + c$ für jedes c zulässiges Skalarfeld. Derartige Skalrfelder heißen *ein Potentialfeld zum Kraftfeld* $\vec{F}$.

(3.9.6)Nun rechnen wir mit Hilfe der Kettenregel wie folgt. Dabei sei $\vec{r}(t)$ eine Bahnkurve, physikalisch oder auch geführt:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathrm{U}(\vec{r}(\mathrm{t})) = \big(gradU(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\big) = -\left(\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t)\right)}$$

Damit sind wir am Ziel, haben unsere Wunschgröße ....xxxx(t)... zur Rechnung in (3.9.1) gefunden.

Einsetzen in die oben hergeleitete Gleichung in (3.9.1), die wir nochmals aufschreiben, gibt, für **physikalische** Bewegungen:

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}\frac{d}{d}(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)) &= (\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t)) \\
\frac{m}{2}\frac{d}{d}(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)) &= -\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) \\
\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^2(t) + U(\vec{r}(t))\right] &= 0 \\
& \boxed{\tfrac{m}{2}\vec{v}^2(\mathrm{t}) + \mathrm{U}(\vec{r}(\mathrm{t})) = \mathrm{E}} \quad \text{fest für alle t.}
\end{aligned}$$

Das ist der angestrebte Erhaltungssatz:

> ★★ **Die Summe von kinetischer ($\frac{m}{2}\vec{v}^2$(t)) und potentieller Energie U($\vec{r}$(t)) ist konstant und ändert sich entlang einer physikalischen Bahn nicht!**
>
> Natürlich können zu verschiedenen Bahnen auch verschiedene Energiewerte gehören. Aber entlang ein und derselben Bahn ergibt sich immer auch dieselbe Summe oder Gesamtenergie!

(3.9.7) Bei einer geführten unphysikalischen Bewegung gilt der Energiesatz so nicht. Durch die Führung wird dem System dann in der Regel Energie hinzugeführt oder entnommen.

★★ (3.9.8) **Wie nutzt man nun diesen Energiesatz? Wie sieht die hauptsächliche Anwendungsstrategie aus?**

Suche zwei verschiedene Zeiten t_1 und t_2, für die man Systemkonfiguration und damit die beiden Summanden gut kennt und die durch eine physikalische Bewegung $\vec{r}$ zusammenhängen. Dazu sollte auch eine gesuchte Größe gehören. Dann muss gelten:

$$\boxed{\boxed{\frac{m}{2}\vec{v}^2(t_1) + U(\vec{r}(t_1)) = \frac{m}{2}\vec{v}^2(t_2) + U(\vec{r}(t_2))}}$$

Und das löst man nach der gesuchten Größe auf!

★ (3.9.9) Zunächst noch die Liste der für uns wichtigen Potentiale

	$\vec{F}(\vec{x}) = -gradU(\vec{x})$	U($\vec{x}$)	
Konst. Feld	m$\vec{g}$	$-m(\vec{g}\cdot\vec{x})$	
Coulomb (r=$\lvert\vec{x}\rvert$)	$\varepsilon\alpha\frac{\vec{x}}{r^3}$ ε Vorzeichen	$\varepsilon\frac{\alpha}{r}$ +U_0	grad($\frac{1}{r}$)=-$\frac{\vec{x}}{r^3}$
Oszillator	-k$\vec{x}$	$\frac{k}{2}\vec{x}^2$	

Einige Anwendungen der Strategie und dieser Liste!

★ (3.9.11) $\boxed{\text{1. Beispiel:}}$ **Senkrechter Fall** im konstanten Feld:

- 1. Konfiguration des Systems: Zur Zeit t_1 wird der Körper in der Höhe z=H losgelassen, also Geschwindigkeit Null. Formal $\vec{v}(t_1) = \vec{0}$.
- 2. Konfiguration: Zur Zeit t_2 erreicht der Körper den Boden z=0 mit einer skalaren Geschwindigkeit v. $\quad$ U($\vec{x}$) $= -m(\vec{g}^K \cdot \vec{x}^K)$

Mit $\vec{g} = (0, 0, -g)$ und $\vec{r}(t) = (0, 0, z(t))$ folgt aus unserer Tabelle U(0,0,z)=mgz. Damit sagt der Energiesatz

$$0 + mgH = \frac{m}{2}v^2 + 0.$$

Und das bedeutet

$$\boxed{H=\frac{v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad v=\sqrt{2gH}} \quad \text{Senkrechter Fall.}$$

Man erhält (mühelos) die Fallhöhe als Funktion der Aufschlageschwindigkeit oder die Aufschlageschwindigkeit als Funktion der Fallhöhe.

