

3: Mechanik eines Massenpunktes

Kinematik

3.1 Ort und Ortsänderung eines Massenpunktes

Weiteres **Beispiel** für Änderung: **Temperaturunterschied bei Ortsveränderung**

3.2 Die Geschwindigkeit (eines Massenpunktes)

Mittlere und momentane Geschwindigkeit

Rezept

Vektorielle und skalare Geschwindigkeit

3.3 Bahnkurven

Spezielle Bahnkurven

- Geradlinig gleichförmige Bewegung
- Gleichförmige Kreisbewegung
- Flugparabeln

3.4 Die Änderungsrate der momentanen Geschwindigkeit: Beschleunigung

Dynamik: **Kraft und Newtonsche Bewegungsgleichung**

3.5 Kraft und Newtonsche Bewegungsgleichung

3.6 Die zwei Interpretationen der Newtonschen Bewegungsgleichung

3.7 Wie findet man die Kraft? - Kraftfelder

- Graphische Veranschaulichung von Kraftfeldern
- Drei physikalisch besonders wichtige Kraftfelder
- Translation
- Superposition
-

Dann Einschub: Numerische Lösung der Differentialgleichungen

Bisher haben wir **Formeln für die Größen** selbst betrachtet. Z.B. die Linsengleichung. In der Physik sind jedoch Formeln von herausragender Bedeutung, die Beziehungen für die **Änderung der Größen oder deren Änderungsrate** beschreiben. Sie sind erfahrungsgemäß einfacher zu formulieren, zu finden und zu interpretieren. Der Übergang zu den (vielfach eigentlich gesuchten) Formeln für die Größen selbst erfolgt dann mit mathematischen Methoden der Infinitesimalrechnung.

Aber - so sagt die Erfahrung - **ohne diesen Zwischenschritt geht es nicht**.

Wir behandeln diesen Typ von Gleichungen am Beispiel der Newtonschen Bewegungsgleichung. Die zugehörige Newtonsche Punktmechanik ist eine Art von Paradebeispiel für den Erfolg des naturwissenschaftlich-physikalischen Vorgehens, also dafür, wie man auf diesem Weg zu verlässlichem Wissen gelangt.

3.1. Beispiel: Ort und Ortsänderung eines Massenpunktes

◆ (3.1.1) Wir betrachten einen (idealisierten) Massenpunkt, der sich im Raum bewegt.

Seine Lage (im Raum) wird festgelegt durch Angabe seines Ortes P.

Genauer: Wähle einen festen Ursprung O und bilde den Ortsvektor von O nach P. Bezeichnung \vec{r} oder \vec{r}_P .

◆ Da sich der Punkt bewegen darf, benötigen wir den Ort für jeden Zeitpunkt t (mit der Rolle unabhängige Variable). Also: $\vec{r}(t)$ sei Bezeichnung für den Ortsvektor des Punktes zur Zeit t.

Die Bestimmung von $\vec{r}(t)$ über eine Formel der Form $\vec{r}(t) = \dots$ ist in der Regel für einschlägige physikalische Systeme das Endziel, der oberste Wunsch. Das Ergebnis ist die **Bahnkurve** des Körpers.

Verfügt man über die Formel $\vec{r}(t) = \dots$, dann kann man eine beliebige Zeit vorgeben und den zugehörigen Ortsvektor berechnen bzw. vorhersagen. Mit rein mathematischen Methoden folgen weitere physikalisch wichtige Größen wie die vektorielle Geschwindigkeit, die Energie usw.

(3.1.2) Beispiel:

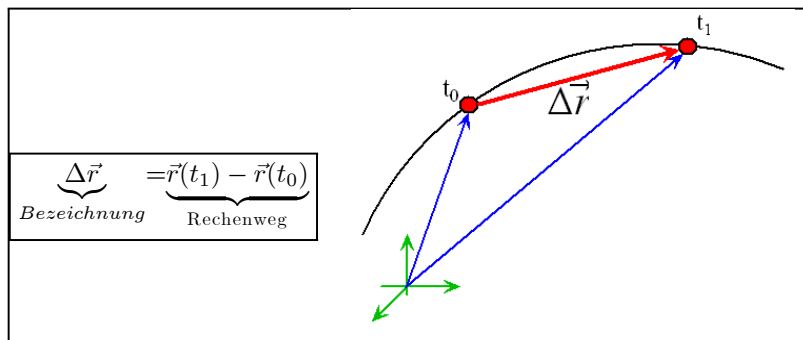
Man wisse: $\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{1}{1+t^2} \\ 7+t \end{pmatrix}$. Dann folgt beispielsweise

$$\vec{r}^K(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{r}^K(4) = \begin{pmatrix} 48 \\ \frac{1}{17} \\ \dots \end{pmatrix} \quad \underbrace{\vec{r}^K(2 + \Delta t)}_{\text{"von"}} = \begin{pmatrix} 3(2 + \Delta t)^2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Warum ist das so schwer?

(3.1.3) Der Ortsvektor ist die im Augenblick interessierende Größe. Davon zu unterscheiden ist ihre **zeitliche Änderung**:

◆ Wir wählen einen ersten Zeitpunkt t_0 und einen zweiten t_1 . Dann hat man für die Ortsänderung:



(Weitere Bezeichnungen in der Skizze selbst einfügen!) Die Skizze sagt: $\Delta \vec{r}$ ist der kürzeste Verbindungsweg, auf der sich der Punkt keineswegs bewegen muss! Lässt man t_1 gegen t_0 (oder $\Delta t = t_1 - t_0$ nach Null) gehen, dann wird die Änderung immer kleiner, geht selbst nach Null. Die beteiligten Ortsvektoren selbst dagegen können groß bleiben.

Erst der Quotient $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, also die (mittlere Änderungsrate) sollte konvergieren. In diesem Quotienten werden Zähler und Nenner klein.

(3.1.4) Ein **wichtiger Spezialfall**: Seien \vec{a} und \vec{v} zwei feste Vektoren (in der Rolle äußerer Parameter) und sei weiter

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{v}t.$$

□ Was für eine Bewegung des Massenpunktes wird hierdurch beschrieben? (Das ist eine zu merkende Formel!)

□ Berechnen Sie die **Änderung** $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)$ für diesen Fall. Ebenso die Änderungsrate. Wieso ist das hier so einfach? Was für eine Änderung ergibt sich insbesondere, wenn die Zeitänderung eine Zeiteinheit beträgt?

(3.1.5) Ein weiteres **Beispiel** für eine Änderung: **Der Temperaturunterschied bei Ortsveränderung**

Wir betrachten einen physikalischen Bereich ("Raum") bei dem in jedem Punkt eine bestimmte Temperatur herrscht. Wieder wählen wir einen festen Ursprung und beschreiben die Punkte des Bereiches durch ihre Ortsvektoren. Die Temperatur am Orte \vec{x} bezeichnen wir mit $T(\vec{x})$. Das ist ein *Temperaturfeld* (ein sog. Skalarfeld). Dann ist

$$\Delta T = T(\vec{x}_1) - T(\vec{x}_0)$$

der Temperaturunterschied zwischen den beiden Punkten \vec{x}_1 und \vec{x}_0 .

□ **Rechenbeispiel**: Alle Koordinaten in m (Meter) und Temperaturen in $^{\circ}\text{C}$. Wir wählen ein festes Koordinatensystem K mit Koordinatenvektoren $\vec{x}^K = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ für die Punkte. Dann setzen wir

$$T(x, y, z) = T_0 - \lambda z$$

Dies interpretieren wir als Modell der Temperatur über der Erdoberfläche $z=0$. Die Konstante λ sei $\lambda = 100 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{m}}$. Weiter sei $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 100\text{m} \\ 50\text{m} \\ 0\text{m} \end{pmatrix}$ als Ortsänderung nehmen wir

$\Delta\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -50m \\ 100m \\ 0m \end{pmatrix}$ und $\Delta\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 100m \\ -50m \\ 150m \end{pmatrix}$ und $\Delta\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 100m \\ 0m \\ 300m \end{pmatrix}$. Welche Temperaturänderung ergibt sich für diese drei Ortsänderungen? Wie läßt sich das Verhalten des Temperaturfeldes in Worten (kurz) beschreiben?

