Das mit einer quantitativen Beschreibungsgröße verbundene Begriffssystem

Das Begriffssystem einer quantifizierten Größe

In den vergangenen Jahren traten bei den Kursteilnehmern vielfach eine Reihe sprachbezogener Defizite und Schwächen auf, die den Erfolg der Veranstaltung beträchtlich minderten. Nachfolgend stellen wir eine Reihe wichtiger zugehöriger sprachlicher Begriffsunterscheidungen zusammen.

Wir werden das hier vorgestellte Begriffssystem im Verlauf des Kurses immer wieder verwenden und zeigen, dass mit seiner Hilfe der zu lernende und verstehende Stoff deutlich einfacher und strukturierter wird.

Und die Anwendbarkeit des Systems reicht weit über die Physik hinaus.

---

(1) Für mit der mathematischen Terminologie Vertraute: Die in diesem Teil benutzten Gleichungen wie y=f(x) oder w=w(x) oder s=s(x,y,z) stehen stehen für Zuordnungen, also für x$\longmapsto f(x)$ bzw. x$\longmapsto w(x)$ bzw. (x,y,z)$\longmapsto s(x,y,z)$. Da die zugehörigen mathematischen Abbildungen hier nie benutzt werden, verwenden wir die historisch gewachsenen üblichen Schreibweisen, die vielfach nützlich sind. Vgl Vorkurs Mathematik Kap.7.

---

(2) Sei w eine Zahlgröße oder Vektorgröße, die durch eine zweite Zahlgröße x determiniert, also eindeutig bestimmt wird. Wir schreiben w=w(x). w darf noch vom Wert anderer Größen g abhängen, die dann als äußere Parameter eingehen. Das kann man beispielsweise in der Form w=$\mathrm{w}_g(x)$ angeben. Die jeweilige Situation muss den Wert von g festlegen.

w ist eine **quatifizierte** Göße. Die Gleichung w=$\mathrm{w}_g(x)$ gibt die Quantifizierung an.

Einige Beispiele aus dem Kurs:

- y=sin(x) die quantifizierte y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis abhängig vom Winkel.
- I=I(x) die Lichtstärke abhängig von der Wassertiefe x
- T=T(L) die Schwingungsdauer eines Pendels in Abhängigkeit von der Pendellänge L
- $\vec{r} = \vec{r}(t)$ der Ortsvektor eines sich bewegenden Punktes zur Zeit t
- Ein Skalarfeld s=s(x,y,z). Man ändert beispielsweise nur die y-Koordinate des Aufpunktes und betrachtet die Funktion $\mathrm{f}_{xz} = f_{xz}(y) = s(x,y,z)$ für festes x und z.

---

(3) Jetzt das zugehörige Begriffssystem:

- **Unterscheiden Sie (in einer derartigen Situation) sorgfältig** zwischen
  - dem **Wert** $\mathrm{w}_g(x)$ (der Größe w an der Stelle x).
  - der **Änderung des Wertes**, wenn x von x_1 nach x_2 geht. Bezeichnung

$$\Delta w = w_g(x_2) - w_g(x_1)$$

  - der **mittleren Änderungsrate** des Wertes (von x_1 nach x_2)

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{w_g(x_2) - w_g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

– der $\boxed{\textbf{momentane Änderungsrate}}$ (in x)

$$w_g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{w_g(x + \Delta x) - w_g(x)}{\Delta x}$$

Beachten Sie: In der Regel interessiert man sich sachlich physikalisch für Werte und Beziehungen zwischen Werten, also für w=w(x). **Aber die wichtigen Naturgesetze sind Gesetze für Änderungsraten**. Man muss dann mit Hilfe mathematischer Methoden von den Änderungsraten auf die Systemzustände und die zugehörige interessierende Entwicklung der Beobachtungsgrößen $w_g(x)$ schließen. (Mechanik, Kap.4)

(4) Hat man eine Größe vorliegen, die als "Rate" bezeichnet wird, dann muss man sich überlegen, was für eine Wertgröße $w=w_g(x)$ wohl dazugehört, so dass die betrachtete Rate gleich der Änderungsrate dieser Größe ist. Beispiel sind Bezeichnungen wie "Wachstumsrate" oder "Inflationsrate".