★ (3.9.12) Was liefert der Energiesatz anstelle einer Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung? (Um Information über eine physik. Bewegung zu erhalten.)

Man kann auch so vorgehen: Zum Zeitpunkt t_1 die Anfangswerte festlegen. Den Zeitpunkt t_2 als unabhängige Variable interpretieren. Dann liefert der Energiesatz eine Differentialgleichung 1. Ordnung für eine der gesuchten Koordinatenfunktionen! (Anstelle 2. Ordnung durch die Newtonsche Bewegungsgleichung).

Die nächste Aufgabe liefert hierfür ein Beispiel.

★(3.9.13) $\boxed{\text{2. Beispiel:}}$ Die **Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche.**

Jetzt betrachten wir das Gravitationsgesetz. Die zugehörige anziehende Kraft wird mit zunehmender Entfernung immer schwächer. Wir fragen:

> Kann man einem Projektil auf der Erdoberfläche eine solche Anfangsgeschwindigkeit geben, dass es nicht auf die Erde zurückstürzt? Reibung soll dabei natürlich vernachlässigt werden. Das Potential ist in diesem Fall U($\vec{x}$) $= -\frac{mGM_{erde}}{r}$. Wieder sei $\vec{x} = (0, 0, z)$. Weiter z>0 so dass r=z>0. (Das Koordinatensystem liege so, dass die Bewegung ganz auf der z-Achse erfolgt!)

Woran erkennt man, dass der Massenpunkt nicht zurückkehrt? Er muss bis nach r=∞ fliegen, muss sich immer weiter von der Erde entfernen. Und dort, nur im Unendlichen - ist das Potential in diesem Fall Null. Für jedes endliche r kommt ein echt negatives U heraus.

Jetzt wieder die beiden Konfigurationen:

- Zur Zeit t_1 werde der Punkt auf der Erdoberfläche (r=z=R_{Erde}) mit Geschwindigkeit V abgeschossen.
- Zur Zeit t_2 komme er nach z=∞, **d.h. an einen Ort mit Potentialwert Null.** Seine Grenzgeschwindigkeit nennen wir v_∞.

Das gibt die folgende Gleichung für den bewegten Punkt der Masse m (gemäß Energiesatz):

$$\frac{m}{2}V^2 - m\frac{GM_{Erde}}{R_{Erde}} = \frac{m}{2}v_\infty^2 + 0$$

Im Grenzfall (langsamst mögliche Geschwindigkeit) kommt m mit der Geschwindigkeit Null im Unendlichen an. Dazu sollte die geringste Startgeschwindigkeit gehören. Dann ist die rechte Seite Null und es folgt:

$$\boxed{V^2 = \frac{2GM_{Erde}}{R_{Erde}}} \quad \text{also ....}$$

´☐ Setzen Sie die Zahlwerte ein und bestimmen Sie V in km/s.

(3.9.14) Wir können aber auch eine **Differentialgleichung 1. Ordnung für z(t)** aufstellen. Das geht gemäß (3.3.12) wie folgt:

⧫ Die Konfiguration für t_1 bleibt dieselbe: $\vec{r}^K(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_E \end{pmatrix}$ und $\vec{v}^K(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix}$

⧫ Für t_2 nehmen wir beliebiges $t>t_1$ mit $\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$ und $\vec{v}^K(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{dz}{dt}(t) \end{pmatrix}$. z(t) ist die gesuchte Größe.

Dann besagt der Energiesatz (z(t)>0, denken Sie an $U^K(x,y,z) = -\frac{mGM_{erde}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$):

$$E = \frac{m}{2}V^2 - m\frac{GM_{Erde}}{R_{Erde}} = \frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}(t)\right)^2 - \frac{mGM_{Erde}}{z(t)}$$

Oder:

$$\left(\frac{dz}{dt}(t)\right)^2 = E + \frac{GM_{Erde}}{z(t)}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt}(t) = \pm\sqrt{E + \frac{GM_{Erde}}{z(t)}}}$$

Das ist die behsuptete Differentialgleichung für z(t)!!!

☐Was für eine Differentialgleichung 2. Ordnung erhält man mit der Newtonschen Bewegungsgleichung für z(t)???