Allgemeine Veranschaulichung durch Niveauflächen!

(3.1.6) Weiteres Beispiel: **Wärme und Temperatur.**

- **Welche Eigenschaften sind im Zusammenhang mit den Phänomenen von Wärme und Temperatur grundlegend und voneinander weitgehend unabhängig ??? Was sollte man messend erfassen und quantifizieren? Was für Ursache-Wirkungsketten sind zu erwarten und wie sollten Sie sich mathematisch ausdrücken.**

(Versuchen Sie sich wieder fragend vorzuhangeln. Sicher ist die "Temperatur eines Körpers" grundlegend (und messbar). Ist es sinnvoll zu fragen: "Was ist die Ursache der Temperatur?" Kaum. Aber "Was ist die Ursache für eine **Änderung** der Temperatur des Körpers?" Das sieht besser aus und entspricht auch den täglichen Erfahrungen, die zu erklären sind. Was vermuten Sie? Usw.)

3.2 Die Geschwindigkeit (eines Massenpunktes)

(3.2.1) **Die Größe:** Der Ort eines Massenpunktes werde durch eine Bahnkurve $\vec{r}(t) = \dots$ beschrieben. Oder als achsenparalleler Weg durch:

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \dots$$

Für die zeitliche Änderung folgt $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ bzw. $\Delta\vec{r}^K = \vec{r}^K(t + \Delta t) - \vec{r}^K(t)$.

Dann ist die zugehörige **Änderungsrate** (des Ortsvektors) die **vektorielle Geschwindigkeit** (des Punktes) Wie stets ist genauer zwischen *mittlerer* und *momentaner* Geschwindigkeit zu unterscheiden.

Eine besonders wichtige mit dem Änderungsbegriff zusammenhängende physikalische Größe ist die (momentane) Geschwindigkeit. Zur angemessenen Einführung dieses Begriffs benötigt man sowohl die Vektorrechnung als auch das mathematisch idealisierte Grenzwertkonzept, also die Bestimmung des Resultates von unendlich vielen Operationen, die man sich hier durchaus als Messoperationen vorstellen darf..

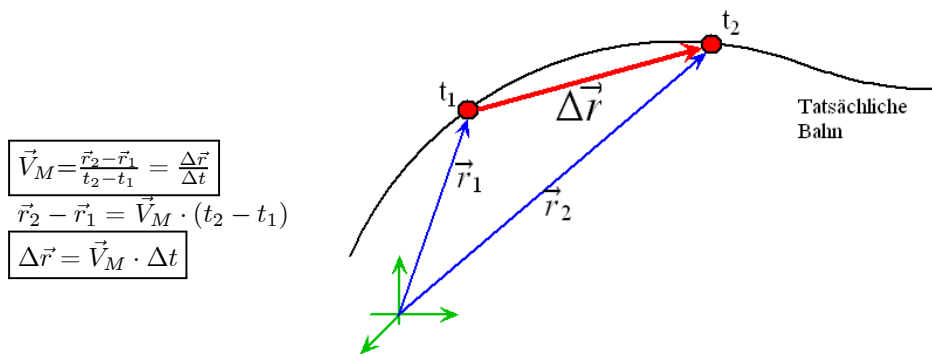
◆ (3.2.2) Die vielfach benutzte Formulierung "Geschwindigkeit=Weg/Zeit" oder "v=s/t" ist ohne zusätzliche Interpretation irreführend bis fehlerhaft und basiert auf der Scheu, ausreichend sprachlich zu differenzieren. "Gemeint" ist "Weg**änderung**/zugehörige Zeit**änderung**" oder "Koordinaten**änderung**/Zeit**änderung**". Denn fast immer werden die Größen "Weg s" und "Zeit t" auf einen festen Nullpunkt bezogen, wobei die Bewegungsänderung keineswegs zur Zeit t=0 am Orte 0 beginnen muss. Nochmals: Eine begrifflich korrekte und sachlich tragfähige und merkbare Einstiegsdefinition für die Geschwindigkeit ist unsere Änderungsra- tendefinition:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Ortsänderung}}{\text{Zeitänderung}}$$

◆ (3.2.3) Jetzt geht es darum, den Begriff der Geschwindigkeit weiter zu entfalten, zu präzisieren. Das geschieht in dreierlei Richtung:

- Präzisierung der benötigten **Zutaten**: Geschwindigkeit von A relativ zu B beschrieben von C aus. (Die Geschwindigkeit des Bootes relativ zum Schwimmer vom Ufer aus beobachtet.) Bedeutsam wird das beispielsweise beim Dopplereffekt.
- Die Unterscheidung von **vektorieller und skalarer** Geschwindigkeit. Erstere ist die physikalisch relevante: Sie beschreibt Richtung und Betrag der Geschwindigkeit. Mit ihr - der vektoriellen - sollte man starten. Der Betrag der vektoriellen ist die skalare, also das, was man auf dem Tachometer sieht. Sie folgt mathematisch.
- Die Unterscheidung von **mittlerer und momentaner** Geschwindigkeit. Die Einführung der momentanen Geschwindigkeit fordert einen mathematischen Grenzprozess. Für uns ist die momentane zunächst vielfach einfach die mittlere Geschwindigkeit für ausreichend kleine Zeitintervalle.

◆ (3.2.4) Wir starten mit dem Konzept der mittleren Geschwindigkeit als Spezialfall des allgemeinen Schemas. Befindet ein sich bewegendes Punktkörper zur Zeit t_1 am Ort mit Ortsvektor \vec{r}_1 und zu Zeit t_2 am Ort \vec{r}_2 (Pfeile vom festen Ursprung zum Punktor), dann ist die mittlere Geschwindigkeit dieser Bewegung (über den Zeitraum $t_1 \leq t \leq t_2$) gegeben durch



Kurz: Man erhält die (vektorielle) Ortsänderung $\Delta \vec{r}$, indem man die mittlere Geschwindigkeit \vec{V}_M mit der Zeitdifferenz Δt multipliziert. Das ist **die** im Zusammenhang mit der Geschwindigkeit wichtige Formel.

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta \vec{r} = \vec{V} \cdot \Delta t$$

◆ (3.2.5) Bei einer ungleichförmigen Bewegung muss man daher zwischen *tatsächlicher Wegänderung* und *durch die Formel beschriebene Wegänderung* unterscheiden. (Lokale) Bezeichnungen: $\Delta \vec{r}_{wahr}$ und $\Delta \vec{r}_{Formel}$. Dann folgt:

◇ Bei geradlinig gleichförmiger Bewegung gilt $\Delta \vec{r}_{wahr} = \Delta \vec{r}_{Formel} = \vec{V} \Delta t$.

◇ Ist die Bewegung ungleichförmig, so dass sich momentane Geschwindigkeit und mittlere Geschwindigkeit unterscheiden, dann gilt die Formel **näherungsweise. Genauer:**

Die momentane Geschwindigkeit im Zeitpunkt t (die zugehörige Rate) ist der Grenzwert der mittleren Geschw. für Δt gegen Null. Also für immer kleinere Zeitunterschiede.

(3.2.6) Eine andere nützliche Formulierung des Grenzprozesses zur Bestimmung der momentanen Geschwindigkeit sieht wie folgt aus:

◇ Der Unterschied zwischen momentaner und mittlerer vektorieller Geschwindigkeit geht gegen Null, für Δt nach Null!