(5) Vielfach versucht man Probleme näherungsweise zu lösen, indem man geeignete mittlere Raten durch eine momentane Rate ersetzt. (Beispiel: Numerische Lösung von Differentialgleichungen. Kap.5)

(6) Manchmal muss man das Begriffsystem sinvoll erweitern. Etwa wenn man einem Skalarfeld s(x,y,z) drei unabhängige Variable vorliegen. Dann kann man zunächst für jede Richtung - insbesondere die drei Koordinatenrichtungen - eine momentane Änderungsrate einführen. Aber muss man diese jeweils einzeln neu bestimmen oder kann man sie alle "auf einen Schlag" gewinnen? Letzteres ist möglich und führt sofort auf den Gradienten (des Skalarfeldes).

---

(7) Zur begrifflichen Erfassung der Größe $w_g(x)$ wird noch ein anderer Quotient gebildet. Hat man einen Referenzwert w_0 dieser Größe, vielfach von irgendwie ausgezeichneter Art, dann bildet man den Quotienten

$$w_{g,rel}(x) = \frac{w_g(x)}{w_0}.$$

Man nennt dann $w_g(x)$ den $\boxed{\textit{absoluten Wert}}$ und $w_{g,rel}(x)$ den $\boxed{\textit{relativen Wert (bezüglich } w_0)}$.

Das ist eine reine Zahl, die angibt wie oft $w_g(x)$ in w_0 enthalten ist. U.U sagt man auch Verhältniswert oder $\boxed{\textit{Quote.}}$ Der relative Wert ist eine reine Zahl, hat keine Einheit. (**Zwischen Quote und Rate besteht daher meist ein beträchtlicher Unterschied**)

Beispiel: Die Flugweite einer Flugparabel in Abhängigkeit vom Abschusswinkel wird durch die folgende Formel gegeben:

$$w = w(\alpha) = \frac{V^2}{g}\sin(2\alpha)$$

V skalare Startgeschw.
g Erdbeschleunigung

Die maximale Flugweite erhält man für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ zu $w_{\max} = \frac{V^2}{g}$. Dann kann man die Relativgöße $\frac{w(\alpha)}{w_{\max}}$ bilden, die angibt welcher Bruchteil der maximal möglichen Weite bei gegebenem Winkel erreicht wird:

$$\frac{w(\alpha)}{w_{\max}} = \sin(2\alpha)$$

$w_{\max}$ ist hier sicher ein "besonders ausgezeichneter Wert".

---

(8) Wird der Wert der Größe über eine Messung erhalten, dann nimmt man noch andere Unterscheidungen vor: $\boxed{\textit{Messwert oder Schätzwert}}$ (für die erhaltenen Werte) und *wahrer Wert (der Größe)*. Der wahre Wert ist in der Regel nicht bekannt. Man arbeitet dann nur mit seiner Bezeichnung. Die Differenz "Messwert - wahrer Wert" wird "(absoluter) Fehler genannt.

Dann arbeitet man gerne mit dem $\boxed{\textit{relativen Fehler}}$ $\frac{Messwert - wahrerWert}{\text{wahrer Wert}}$. Meist ist es besser, dazu die fast gleichwertige vielfach besser zugängliche Größe zu $\frac{Messwert - wahrerWert}{Messwert}$ zu verwenden. (Vgl. Kap.6)

---

(9) Ist die Größe y=f(x) gegeben, dann kommt man mit Hilfe der Ableitungsbildung problemlos zur momentanen Änderungsrate. Die Ableitungsregeln ersetzen den aufwendigen Grenzwertprozess.

In der Realität ist es allerdings meist so, dass y=f(x) gesucht wird. Die Natur liefert uns stattdessen Gesetze für die momentane Änderungsrate von f. Das sind Differentialgleichungen mit deren Hilfe man y=f(x) bestimmen soll. In den Kap. 4 und 5 gehen wir darauf ein. Hier nur ein zusammenfassendes Schema der Situation.