★(3.9.15) $\boxed{\text{3. Beispiel:}}$ Eine punktförmig idealisierte Schiffsschaukel der Masse M bewegt sich mit Überschlag. Der Kabinenpunkt hat den Abstand L von der Drehachse. Wie groß ist der Unterschied der Geschwindigkeit ganz oben und ganz unten?

▼ Unten: v_u h_u . Oben v_o $h_o = h_u + 2L$

Der Energiesatz gibt:

$$\frac{1}{2}v_u^2 = \frac{1}{2}v_o^2 + g2L \quad \text{Aufgelöst} \quad v_o = \sqrt{v_u^2 - 4gL}$$

Das gibt für den absoluten Unterschied:

$$\boxed{\Delta v = v_u - v_o = v_u - \sqrt{v_u^2 - 4gL}}$$

oder den relativen

$$\boxed{\frac{\Delta v}{v_u} = \frac{v_u - v_o}{v_u} = \frac{v_u - \sqrt{v_u^2 - 4gL}}{v_u} = 1 - \sqrt{1 - \frac{4gL}{v_u^2}}}$$

★ ★ 3.10 **Potential und Arbeit ★★**

(3.10.1) In einem konservativem Kraftfeld gilt einerseits $\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = -gradU(\vec{x})}$. Andererseits gilt für jeden Gradienten $\boxed{\Delta U = (gradU(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x})}$. Oder etwas umgeformt

Mit der ersten Gleichung folgt jetzt

$$U_2 - U_1 = \Delta U = (gradU(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x}) = -\left(\vec{F}(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x}\right) = -\Delta A.$$

D.h. die Änderung des Potentiales ist gleich der negativen Arbeit, die zum Verschieben gegen $\vec{F}$ um $\Delta\vec{x}$ geleistet werden muss!!

(3.10.2) Einwand: Das gilt aber doch nur für konstantes $\vec{F}$? Ja, aber man kann mit Hilfe der Integrationstheorie zeigen, dass das Ergebnis auch im Falle eines nicht konstantem, aber konseervativen Kraftfeldes $\vec{F}$ mit Potential U gilt. Oder auch:

> (3.10.3) Verschiebt man in einem solchen Feld auf einer geführten Bahn den Massenpunkt von A (Ortsvektor $\vec{x}_A$) nach B (Ortsvektor $\vec{x}_B$), dann gilt für die dabei geleistete Arbeit $\boxed{\Delta A = -\Delta U}$ oder $\boxed{\Delta A + \Delta U = 0}$. Die am Massenpunkt geleistete Arbeit wird umgesetzt in eine zahlenmäßig gleichgroße Änderung der potentiellen Energie! Dabei wird angenommen, dass die kinetische Energie ihren Wert nich ändert. In der Regel nimmt man an, dass der Punkt sowohl in A als auch in B ruht.
>
> In diesem System kommt Energie als kinetische Energie und als als potentielle Energie vor. Und man kann von außen über Arbeit weitere Energie hinzufügen oder herausnehmen und all das läßt sich zahlwertmäßig als **Energieerhaltung** genau bilanzieren. Ruht der Körper nicht, benötigt man zusätzliche Arbeitsenergie für die kinetische Energie

★ (3.10.4) **Beispiel:** Ein Körper der Masse m wird im Schwerefel der Erde vom ruhenden Zustand auf der Erdoberfläche in eine Höhe von 1000 km gebracht und er soll dort zusätzlich eine Geschwindigkeit von 2km/s haben. Welche Arbeit ist dazu zu leisten?

Die Arbeit die, wir benötigen den Körper in die Höhe zu bringen ist:

$$-\Delta A_1 = U_2 - U_1 = -\frac{mGM_E}{R_E + 1000km} - (-\frac{mGM_E}{R_E}) = mGM_E\left(\frac{1}{R_E}\frac{1}{R_E + 1000km}\right)$$

Hinzu kommt die Arbeitsenergie für die benötigte Geschwindigkeitsänderung von 0 auf V, also $\frac{m}{2}V^2$:

$$-\Delta A = -\Delta A_1 + \frac{m}{2}V^2 = mGM_E\left(\frac{1}{R_E}\frac{1}{R_E + 1000km}\right) + \frac{m}{2}V^2$$

■ Rechnen Sie für m=10kg den resultierenden Zahlwert für $-\Delta A$ aus.
aus.