Damit können wir ein Schema formulieren, mit dessen Hilfe man in vielen Fällen die Geschwindigkeit im Rahmen einer elementaren Rechnung bestimmen kann:

Mathematisches Berechnungsrezept:

- ★ Starte mit der Größe $\vec{r}(t)$,
- ★ Bilde die Änderung $\Delta\vec{r}$ zwischen t und $t+\Delta t$ ("Zuwachs"),
- ★ Bilde die mittlere Rate $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$,
- ★ Forme dazu den Rechenausdruck für $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ so um, dass man ein Δt herauskürzen kann. Tue das.
- ★ Bilde jetzt den Grenzwert $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ einfach, indem man $\Delta t = 0$ einsetzt, was jetzt gehen sollte. Das ergibt die gesuchte momentane Geschwindigkeit. .

(3.2.7) ◇ Generell kann man die mittlere Geschwindigkeit \vec{V} wie folgt interpretieren:

Die tatsächliche beliebig komplizierte Bewegung $\vec{r}(t)$ wird **ersetzt durch eine geradlinig gleichförmige Bewegung**, die mit der tatsächlichen Bahn (mindestens) zu den beiden Zeitpunkten t_1 und t_2 übereinstimmt.

Man hat die Formel

$$\vec{r}(t_1 + \Delta t) = \vec{r}(t_1) + \vec{V}_M \Delta t \quad \text{und} \quad \vec{V}_M = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Diese Formel ist exakt für $\Delta t = t_2 - t_1$. Für Δt - Wert in der Nähe dieses Wertes gilt sie nur noch näherungsweise.

Vektorielle und skalare Geschwindigkeit

(3.2.8) □ $\vec{r}(t)$ beschreibe eine gleichförmige Kreisbewegung. Wähle $t_2 = t_1 + T$, wobei T eine Umlaufperiode ist. Was für eine mittlere vektorielle Geschwindigkeit ergibt sich? Welcher Unterschied besteht dann zwischen der *Ortsveränderung* $\Delta\vec{r}$ und dem *zurückgelegten Weg*? .

◇ Der **Betrag** einer vektoriellen Geschwindigkeit wird üblicherweise **skalare Geschwindigkeit** genannt. Für unser Ersatzmodell ergibt das die erwarteten Resultate. Aber manchmal ist Vorsicht angebracht, wie das nachfolgende Beispiel zeigt:

(3.2.9) □ Erläutern Sie am Beispiel der letzten Aufgabe den Unterschied zwischen "Mittelwert der skalaren Geschwindigkeit" und "Betrag der mittleren (vektoriellen) Geschwindigkeit". Genauer: **Die mittlere skalare Geschwindigkeit ist nicht immer gleich dem Betrag der entsprechenden mittleren vektoriellen Geschwindigkeit**. Das Problem ist die mittlere skalare Geschwindigkeit, die nicht durch Betragsbildung zu bestimmen ist! Für die momentane Geschwindigkeit gilt das nicht!

◇ (3.2.10) Im Augenblick können wir die **momentane Geschwindigkeit** immer als "mittlere für ausreichend kleine Zeitunterschiede" interpretieren. Oder auch: Wir können die momentane bis zu einer interessierenden Genauigkeit bereits durch eine mittlere **für geeignet kleines $\Delta t > 0$** vorhersagen.

3.3: Bahnkurven

(3.3.1) ★ In der Mechanik interessiert man sich dafür, wie sich als Punkte idealisierbare Körper im Raum bewegen. Eines der Ziele der Mechanik ist es, quantitativ vorherzusagen, wie sich solche Punkte bewegen, wenn sie bestimmten Einflüssen, Kräften, ausgesetzt sind. Die **Formelbeschreibung** (noch nicht Vorhersage) einer solchen Bewegung ist im Prinzip einfach und sieht wie folgt aus:

$$\vec{r}(t) = \dots$$

◆ Links steht mit $\vec{r}(t)$ eine **Bezeichnung** für den Ortsvektor des Punktes zur (beliebigen) Zeit t . D.h. für den Pfeil der von einem fest gewählten Ursprung zum jeweiligen Ort des Punktes führt.

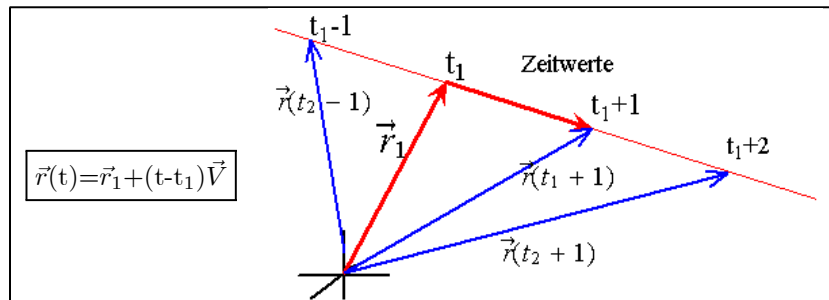
▼ Rechts durch \dots angedeutet soll ein Rechenausdruck stehen, der für den jeweiligen Fall eben diesen Ort liefert! Er sollte die Zeit t enthalten und weitere Größen, beispielsweise solche, die beeinflussende Kräfte charakterisieren. Aber auch solche, die unterschiedliche Bewegungen desselben Typs (im gleichen "physikalischen System") auseinanderhalten. (**Rechenweg**)

◆ Diese Gleichungen $\vec{r}(t) = \dots$ sind Gleichungen des ersten Typs (I) zwischen Größen. Die Klammer in $\vec{r}(t)$ ist eine "von-Klammer" **Keinesfalls** sind sie mit ihren Rechnungen wie $\vec{r}(2t + 3) = 2\vec{r}(t) + 3$ zulässig.

□ Einige wichtige begriffliche Differenzierungen Des Begriffs: Eine Bahnkurve heißt *periodisch*, wenn Sie heißt *beschränkt*, wenn..... Wie lauten die Definitionen?

Wir besprechen zunächst **die Bahnkurvengleichungen für drei wichtige Bewegungsformen**

◆ (3.3.2) **"Freie" oder geradlinig-gleichförmige Bewegung.** Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass bei ihr die **vektorielle Geschwindigkeit immer konstant** ist. Bei dieser Bewegungsform stimmen alle momentanen und mittleren Geschwindigkeiten überein. Sei \vec{V} diese feste Geschwindigkeit. Dann sieht die von uns angestrebte Formel wie folgt aus:



Wählt man $t=t_1$, dann folgt $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$. D.h. \vec{r}_1 gibt den Ort zur Zeit t_1 . Eine Zeiteinheit später hat man $\vec{r}(t_1 + 1) = \vec{r}_1 + \vec{V}$. **Der Ort hat sich während einer Zeiteinheit gerade um \vec{V} geändert.** Das ist charakteristisch für die Geschwindigkeit. Zwei Zeiteinheiten später hat man $\vec{r}(t_1 + 2) = \vec{r}_1 + 2\vec{V}$. Der Ort hat sich um $2\vec{V}$ geändert. So lassen sich die Orte aller Zeiten festlegen. $\vec{r}(t_1 - \frac{3}{2}) = \vec{r}_1 - \frac{3}{2}\vec{V}$. (Wieso?? Es ist $t=t_1 - \frac{3}{2}$. Dann ist $t-t_1 = (t_1 - \frac{3}{2}) - t_1 = -\frac{3}{2}$ und das ist rechts einzusetzen!

Was benötigt man zur Fixierung (Bestimmung) einer derartigen Bewegung? Was muss man aus der jeweiligen Situation kennen? Wonach muss man beim Vorliegen einer zugehörigen Aufgabe suchen?

- Den Ort \vec{r}_1 zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1 .
- sowie den Wert \vec{V} der konstanten Geschwindigkeit. Genauer Richtung und Betrag.

Alle Vektoren können entweder als geometrische Pfeile oder als Koordinatenvektoren festgelegt sein.

□ (3.3.3) Beispielaufgabe: Der Punkt bewege sich geradlinig gleichförmig. Man wisse $\vec{r}(t_1) = \vec{a}$ und $\vec{r}(t_2) = \vec{b}$ mit $t_1 \neq t_2$. Dabei seien \vec{a}, \vec{b}, t_1 und t_2 gegeben. Wie lautet die Formel für die Bahnbewegung?

$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{V}(t - t_1)$	Allgemeine Form mit \vec{r}_1, t_1 noch unbekannt
$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{V}(t - t_1)$	Aufgabeninformation Nur \vec{V} noch unbekannt!
$\vec{r}(t_2) = \vec{b} = \vec{a} + \vec{V}(t_2 - t_1)$	Bedingung der Aufgabe Nur \vec{V} unbekannt
$\vec{V} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{t_2 - t_1}$	Jetzt ist \vec{V} bekannt

Alles einsetzen gibt die gesuchte Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{t_2 - t_1} (t - t_1)$$

(3.3.4) **Die gleichförmige Kreisbewegung**

◆ Als **zweite Bewegungsform** betrachten wir eine **gleichförmige Bewegung des Punktes auf einem Kreis (mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung)**. Der Kreis soll sich in der x-y-Ebene bewegen. Gehört der Punkt auf dem Kreis mit Radius R zum Winkel α , dann gilt für den zugehörigen Ortsvektor $\vec{r} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$. Beim bewegten Punkt ändert sich der Winkel mit der Zeit. Und "gleichförmig bewegt" heißt $\alpha = \omega t + \varphi$, wobei ω die "Winkelgeschwindigkeit" ist, also die momentane Änderungsrate des Winkels.

ω und φ sind beides Konstanten, deren Werte unterschiedliche Kreisbewegungen liefern. Zusammen

$$\vec{r}_{Kreis}^K(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t + \varphi) \\ R \sin(\omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ist die gesuchte Bahnkurve für die gleichförmige Kreisbewegung.

Will man innerhalb einer Problemsituation eine bestimmte derartige Kreisbewegung festlegen, dann muss man danach trachten, dem Aufgabentext die zugehörigen Werte der drei Größen R, ω und φ zu entnehmen.

- (3.3.4a) Bestimmen Sie t_1 so, dass $\omega t + \varphi = \omega(t - t_1)$ gilt. Was für eine Interpretation hat t_1 ?
- (3.3.4b) Wie sieht die Bahnkurve aus, wenn die Bewegung in einer Ebene parallel zur x-y-Ebene erfolgt? Wie, wenn Sie in der x-z-Ebene liegt? Was bedeutet negatives ω ?
- (3.3.4c) Wichtig: Wie groß ist die Zeit T, die für einen Umlauf des Punktes benötigt wird? (Diese Zeit wird "Periode der Bewegung" genannt) / Welche Interpretation hat allgemein $\frac{\omega t + \varphi}{2\pi}$?
- (3.3.4d) Der Punkt bewege sich in einer Sekunde 25 mal um den Kreis herum. Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit?
- (3.3.4e) Wie erhält man die momentane Geschwindigkeit, wenn wie hier die Bahn in Koordinaten gegeben ist? formulieren sie das selbst als allgemeines Rezept und wenden Sie es auf die Kreisbewegung an.

(3.3.5) **Flugparabeln**

◆ Als dritte Bewegungsform betrachten wir die "**Flugparabel**". Sie erfasst alle Situationen, in denen **eine konstante vektorielle Kraft permanent** auf den Massenpunkt wirkt. Ist \vec{F} diese Kraft und m die Masse des Massenpunktes, dann setzt man $\vec{g} = \frac{1}{m} \vec{F}$. Dieser Vektor \vec{g} wird zur Festlegung der Flugparabel benötigt.

◆ Wir geben zunächst nur die Ortsbeschreibung, die zu eben diesem Problem gehört, erneut in der beschriebenen Form $\vec{r}(t) = \dots$ Später im Zusammenhang mit der Newtonschen Bewegungsgleichung werden wir das besser begründen. Die Formel lautet:

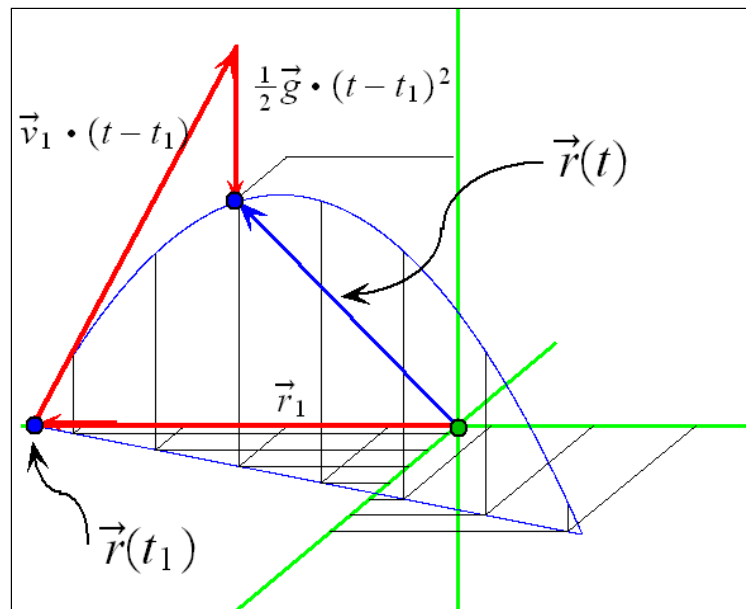
$$\vec{r}_{FP}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 \cdot (t - t_1) + \frac{1}{2} \vec{g} \cdot (t - t_1)^2$$

Klar ist: Sind $\vec{g}, \vec{r}_1, \vec{v}_1$ und t_1 bekannt, d.h. aus der betrachteten Problemsituation herleitbar, angebar, dann ist der Rechenausdruck der rechten Seite festgelegt und man kann wie gewünscht $\vec{r}(t)$ für beliebig vorgebbares t berechnen. Alle diese Größen sind hier äußere Parameter.

Die Formel kann geometrisch als Wegkonstruktion interpretiert werden: Die ersten beiden Summanden $\vec{r}_1 + \vec{v}_1 \cdot (t - t_1)$ beschreiben eine geradlinig - gleichförmige Bewegung. Von dem jeweiligen Endpunkt aus hat man dann in Richtung von \vec{g} weiterzugehen. Die jeweilige Länge wird durch $(t - t_1)^2$ bestimmt, genauer ist gleich $\frac{1}{2} \frac{(t - t_1)^2}{|\vec{g}|}$. Das ist eine nicht negative Länge.

Welche inhaltliche Interpretation haben die benötigten äußeren Parameter?

Wählt man $t = t_1$, dann folgt sofort $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$. D.h. \vec{r}_1 ist der Ort zur Zeit t_1 . Kennt man also den Ort der Flugparabel zu einem bestimmten Zeitpunkt, dann wird und darf man t_1 gleich diesem Zeitpunkt wählen und \vec{r}_1 gleich dem Ortsvektor des Ortes. Entsprechend ist \vec{v}_1 die vektorielle Geschwindigkeit zur Zeit t_1 . Und $t - t_1$ ist die zeitliche Abweichung vom "Informationszeitpunkt" t_1 .



?? (Funktion 16)

Merkform

$$\vec{r}_{FP}(t) = \underbrace{\vec{r}_1}_{\text{Ort in } t_1} + \underbrace{\vec{v}_1}_{\text{Geschw. in } t_1} \cdot (t - \underbrace{t_1}_{\text{Informationszeit}}) + \frac{1}{2} \underbrace{\vec{g}}_{\text{Konst. Beschl.}} \cdot (t - t_1)^2$$

(3.3.5) Bei dieser Bewegungsform "Flugparabel" ist die (momentane) Geschwindigkeit nie konstant (sofern $\vec{g} \neq \vec{0}$). In der Regel ändern sich Richtung und Betrag der Geschwindigkeit beständig. Man muss daher **von der mittleren Geschwindigkeit zur momentanen** übergehen, einen Grenzübergang vornehmen.

Für uns heißt das, dass wir die momentane als mittlere Geschwindigkeit für sehr kleine Δt interpretieren. Anwenden des Rezeptes aus (3.2.6) **liefert uns korrekte Formel für die momentane Geschwindigkeit**. Sie lautet:

$$\vec{v}_{FP}(t) = \vec{v}_1 + \vec{g}(t - t_1).$$

Setzt hierin man $t=t_1$, dann folgt $\vec{v}(t_1) = \vec{v}_1$.

D.h. der zweite in der Formel auftretenden Vektor \vec{v}_1 ist gerade die vektorielle Geschwindigkeit zum Beobachtungszeitpunkt t_1 .

$$\vec{v}_{\text{Momentan}}(t) = \vec{v}_1 + \vec{g}(t - t_1)$$

(3.3.6) ■ Beispielaufgabe für eine Flugparabel:

Es sei $\vec{g} = (0, 0, -10)$. zum Zeitpunkt $t=-3$ befinde sich der Massenpunkt am Ort $(0, 0, 20)$ mit der momentanen Geschwindigkeit $(0, 5, 7)$. Wo befindet sich der Punkt zum Zeitpunkt $t=0$, wo zum Zeitpunkt $t=1$? Wo trifft er die x-y-Ebene (also $z=0$)?

$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1(t - t_1) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_1)^2$	Allg. zu spezialisierende Formel
$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} (t + 3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} (t + 3)^2$	Einsetzen der durch die Aufgabe geg. äußeren Parameter
$= \begin{pmatrix} 0 \\ 5(t + 3) \\ 20 + 7(t + 3) - 5(t + 3)^2 \end{pmatrix}$	Zusammenfassen Endform
$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix}$	$t=0$ einsetzen gibt die gesuchte Größe

Und wie sieht allgemein die momentane Geschwindigkeit aus?

$\vec{v}(t) = \vec{v}_1 + \vec{g}(t - t_1)$	Allgemeine Formel
$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} (t + 3)$	Einsetzen der äußeren Parameter
$= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 - 10(t + 3) \end{pmatrix}$	Zusammenfassen

Durch Einsetzen irgendeines t-Wertes kann man jetzt die zugehörige momentane Geschwindigkeit bestimmen!

3.4: Die Änderung der momentanen Geschwindigkeit: Beschleunigung

(3.4.1) Abgesehen vom Fall der geradlinig-gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit nicht konstant, ist selbst wieder eine zeitlich veränderliche Größe! Damit könne wir den gesamten Begriffsapparat (Änderung, Änderungsrate,...) auch auf die Geschwindigkeit losklassen!

- ◆ Mathematisch ist die momentane Geschwindigkeit die Ableitung der Bahnkurve nach der Zeit.
- ◆ Ist eine Bahnkurve gegeben, dann kann man mit ihr generell die beschriebene Ableitungsprozedur ausführen mit Regeln zur Bestimmung des Resultates. (Ableitungsregeln). Uns genügt hier das Wissen, dass das prinzipiell möglich ist.

◆◆ Kurz: ist $\vec{r}(t)$ bekannt, dann kann man die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ durch Ableiten berechnen, sie folgt aus der Bahnkurve.

(3.4.5) Über $\vec{v}(t)$ können wir nun - wie angedeutet - weitere Größen bestimmen:

$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$	Geschwindigkeitsänderung
$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t}$	Mittlere Geschwindigkeitsänderungsrate
$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$	Momentane Geschwindigkeitsänderungsrate = Beschleunigung von \vec{r}
$\vec{v}(t + \Delta t) \approx \vec{v}(t) + \dot{\vec{v}}(t)\Delta t$	Näherung!

◆ Kennt man $\vec{v}(t)$, dann liegt über $\Delta\vec{r}_{Lin} = \vec{v}(t)\Delta t$ die Änderung von \vec{r} , also die Ortsänderung $\Delta\vec{r}_{Tatsächlich}$, (näherungsweise) fest.

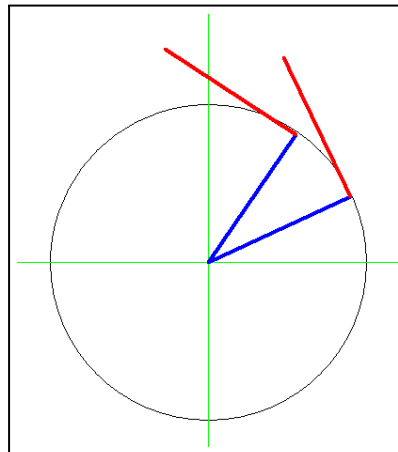
(3.4.6) Ist $\vec{v}(t)$ bekannt, dann kann man $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$ die zugehörige Rate als "momentane Beschleunigung" analog (mathematisch) **berechnen**

◆ Einheit der Änderung, der Beschleunigung ist $\frac{m}{s^2} = \frac{m/s}{s}$.

◆ Die Interpretation erfolgt über die folgende Gleichung (bei erneut die mittlere Beschleunigung \vec{a}_{Mittel} näherungsweise durch die momentane ersetzt wird, wenn nur Δt ausreichend klein gewählt wird):

$$\vec{v}(t+\Delta t) \approx \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\Delta t$$

(3.4.7) □ Im folgenden Bild einer gleichförmigen Kreisbewegung sei $R=1$. Woran erkennt man, dass $\omega = 1$ gilt? Bestimmen Sie für die beiden aufgenommenen Konfigurationen $\Delta\vec{v}$ zeichnerisch! (Achtung, die Vektoren müssen von einem gemeinsamen Fußpunkt aus starten) Schätzen Sie (eventuelle mit Winkelmesser) auch Δt und daraus eine Schätzung für die mittlere Beschleunigung.



□ Numerische Konsolidierungsübung: Mittlere Beschleunigung bei Autostart, startender 100m-Läufer und

(3.4.8) Die Beschleunigung beschreibt die Änderung der Geschwindigkeit. Beachten Sie: Es geht um die **vektorielle** Geschwindigkeit, nicht um die **skalare**. \vec{v} kann sich ändern, ohne dass sich $|\vec{v}|$ ändert. Denn der Vektorpfeil kann seine Richtung mit fester Länge ändern!

◆◆ Verfügt man über die Geschwindigkeit (für alle t), dann kann man mathematisch die Beschleunigung bestimmen. Mathematisch folgt so für die Flugparabel (sofort durch die beschriebene Konstruktion)

$$\boxed{\vec{a}_{FP}(t) = \vec{g}} \quad \text{immer und überall im System}$$

Also konstante Beschleunigung.

(3.4.9) Und für die gleichförmige Kreisbewegung folgt (erneut wieder nur das Resultat):

$$\boxed{\vec{a}_{Kreis}(t) = -\omega^2 \vec{r}_{Kreis}(t) = -\omega^2 R \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}}$$

Vergleicht man das mit der zugehörigen Bahnkurve $\vec{r}(t)$, so sieht man sofort: $\boxed{\vec{a}_{Kreis}(t) = -\omega^2 \vec{r}_{Kreis}(t)}$.

D.h.: Die Beschleunigung ist (bei der Kreisbewegung) stets entgegengesetzt gerichtet wie der zugehörige Ortsvektor. Und die beiden Längen sind zueinander proportional!

(3.4.10) □ Wie könnte ein möglichst kurzes "Formelblatt zur Klausur" für unsere drei Beispielbewegungen aussehen?

Dynamik : Kraft und Newtonsche Bewegungsgleichung

Bisher haben wir vornehmlich folgende Situation betrachtet:

- ★ Die uns interessierende Bahnkurve ist bekannt, über eine Formel gegeben
- ★ Dann berechnen wir die Geschwindigkeit (Änderungsrate) mathematisch
- ★ Und daraus wieder die Beschleunigung.

Aber die eigentlich interessanten Situationen sind die, in denen die **Bahnkurve unbekannt** ist und gesucht wird.!

3.5 Kraft und Newtonsche Bewegungsgleichung

(3.5.1) Zunächst wissen wir aus Erfahrung und Experiment:

★ Wirkt keinerlei Einfluss, keinerlei Kraft auf den Punkt, dann erhält man eine geradlinig gleichförmige Bewegung. Es ist $\Delta \vec{v} = \vec{0}$ und damit auch $\boxed{\vec{a}(t) = \vec{0}}$ für alle Zeiten t .

★ Oder: Eine Änderung der Geschwindigkeit hat immer **eine Ursache in Form eines äußeren Einflusses auf den Massenpunkt**.

★ Die **Klassifikation und Beschreibung** überhaupt denkbarer Einflüsse auf einen Körper erscheinen zunächst als schwindelerregendes, kaum machbares Problem. Die Erfahrung sagt jedoch:

Wir können von dem Einfluss alles vergessen bis auf den Wert eines geometrischen Pfeiles "Kraft". Sobald wir diesen kennen, können wir die Änderung der momentanen Geschwindigkeit angeben!

★ Und diese Kraft ist uns in der Regel (durch Messung und Überlegung!) zugänglich.

★ Die **operative Bestimmung von Kräften erfolgt (im Prinzip, idealisiert)** mit Hilfe von Federwaagen, deren Einfluss gerade die Änderung von \vec{v} kompensiert und der vollständig durch Richtung und Größe der Auslenkung (=Kraftvektor) beschrieben wird!

Zur besseren Ankopplung der Vorstellung können Sie immer die Gewichtskraft heranziehen.

(3.5.2)★★ Also: **Erst wenn ein (äußerer) Einfluß in Form einer Kraft \vec{K} auf den Punkt wirkt, kann es eine Änderung $\Delta\vec{v}$ der Geschwindigkeit ungleich Null geben!** Wir erwarten, dass beide Größen näherungsweise proportional sind:

$$\boxed{\Delta\vec{v} \approx \frac{1}{m}\vec{K}(t)\Delta t} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \approx \frac{1}{m}\vec{K}(t)$$

Die Proportionalitätskonstante m erweist sich als Masse des Massenpunktes.

Je länger die Kraft wirkt, desto größer die Geschwindigkeitsänderung. Daher die Proportionalität in Δt . Exakt wird das erst, für Δt gegen Null, also

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{1}{m}\vec{K}(t)}$$

Das ist wie folgt zu interpretieren:

Die linke Seite gibt die **Beschleunigung**, die Änderungsrate der Geschwindigkeit mit der Zeit. Das ist eine Beschreibungsgröße des Bewegungsvorganges. Die rechte Seite dagegen ist die **jeweils auf den Punkt wirkende Kraft**. Ein Vektor \vec{K} , den man in geeigneter Idealisierung mit Hilfe einer Federwaage messen könnte! Sie - die Kraft - beschreibt den jeweiligen gesamten Umwelteinfluss auf den Punkt!

Damit erhalten wir die überaus wichtige **Newtonsche Bewegungsgleichung** (als Musterbeispiel einer Gleichung für die Änderungsrate):

$$\boxed{m\vec{a}(t) = m\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \vec{K}(t)}$$

Also: Die momentane Beschleunigung $\vec{a}(t)$ ist proportional zur Kraft, die zur Zeit t auf den Punkt wirkt, der sich am Orte $\vec{x}(t)$ befindet. Und die Proportionalitätskonstante ist die Masse des betrachteten Massenpunktes!

(3.5.3) Beachten Sie, dass beide Seiten nach ausreichender Idealisierung unabhängig operativ zugänglich sind:

- Die rechte Seite: Die wirkende Kraft wird bestimmt, indem man ihren Einfluss kompensiert. Und zwar durch einen anderen Einfluss, den man durch einen Kraftvektor beschreiben kann. So kann man auch die Krafteinheit festlegen (1 Newton = $1\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Ein wichtiger nachfolgender Schritt wird darin bestehen, Regeln für die Kraftfestlegung anzugeben.
- Die linke Seite: Hier bestimmt man zuerst den Ort für alle oder möglichst viele Zeiten. Ideal $\vec{r}(t) = \dots$ die volle *Bahnkurve*. Daraus erhält man durch Ableiten die momentane Geschwindigkeit und daraus durch erneutes Ableiten die momentane Beschleunigung $\vec{a}(t)$. Den Massenfaktor m kann man schließlich über das Wirkenlassen einer geeigneten Einheitskraft festlegen.

Zwischen all diesen Größen liefert die Newtonsche Gleichung eine zu erfüllende Beziehung, Gleichung. Diese Gleichung hat einen enormen Gültigkeitsbereich und ebensolche Konsequenzen!

3.6 Die zwei Interpretationen der Newtonschen Bewegungsgleichung

(3.6.1) Die **1. Interpretation:** Man kenne $\vec{r}(t)=\dots$ etwa durch Beobachtung und Idealisierung! Dann liefert die Bewegungsgleichung einem die wirkende Kraft. Paradebeispiel:

◆ Die Zentripetalkraft (bei gleichförmiger Kreisbewegung).

Wir kennen $\vec{r}_{Osz}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$ und haben gesehen, wie die mathematisch daraus folgende Geschwindigkeit \vec{v} und Beschleunigung \vec{a} aussehen. Insbesondere ist $\vec{a}_{Osz}(t) = -\omega^2 \vec{r}_{Osz}(t)$.

Das ist genau die Form, die die Bewegungsgleichung fordert. Die Ursache dieser resultierenden Kreisbewegung muss daher eine zum Kreismittelpunkt gerichtete Kraft $\vec{Z}(t) = -m\omega^2 \vec{r}_{Osz}(t)$ sein, die Zentripetalkraft. (Schleudert man einen Stein an einem Faden auf einer Kreisbahn, dann entsteht diese Kraft als Fadenspannungskraft, die das tangential Fortfliegen des Steines verhindert!)

◆ Und im Fall der Flugparabel haben wir bereits $\vec{a} = \vec{g} = \frac{1}{m}\vec{F}$ gefunden. Tatsächlich findet man Flugparabeln immer als Resultat einer konstanten Kraft vor. (Schwerefeld oder konstantes elektrisches Feld)

(3.6.2) Die **2. (wichtige) Interpretation:** Für ein idealisiertes physikalisches System sei die jeweils auf den Punkt wirkende Kraft bekannt (über eine geeignete Kombination von Experiment und analytisch verallgemeinerndem Denken. In den meisten Fällen geschieht das in Form eines **Kraftfeldes**. D. h. man hat eine Formel

$$\vec{F}(\vec{x}) = \dots,$$

die einem die Kraft liefert, die der Massenpunkt verspürt, wenn er sich am Orte \vec{x} befindet. Befindet er sich zur Zeit t am Orte $\vec{r}(t)$, der durch eine Bahnkurve gegeben wird, dann verspürt er ($\vec{x} = \vec{r}(t)$) die Kraft $\vec{F}(\vec{r}(t))$. Newton sagt nun: Physikalisch möglich sind nur Bewegungen, die $m\vec{a}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$ erfüllen. Das ist nun eine Bedingung an die die Bewegung festlegende Bahnkurve $\vec{r}(t) = \dots$

Hat man \vec{F} , dann kann man die Änderung von \vec{r} und \vec{v} näherungsweise wie folgt bestimmen

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &\approx \vec{v}(t) \Delta t && \text{Ortsänderung} \\ \Delta \vec{v} &\approx \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), t) \Delta t && \text{Geschwindigkeitsänderung} \end{aligned}$$

Die Anfangswerte sind jetzt $\vec{r}(t_0)$ und $\vec{v}(t_0)$. Vgl Flugparabel und Kreisbewegung! Ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) &= \Delta \vec{r} \approx \vec{v}(t) \cdot \Delta t && \text{Definition } \vec{v} \\ \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t) &= \Delta \vec{v} \approx \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), t) \Delta t && \text{Newton.} \end{aligned}$$

In seltenen Fällen kann man die Lösung als Formel hinschreiben. Aber mit Hilfe des Computers kann man mit Hilfe der gegebenen Näherungen die Bahnkurve leicht numerisch bestimmen, wie wir unten sehen werden.

3.7 Wie findet man die Kraft? - Kraftfelder

(3.7.1) In wichtigen Fällen wird die wirkende Kraft $\vec{K}(t)$ durch ein *Kraftfeld* erzeugt. Das ist in mathematischer Hinsicht eine Größe $\vec{F}(\vec{x}) = \dots$. Rechts sollte dann ein Rechenausdruck stehen, der aus einem vorgebbaren geometrischen Pfeil \vec{x} einen anderen mit $\vec{F}(\vec{x})$ bezeichneten Pfeil macht. Und in unserem Fall hat dieser Pfeil die Interpretation:

$$\vec{F}(\vec{x}) \text{ ist die Kraft, die auf einem am Orte } \vec{x} \text{ befindlichen Massenpunkt wirkt!}$$

Befindet sich der Punkt daher zur Zeit t am Orte $\vec{r}(t)$, dann verspürt er dort die Kraft $\vec{K}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$. Das ist in die Newtonsche Gleichung einzusetzen.

(3.7.2) Rechenbeispiel in der Ebene:

$$\vec{x}^K = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F}^K(x, y, t) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

□ Einsetzübung: $\vec{r}^K(t) = (1, 2 + t) = (1, 2) + (0, 1)t$

Was ist $\vec{F}^K(\vec{r}^K(t))$. was speziell $\vec{F}^K(\vec{r}^K(2))$?

(3.7.3) Graphische Veranschaulichung von Kraftfeldern

Wir beschränken uns auf den Fall der Darstellung in einer Ebene.

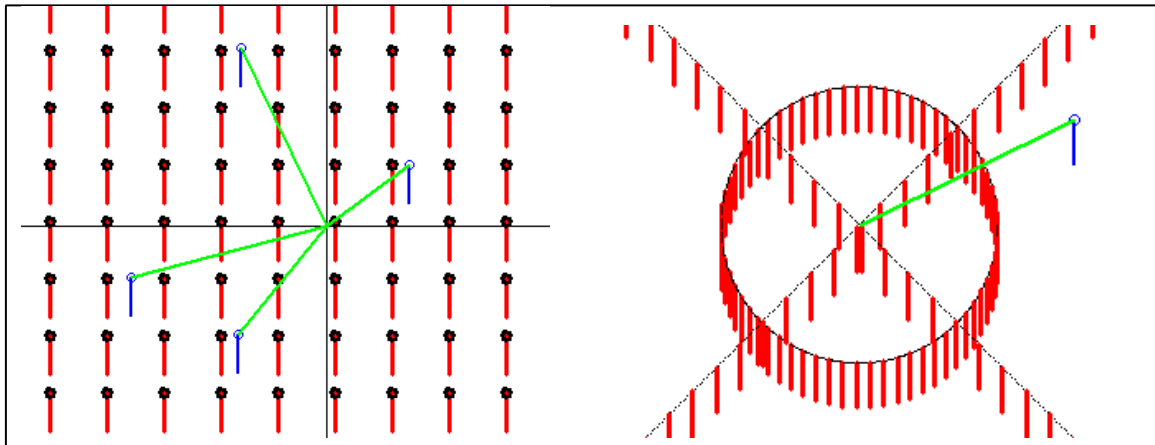
◆ Fixiere einen Ursprung. Zu jedem Punkt P der Ebene gibt es dann einen Ortsvektor $\vec{x} = \vec{x}_P$, der zu diesem Punkt führt. (In den Zeichnungen grün).

◇ Man kann \vec{x} als Pfeil (kürzester Weg) oder in Koordinaten (achsenparalleler Weg) darstellen.

◆ Die Formel $\vec{F}(\vec{x}) = \dots$ sagt dann aus, wie man zu gegebenem \vec{x} den dort (in P) vorliegenden Kraftvektor zu berechnen hat. Diesen Vektor kann man sich dann an den Punkt P angeheftet vorstellen.

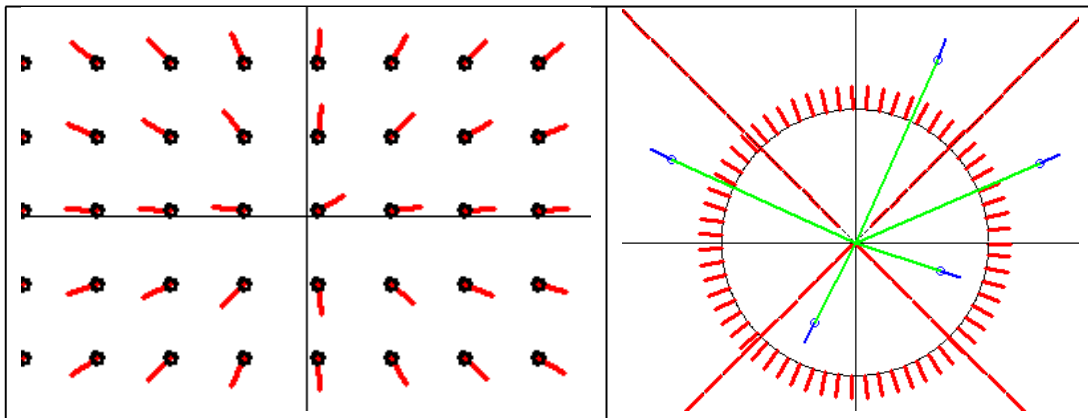
◇ In vielen Fällen reicht es, eine Folge von Punkten auf dem Einheitskreis zu wählen, und dort die Feldvektoren (=in P herrschende Feldstärke) anzuheften. So gewinnt man eine gutes erstes Bild über das Feldverhalten! Andernfalls kann man ein Gitternetz von Punkten wählen.

(3.7.4) Als erstes Beispiel betrachten wir ein konstantes Feld (wie das zur Flugparabel gehörige Feld). $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{g}$ mit $\vec{g} = (0, -1)$. Im linken Bild ist ein ganzes Gitter von Punkten des \vec{x} -Raumes gewählt und an jeden Punkt (rot) der dort herrschende Feldvektor angeheftet! Für einige Punkte ist (grün) der Ortsvektor \vec{x} mit eingezeichnet und blau der zugehörige Feldvektor angeheftet! Im rechten Bild ist das Feld nur für Punkte auf dem Einheitskreis und den beiden Winkelhalbierenden gezeichnet! Die Formel $\vec{F}(\vec{x}) = \dots$ gibt jeweils an, wie in jedem Punkt blau aus grün entsteht!

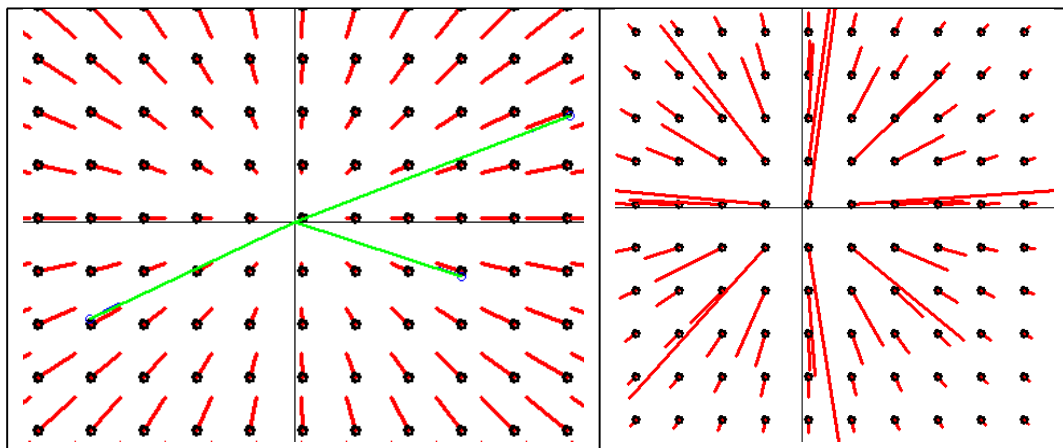


(3.7.5) Als nächste Feld betrachten wir $\vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{1}{10} \frac{\vec{x}}{r}$. Dieses Feld ordnet jedem Punkt einfach den radialen Einheitsvektor zu. Damit man die Übersicht behält, wird die Länge jeweils auf $\frac{1}{10}$ reduziert. Erneut geben wir beide Darstellungen. Das zweite instruktivere Bild verdeutlicht die Aussage, dass bei diesem Feld

Ortsvektor \vec{x} und Feldvektor $\vec{F}(\vec{x})$ dieselbe Richtung haben.



(3.7.6) Bei den nächsten beiden Feldern ändern wir nicht nur die Richtung, sondern auch die Länge der Feldvektoren. Das linke Feld ist das Oszillatorfeld $\vec{F}(\vec{x}) = -\alpha\vec{x}$. Der Feldvektor zeigt auf das Zentrum zu und seine Länge wächst proportional zum Abstand. Das rechte Feld ist das Coulombfeld $\vec{F}(\vec{x}) = \alpha\frac{1}{r^2}\frac{\vec{x}}{r}$. Wieder sind alle Feldvektoren radial nach aussen gerichtet, aber ihre Länge wird wegen des Faktors $\frac{1}{r^2}$ geringer, je weiter man sich vom -ursprung entfernt. Verdopplung des Abstandes reduziert die Länge des Feldvektors auf $\frac{1}{4}$. Für die \vec{x} -Werte in der Nähe des Ursprunges ist der Feldvektor so groß, dass er über den Bildrand hinausgeht.



(3.7.7) Drei physikalisch besonders wichtige Kraftfelder:

$\vec{F}_{konst}(\vec{x}) = \vec{g}$	Konstantes Feld (Nr50)
$\vec{F}_{Osz}(\vec{x}) = -\omega_0^2\vec{x}$	Oszillatorfeld (Nr51)
$\vec{F}_{Coul}(\vec{x}) = \frac{\alpha}{ \vec{x} ^2}\frac{\vec{x}}{ \vec{x} }$	Feld vom Coulombtyp (Nr22)

Die graphische Veranschaulichung dieser Felder in einer den Ursprung enthaltenden Ebene haben wir bereits gegeben.

(3.7.8) Das dritte Beispiel ist physikalisch besonders wichtig. Hier ist es sogar möglich, eine **Ursache** für ein derartiges Feld anzugeben :

Bringt man einen Massenpunkt mit Masse M an den Ursprung, dann erzeugt dieser ein Kraftfeld vom Gravitationstyp. Genauer: bringt man einen zweiten Massenpunkt der Masse m an den Ort \vec{x} , dann verspürt dieser die folgende Kraft von M verursachte Kraft:

$$\vec{F}_{Grav}(\vec{x}) = \frac{\alpha}{|\vec{x}|^2}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad \text{mit} \quad \alpha = -GmM \quad G=...$$

Die Masse M im Ursprung nennt man "die felderzeugende Masse" oder die "Quelle des Feldes". Das wichtige negative Vorzeichen besagt, dass $\vec{F}(\vec{x})$ hier entgegengesetzt zu \vec{x} gerichtet ist! Und das heißt, dass die Kraft anziehend ist.

(3.7.9) Jetzt gibt es eine Reihe von Regeln, wie man aus diesem Feld weitere Kraftfelder gewinnt:

(3.7.10) ♦ *Translation:* Befindet sich die felderzeugende Masse nicht im Ursprung, sondern in einem Punkt mit Ortsvektor \vec{a} , Dann wird folgendes Feld erzeugt:

$$\vec{F}_{Grav,\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\alpha}{|\vec{x} - \vec{a}|^2} \frac{\vec{x} - \vec{a}}{|\vec{x} - \vec{a}|}$$

□ Woher kennen Sie diese Konstruktion "ersetze einfach \vec{x} überall durch $(\vec{x} - \vec{a})$ " noch?

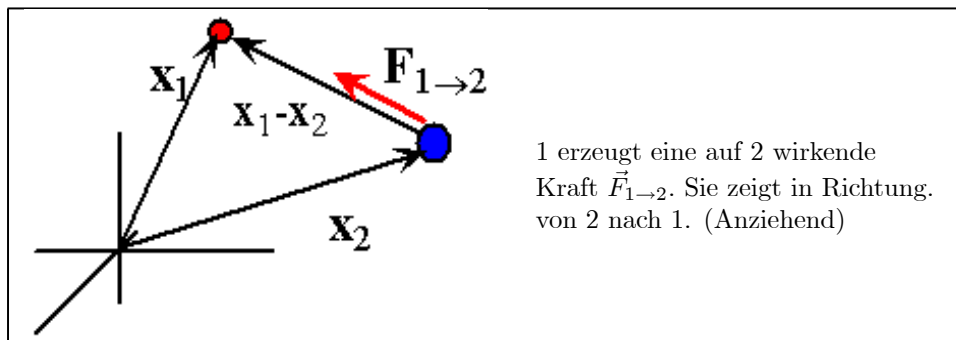
(3.7.11) ♦ Wir haben die Masse M in \vec{a} als felderzeugende Masse interpretiert und gesagt, dass Sie in \vec{x} eine Kraft auf m bewirke. Hat aber auch die in \vec{x} befindliche Masse m eine Kraftwirkung auf M in \vec{a} ? Ja tatsächlich. Und Sie wird auch durch die analog zu bildenden Formel geliefert.

Genauer befindet sich in \vec{x}_1 die Masse M_1 und in \vec{x}_2 die Masse M_2 , dann versüßt letztere eine Kraft $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ und erstere eine Kraft $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. Diese Kräfte werden wie folgt gegeben:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(\vec{x}_2) = -G \frac{M_1 M_2}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \quad \vec{F}_{2 \rightarrow 1}(\vec{x}_2) = -G \frac{M_1 M_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

Da $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ gilt, folgt

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(\vec{x}_2) = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(\vec{x}_2) \quad \text{"actio gleich minus reactio"}$$



(3.7.12) ♦ *Superposition:* Befindet sich eine erste felderzeugende Masse M_1 in \vec{a}_1 und eine zweite M_2 in \vec{a}_2 , dann gilt

$$\vec{F}_{Grav}(\vec{x}) = \frac{\alpha_1}{|\vec{x} - \vec{a}_1|^2} \frac{\vec{x} - \vec{a}_1}{|\vec{x} - \vec{a}_1|} + \frac{\alpha_2}{|\vec{x} - \vec{a}_2|^2} \frac{\vec{x} - \vec{a}_2}{|\vec{x} - \vec{a}_2|} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= GmM_1 \\ \alpha_2 &= GmM_2 \end{aligned}$$

(3.7.13) **Fassen wir zusammen:** Gibt man irgendeine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ vor, dann kann man $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ mathematisch durch Ableiten bestimmen. Andererseits ist $\vec{F}(\vec{x})$ physikalisch gegeben. Man kann beide Seiten der Bewegungsgleichung bilden und inspizieren, ob für alle t gilt $m\vec{a}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$. Ist das der Fall, hat man eine physikalisch zulässige Bewegung vorliegen, ist das nicht der Fall, ist sie physikalisch nicht zulässig und kommt nach aller Erfahrung auch nicht vor! Nie beobachtet man etwa im konstanten Schwerfeld spontan eine Kreisbewegung: Für diese wäre $m\vec{a}(t) = -m\omega^2\vec{r}(t)$ und das ist nicht gleich dem geforderten $m\vec{g}$.

Mit Hilfe der zweiten Interpretation ($\vec{K}(t)$ gegeben) sagt man daher physikalische Bewegungsabläufe im idealisierten System voraus!

In der Regel wird \vec{K} dann in Form eines Kraftfeldes gegeben. Dann wird die Bewegungsgleichung zu einer Differentialgleichung für die physikalischen Bahnkurven $\vec{r}(t)$. In seltenen Fällen kann man die entstehende Gleichung exakt in Formellform lösen. Numerische Näherungslösungen lassen sich mit Hilfe des Computers jedoch einfach bestimmen wie wir noch sehen werden. :